Kapitel 9.1 Lineare Algebra - Matrizen-Theorie

Rolf Felder

February 5, 2023

9.1.1 Definition und Grundoperationen von Matrizen

Beispiele :

$$\begin{pmatrix} 36 & 72 \\ 31 & 96 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_{4\times 2}(\mathbb{R}),$$

$$\begin{pmatrix} 36 & 72 & 425 & \pi \end{pmatrix} \in M_{1\times 4}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

Allgemein ist eine Matrix A $\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ eine rechteckige Anordnung von reellen Zahlen mit **m Zeilen** und **n Spalten**.

9.1.1 Definition und Grundoperationen von Matrizen

Rechenoperationen auf der Menge $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

Addition : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

Nullelement : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Inverses Element : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Es gelten das Assoziativitäts- und Kommutationsgesetz bezgl. der Matrizenaddition.

Skalare Multiplikation : Seien $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 3\lambda \\ 4\lambda & 5\lambda & 6\lambda \end{pmatrix}$$

Analog gelten für $A, B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda B$$
$$(\lambda + \kappa) \cdot A = \lambda \cdot A + \kappa \cdot A$$
$$\lambda \cdot (\kappa \cdot A) = (\lambda \cdot \kappa) \cdot A$$

9.1.1 Definition und Grundoperationen von Matrizen

Erkenntnis : Die Menge der Matrizen mit **m Zeilen und n Spalten**$=M_{m\times n}(\mathbb{R})$ bildet zusammen mit den Operationen **Matrizenaddition** und der **skalaren Multiplikation** einer Matrix mit einer reellen Zahl einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Vereinbarung / Konvention :

Liegt eine Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ vor, so bezeichnet a_{ij} das Matrix-Element

- in der **i-ten Zeile** u n d
- in der **j-ten Spalte**.

9.1.2 Multiplikation Matrix × Matrix

Matrixmultiplikation

Wann können wir A und B multiplizieren?
Wie sieht das Produkt AB aus?

Die beiden Matrizen aus dem Beispiel (jeweils 3 x 2) zuvor können wir nicht miteinander multiplizieren!
Damit wir zwei Matrizen miteinander multiplizieren können, müssen sie folgende Bedingung erfüllen:

$$\begin{pmatrix} * & & & & \\ * & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & a_{i5} \\ * & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & b_{1j} & * & * & * \\ * & * & b_{2j} & * & * & * \\ * & * & b_{3j} & * & * & * \\ * & * & b_{4j} & * & * & * \\ * & * & b_{5j} & * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & (A \cdot B)_{ij} & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

A ist 4x5 B ist 5x6 AB ist 4x6

Das Produkt AB existiert, falls die **Anzahl Spalten von A** der **Anzahl der Zeilen von B** entspricht.

Das Matrixelement $(A \cdot B)_{ij}$ **ist das 'Skalarprodukt' zwischen der i-ten Zeile von A und der j-ten Spalte von B (jeweils als Vektor betrachtet),** d.h.

$$(AB)_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + a_{i4} \cdot b_{4j} + a_{i5} \cdot b_{5j}.$$

9.1.2 Multiplikation Matrix × Matrix

Matrixmultiplikation

A ist eine m x n-Matrix und B ist eine n x p Matrix. Dann können wir A mit B multiplizieren.
Das **Produkt** ist dann eine m x p-Matrix

$$\begin{pmatrix} m \text{ Zeilen} \\ n \text{ Spalten} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \text{ Zeilen} \\ p \text{ Spalten} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \text{ Zeilen} \\ p \text{ Spalten} \end{pmatrix}$$

Extremfall:
„Zeile mal Spalte" (1 x n-Matrix mal n x 1-Matrix) ergibt eine 1 x 1-Matrix. Dies ist gerade das Skalarprodukt.

→ Wir multiplizieren zwei Matrizen, in dem wir alle Skalarprodukte „Zeile mal Spalte" berechnen.

Der Eintrag in Zeile i und Spalte j von AB ist
(Zeile i von A) · (Spalte j von B).

Quadratische Matrizen lassen sich nur dann miteinander multiplizieren, wenn sie dieselbe Größe haben.

9.1.2 Multiplikation Matrix $\times$ Matrix

Beispiele :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 24 & 30 \\ 30 & 45 & 60 & 75 \end{pmatrix}, \; [(2 \times 3) \cdot (3 \times 4) = (2 \times 4)]$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}, \; [(2 \times 1) \cdot (1 \times 3) = (2 \times 3)]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (27), \; [(1 \times 3) \cdot (3 \times 1) = (1 \times 1)] \text{ (Skalarprodukt !!)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 6 & 12 & 18 & 24 \end{pmatrix}, \; [(3 \times 1) \cdot (1 \times 4) = (3 \times 4)]$$

9.1.2 Multiplikation Matrix $\times$ Matrix

Es gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten bezgl. der Matrixmultiplikation

- $A \cdot B \neq B \cdot A$ (gilt i.a. - damit nicht kommutativ)
- $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ (linksseitig distributiv)
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (rechtsseitig distributiv)
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (assoziativ)

Für quadratische Matrizen ($n \times n$) gelten folgende Potenzgesetze :

- $A^p = A \cdot A \cdot .... \cdot A$ (insgesamt p mal)
- $(A^p) \cdot (A^q) = A^{(p+q)}$
- $(A^p)^q = A^{p \cdot q}$

Auf der Menge der quadratischen $n \times n-$Matrizen gibt es die sog. Einheitsmatrix I_n, deren Diagonale nur aus 1-en besteht und deren restliche Elemente sämtlich den Wert 0 haben. Es gilt für alle Matrizen $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.

Damit gilt auf der Menge $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ bezgl. der Matrizenmultiplikationen zwar nicht das Kommutativgesetz aber (immerhin) das Assoziativgesetz und es gibt ein neutrales Element, die Einheitsmatrix I_n. Für die Gruppeneigenschaft von $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), \cdot)$ fehlen (nur) noch die inversen Elemente. Folgende Definition sei an dieser Stelle aus dem Kapitel 9.1.5 vorweggenommen :

Definition : Eine Matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ gibt, so dass gilt $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. In dem Fall bezeichnet man die Matrix B mit A^{-1} und nennt diese Matrix die **inverse Matrix** bzw. die **Inverse** zur Matrix A.

9.1.2 Multiplikation Matrix × Matrix - Üben und Verstehen

Übung 1 :

1. Zeigen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: $A \cdot B \neq B \cdot A$
2. Finden Sie zwei $2 \times 2-$Matrizen A, B, so dass gilt : $A \cdot B = B \cdot A$.

Übung 2 : A, B seien zwei beliebige Matrizen $\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Sind folgende Gleichungen allgemeingültig ?

1. $A^2 + 3A = A \cdot (A + 3 \cdot I)$
2. $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

Übung 3 : Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Nennen Sie alle Matrizenprodukte mit 2 Faktoren, die möglich sind, ohne diese zu berechnen

2) Berechnen Sie, sofern das möglich ist : a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$, c) $B \cdot C$, d) $D \cdot C$

Übung 4 : Schreiben Sie das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 - x_4 &= 4 \\ 5x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_4 &= 7 \end{aligned}$$

in der Form $A \cdot x = b$.

9.1.3 Matrizen für elementare Zeilenumformungen

Die im Rahmen des Gauss'schen Eliminationsverfahrens kennengelernten und zur Vereinfachung durchgeführten elementaren Zeilen-Operationen

- Zeilentausch
- Vervielfachung einer Zeile
- Addition / Subtraktion des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

werden in die Welt der Matrizen abgebildet. Das baut auf der für ein lineares Gleichungssystem erkannten Struktur (s. Übung 4, Seite 10)

$$A \cdot x = b$$

auf und betont den Stellenwert einer Matrix als wesentliches Strukturelement der linearen Algebra.

9.1.3 - Matrix für Zeilentausch - Permutationsmatrizen

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

Wie lautet die Matrix P_{13}, mit der A von links multipliziert werden muss, um die Zeilen 1 und 3 von A zu vertauschen ?

Vorschlag : Wähle $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Denn es gilt

$$P_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Frage 1 : Wie lautet die Matrix, die in der Matrix A die Zeilen 3 und 4 vertauscht ?

Frage 2 : Wie lautet die Matrix, die die Zeilen 2 und 3 vertauscht ?

9.1.3 - Matrix für Zeilentausch - Permutationsmatrizen

Die zu verändernde Matrix A muss nicht quadratisch sein. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

Die Matrix P_{13}, mit der A von links multipliziert werden muss, um die Zeilen 1 und 3 von A zu vertauschen ?

Vorschlag : Wähle $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Denn es gilt

$$P_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Die zu verändernde Matrix kann auch ein Vektor sein. Die Zeilen 1 und 2 eines Vektors $\in \mathbb{R}^3$ sollen getauscht werden. Die zugehörige Zeilentausch-Matrix lautet

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denn es gilt mit dem Beispiel-Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

9.1.3 - Matrix für Zeilentausch - Permutationsmatrizen

Bezeichnung : Eine **Zeilentausch-Matrix** wird auch als **Permutationsmatrix** bezeichnet.

Zusammenfassung :

Die **Permutationsmatrix** $P_{ij} \in M_{m \times m}(K)$, die bei Linksmultiplikation mit einer Matrix $A \in M_{m \times n}(K)$ bewirkt, dass die Zeilen i und j von A vertauscht werden, ist folgendermassen besetzt :

1. $p_{kk} = 1$ für alle k ausser k=i und k=j
2. $p_{ij} = p_{ji} = 1$
3. alle sonstigen Matrixelemente haben den Wert 0

Weiter gilt

1. eine Permutationsmatrix ist immer eine quadratische Matrix
2. eine Permutationsmatrix ist immer invertierbar. Die Inverse einer Permutationsmatrix ist die Permutationsmatrix selbst d.h. es gilt $P_{ij} \cdot P_{ij} = I$.
3. eine Permutationsmatrix ist weder eine obere noch eine untere Dreiecksmatrix

9.1.3 - Matrix für Elimination - Eliminationsmatrizen

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

Wie lautet die Matrix E_{13}, mit der A von links multipliziert werden muss, um das 2-fache der Zeile 1 zu Zeile 3 von A zu addieren ?

Vorschlag : Wähle $E_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Denn es gilt

$$E_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 11 & 14 & 17 & 20 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Frage 1 : Wie ist die Eliminationsmatrix zu wählen, um in der Matrix A von der Zeile 1 das 3-fache von Zeile 4 abzuziehen ?

Frage 2 : Wie ist die Eliminationsmatrix zun wählen,um in der Matrix A zum 2-fachen der Zeile 2 die Zeile 3 zu addieren ?

9.1.3 - Matrix für Elimination - Eliminationsmatrizen

Die zu verändernde Matrix A muss nicht quadratisch sein. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

Wie lautet die Matrix E_{12}, mit der A von links multipliziert werden muss, um von der Zeile 2 das 7-fache der Zeile 1 abzuziehen ?

Vorschlag : Wähle $E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Denn es gilt

$$E_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -24 & -30 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

Die zu verändernde Matrix kann auch ein Vektor sein. Von Zeile 2 eines Vektors $\in \mathbb{R}^3$ soll das 2-fache der Zeile 1 abgezogen werden. Die Eliminationsmatrix hierzu lautet

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denn es gilt mit dem Beispielvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

9.1.3 - Matrix für Elimination - Eliminationsmatrizen

Zusammenfassung :

Die **Eliminationsmatrix** $E_{ij} \in M_{m \times m}(K)$, die bei Linksmultiplikation mit einer Matrix $A \in M_{m \times n}(K)$ bewirkt, dass das r-fache der Zeile i zur Zeile j von A addiert wird, ist folgendermassen besetzt :

- $e_{kk} = 1$ für alle $k \in \{1, 2, ..., m\}$
- $e_{ji} = r$
- alle sonstigen Matrixelemente haben den Wert 0

Weiter gilt

- eine Eliminationsmatrix ist immer eine quadratische Matrix
- eine Eliminationsmatrix ist immer invertierbar. **Beispiel :** Die Inverse der

$$\text{Eliminationsmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist die Matrix } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung : Eine Eliminationsmatrix ist eine untere Dreiecksmatrix, wenn $i < j$ gilt. Andernfalls ist sie eine obere Dreiecksmatrix.

9.1.3 - Matrix für Zeilenvervielfachung-Multipl.matrizen

Der letzte behandelte Typ einer Veränderungsmatrix ist die **Multiplikationsmatrix** $M_i \in M_{m\times m}(K)$, die bei Linksmultiplikation mit einer Matrix $A \in M_{m\times n}(K)$ bewirkt, dass eine Zeile i durch ihr r-faches ersetzt wird. Diese Matrix M_i ist folgendermassen besetzt :

- $m_{kk} = 1$ für alle $k \in \{1, 2, ..., m\} - \{i\}$
- $m_{ii} = r$
- alle sonstigen Matrixelemente haben den Wert 0

Es gilt

- eine Multiplikationsmatrix ist immer eine quadratische Matrix
- eine Multiplikationsmatrix ist immer invertierbar.

Beispiel : Die Inverse der

Multiplikationsmatrix $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & r & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

9.1.3 - Elementare Zeilenumformungen mit Matrizen - Invarianz der Lösungsmenge eines LGS

Offener Punkt : Wir haben uns bisher darsuf verlassen, dass elementare Zeilenoperationen angewendet auf ein lineares Gleichungssystem die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems nicht verändern.

Begründung / Legitimation hierfür : Die Überführung eines Gleichungssystems in die obere Dreiecks- bzw. Trapezform erfolgt in der Matrizensprache ausgedrückt durch Linksmultiplikation mit P-E-M-Matrizen.

Es gilt also etwa (beispielhaft) : $P \cdot M \cdot E \cdot A = U$ (U wie 'upper' - obere $\triangle-$matrix)

Diese von links an A heranmultiplizierten Matrizen sind sämtlich invertierbar, woraus sich nun schliessen läßt, dass die Durchführung elementarer Zeilenoperationen die Lösungsmenge eines Linearen Gleichungssystems nicht verändert.

Es gilt nämlich :

$$A \cdot x = b \Longleftrightarrow P \cdot M \cdot E \cdot A \cdot x = P \cdot M \cdot E \cdot b \Longleftrightarrow U \cdot x = P \cdot M \cdot E \cdot b$$

Am Beginn der Schlußkette steht das ursprünglich vorgegebene Lineare Gleichungssystem, am Ende der Schlusskette steht als Resultat der durchgeführten elementaren Zeilenoperationen - d.h. das Ergebnis der Vorwärtselimination des Gauß'schen Eliminationsverfahrens - das Lineare Gleichungssystem mit einer Koeffizientenmatrix in oberer Dreiecks- bzw. Trapezform.

9.1.4 Transposition von Matrizen

Definition (Transponierte Matrix)
Ist Matrix A wie folgt gegeben, dann gilt für Transponierte Matrix A^T:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Aus der Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})/M_{m\times n}(\mathbb{C})$ entsteht die zu A transponierte Matrix A^T, indem die komplette i-te Zeile (von links nach rechts) von A in die komplette i-te Spalte (von oben nach unten) von A^T überführt wird.

Es entsteht die zu A adjungierte Matrix $A^H = \overline{A}^T$, wenn in A^T zusätzlich jedes Element komplex konjugiert wird. Falls A eine quadr. Matrix $\in M_{n\times n}(\mathbb{R})/M_{n\times n}(\mathbb{C})$ darstellt, sind folgende Spezialfälle zu betrachten :

Definition : Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ wird **symmetrisch** genannt, wenn gilt $A^T = A$, was gleichbedeutend ist mit der Bedingung $a_{ji} = a_{ij}\ \forall i,j \in \{1,2,...,n\}$.
Definition : Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ wird **schiefsymmetrisch** genannt, wenn gilt $A^T = -A$, was gleichbedeutend ist mit der Bedingung $a_{ji} = -a_{ij}\ \forall i,j \in \{1,2,...,n\}$.
Definition : Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ wird **hermitesch** genannt, wenn gilt $A = A^H := \overline{A}^T$, was gleichbed. ist mit der Bedingung $a_{ji} = \overline{a_{ij}}\ \forall i,j \in \{1,2,...,n\}$.

Anmerkung : Für das Standardskalarprodukt $u \cdot v =: (u,v)$im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ gilt mit $u,v \in \mathbb{R}^n$ (s. Seite 17, Kapitel 7) bzw. im komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ gilt mit $u,v \in \mathbb{C}^n$ (s. Seite 27, Kapitel 7) ausgedrückt in Matrixschreibweise

$$(u,v) = u^T \cdot v \text{ bzw. } < u,v >= u^T \cdot \overline{v}.$$

9.1.4 Transposition von Matrizen

Es gelten folgende Rechengesetze

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
3. $(A \cdot x)^T \cdot y = (x^T \cdot A^T) \cdot y = x^T \cdot (A^T \cdot y)$. **Beispiel :** So gilt

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 42 \text{ einerseits}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix},$$

was auch den Wert 42 ergibt, andererseits.

4. Mit einer gegebenen **symmetrischen** Matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ gilt mit dem Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ mit $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$(A \cdot u, v) = (A \cdot u)^T \cdot v = (u^T \cdot A^T) \cdot v = u^T \cdot (A \cdot v) = (u, A \cdot v).$$

5. Mit einer gegebenen **hermiteschen** Matrix A gilt mit dem semilinearen Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$ mit $u, v \in \mathbb{C}^n$

$$< A \cdot u, v >= (A \cdot u)^T \cdot \overline{v} = (u^T \cdot A^T) \cdot \overline{v} = u^T \cdot (\overline{A} \cdot \overline{v}) = u^T \cdot (\overline{A \cdot v}) =< u, A \cdot v > .$$

Man nennt eine Matrix A mit den Eigenschaften 4, 5 auch **selbstadjungiert** bezgl. des jeweils betrachteten Skalarproduktes.

9.1.4 Transposition von Matrizen - Üben und Verstehen

Übung 1 : Transponieren Sie die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Übung 2 : Welche der folgenden Matrizen sind symmetrisch, welche schiefsymmetrisch ? Jede der Matrizen hat eine der beiden Eigenschaften.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ -4 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -1 \\ -b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Übung 3 : Welches notwendige Merkmal besitzt jede schiefsymmetrische Matrix? Gibt es eine Matrix, die sowohl symmetrisch als auch schiefsymmetrisch ist ? Welches notwendige Merkmal besitzt eine hermitesche Matrix ?

Übung 4 : Wie müssen in der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \cdot i \\ -i & 0 & 1 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

a, b, c gewählt werden, damit A eine **hermitesche** Matrix darstellt.

9.1.5 - Inversion von quadratischen Matrizen

Inverse Matrix

Es sei nun A eine quadratische Matrix

Wir suchen eine Matrix A^{-1} von gleicher Größe, so dass A^{-1} mal A gleich der Einheitsmatrix I ist.

→ Was A „bewirkt", macht A^{-1} rückgängig.

Es kann passieren, dass die inverse Matrix jedoch nicht existiert.

Gleichung A**x** = **b** multipliziert mit A^{-1} ergibt:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \leftrightarrow x = A^{-1}b$$

Matrix A^{-1} heißt „die Inverse zu A".

9.1.5 - Inversion von quadratischen Matrizen

Inverse Matrix

Nicht alle Matrizen haben eine Inverse.

Definition (Invertierbarkeit)
Eine quadratische Matrix A heißt invertierbar, wenn es eine Matrix A^{-1} gibt, so dass

$$A^{-1} A = I \quad \text{und} \quad A A^{-1} = I$$

mit Einheitsmatrix I.

9.1.5 - Inversion von quadratischen Matrizen

Bemerkungen zu inversen Matrizen

1. Eine Matrix A kann **keine zwei Inversen** haben.
2. Ist A invertierbar, so ist die einzige Lösung der Gleichung A**x** = **b** durch **x** = A^{-1}**b** gegeben.

3. Angenommen es gibt eine **von Null verschiedenen** Vektor **x** mit A**x** = **0**.
   Dann kann A **keine Inverse** besitzen!
   - Denn keine Matrix kann den Nullvektor **0** wieder in **x** überführen.
   - Ist folglich A invertierbar, so ist die einzige Lösung von A**x** = **0** der Nullvektor **x** = **0**.

4. Eine 2 × 2-Matrix **ist invertierbar** genau dann, wenn ad -bc ≠ 0 gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

5. Eine **Diagonalmatrix ist invertierbar**, wenn **keines der Diagonalelemente Null** ist.

$$\text{Für } A = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \text{ gilt } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

9.1.5 - Inversion von quadratischen Matrizen

Inverse eines Produkts

Das Produkt AB hat immer dann eine Inverse, wenn beide Faktoren A und B invertierbar (und quadratisch von derselben Größe sind.

Sind A und B invertierbar, dann ist auch ihr **Produkt** AB invertierbar.
Die Inverse von AB ist

$$(AB)^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}$$

Satz : Die Menge der invertierbaren Matrizen $\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ bildet mit der Operation 'Matrizenmultiplikation' eine Gruppe. Diese Gruppe ist allerdings nicht kommutativ.

Satz : Wenn $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine inverse Matrix besitzt, so besitzt auch A^T eine Inverse und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis : Es gilt

$$A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I \text{ und } (A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I,$$

was den Satz beweist.

9.1.5 - Inversion von quadratischen Matrizen

Berechnung der inversen Matrix A^{-1} mittels Gauß-Jordan-Elimination :

Das Eliminationsverfahren berechnet aus der Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ die Lösung $\mathbf{x}$ direkt.
Es ermöglicht uns gleichzeitig die Bestimmung von A^{-1}.

Vorgehen:
Wir lösen die Gleichung $AA^{-1} = I$ spaltenweise.
- Produkt von A mit der ersten Spalte von A^{-1} (wir nennen sie $\mathbf{x}_1$) soll die erste Spalte von I ergeben:

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$$

- Genauso funktioniert es mit den anderen Spalten von A^{-1} ...

Beispiel für $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$:

Es ergibt sich

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot (x_1 \ x_2 \ x_3) = (A \cdot x_1 \ A \cdot x_2 \ A \cdot x_3) = (e_1 \ e_2 \ e_3)$$

Um eine 3 x 3-Matrix zu invertieren, müssen wir nun 3 Gleichungen lösen:

$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$

$A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$ Vektoren x_1, x_2 und x_3 sind dann die Spalten von A^{-1}.

$A\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3$

Das Verfahren zur Bestimmung von A^{-1} mittels Gauß-Jordan-Verfahren besteht nun darin, simultan 3 Lineare Gleichungssysteme zu lösen.

9.1.5 - Inversion von quadratischen Matrizen

Während beim Gauß'schen Eliminationsverfahren mittels elementarer Zeilenumformungen eine vorgegebene Matrix in eine obere Dreiecks- oder Trapezform transformiert wird, transformiert die Gauß-Jordan-Elimination die Matrix in Diagonalform, so dass auf der Diagonalen ausschliesslich 1-en stehen.

Anmerkung 1 : Die Überführung einer Matrix in die Diagonalform ist nicht für jede Matrix möglich. Notwendiges und hinreichendes Kriterium hierfür ist, dass die Matrix invertierbar ist (Begründung kommt in Kapitel 11).

Anmerkung 2 : Man kann zeigen, dass eine invertierbare quadratische Matrix sich allein mittels Zeilenumformungen vom Typ 'Elimination' auf Diagonalform transfomieren läßt - d.h. man braucht hierfür insbesondere keine Zeilenvertauschungen (Begründung kommt in Kapitel 11).

9.1.5 - Inversion von quadratischen Matrizen

Ein Beispiel einer $2 \times 2-$Matrix soll nun beispielhaft durchgerechnet werden :

Bestimme die Inverse zu der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & |1 & 0 \\ 4 & -5 & |0 & 1 \end{pmatrix} \to (II - 2 \cdot I) \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & |+1 & 0 \\ 0 & -11 & |-2 & 1 \end{pmatrix} \to (-\tfrac{1}{11} \cdot II) \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & |1 & 0 \\ 0 & 1 & |\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \to (I - 3 \cdot II) \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & |\frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & |\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \to (\tfrac{1}{2} \cdot I) \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & |\frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ 0 & 1 & |\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Die Inverse zu der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ lautet demnach $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$.

Eine Probe bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses.

9.1.5 - Inversion von quadratischen Matrizen

Berechnung der inversen Matrix A^{-1} durch Gauß-Jordan-Elimination

Mit der Gauß-Jordan-Elimination berechnen wir A^{-1} durch simultanes Lösen aller n Gleichungen.

Die erweiterte Matrix besitzt nun nicht mehr eine zusätzliche Spalte **b** von der rechten Seite, sondern 3 rechte Seiten (da hier: 3 × 3-Matrix).

- Dies sind die Spalten von I.
- (A I) ist nun die erweiterte Matrix.

Beispiel

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{33} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

9.1.5 - Inversion von quadratischen Matrizen

Dieses Beispiel soll nun beispielhaft durchgerechnet werden :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to (I \leftrightarrow III) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$(II + I) \oplus (III - 2 \times I) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & 7 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to (III + 2 \times II) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to (II \leftrightarrow III) \oplus ((-1) \cdot II) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to (III - 5 \times II) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 11 & 1 \end{array}\right) \to (\frac{1}{2} \cdot III) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to (II+III$$

$$, I+3\times III \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{33}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to (1-4\times II) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

9.1.5 - Inversion von quadratischen Matrizen

Hieraus lässt sich ablesen

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Probe zeigt, dass tatsächlich gilt

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.1.5 - Inversion von quadratischen Matrizen

Bevor man sich in den Prozessablauf der Inversenbestimmung mittels Gauss-Jordan-Elimination begibt, ist es sinnvoll, zu prüfen, ob bzw. dass zur vorgegebenen Matrix überhaupt eine inverse Matrix existiert. Hierfür gibt es verschiedene Kriterien, die im weiteren Verlauf der Vorlesung dargestellt werden. Im Moment stehen diese Kriterien noch nicht zur Verfügung - bis auf einen Spezialfall :

Für $2 \times 2-$Matrizen haben wir bereits ein weiteres Kriterium kennengelernt (s. Seite 25, Kapitel 9) : Eine $2 \times 2-$Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ (s. Seite 25).

In allen anderen Fällen $(n \times n \neq 2 \times 2)$ gehen wir mit den aktuellen uns vorliegenden Erkenntnissen offensiv die Bestimmung der Inversen mittels Gauss-Jordan-Verfahren an. Falls die Inverse nicht existiert, bekommen wir bei der simultanen Lösung der Gleichungssysteme mindestens eines der Muster, das Unlösbarkeit signalisiert (linke Seite 0, rechte Seite $\neq 0$) (s. Seiten 15/20, Kapitel 8). Wenn das Gauss-Jordan-Verfahren nicht 'abbricht' und zu einer Ergebnismatrix führt, ist die Ausgangsmatrix invertierbar.

9.1.5 - Inversion von quadratischen Matrizen - Üben und Verstehen

Übung

Übung 1 :

Berechnen Sie die Inverse der Matrix durch Gauß-Jordan-Elimination.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Übung 2 :

Berechnen Sie die Inversen dieser beiden Matrizen durch Gauß-Jordan-Elimination

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

falls diese existieren.

9.1.6 Orthogonalität von Matrizen

Definition : Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ heisst orthogonal, wenn für das Skalarprodukt gilt $(Au)\cdot(Av) = u\cdot v$ für beliebige Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Man kann den folgenden Satz zeigen :

Satz : Für eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sind folgende drei Aussagen äquivalent :

(a) : A ist orthogonal
(b) : Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis
(c) : Es gilt $A^{-1} = A^T$

Plausibilisierung : Entscheidend für die Erklärung des Satzes ist die Feststellung

$$(Ae_i)\cdot(Ae_j) = (\ \textbf{i-te Spalte von A}\ )\cdot(\ \textbf{j-te Spalte von A}\ ) = e_i\cdot e_j = \begin{cases} 1 \text{ falls } i = j \\ 0 \text{ falls } i \neq j \end{cases} \quad ,$$

wenn $e_i, e_j, i, j \in \{1, 2, .., n\}$ die Standard-Koordinatenvektoren des $\mathbb{R}^n$ darstellen.

Übung/Beispiel : Gegeben ist die Drehmatrix $D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass D orthogonal ist. **Hinweis :** Man kann zeigen, dass die orthogonalen Matrizen $\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sämtlich Drehmatrizen darstellen (s. hierzu auch Kapitel 9.2).

9.1.7 Abbildungen von quadratischen Matrizen

Wir betrachten Funktionen

$$f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R}), f : A \mapsto f(A).$$

Beispiele :

1. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + 4$ - in diese Funktion können wir in der folgenden Weise Matrizen einsetzen und erhalten

$$f : \left\{\begin{matrix} M_{n\times n}(\mathbb{R}) & \to & M_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^4 + 3\cdot A^3 - 5\cdot A^2 + 4\cdot I_n \end{matrix}\right\}$$

Konstanten sind hier als Vielfache der passenden Einheitsmatrix I_n zu verstehen.

2. $f(x) = (x-1)\cdot(x+2)^2$ - auch in diese Funktion können wir in der folgenden Weise Matrizen einsetzen und erhalten

$$f : \left\{\begin{matrix} M_{n\times n}(\mathbb{R}) & \to & M_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & (A - I_n)\cdot(A + 2\cdot I_n)^2 \end{matrix}\right\}$$

Beispielsweise umgesetzt mit $n = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 16 \\ -8 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 46 \\ -17 & 30 \end{pmatrix}.$$

Im Kapitel 13 bei der Diagonalisierung von Matrizen kommen wir hierauf zurück.

9.1.8 Matrixnormen

Auf der Seite 5 im Kapitel 9.1.1 wurde bereits festgehalten : Die Menge $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ bildet zusammen mit den Operationen Matrizenaddition und der skalaren Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Dieser Vektorraum kann durch Einführung einer Matrixnorm zu einem normierten Vektorraum weiterentwickelt werden. Beispielhaft seien folgende gebräuchliche Normen für Matrizen $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ genannt

1. Die **p-Matrixnorm** : $||A|| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
2. Die **Zeilensummennorm :** $||A|| = \max\limits_{i=1,2,..,m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$
3. Die **Spaltensummennorm :** $||A|| = \max\limits_{j=1,2,..,n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$

Für alle Matrixnormen gelten die 3 definierenden Eigenschaften einer Norm

1. $||\lambda \cdot A|| = |\lambda| \cdot ||A||$ für $\lambda \in \mathbb{R}, A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
2. $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ für $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
3. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$ für $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

9.1.8 Matrixnormen

Beispiel : Betrachtet sei die $2 \times 2-$Matrix $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$. Zu berechnen sind

1. die 2-Matrixnorm
$$||A|| = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{((-5)^2 + 1^2) + ((-3)^2 + (-4)^2)} = \sqrt{51} \approx 7.14.$$
2. die Zeilensummennorm
$$||A|| = \max_{i=1,2,..,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max(|-5| + |1|, |-3| + |-4|) = 7$$
3. die Spaltensummennorm
$$||A|| = \max_{j=1,2,..,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max(|-5| + |-3|, |1| + |-4|) = 8$$

Es gibt noch viele weitere Matrixnormen, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll. Matrixnormen werden häufig in der numerischen Mathematik benötigt, um z.B. Abschätzungen von Näherungslösungen vornehmen zu können.

9.1.9 Was ist mitzunehmen

- Grundrechenarten (Addition / Subtraktion / Skalarmultiplikation / Multiplikation) für $m \times n-$ sowie Abbildungen quadratischer Matrizen können
- Matrizen zur Abbildung der 3 elementaren Zeilenoperationen
  - Zeilentausch
  - Elimination
  - Zeilenmultiplikation

  aufstellen und invertieren können
- Matrix transponieren und adjungieren können und mit diesen Transponierten und Adjungierten rechnen können.
- Definierende Eigenschaften von symmetrischen, schiefsymmetrischen sowie hermiteschen Matrizen kennen und anwenden können
- Invertierbarkeit von Matrizen feststellen können
- Matrizen mittels Gauss-Jordan-Verfahren invertieren können
- Orthogonale Matrizen erkennen, mit ihnen rechnen und ihre Inverse bestimmen können
- Zu einer vorgegebenen Matrix deren Norm bestimmen können - bei vorgegebener Norm

9.1.10 Einsatzgebiete Matrizen in der Informatik

Matrizen sind elementar und omnipräsent in vielen Anwendungen und Anwendungsgebieten der Informatik.

Insbesondere spielen Matrizen in der Robotik sowie bei allen Anwendungen, die sich mit Punkten auf einer Ebene oder im Raum beschäftigen eine fundamentale Rolle.

Weit verbreitet ist die Anwendung von Matrizen darüberhinaus in wirtschaftlichen Anwendungen - beispielsweise bei der Modellierung von Produktionsprozessen.

Desweiteren spielen Matrizen eine wesentliche Rolle bei kryptographischen Blockverschlüsselungsverfahren (affine Block-Chiffren, AES-Verfahren).

9.1.11 Verwendete Literatur

Peter Hartmann Mathematik für Informatiker, Kapitel 7

9.1.12 Übungsaufgaben

Zum Üben und Verstehen - Übungsblatt 9 - Aufgaben 1 - 9