Übungsblatt-6 Lineare Algebra (Komplexe Zahlen)-Kapitel 6 - Lösungen

Aufgabe 1 : Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2+5i, z_2 = -1-2i, z_3 = 1-3i$. Berechnen Sie die komplexen Zahlen

a) $z_1 \cdot z_2$
b) $\frac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$
c) $\frac{z_1+z_2}{z_2-z_3}$

und schreiben Sie diese in der Form $a + b \cdot i$ (also keine komplexe Zahl im Nenner).

Lösung zu Aufgabe 1 :

a) $z_1 \cdot z_2 = (2+5i) \cdot (-1-2i) = -2-4i-5i-10i^2 = 8-9i$

b) $\frac{z_1}{z_2 \cdot z_3} = \frac{2+5i}{(-1-2i)(1-3i)} = \frac{2+5i}{-1+3i-2i+6i^2} = \frac{2+5i}{-7+i} = \frac{(2+5i)(-7-i)}{(-7+i)(-7-i)} = \frac{-9-37i}{50} = -\frac{9}{50} - \frac{37}{50}i$

c) $\frac{z_1+z_2}{z_2-z_3} = \frac{2+5i-1-2i}{-1-2i-1+3i} = \frac{1+3i}{-2+i} = \frac{(1+3i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-2-i-6i-3i^2}{5} = \frac{1-7i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$

Aufgabe 2 : Berechnen Sie zu den in der Aufgabe 1 gegebenen komplexen Zahlen $z_1 = 2+5i, z_2 = -1-2i, z_3 = 1-3i$ jeweils den Betrag.

Lösung zu Aufgabe 2 :

$|z_1| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$,

$|z_2| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$,

$|z_3| = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$

Aufgabe 3 : Berechnen Sie $(2-3i)^6$ und geben Sie das Ergebnis in der Normalform an.

Lösung zu Aufgabe 3 : Forme die gegebene komplexe Zahl $2-3i$ in die Polar- bzw. in die trigonometrische Form um :

- Erhalte als Winkel $\varphi = 360° + \arctan \frac{-3}{2} = 303,69°$.
- Erhalte als Betrag $|2-3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Dann ergibt sich $(2-3i)^6 = (\sqrt{13})^6 \cdot e^{i\cdot(6\cdot 303,69°)} \approx 2035 + i \cdot 828$.

Aufgabe 4 : Berechnen Sie alle 6-ten Wurzeln aus 64.

Lösung zu Aufgabe 4 : Definiere z=64. Dann gilt $|z| = 64, \varphi = 0°$. Es ergeben sich die folgenden Wurzeln

- $a_0 = \sqrt[6]{64} \cdot e^{i \cdot \frac{0°}{6}} = 2$
- $a_1 = \sqrt[6]{64} \cdot e^{i \cdot \frac{0° + 1 \cdot 360°}{6}} = 2 \cdot (\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i \cdot \sqrt{3}$
- $a_2 = \sqrt[6]{64} \cdot e^{i \cdot \frac{0° + 2 \cdot 360°}{6}} = 2 \cdot (-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + i \cdot \sqrt{3}$
- $a_3 = \sqrt[6]{64} \cdot e^{i \cdot \frac{0° + 3 \cdot 360°}{6}} = -2$
- $a_4 = \sqrt[6]{64} \cdot e^{i \cdot \frac{0° + 4 \cdot 360°}{6}} = 2 \cdot (-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 - i \cdot \sqrt{3}$
- $a_5 = \sqrt[6]{64} \cdot e^{i \cdot \frac{0° + 5 \cdot 360°}{6}} = 2 \cdot (\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i \cdot \sqrt{3}$