7. Lineare Gleichungssysteme

#Mathe #Mathe1

PDFs: Präsentation Kommentierungen Übungen

Themen

Betrachten Linearer Gleichungssysteme

Vektoren und lineare Gleichungen

Zentrale Problemstellung der Linearen Algebra:

- *Lösen eines Systems von Gleichungen*
  - Lineare Gleichungen, d.h. die Unbekannten werden nur mit Zahlen multipliziet
  - Kein Produkt x mal y taucht auf
- **Beispiel:**

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned}$$

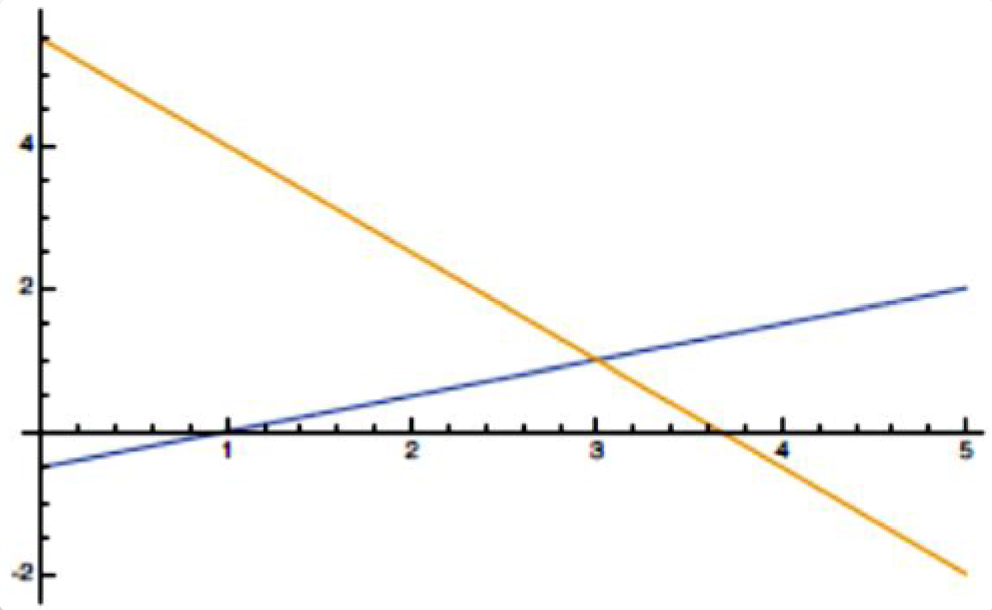
Zeilenbild

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned}$$

Zwei Gleichungen und zwei Unbekannte
Eine Lösungsmöglichkeit wäre "Zeile für Zeile" vorzugehen:

$$\begin{aligned} x - 2y = 1 &\rightarrow y = (x-1)/2 \\ 3x + 2y = 11 &\rightarrow y = (11-3x)/2 \end{aligned}$$

Das entspräche zwei Geraden in der xy-Ebene.



Der Punkt $x = 3$, $y = 1$ liegt auf beiden Geraden und löst beide Gleichungen simultan.
→ Lösung des Systems

Spaltenbild

Darstellen des linearen Gleichungssystems als "Vektorgleichung"

$$x\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\11\end{pmatrix}$$

Im Spaltenbild suchen wir diejenige Linearkombination der Vektoren auf der linken Seite, die den Vektor auf der rechten Seite ergibt.

Linearkombination: $3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\11\end{pmatrix}$

Matritzengleichung $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\11\end{pmatrix}$$

- **Zeilenbild**:
  Linke Seite wird zeilenweise multipliziert
  $1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1$
  $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 11$

- **Spaltenbild**:
  Spalten werden kombiniert
  $3 \cdot (1.\ \text{Spalte}) + (2.\ \text{Spalte})$
  → Vektor der rechten Seite

- Lösungsvektor x besteht aus den Zahlen $x = 3$ und $y = 1$
- Damit erhalten wir für $Ax = b$:

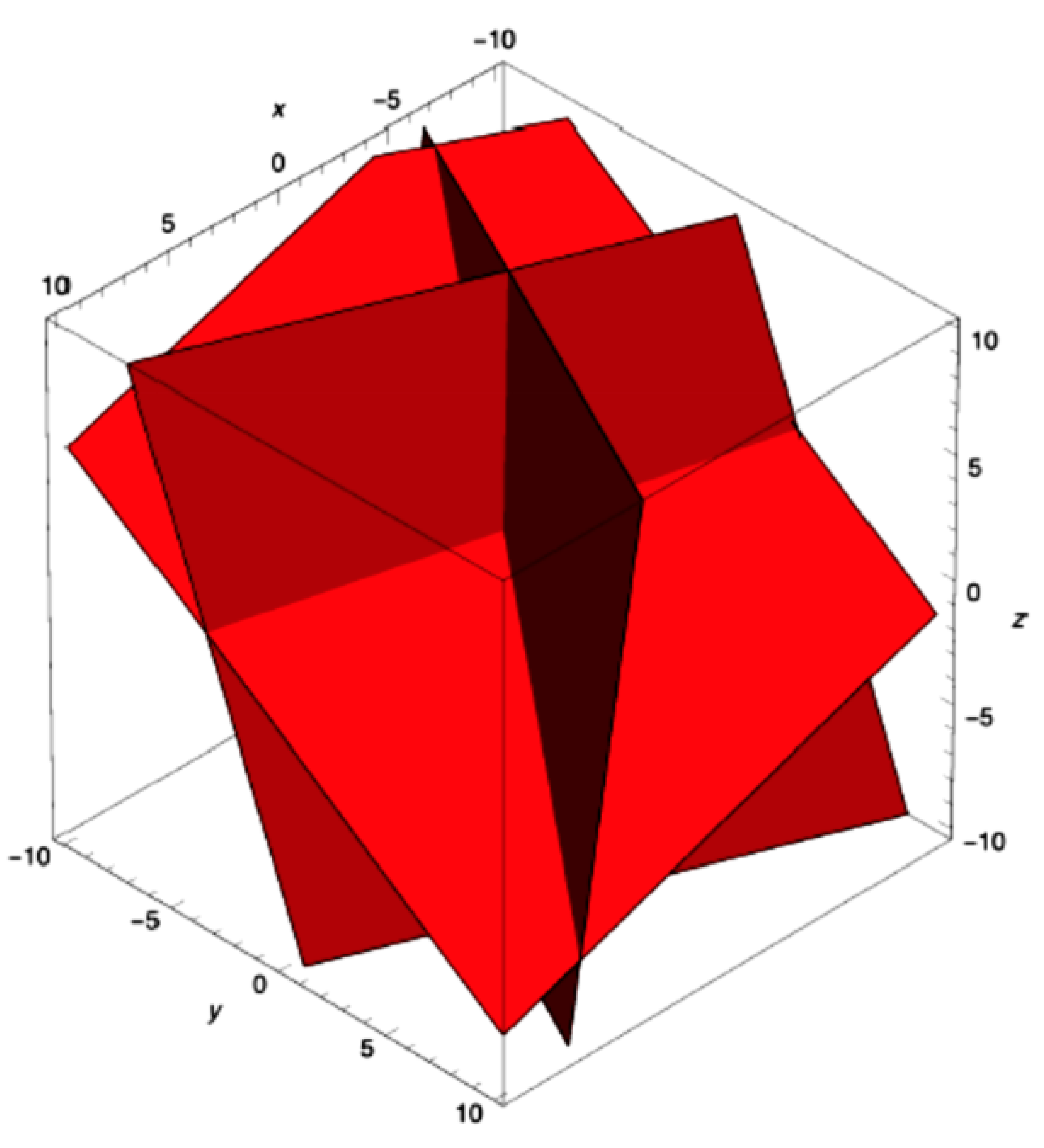
Drei Gleichungen und drei Unbekannte

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 5y + 2z &= 4 \\ 6x - 3y + z &= 2 \end{aligned}$$

Wir suchen die Zahlen x, y und z, die alle drei Gleichungen gleichzeitig lösen.

Spaltenbild: Kombinieren der der Spalten, um eine vierte zu erzeugen.
Zeilenbild: Man sieht drei Ebene, die sich genau in einem Punkt schneiden.

Interpretation im *Zeilenbild*



Darstellung des Spaltenbilds

Vektorielle Schreibweise für die drei Gleichungen:

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix}$$

Unbekannte x, y und z sind die Koeffizienten dieser Linearkombination.
Man benötigt $x=0$, $y=0$, $z=2$ als Koeffizienten.

Mattixform der Gleichungen

Wir erhalten in Matrixform eine 3×3-Matrix
Koeffizientenmatrix:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&2\\6&-3&1\end{pmatrix}$$

Matrixform $Ax=b$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&2\\6&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren also A mit den Unbekannten x, um die rechte Seite b zu erhalten.
→ **Matrixmultiplikation**

Praxis des Gauss'schen Eliminiationsverfahren

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems hat sich das Gauss'sche Elimintationsverfahren als praktikables Lösungsverfahren etabliert, was immer angewendet werden kann und immer zu einer Lösung führt.

An den folgenden drei Beispielen soll das Gauss'sche Eleminiationsverfahren dargestellt werden.

Beispiel 1

$$\begin{aligned}x_1+3x_2+x_3&=1\\2x_1-x_2-x_3&=-8\\-3x_1+2x_2+2x_3&=7\end{aligned}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned}x_1+5x_2-2x_3&=4\\2x_1-4x_3&=-2\\-x_1+5x_2+2x_3&=6\end{aligned}$$

Beispiel 3

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 8x_3 &= 2 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Lösungsprozess Bsp. 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -8 \\ -3 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow (\mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}, \mathrm{III} + 3 \cdot \mathrm{I}) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -5 & -10 \\ 0 & 11 & 5 & 10 \end{array}\right) \rightarrow (\mathrm{III} + \mathrm{II}, (-1) \cdot \mathrm{II}) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow (\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{II}) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 10 \end{array}\right) \rightarrow (\mathrm{II} : 4) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 10 \end{array}\right) \rightarrow (\mathrm{III} - 7 \cdot \mathrm{II}) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \rightarrow (\mathrm{III} : 5) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \text{Rückwärtselimination} \rightarrow x_3 = 2,\ x_2 = 0,\ x_1 = -1$$

Dieses LGS besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung.

Lösungsprozess Bsp. 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right) \rightarrow (\mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}, \mathrm{III} \cdot \mathrm{I}) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \end{array}\right) \rightarrow (\mathrm{III} + \mathrm{II}) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow (\mathrm{II} : (-10)) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Rückwärtselimination} \rightarrow x_2 = 1,\ x_1 = -1 + 2 \cdot x_3$$

$$\rightarrow \text{Lösungsmenge}\, \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \implies$$

Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen.

Die Menge $\mathbb{L}$ ist eine Nebenklasse $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U$, wobei für U gilt: Unterraum Gerade durch den Nullpunkt mir Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungsprozess Bsp. 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & -8 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow (\mathrm{II} - 4 \cdot \mathrm{I}, \mathrm{III} - \mathrm{I}) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & -20 & 0 & -18 \\ 0 & -10 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow (\mathrm{II} : (-2)) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 9 \\ 0 & -10 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow (\mathrm{III} + \mathrm{II}) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \rightarrow$$

Die letzte Gleichung des Gleichungssystems lautet $0 = 8$. Das ist unmöglich $\implies$ Das LGS bestitz keine Lösung.

Ergebnis Bsp. 1

Typisches Ergebnisbild für eindeutige Lösbarkeit bei einem 3×3-System →

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x \neq 0 & x & x & x \\ 0 & x \neq 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \neq 0 & x \end{array}\right)$$

Ergebnis Bsp. 2

Typisches Ergebnisbild für unendlich viele Lösungen bei einem 3×3-System →

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x \neq 0 & x & x & x \\ 0 & x \neq 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ergebnis Bsp. 3

Typisches Ergebnisbild für Unlösbarkeit bei einem 3×3-System →

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x \neq 0 & x & x & x \\ 0 & x \neq 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \neq 0 \end{array}\right)$$

Zeilenumformungen

Folgende **elementare Zeilenumformungen** im Schema eines LGS verändern dessen Lösungsmenge *nicht*:

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit einem skalaren (reellen) Vielfachen
3. Addition des beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (das können auch negative Vielfache sein → Subtraktion)

Wichtig:
Es gibt neben Zeilenoperationen auch Spaltenoperationen, auf diese wird aber bewusst verzichtet.

Zusammenfassung und Verallgemeinerung auf $n \times n$-Systeme

Zur Lösung eines linearen $n \times n$-Gleichungssystems (n Gleichungen mit n Unbekannten) wird das Gauss'sche Eliminationsverfahren genutzt. Dieses besteht aus zwei aufeinanderfolgenden Schritten:

1. Vorwärtselimination
2. Rückwärtselimination

Vorwärtselimination

- Festlegung einer Zeile des Gleichungssystems als erste Pivotzeile. Dies ist eine Zeile des Gleichungssystems, in der der Koeffizient von $x_1 \neq 0$ ist - eine solche Zeile muss es geben. Diese Zeile ist die oberste Zeile des Gleichungssystems - im Bedarfsfall nach Durchführung eines Zeilentausches.

- In allen Zeilen ab der zweiten Zeile wird der Koeffizient von x_1 eliminiert, in dem zu der jeweiligen Zeile ein geeignetes Vielfaches der ersten Zeile addiert wird. Nach diesem Schritt ist in allen Zeilen, außer der ersten Zeile, die Unbekannte x_1 verschwunden.
- Festlegung einer Zeile des Gleichungssystems (ab der zweiten Zeile) als zweite Pivotzeile. Dies ist eine Zeile des Gleichungssystems, in der der Koeffizient von $x_2 \neq 0$ ist - wenn es diese gibt (falls nicht soll mit x_3 weiter gemacht werden). Diese Zeile ist die zweite des Gleichungssystems - im Bedarfsfall wieder nach Durchführung eines Zeilentausches.
- In allen Zeilen ab der dritten Zeile wird der Koeffizient von x_2 eliminiert, in dem zu der jeweiligen Zeile ein geeignetes Vielfaches der zweiten Zeile addiert wird. Nach diesem Schritt ist in allen Zeilen, außer (der ersten und) der zweiten Zeile, die Unbekannte x_2 verschwunden.
- ...
  Mit diesem Verfahren wird sukzessive solange fortgefahren, bis ...
- ... die n-te Zeile Pivotzeile ist (genau eine Lösung) *o d e r*
- ... die k-te Zeile ($k < n$) Pivotzeile ist und unterhalb dieser Zeile nur Nullzeilen auftreten (unendlich viele Lösungen) *o d e r*
- ... eine Zeile $0 = x \neq 0$ auftritt (keine Lösung)

Rückwärtselimination (*eine* oder ∞ Lösungen)

- Beginnend mit der letzten von der Nullzeile verschiedenen Zeile des nach dem letzten Schritt der Vorwärtelimination vorliegenden Gleichungssystems ist nach einer Unbekannten aufzulösen.
- Der nach der Auflösung vorliegende Ausdruck für x_j ist in die $(k-1)$-te Gleichung einzusetzen. Diese ist nach dem ganzen links stehenden x_j aufzulösen.
- In die $(k-2)$-te Gleichung sind die für x_j, x_i vorliegenden Ausdrücke einzusetzen; anschließend ist diese nach dem dort ganz links stehenden x_l aufzulösen.
- ...
- ...
- In die erste Gleichung sind alle für x_i, x_j, x_l, $\ldots$ erhaltenen Ausdrücke einzusetzen. Diese ist dann nach x_1 aufzulösen.
  Die Lösungsmenge sind nun alle Vektoren $(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_l, \ldots)$. Alle x_m, nach denen im Laufe der Rückwärtselimination nicht aufgelöst wurde, können frei gewählt werden.

Erweiterungen

- Das Verfahren der Gauss-Elimination ist anwendbar für alle Gleichungssysteme aus m Gleichungen mit n Unbekannten ($n = m$ (quadratisch), $n > m$, $n < m$)
- bei der Anwendung des Verfahrens können entsprechend der Beispiele Ergebnisbilder

$$\text{bei eindeutiger Lösbarkeit} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} x \neq 0 & x & x & x & \dots & x & x \\ 0 & x \neq 0 & x & x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x \neq 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{bei } \infty \text{ vielen Lösungen} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} x \neq 0 & x & x & x & \dots & x & x \\ 0 & x \neq 0 & x & x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \neq 0 & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{bei Unlösbarkeit} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} x \neq 0 & x & x & x & \dots & x & x \\ 0 & x \neq 0 & x & x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \neq 0 \end{array}\right)$$

```
auftreten.
```

- Es können auch größere Stufen als 1 in der Dreiecks-/Trapezform auftreten.