Kapitel 6 Komplexe Zahlen

Rolf Felder

January 18, 2023

1 6.0 Einleitung Komplexe Zahlen
2 6.1 Definition komplexer Zahlen
3 6.2 Grundrechenarten in der Menge der komplexen Zahlen
4 6.3 Gaußsche Zahlenebene
5 6.4 Komplexe Zahlen als Körper
6 6.5 Trigonometrische und Polarform einer komplexen Zahl
7 6.6 Potenzieren einer komplexen Zahl
8 6.7 Wurzelziehen aus einer komplexen Zahl
9 6.8 Implikationen der komplexen Zahlenwelt
10 6.9 Anwendung komplexer Zahlen
11 6.10 Was ist mitzunehmen ?
12 6.11 Verwendete Literatur
13 6.12 Üben und Verstehen - Übungsaufgaben

6.0 Überblick komplexe Zahlen

In einem Einschub werden die Basiskenntnisse zu den komplexen Zahlen

- Definition
- Grundrechenarten
- Gauß'sche Zahlenebene
- Potenzen komplexer Zahlen
- Wurzeln komplexer Zahlen

vermittelt. Das Thema gehört naturgemäß weder zur diskreten Mathematik noch zur Linearen Algebra sondern eher zum Gebiet der Analysis. Die komplexen Zahlen bilden aber eine wichtige Basis für viele Anwendungsgebiete der Mathematik.

6.1 Definition der komplexen Zahlen

Imaginäre Einheit i

$$x^2 + 1 = 0$$

Definition
Als imaginäre Einheit bezeichnet man diejenige (im Reellen nicht vorkommende, daher „imaginäre“) Zahl i, die die Eigenschaft

$$i^2 := -1$$

hat.
Mit anderen Worten: Es ist

$$i := \sqrt{-1}$$

6.1 Definition der komplexen Zahlen

Imaginäre Einheit i

Was ist mit den Wurzeln aus -2, -3 etc?

Sollen wir für jede negative Zahl einen neuen Buchstaben einführen und die Lösung neu benennen? - Nein!

Erste Anwendung der Zahl i:

Berechnung der Wurzel aus jeder negativen Zahl möglich durch

$$\sqrt{-9} = \sqrt{(-1)\cdot 9} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{9} = i\cdot\sqrt{9} = 3i$$

Allgemein gilt:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{(-1)\cdot a} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{a} = i\cdot\sqrt{a}$$

Zahl i ist der Schlüssel zur Einführung eines neuen, über die bekannten reellen Zahlen hinausgehenden Zahlenbereichs:

Menge der Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

6.1 Definition der komplexen Zahlen

Menge der komplexen Zahlen

Definition
Ist i die zuvor definierte komplexe Einheit und sind a und b beliebige reelle Zahlen, so nennt man eine Zahl der Form z = a+ ib eine **komplexe Zahl**.

Jede Zahl, die sich in dieser Form darstellen lässt, ist eine komplexe Zahl und umgekehrt ist jede komplexe Zahl in dieser Form darstellbar.

Die **Menge aller komplexen Zahlen** bezeichnet man mit

$$\mathbb{C} := \{a + i \cdot b \ : \ a, b \in \mathbb{R}, \ i = \sqrt{-1}\}$$

Die Zahl a nennt man den **Realteil**, die Zahl b den **Imaginärteil** der komplexen Zahl z = a + ib.

6.1 Definition der komplexen Zahlen

Menge der komplexen Zahlen

Beispiele für komplexe Zahlen:

$$1 + 2i$$

$$-\sqrt{3} - i$$

$$\pi + \pi i$$

$$i = 0 + 1 \cdot i$$

$$x \in \mathbb{R}, \text{ weil } x = x + 0 \cdot i$$

Also ist jede reelle Zahl auch eine komplexe Zahl.

Die komplexen Zahlen stellen also eine Erweiterung der reellen Zahlen dar (siehe *Zahlenbereiche*).

6.2 Grundrechenarten in der Menge der komplexen Zahlen

Grundrechenarten für komplexe Zahlen

Sind z_1 und z_2 komplexe Zahlen mit
$$z_1 = a_1 + ib_1$$
$$z_2 = a_2 + ib_2$$

Addition
$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\text{Imaginärteil}}$$

Subtraktion
$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\text{Imaginärteil}}$$

Multiplikation
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2) + \underbrace{i^2}_{=-1} b_1 b_2$$
$$= \underbrace{a_1 a_2 - b_1 b_2}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{(b_1 a_2 + a_1 b_2)}_{\text{Imaginärteil}}$$

Division: Komplizierter, siehe nächste Folie

6.2 Grundrechenarten in der Menge der komplexen Zahlen

Komplex-konjugierte Zahl

Definition
Ist $z = a + ib$ eine komplexe Zahl, so heißt $\bar{z} = a - ib$
die zu z **komplex-konjugierte Zahl**.

Um zunächst den Kehrwert der Zahl z zu berechnen, erweitert man den Bruch mit der komplex-konjugierten Zahl und erhält

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

- Nenner $a^2 + b^2$ ist eine positive reelle Zahl (durch diese kann man immer dividieren!)
- Problem gelöst!

Satz
Für eine beliebige komplexe Zahl $z = a + ib \neq 0$ ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2+b^2}$$

6.2 Grundrechenarten in der Menge der komplexen Zahlen

Division von komplexe Zahlen

Wie berechnet man Werte dieser Form? $\frac{z_2}{z_1} = \frac{c + id}{a + ib}$

Satz

Für Quotienten komplexer Zahlen gilt: Sind $z_1 = a + ib \neq 0$ $z_2 = c + id$

so ist

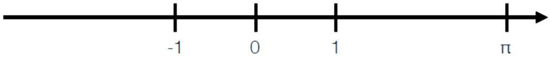
$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{c + id}{a + ib} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{ac + bd + i(ad - bc)}{a^2 + b^2}$$

6.3 Gaußsche Zahlenebene

Gaußsche Zahlenebene

Reelle Zahlen

Jede reelle Zahl hat seinen Platz auf der Zahlengeraden und umgekehrt ist die Zahlengerade die Menge aller reellen Zahlen.



→ Die Zahlengerade ist „voll" mit reellen Zahlen. Hier „passen" keine komplexen Zahlen mehr hin.

Komplexe Zahlen

Lösung: Gaußsche Zahlenebene

Interpretation: Real- und Imaginärteil der jeweiligen komplexen Zahl werden als ihre beiden Koordinaten in der Ebene interpretiert.

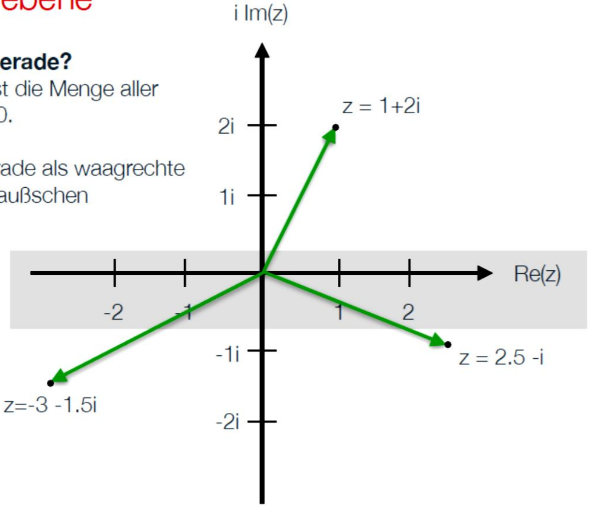
→ Man zeichnet also die Zahl a+ib an der Stelle (a,b) im Koordinatensystem ein.

6.3 Gaußsche Zahlenebene

Gaußsche Zahlenebene

Wo ist die reelle Zahlengerade?
Menge der reellen Zahlen ist die Menge aller komplexen Zahlen mit b = 0.

Also ist die reelle Zahlengerade als waagrechte Koordinatenachse in der Gaußschen Zahlenebene enthalten.



6.3 Gaußsche Zahlenebene

Gaußsche Zahlenebene

Abstand einer komplexen Zahl vom Nullpunkt der Gaußschen Zahlenebene bezeichnet man als ihren Betrag.

Interpretation dieses Abstandes als Betrag (also Länge) des Vektors, der vom Nullpunkt zu dieser Zahl zeigt.

Definition

Der **Betrag** der **komplexen Zahl** $z = a + ib$ ist eine reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Beispiele:

$$|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$|-3 - 4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

6.3 Üben und Verstehen

Aufgabe 1 : Gegeben sind $z_1 = -4i, z_2 = 3 - 2i, z_3 = -1 + i$. Berechnen Sie und stellen Sie folgende Ausdrücke in der Normalform dar

a) $z_1 - 2z_2 + 3z_3$ b) $2z_1 \cdot \overline{z_2}$ c) $\frac{\overline{z_1}}{z_3}$

Aufgabe 2 : Berechnen Sie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen :

a) $z = 4 - 3i$ b) $z = -2 - 6i$ c) $z = -3 + 4i$

6.4 Komplexe Zahlen als Körper identifizieren

Es lässt sich feststellen, dass gilt

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \textbf{ ist ein Körper.}$$

Begründungen :

- $(\mathbb{C}, +)$ ist kommutative Gruppe : Ist klar - insbesondere gilt
  - Definition der Operation $+$:

    $$(a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$$

  - Neutrales Element ist $0 = 0 + 0 \cdot i$
  - Inverses Element zu $z = a + b \cdot i$ ist $-z = -a - b \cdot i$
- $(\mathbb{C}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe : Ist klar - insbesondere gilt
  - Definition der Operation $\cdot$:

    $$(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$$

  - Neutrales Element ist $1 = 1 + 0 \cdot i$
  - Inverses Element zu $z = a + b \cdot i$ ist $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$
- Distributivgesetz gilt : $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$, wie man durch Nachrechnen sofort bestätigt.

6.5 Trigonometrische und Polar-Form einer komplexen Zahl

In der bisherigen Betrachtung bezogen auf die Grundrechenarten zeigen komplexe Zahlen keine 'bahnbrechenden' Besonderheiten. Das ist anders, wenn wir uns nun ansehen, wie man

- komplexe Zahlen potenzieren kann **und**
- Wurzeln aus komplexen Zahlen zieht.

Bei der Berechnung von Wurzeln komplexer Zahlen kommt im Vergleich zu den bisher kennengelernten eher 'mechanischen' Rechenregeln für komplexe Zahlen ein wirklich neuer Aspekt ins Spiel. Es wird herauskommen, dass eine komplexe Zahl in der Tat exakt n n-te Wurzeln besitzt. Das ist wirklich erstaunlich, wenn man in Betracht zieht, dass z.B. 64 als reelle Zahl betrachtet gerade mal zwei 6-te Wurzeln, nämlich $+2$ und -2 besitzt.

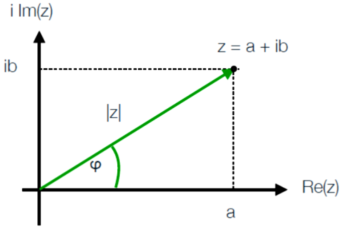
6.5 Trigonometrische und Polar-Form einer komplexen Zahl

Gaußsche Zahlenebene - Winkel

Wie berechnet man den Winkel, den eine komplexe Zahl (bzw. deren Vektor) mit der positiven Achse einschließt?

Definition
Der Winkel φ , den eine komplexe Zahl z = a + ib mit der positiven reellen Achse einschließt, ist wie folgt zu berechnen:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a > 0 \text{ , b} \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 180^{\circ} & \text{für } a < 0 \text{ , b beliebig} \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 360^{\circ} & \text{für a} > 0 \text{ ,} b < 0 \\ 90^{\circ} & \text{für } a = 0, b > 0 \\ 270^{\circ} & \text{für } a = 0, b < 0 \end{cases}$$



Bei Berechnungen im Bogenmaß ist statt dem Gradwert 180° der Wert π zu verwenden.

6.5 Trigonometrische und Polar-Form einer komplexen Zahl

Gaußsche Zahlenebene - Winkel

Anmerkung:

- Für a=0 und b=0 ist der Wert für den Winkel unbestimmt.

Beispiele für den Winkel komplexer Zahlen:

- $z = 2 + 3i$

  $\varphi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = 56.3^\circ$ **= 0,983 (Bogenmaß)**

- $z = -3 - 2i$

  $\varphi = \arctan\left(\frac{-2}{-3}\right)$ **+ 180 ° = 213,7°**

  = 3,73 (Bogenmaß)

Tipp:
Taschenrechner-Einstellungen (Grad, Bogenmaß) mit diesen Werten testen.

Anmerkung:
Es gilt $\pi = 180°$

6.5 Trigonometrische und Polar-Form einer komplexen Zahl

Polarform und trigonometrische Form komplexer Zahlen

Über den Betrag und den Winkel einer komplexen Zahl kann diese in der **Polarform** und in der **trigonometrischen Form** dargestellt werden.

Definitionen

Es sind $|z|$ der Betrag von z und φ der berechnete Winkel.

- Als **Polarform** der komplexen Zahl z bezeichnet man die Darstellung

$$z := |z| \cdot e^{i\varphi}$$

- Als **trigonometrische Form** der komplexen Zahl z bezeichnet man die Darstellung

$$z := |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

Die Form $z = a + ib$ nennt man die **Normalform** einer komplexen Zahl.

6.5 Trigonometrische und Polar-Form einer komplexen Zahl

Die Darstellungsformen können ineinander überführt werden - hierzu gibt es die folgenden Vorgehensweisen

1. Polarform $\leftrightarrow$ Trigonometrische Form : Die Umformung ist trivial, da gilt $e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$
2. Trigonometrische Form $\rightarrow$ Normalform : Gegeben sei also $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$; setze dann $a = |z| \cdot \cos(\varphi)$ und $b = |z| \cdot \sin(\varphi)$. Dann gilt $z = a + i \cdot b$.
3. Normalform $\rightarrow$ Trigonometrische Form : Gegeben sei also $z = a + i \cdot b$; dann gilt zunächst $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Bestimme φ mittels der Regel aus der Folie 'Gaußsche Zahlenebene und Winkel'. Dann gilt $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

Beispiele :

- Normalform $z = 2 + 3 \cdot i$ (I.Q.) lautet in der trigonometrischen Form $z = \sqrt{13} \cdot (\cos(56.31^\circ) + i \cdot \sin(56.31^\circ))$
- Normalform $z = -2 + 3 \cdot i$ (II.Q.) lautet in der trigonometrischen Form $z = \sqrt{13} \cdot (\cos(123.69^\circ) + i \cdot \sin(123.69^\circ))$
- Normalform $z = -2 - 3 \cdot i$ (III.Q.) lautet in der trigonometrischen Form $z = \sqrt{13} \cdot (\cos(236,31^\circ) + i \cdot \sin(236,31^\circ))$
- Normalform $z = 2 - 3 \cdot i$ (IV.Q.) lautet in der trigonometrischen Form $z = \sqrt{13} \cdot (\cos(303,69^\circ) + i \cdot \sin(303,69^\circ))$

Übung : Bestimmen Sie Polarform, trigonometrische Form zu

$$\textbf{(i)}\ z_1 = 3 - i \ \textbf{(ii)}\ z_2 = -6 + 8i \ \textbf{(iii)} z_3 = -2 - 6i.$$

6.6 Potenzieren einer komplexen Zahl

Potenzen komplexer Zahlen

Wie berechnet man beispielsweise $(3 + 7i)^5$?

- Potenz für Potenz ausmultiplizieren
- Oder eleganter über die Polarform bzw. trigonometrische Form

$$z^n := |z|^n \cdot e^{in\varphi} = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Man potenziert also eine komplexe Zahl, indem man ihren Betrag potenziert und ihren Winkel mit n multipliziert.

Beispiel : Zu berechnen ist $(2+3i)^{10}$ - hierfür berechne mit $z = 2+3i$:

1. $|z| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$
2. $\varphi = \arctan\frac{3}{2} \approx 56.31^\circ$
3. $z^{10} = \sqrt{13}^{10} \cdot (\cos(10 \cdot 56.31^\circ) + i \cdot \sin(10 \cdot 56.31^\circ)) =$
   $371293 \cdot (-0.9198 - 0.3923 \cdot i) = -341523.2832 - 145672.025 \cdot i$

Direkte Berechnung auf dem TR ergibt $z^{10} = -341525 - 145668 \cdot i$. Abweichungen zwischen den Ergebnissen liegen in den vorgenommenen Rundungen begründet.

Übung : Was ergibt $(-6+8i)^4$?

6.7 Wurzelziehen aus einer komplexen Zahl

Wurzel aus einer komplexen Zahlen :

Ist n irgendeine natürliche Zahl und z irgendeine von 0 verschiedene komplexe Zahl, dann gibt es genau n verschiedene n-te Wurzeln aus z.

Satz

Es sei z eine beliebige komplexe Zahl ungleich 0 in der Polarform $z := |z| \cdot e^{i\varphi}$ und n eine beliebige natürliche Zahl.

Es gibt genau n n-te Wurzeln aus z, die nun mit a_0, a_1, …, a_{n-1} bezeichnet werden.

Diese Wurzeln berechnet man wie folgt:

$$a_k := \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\exp\left[i \cdot \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right]\right) \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Beispiel : Zu berechnen ist $\sqrt[3]{-1+i}$. Führe hierzu aus mit $z = -1 + i$:

1. $|z| = \sqrt{2}$ sowie $\varphi = \pi + \arctan \frac{1}{-1} = \frac{3}{4}\pi$
2. Die 3 dritten Wurzeln lauten

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\frac{3}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} = \sqrt[6]{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}) \\ a_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\frac{3}{4}\pi + 1 \cdot 2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{11}{12}\pi} = \sqrt[6]{2} \cdot (\cos \frac{11}{12}\pi + i \cdot \sin \frac{11}{12}\pi) \\ a_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\frac{3}{4}\pi + 2 \cdot 2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \frac{19}{12}\pi} = \sqrt[6]{2} \cdot (\cos \frac{19}{12}\pi + i \cdot \sin \frac{19}{12}\pi) \end{array} \right\}$$

Übung : Bestimmen Sie alle 4. Wurzeln aus der reellen Zahl **625**.

6.8 Implikationen der komplexen Zahlenwelt

Definition : Ein Polynom p(x) vom Grad deg(p)>1 heißt irreduzibel über K, falls es kein Polynom q(x) mit 0 < deg(q) < deg(p) gibt, das p(x) teilt; andernfalls nennt man das Polynom reduzibel (K sei $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

Satz - Fundamentalsatz der Algebra : Jedes Polynom p(x) $\in \mathbb{C}[x]$ vom Grad n hat genau n komplexe Wurzeln $x_i, i \in \{1, .., n\}$ und genügt der Darstellung $p(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot .... \cdot (x - x_n)$. Das bedeutet, dass in $\mathbb{C}[x]$ nur Polynome vom Grad 1 irreduzibel sind.

Satz - komplex-konjugierte Wurzeln in reellen Polynomen : In einem reellen Polynom p(x) (d.h. p(x) $\in \mathbb{R}[x]$) treten komplexe Wurzeln stets als komplex-konjugierte Paare auf. Hieraus ergeben sich folgende Tatsachen

1. Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle und damit mindestens einen reellen Teiler vom Grad 1.
2. In $\mathbb{R}[x]$ können irreduzible Polynome maximal den Grad 2 haben.

6.9 Anwendung komplexer Zahlen

Mandelbrotmenge

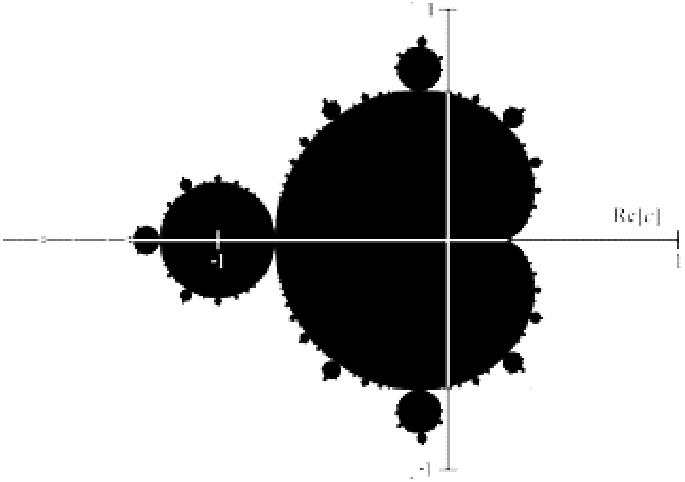
Definiere folgenden Algorithmus :

- **1. Schritt :** Definiere die Funktion $f_c(z) = z^2 + c, z, c \in \mathbb{C}$
- **2. Schritt :** Betrachte für festes $c \in \mathbb{C}$ die Iteration $z_{n+1} = f_c(z_n), z_0 = 0$
- **3. Schritt :** Iteriere und prüfe für N=50, A=1000
  - $|z_n| < A \ \forall n \leq N \Rightarrow$ Folge z_n wird nicht divergent genannt.
  - Andernfalls $\exists n \leq N$ mit
    $|z_n| > A \Rightarrow$ Folge z_n wird divergent genannt.

Das Apfelmännchen entsteht nun auf folgendem Wege

- Man wähle einen Ausschnitt aus der komplexen Zahlenebene
- Führe die oben definierte Iteration für alle c aus dem gewählten Ausschnitt durch
- Der Punkt c der Gaußschen Zahlenebene wird schwarz gekennzeichnet bei Nicht-Divergenz
- Der Punkt c der Gaußschen Zahlenebene wird nicht gekennzeichnet bei Divergenz

6.9 Anwendung komplexer Zahlen



6.9 Anwendung komplexer Zahlen

Funktionsgraph von $f(z)=(z^2-1)(z-2-i)^2/(z^2+2+2i)$ in Polarkoordinaten.
Der Farbton gibt den Winkel an, die Helligkeit den Betrag der komplexen Zahl.

6.10 Was ist mitzunehmen ?

- Definition einer komplexen Zahl und ihre Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene können
- Rechnen mit komplexen Zahlen (Grundrechenarten Addieren/Subtrahieren, Multiplizieren/Dividieren) können
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ von seiner algebraischen Struktur als Körper verstehen.
- Darstellungsarten einer komplexen Zahl kennen
- Komplexe Zahlen zwischen den drei Darstellungsarten umrechnen können
- Potenzen komplexer Zahlen berechnen können
- Wurzeln komplexer Zahlen berechnen können

6.11 Verwendete Literatur

Teschl, Mathematik für Informatiker, Seiten 44-46

Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1, 14. Auflage, Abschnitt VII, Kapitel 1 und 2

Herbert Zeitler, Wolfgang Neidhardt, Fraktale und Chaos, Kapitel IV

6.12 Üben und Verstehen - Übungsaufgaben

Zum Üben und Verstehen - Übungsblatt 6 - Aufgaben 1 - 4