5. Komplexe Zahlen

#Mathe #Mathe1 #KomplexeZahlen

Themen

Definition

Imaginäre Einheit i

> **Definition**
>
> Als imaginäre Einheit bezeichnet man diejenige (im Reellen nicht vorkommende, daher "imaginäre") Zahl i, die die Eigenschaft $i^2 = -1$ hat.
>
> Mit anderen Worten: $i = \sqrt{-1}$
>
> Das heißt aber nicht, dass es für jede negative Zahl einen Buchstaben gibt, um diese zu repräsentieren.

Mit der Zahl i können Wurzeln aus allen negativen Zahlen berechnet werden. Hierzu gilt allgemein:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{(-1) \cdot a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} = i \cdot \sqrt{a}$$

Mit der Zahl i wird zudem ein Zahlenbereich, der über die reellen Zahlen hinausgeht, eingeführt: $\mathbb{C}$

Menge der komplexen Zahlen

Definition

Ist i die zuvor definierte Einheit und sind a und b beliebige reelle Zahlen, so nennt man eine Zahl der Form $z = a + ib$ eine *komplexe Zahl*.

Jede Zahl, die sich in dieser Form darstellen lässt, ist eine komplexe Zahl und umgekehrt ist jede komplexe Zahl in dieser Form darstellbar.

Die *Menge aller komplexen Zahlen* bezeichnet man mit

$$\mathbb{C} = \{a + i \cdot b : a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

Die Zahl a nennt man den *Realteil*, die Zahl b den *Imaginärteil* der komplexen Zahl $z = a + ib$.

Beispiele für komplexe Zahlen:
$1 + 2i$
$-\sqrt{3} - i$
$\pi + \pi i$
$i = 0 + 1 \cdot i$
$x \in \mathbb{R}$, weil $x = x + 0 \cdot i$
Also ist jede reelle Zahl auch eine komplexe Zahl.

Grundrechenarten

Seien z_1 und z_2 komplexe Zahlen mit: $z_1 = a_1 + b_1;\ z_2 = a_2 + b_2$

Realteil
Imaginärteil

Addition

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Subtraktion

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + i(b_1a_2 + a_1b_2) + i^2(\rightarrow -1)\, b_1b_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + i(b_1 + b_2)$$

Komplex-konjugierte Zahlen

Definition

Ist $z = a + ib$ eine komplexe Zahl, so heißt $\bar{z} = a - ib$ die zu z *komplex-konjugierte Zahl*.

Um zunächst den Kehrwert der Zahl z zu berechnen, erweitert man den Bruch mit der komplex-konjugierten Zahl und erhält:

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = a - ib/a^2 + b^2$$

Nenner $a^2 + b^2$ ist eine positive reelle Zahl (durch diese kann man immer dividieren)

Satz

Für eine beliebige komplexe Zahl $z = a + ib \neq 0$ ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2+b^2}$$

Division

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{c+id}{a+ib}$$

Satz

Für Quotienten komplexer Zahlen gilt:

Sind $z_1 = a + ib \neq 0 \quad z_2 = c + id$

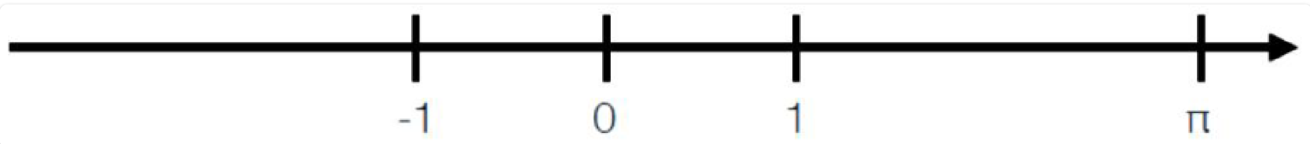
so ist

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{c+id}{a+ib} = \frac{(c+id)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{ac+bd+i(ad-bc)}{a^2+b^2}$$

Gaußsche Zahlenebene

Reelle Zahlen

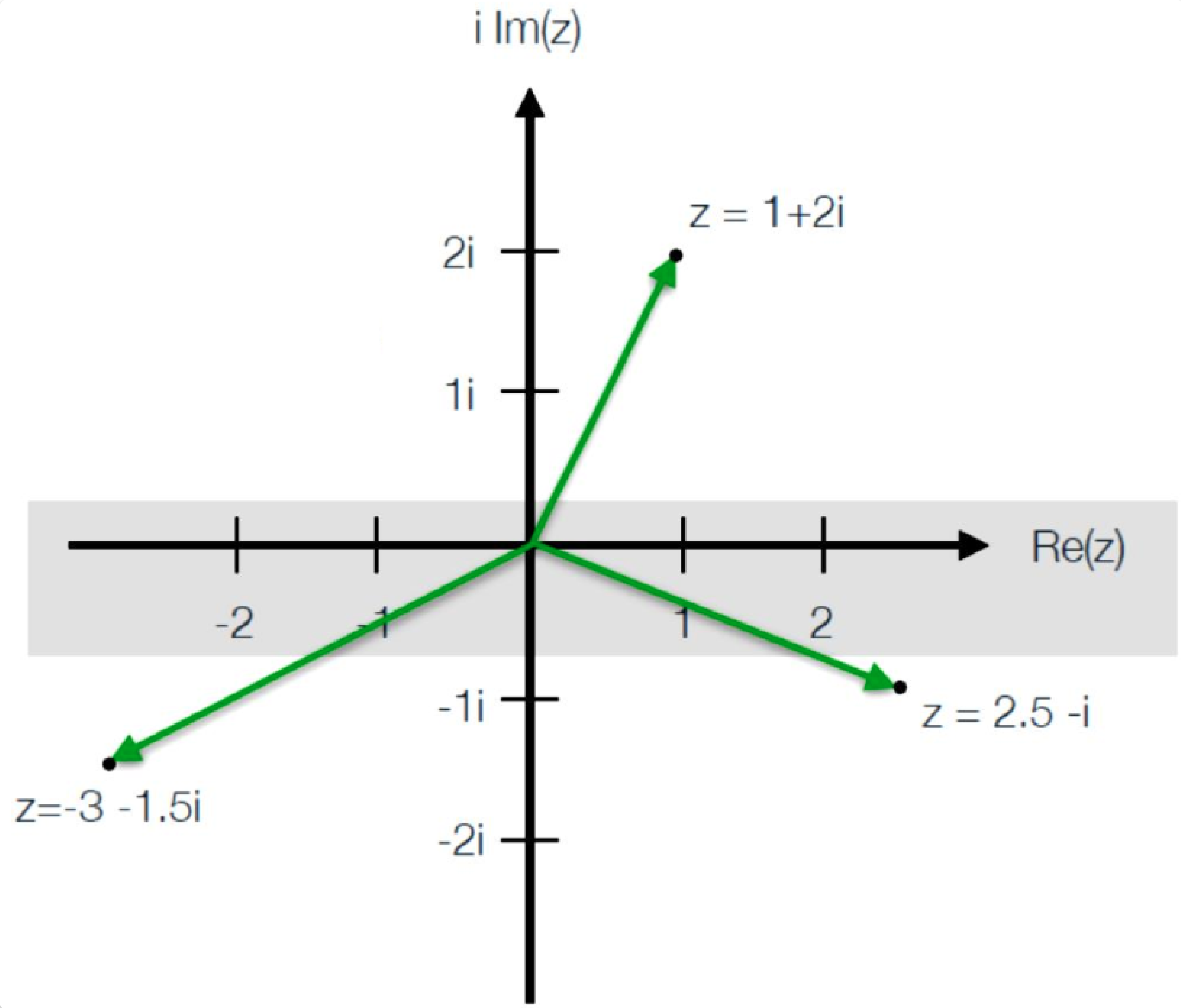
Jede reelle Zahl hat seinen Platz auf der Zahlengeraden und umgekehrt ist die Zahlengerade die Menge aller reellen Zahlen.



→ Die Zahlengerade ist "voll" mit reellene Zahlen. Hier "passen" keine komplexen Zahlen mehr hin.

Komplexe Zahlen
Lösung: Gaußsche Zahlenebene

Interpretation: Real- und Imaginärteil der jeweiligen komplexen Zahl werden als ihre beiden Koordinaten in der Ebene interpretiert.
→ Man zeichnet also die Zahl $a + ib$ an der Stelle (a, b) im Koordinatensystem ein.



Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist die Menge aller komplexen Zahlen mit $b = 0$.

Also ist die reelle Zahlengerade als waagrechte Koordinatenachse in der Gaußschen Zahlenebene enthalten.

Betrag einer komplexen Zahl

Den Abstand einer komplexen Zahl vom Nullpunkt der Gaußschen Zahlenebene bezeichnet man als ihren Betrag.

Interpretation dieses Abstandes als Betrag (also Länge) des Vektors, der vom Nullpunkt zu dieser Zahl zeigt.

Definition

Der *Betrag* der *komplexen Zahl* $z = a + ib$ ist eine reelle Zahl $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Beispiele:
$|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
$|-3 - 4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

Komplexe Zahlen als Körper

Es gilt $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist ein Körper*.

Begründung:

- $(\mathbb{C}, +)$ ist eine kommutative Gruppe, insbesondere gilt:
  - Definition der Operation '+':
    $$(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$$
  - Neutrales Element ist $0 = 0 + 0 \cdot i$
  - Inverses Element zu $z = a + b \cdot i$ ist $-z = -a - b \cdot i$
- $(\mathbb{C}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe, insbesondere gilt:
  - Definition der Operation '$\cdot$':
    $$(a_1 + b_1 \cdot) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$
  - Neutrales Element ist $1 = 1 + 0 \cdot i$
  - Inverses Element zu $z = a + b \cdot i$ ist $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$
- Distributivgesetz gilt: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Trigonometrische und Polarform einer komplexen Zahl

In den bisherigen Betrachtung bezogen auf die Grundrechenarten zeigen komplexe Zahlen keine 'bahnbrechenden' Besonderheiten. Das ist anders, wenn man sich ansieht wie man:

- komplexe Zahlen potenzieren *und*
- Wurzeln aus komplexen Zahlen zieht

Bei der Berechnung von Wurzeln komplexer Zahlen kommt ein neuer Aspekt ins Spiel. Auch eine komplexe Zahl beitzt in der Tat exakt n n-te Wurzeln.

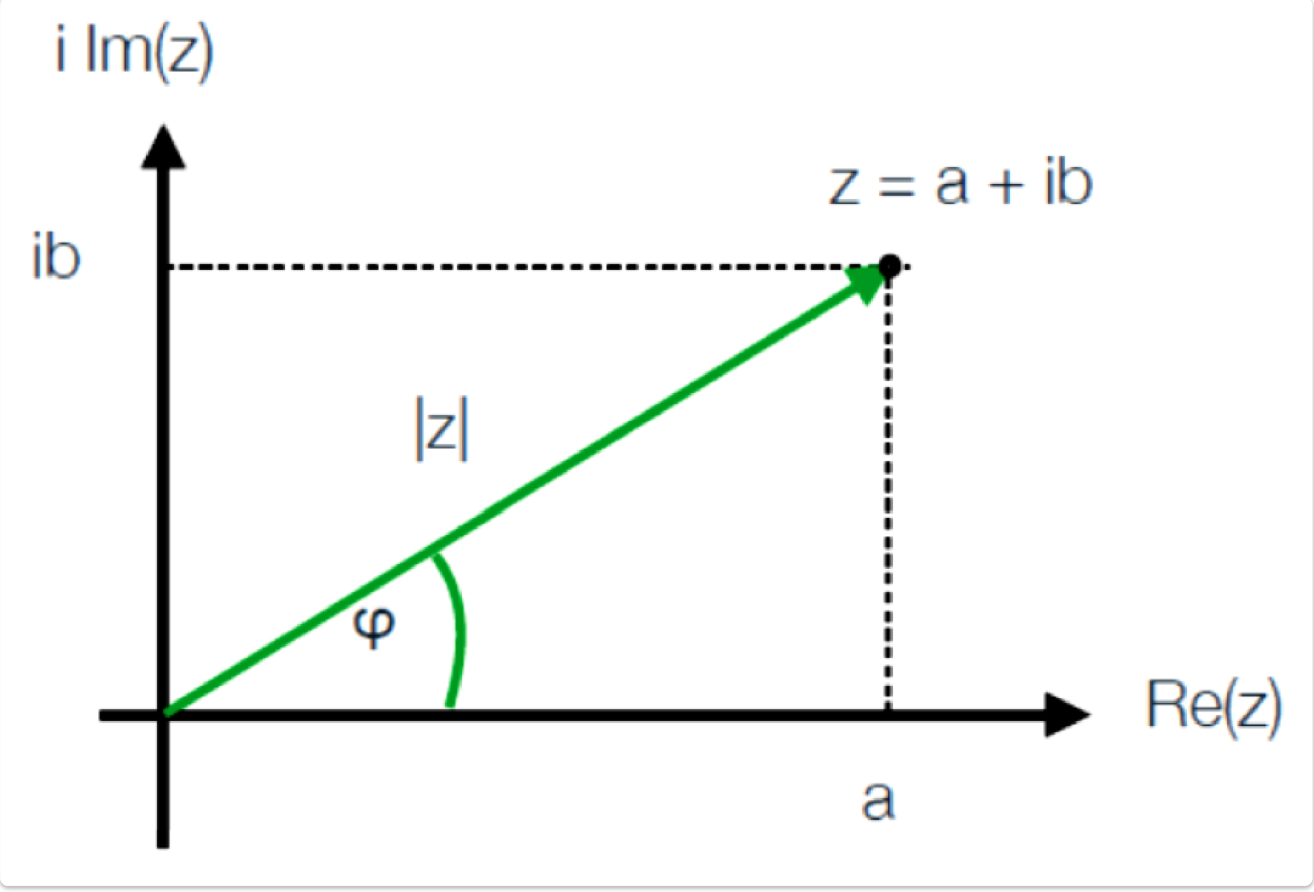
Gaußsche Zahlenebene - Winkel

Definition

Der Winkel φ, den eine komplexe Zahl $z = a + ib$ mit der positiven reellen Achse einschließt, ist wie folgt zu berechnen:

$$\varphi = \begin{cases} arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a < 0, b \leq 0 \\ arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 180^\circ & \text{für } a > 0, b \text{ beliebig} \\ arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 360^\circ & \text{für } a < 0, b > 0 \\ 90^\circ & \text{für } a = 0, b < 0 \\ 270^\circ & \text{für } a = 0, b > 0 \end{cases}$$

Bei Berechnung im Bogenmaß ist statt dem Gradwert 180° der Wert π zu verwenden.



Anmerkung:
Für $a = 0$ und $b = 0$ ist der Wert für den Winkel unbestimmt.

Polar- und trigonometrische Form komplexer Zahlen

Über den Betrag und den Winkel einer komplexen Zahl kann diese in der *Polarform* und in der *trigonometrischen Form* dargestellt werden.

Definition

Es sind $|z|$ der Betrag von z und φ der berechnete Winkel.

- Polarform der komplexen Zahl z:

$$z = |z| \cdot e^i \varphi$$

- trigonometrische Form der komplexen Zahl z:

$$z = |z| \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$$

Die Form $z = a + ib$ nennt man die *Normalform* einer komplexen Zahl z.

überführung ineinander

1. Polarform ↔ trigonometrische Form:
   $e^{i \cdot \varphi} = cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi)$
2. trigonometrische Form → Normalform:
   $z = |z| \cdot (cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$; setze dann $a = |z| \cdot cos(\varphi)$ und $b = |z| \cdot sin(\varphi)$.
   Dann gilt $z = a + i \cdot b$
3. Normalform → trigonometrische Form:
   es gelte $z = a + i \cdot b$; dann gilt zunächst $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Bestimme φ mittels der Regel.
   Dann gilt $z = |z| \cdot (cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$

Potenzieren einer komplexen Zahl

Vorgehen bei, bspw. $(3 + 7)^5$:

- Potenz für Potenz ausmultiplizieren
- oder: Polarform bzw. trigonometrische Form

$$z^n = |z|^n \cdot (cos(\varphi) + i \cdot sin(n\varphi))$$

  Man potenziert also eine komplexe Zahl, indem man ihren Betrag potentiert und ihren Winkel mit n multipliziert.

Wurzelziehen

Ist n irgendeine natürliche Zahl und z irgendeine von 0 verschiedenen komplexen Zahlen, dann gibt es genau n verschiedene n-te Wurzeln aus z.

Satz

Es sei z eine beliebige komplexe Zahl $\neq 0$ in der Polarform $z = |z| \cdot e^i \varphi$ und n eine beliebige natürliche Zahl.

Es gibt genau n n-te Wurzeln aus z, die nun mit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ bezeichnet werden.

Diese Wurzel bezeichnet man wie folgt:

$$a_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\exp\left[i \cdot \frac{\varphi + k + 2\pi}{n}\right]\right) \text{ mit } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Implikationen

Definition

Ein Polynom $p(x)$ vom Grad $deg(p) > 1$ heißt irreduzibel über K, falls es kein Polynom $q(x)$ mit $0 < deg(q) < deg(p)$ gibt, das $p(x)$ teilt; andernfalls nennt man das Polynom reduzibel (K sei $\mathbb{R}$ oder \mathbb{C}).

Satz — Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad n hat genau n komplexe Wurzeln $x_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ und genügt der Darstellung $p(x) = a_n \cdots (x - x_1) \cdots (x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)$. Das bedeutet, dass in $\mathbb{C}[x]$ nur Polynome vom Grad 1 irreduzibel sind.

Satz — komplex-konjugierte Wurzeln in reellen Polynomen

In einem reellen Polynom $p(x)$ (d.h. $p(x) \in \mathbb{R}[x]$) treten komplexe Wurzeln stets als komplex-konjugierte Paare auf.

Hieraus ergeben sich folgende Tatsachen:

1. jedes reele Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle und damit mindestens einen reellen Teiler vom Grad 1
2. in $\mathbb{R}[x]$ können irreduzibel Polynome maximal den Grad 2 haben