Stoffsammlung Klausur/Probeklausur Mathematik 1 - Lineare Algebra (TINF22B4):

Aufgabe 1 : Mengen **(x Punkte)** Auswahl aus folgenden Aufgabentypen

- Vereinigungs- / Schnitt- / Differenzmenge vorgegebener Mengen bilden (z.B. Aufgabe 2 - **Übungsblatt-2**)
- Potenzmenge einer gegebenen Menge bilden (z.B. Aufgabe 2 von **Übungsblatt-2**)
- Kartesisches Produkt vorgegebener Mengen bilden (z.B. Aufgabe 2 von **Übungsblatt-2**)
- Mengengleichungen mittels Wahrheitstafeln überprüfen / beweisen (z.B. Aufgabe 3 von **Übungsblatt-2**)
- Mengengleichungen mittels Mengenalgebra überprüfen / beweisen (z.B. Aufgabe 4 von **Übungsblatt-2**)

Aufgabe 2 : Relationen / Abbildungen **(x Punkte)** Auswahl aus folgenden Aufgabentypen

- Für gegebene Relation Eigenschaften einer Äquivalenzrelation nachweisen / überprüfen (z.B. Aufgaben 1,2 von **Übungsblatt-3**)
- Zu einer gegebenen Äquivalenzrelation die Äquivalenzklassen bestimmen (z.B. Aufgabe 2 von **Übungsblatt-3**)
- Relationen, Umkehrrelationen und Verkettung von Relationen bilden (z.B. Aufgaben 3, 4 **Übungsblatt 3**)
- Injektivität, Surjektivität, Bijektivität von Abbildungen überprüfen / zeigen (z.B. Aufgabe 5 **Übungsblatt 3**)

Aufgabe 3 : Algebraische Strukturen / Zahlentheorie / Komplexe Zahlen **(x Punkte)** Auswahl aus folgenden Aufgabentypen

- Den ggT von 2 ganzen Zahlen bestimmen und ggT als Linearkombination dieser beiden Zahlen (auf 2 Arten) darstellen (z.B. Aufgabe 1, **Übungsblatt-5**)
- Modular addieren / subtrahieren / multiplizieren / dividieren auf $\mathbb{Z}_n$ (z.B. Aufgabe 2, **Übungsblatt-5**)
- Division mit Rest mit Polynomen durchführen (z.B. Aufgabe 3, **Übungsblatt-5**)
- ggT von Polynomen bestimmen (z.B. Aufgabe 4, **Übungsblatt-5**)
- Komplexe Zahl(en) in Normalform, Polarform, trigonometrischer Form darstellen (z.B. Aufgaben 2, 3, 4, **Übungsblatt-6**)
- Komplexe Zahlen addieren / subtrahieren / teilen / multiplizieren (z.B. Aufgabe 1, **Übungsblatt-6**)
- Komplexe Zahl potenzieren (z.B. Aufgabe 3, **Übungsblatt-6**)
- n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl berechnen (z.B. Aufgabe 4, **Übungsblatt-6**)

Aufgabe 4 : Matrizen und Determinanten **(x Punkte)**

- Matrizen addieren, subtrahieren, mit einem Skalar multiplizieren, miteinander multiplizieren, transponieren (z.B. Aufgaben 1, 3, 4, 5 **Übungsblatt-9**)
- Invertierbarkeit einer Matrix feststellen (z.B. Aufgabe 7, Übungsblatt-9)
- Matrix invertieren mittels Gauss-Jordan-Eliminationsverfahren (z.B. Aufgabe 6 a),b)c) **Übungsblatt-9**)
- Zu vorgegebenen Zeilenoperationen die hierzu korrespondierenden Eliminations-, Permutations- oder Multiplikationsmatrizen bestimmen (z.B. Aufgabe 2, **Übungsblatt-9**)
- Vorgegebene Matrix auf Orthogonalität überprüfen (z.B. Aufgabe 8, **Übungsblatt-9**)
- Vorgegebene Matrix auf die Eigenschaften **symmetrisch, schiefsymmetrisch, hermitesch** überprüfen (z.B. Übungen 2-4, Seite 22, Kapitel 9.1)

Aufgabe 5 : Vektorräume, Vektorraumtheorie **(x Punkte)**

- Berechnung Linearkombination von vorgegebenen Vektoren
  (z.B. Aufgabe 1, **Übungsblatt 7**)
- Nachweis / Überprüfung , dass/ob eine vorgegebene Menge einen Vektorraum oder Untervektorraum darstellt (z.B. Aufgaben 2+3, **Übungsblatt 7**)
- Nebenklassen bestimmen (z.B. **Übung 3, Kapitel 7.4, Seite 16**)
- Nebenklassen auf Gleichheit bzw. leeren Schnitt überprüfen (z.B. **Übung 1, Kapitel 7.4, Seite 16**)
- Dimension / Basis eines Faktorraumes bestimmen (z.B. Aufgabe 4, **Übungsblatt 10**)
- Lineare Unabhängigkeit einer Menge von gegebenen Vektoren nachweisen / widerlegen (z.B. Aufgabe 1, 2, **Übungsblatt-10**)
- Eigenschaft, eine Basis zu sein, bezgl. einer Menge von gegebenen Vektoren nachweisen / widerlegen (z.B. Aufgabe 1, 2, **Übungsblatt-10**)
- Vektor eines Vektorraumes als Linearkombination der Basisvektoren dieses Vektorraumes darstellen (z.B. Aufgabe 2, **Übungsblatt-10**)
- Basistransformationsmatrix bezgl. zweier vorgegebener Basen bestimmen (z.B. Aufgabe 3, **Übungsblatt 10 / Übung Seite 28, Kapitel 10.7**)
- Koordinatenvektoren mittels Basistransformationsmatrix transformieren (z.B. Aufgabe 3, **Übungsblatt 10 / Übung Seite 28, Kapitel 10.7**)

Aufgabe 6 : Lineare Abbildungen **(x Punkte)**

Aufgabe 7 : Theorie und Lösung Linearer Gleichungssysteme **(x Punkte)**

- Lineares Gleichungssystem mittels Gauss'schem Eliminationsverfahren (Vorwärts-/Rückwärtselimina lösen (z.B. Aufgaben 1 - 5, Übungsblatt 8)
- Lineares Gleichungssystem mittels Benutzung der Matrix-Inversen lösen (z.B. Aufgabe 6)d), Übungsblatt 9)

Aufgabe 8 : Eigenwerte / Eigenvektoren / Diagonalisierbarkeit von Matrizen **(x Punkte)**

Auf den kommenden Seiten folgen die zuvor beschriebenen Aufgaben (großteils in der korrekten Reihenfolge).

Aufgabe 2 : Gegeben sind die Mengen $A = \{1,2,3\}, B = \{1,3,5\}, C = \{2,4,5\}$.

a) Geben Sie die Potenzmengen der folgenden Mengen an : $A, A \cap B, (A \cup C) \cap B$
b) Geben Sie das kartesische Produkt $(A \cap B) \times C$ an.

Aufgabe 3 : Beweisen Sie für Mengen $A, B, C \subseteq M$ durch Benutzung von Wahrheitstafeln

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **b)** $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ **c)** $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Aufgabe 4 : Beweisen Sie für die Mengen $A, B, C \subseteq M$ folgende Mengengleichungen mittels der Regeln / Gesetze der Mengenalgebra

a) $A \cap (B \cup \bar{A}) = A \cap B$ **b)** $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$ **c)** $A \triangle (A \cup B) = B \setminus A$
d) $A \triangle (A \cap B) = A \setminus B$ **e)** $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap \overline{A}) = (A \cap B) \cup (C \cap \overline{A})$
f) $(A \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \cap (A \cup (B \cap C)) = A$

Aufgabe 1 : Welche der folgenden Relationen sind reflexiv/nicht reflexiv, symmetrisch/nicht symmetrisch, transitiv/nicht transitiv ? Welche Relationen sind demzufolge Äquivalenzrelationen?

a) Relation $R_a \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{N}$ mit der Definition $xR_ay :\Leftrightarrow x^a - y^a = ax - ay$
b) Relation $\text{mod}_a \subseteq \mathbb{Z}^2$ für ein a$\in \mathbb{N}$ mit der Definition $x\text{mod}_a y \Leftrightarrow \frac{x-y}{a} \in \mathbb{Z}$
c) Relation R $\subseteq \mathbb{Z}^2$ mit der Definition xRy $\Leftrightarrow x + y$ ist gerade
d) Relation R $\subseteq \mathbb{N}^2$ mit der Definition xRy $\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1} : y = ax^b$.

Aufgabe 2 : Betrachten Sie die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Hierauf wird die folgende Relation $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ definiert.

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation darstellt.

Bestimmen Sie $[(2,2)], [(2,5)], [(10,1)]$. Wieviele Äquivalenzklassen gibt es ?

Aufgabe 3 :
a) Gegeben seien $A = \{3,5,7,11,13,17\}, B = \{4,5,6,7,8\}$. Geben Sie alle Elemente der folgenden Relationen exakt an :

- $R_1 \subseteq A \times B$ mit der Definition $aR_1b \Leftrightarrow a < b$
- $R_2 \subseteq A \times B$ mit der Definition $aR_2b \Leftrightarrow a = b$

b) Es sei folgende Relation R definiert : $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $xRy \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : x^n = y$. Prüfen Sie, ob die folgenden Paare in R liegen : $(2,4), (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (3,3), (3,6)$.

Aufgabe 4 :
a) Gegeben sind die Mengen $A = \{a,b,c\}, B = \{x,y,z\}, C = \{u,v\}$ und die Relationen $R = \{(a,x),(b,x),(c,y),(c,z)\}$ und $S = \{(x,u),(z,v)\}$.
Geben Sie an (i) R^{-1} (ii) $S \circ R$.

b) Es sei die Relation $R = \{(a,c),(a,d),(b,b),(c,d),(d,a),(d,b)\}$ auf der Menge $M = \{a,b,c,d\}$ gegeben. Bilden Sie die Relationen (i) $R^2 = R \circ R$ (ii) $R^3 = R \circ (R \circ R) = (R \circ R) \circ R$ (überzeugen Sie sich von der Gültigkeit der letzten Gleichung)

Aufgabe 5 : Überprüfen Sie, ob folgende Abbildungen surjektiv beziehungsweise injektiv sind : a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto (x+y, y+z)$ b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto (x, x+y, y)$

Aufgabe 1 : Bestimmen Sie jeweils den ggT der folgenden Zahlenpaare und stellen Sie den ggT jeweils als Vielfachsumme der beiden Zahlen auf 2 verschiedene Arten dar :

a) (1008,840) b) (481,1755) c) (2940,1617)

Aufgabe 2 :

a) Erstellen Sie jeweils die Additions- und Multiplikationstabelle für die jeweilige Restklassengruppe $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Leiten Sie aus der Multiplikationstabelle ab, welchen Rest die Zahlen (i) 49^{50} (ii) 128^{949} bei der Division durch 3 ergeben.

b) Erstellen Sie jeweils die Additions- und Multiplikationstabelle für die jeweilige Restklassengruppe $\mathbb{Z}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Leiten Sie aus der Multiplikationstabelle ab, welchen Rest die Zahlen (i) 52^{50} (ii) 128^{949} bei der Division durch 7 ergeben.

c) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

(i) $(4 \cdot 3 - 1) \cdot 4$ **(ii)** $\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{4} - 1)$ **(iii)** $\sum_{n=1}^{4} n$ **(iv)** $\sum_{n=1}^{4} n^2$

d) Bearbeiten Sie ohne eigens erstellte Additions- bzw. Multiplikationstabellen folgende Fragen/Aufgaben im Restklassenkörper $\mathbb{Z}_{11}$:

- Was ist -8 ? Was ist -3 ?
- Was ist $\frac{1}{7}$? Was ist $\frac{1}{10}$?
- Berechnen Sie $4 - 6 + \frac{3}{5}$

Aufgabe 3 : Führen Sie folgende Polynomdivisionen durch und bestimmen Sie gemäß Satz zur Polynomdivision (s. Kapitel 5.5.3, Seite 30) $p(x), q(x), s(x)$ sowie das Restpolynom $r(x)$

1. in $\mathbb{R}[x]$: **(i)** $(2x^4 + 2x^2 + x + 1) : (x + 2)$ **(ii)** $(4x^3 + 2x^2 + 1) : (2x^2 + 3x)$
2. in $\mathbb{Z}_2[X]$: **(i)** $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + 1)$ **(ii)** $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 1)$

Aufgabe 4 : Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben zur ggT-Bestimmung von Polynomen

1. Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_2[X]$ den ggT der Polynome $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ und $x^3 + x + 1$.
2. Bestimmen Sie in $\mathbb{R}[X]$ den ggT der Polynome $x^2 - 1, x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ und $x^4 + x^3 + x + 1$.

Aufgabe 1 : Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 5i, z_2 = -1 - 2i, z_3 = 1 - 3i$. Berechnen Sie die komplexen Zahlen

a) $z_1 \cdot z_2$
b) $\frac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$
c) $\frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_3}$

und schreiben Sie diese in der Form $a + b \cdot i$ (also keine komplexe Zahl im Nenner).

Aufgabe 2 : Berechnen Sie zu den in der Aufgabe 1 gegebenen komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 5i, z_2 = -1 - 2i, z_3 = 1 - 3i$ jeweils den Betrag.

Aufgabe 3 : Berechnen Sie $(2-3i)^6$ und geben Sie das Ergebnis in der Normalform an.

Aufgabe 4 : Berechnen Sie alle 6-ten Wurzeln aus 64.

Aufgabe 1 : Bestimmen Sie die $4 \times 4-$Matrix mit den folgenden Eigenschaften : Es gelte $a_{jk} = 1$ für j=k, $a_{jk} = 2$ für j=k-2, $a_{jk} = 3$ für j=k+2, $a_{jk} = 4$ sonst.

Aufgabe 2 : Welche $4 \times 4-$Matrizen erzeugen die folgenden Zeilenoperationen in einer $4 \times n-$Matrix ?

a) P_{24} vertauscht die Zeilen 2 und 4
b) E_{14} addiert das 3-fache der 1. Zeile zur 4. Zeile
c) E_{23} subtrahiert das doppelte der 2.Zeile von der 3. Zeile
d) E_{134} subtrahiert das doppelte der 1.Zeile von der 3. Zeile und addiert die 1. Zeile zur 4. Zeile

Aufgabe 3 : Führen Sie mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die folgenden Rechenoperationen durch (,sofern diese möglich sind)

a) $2 \cdot A + C - B^T$ b) $A^T - B - 3 \cdot C^T$ c) $2 \cdot (A + B^T)^T - C^T$ d) $A - 2 \cdot C + B$

Aufgabe 4 : Führen Sie bei a)-g) folgende Matrix-Multiplikationen durch :

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ Wann stimmen die Ergebnismatrizen aus f) und g) überein ?

Aufgabe 5 : Berechnen Sie A^3 mit

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$. Wie lautet das Ergebnis zu A^6, A^{12}, A^{30} ?

Übung 2 : Welche der folgenden Matrizen sind symmetrisch, welche schiefsymmetrisch ? Jede der Matrizen hat eine der beiden Eigenschaften.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ -4 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -1 \\ -b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Übung 3 : Welches notwendige Merkmal besitzt jede schiefsymmetrische Matrix? Gibt es eine Matrix, die sowohl symmetrisch als auch schiefsymmetrisch ist ? Welches notwendige Merkmal besitzt eine hermitesche Matrix ?

Übung 4 : Wie müssen in der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \cdot i \\ -i & 0 & 1 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

a, b, c gewählt werden, damit A eine **hermitesche** Matrix darstellt.

Aufgabe 1 : Gegeben sind die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie folgende Vektoren :

a) $3a - 5b + 3c$ **b)** $-2(b + 5c) + 5(a - 3b)$ **c)** $4(a - 2b) + 10c$ **d)** $3(a \cdot b)c - 3a(b \cdot c)$

Aufgabe 2 : Begründen / Beweisen Sie folgende Gesetzmäßigkeiten zu Unterräumen von Vektorräumen

1. V sei ein Vektorraum, U_1, U_2 seien zwei Unterräume von V. Dann gilt : $U_1 \cap U_2$ ist wieder ein Unterraum von V.

2. V sei ein Vektorraum, U_1, U_2 seien zwei Unterräume von V. Dann gilt : $U_1 \cup U_2$ ist i.a. kein Unterraum von V. **Hinweis :** Finden Sie ein einfaches Gegenbeispiel - z.B. $V = \mathbb{R}^2$ mit geeignet gewählten Unterräumen U_1, U_2.

3. V sei ein Vektorraum, U_1, U_2 seien zwei Unterräume von V. Dann gilt : $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist wieder ein Unterraum von V.

Aufgabe 3 : Sei V die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie : Wenn man eine Addition und eine skalare Multiplikation auf V folgendermaßen definiert
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (a \cdot f)(x) = a \cdot f(x) \text{ für alle x } \in \mathbb{R}, (f, g \in V, a \in \mathbb{R}),$$
so wird V zu einem $\mathbb{R}-$Vektorraum.

2. Zeigen Sie, dass
$$W = \{f \in V : f(1) = f(-1) = 0\}$$
einen Unterraum von V darstellt.

3. Begründen Sie, warum
$$U = \{f \in V : f(1) = f(-1) = 1\}$$
keinen Unterraum von V darstellt.

Übung 3 : Gegeben sei der Unterraum $U = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ des $\mathbb{Z}_2^2$. Wieviele verschiedene Nebenklassen von U gibt es ?

Übung 1 : Gegeben sei der Unterraum $U = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$. Sind folgende Nebenklassen von U gleich oder disjunkt ?

1. $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + U$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + U$
2. $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + U$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + U$

Aufgabe 1 : Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit der Vektoren

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie die lineare Abhängigkeit der Vektoren

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

Welche Dimension hat der von den 3 Vektoren

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$

aufgespannte Vektorraum in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 : Gegeben sind $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. U sei der von den Vektoren a_1, a_2, a_3 erzeugte Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

a) Geben Sie die Dimension von U an.
b) Geben Sie eine Basis zu U an.
c) Liegt der Vektor $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in U ? d) Liegt der Vektor $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ in U ?
e) Geben Sie 2 verschiedene komplementäre Unterräume zu U an.

Aufgabe 4 : Gegeben sei der Unterraum $U = \{t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\}$ des Vektorraums $V = \mathbb{R}^3$.

1. Welche Dimension hat der Faktorraum V/U ?
2. Welche der beiden Mengen $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + U \right\}$, $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + U \right\}$ stellt eine Basis von V/U dar ? Die Antwort ist zu begründen.

Übung : Gegeben seien die beiden Basis des $\mathbb{R}^3$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ und } D = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrizen T_C^D und T_D^C. Benutzen Sie, dass gilt

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix} \text{ sowie } \begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Bearbeiten Sie

1. Transformieren Sie den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}_C$ in den entsprechenden Koordinatenvektor bezgl. der Basis D und machen Sie die Probe.
2. Transformieren Sie den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}_D$ in den entsprechenden Koordinatenvektor bezgl. der Basis C und machen Sie die Probe.

Benutzen Sie bei der Lösung der Aufgaben 1 - 6 ausschließlich das Gauss'sche Eliminationsverfahren. Stellen Sie selbst fest, dass Sie mit seiner Hilfe immer zu einem brauchbaren Ergebnis kommen, das dann, je nach Aufgabenstellung, noch weiterzuverwerten ist.

Aufgabe 1 : Zu lösen ist das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 18 \\ 3x_1 + 13x_2 + 4x_3 &= 30 \end{aligned} .$$

Aufgabe 2 : Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_4 &= -5 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 8 \end{aligned} .$$

Aufgabe 3 : Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem, wenn $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a_1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= a_2. \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= a_3 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 : Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a_1 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 &= a_2. \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= a_3 \end{aligned}$$

Welcher Zusammenhang muss zwischen a_1, a_2, a_3 bestehen, damit das Gleichungssystem **(1)** keine Lösung, **(2)**unendlich viele Lösungen besitzt.

Aufgabe 5 : Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} t \cdot x_1 + x_3 &= 0 \\ t \cdot x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + t \cdot x_3 &= 0 \end{aligned} \quad .$$

Stellen Sie fest, für welche $t \in \mathbb{R}$ das LGS a) genau eine b) unendlich viele Lösungen besitzt. Ist es möglich, dass das Gleichungssystem gar keine Lösung besitzt ?

Aufgabe 6 : Berechnen Sie jeweils die Inverse der Matrizen mittels dem Gauss-Jordan-Verfahren

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 13 & 4 \end{pmatrix}$.

d) Lösen Sie das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 13 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 30 \end{pmatrix}$

unter Verwendung der in c) berechneten inversen Matrix C^{-1}.