3. Relation und Abbildung

#Mathe #Mathe1 #RelationUndAbbildung

Themen

Relationen

Definition

Es seien A und B Mengen und $A \times B$ ihr kartrsisches Produkt.

Dann bezeichnet man *jede Teilmenge R* von $A \times B$ als (binäre) *Relation* auf $A \times B$.

Ist $A = B$, so spricht man von einer *binären Relation* auf A.

Erinnerung kartesisches Produkt >

Eine Teilmenge von R wäre z.B. wie folgt definiert:
$R = \{(a, b) : a \in A, b \in B, \text{sowie weitere Bedingungen an a und b}\}$

Grundlagen - Beispiele

1. Seien
   $A := B := \mathbb{R}$
   $R := \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge x = -y\}$
   weiter Bedingungen

   Elemente dieser Relation sind dann z.B. $(1, -1)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(0, 0)$
   Kein Element ist z.B. $(1, 2)$
   Man sagt: "x und y stehen in Relation, wenn $x = -y$ ist"

2. Es Seien $A = B = N$.
   Das kartesische Produkt ist hier eine Menge aller Pärchen natürlicher Zahlen.
   $R = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}, n < m\}$
   In dieser Relation liegen nur Pärchen, bei denen der erste Eintrag kleiner als der zweite.
   z.B. $(2, 3)$ und $(1, 18)$, aber nicht $(8, 3)$.

Umkehrrelation

Definition

Ist $R \subseteq M \times N$ eine Relation, so nennt man die durch die Vertauschung der Komponenten entstehende Relation $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\} \subseteq N \times M$ die zu R gehörende *Umkehrrelation*.

Zu jeder Relation R existiert eine Umkehrrelation.

Verkettung

Definition

Aus 2 Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ kann man eine neue Relation, *die Verkettung* (Oder Verknüpfung oder das Produkt) der beiden Relationen, bilden:

$$S \circ R = \{(a, c) | \text{Es gibt ein } b \in B, \text{ mit } (a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S\} \subseteq A \times C.$$

Beispiele >

Anmerkung: Für $(a, b) \in R$ schreibt man auch aRb, was heißt

- a und b erfüllen R *oder*
- a steht in Relation zu b
  In dem Konstrukt aRb tritt R als *Infixoperator* auf.

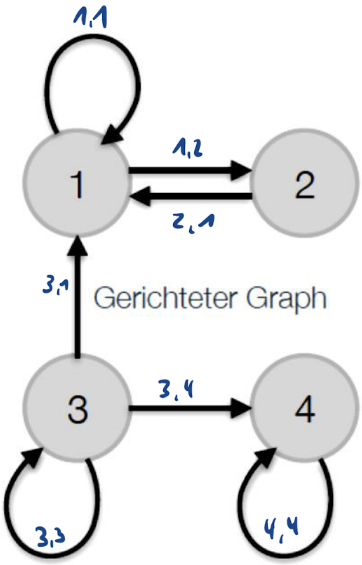
Im Unterschied hierzu gibt es auch die sogenannte *Prefix-Notation* $R\ a\ b$ sowie eine *Postfix-Notation* $a\ b\ R$. Wird in der Vorlesung nicht gebraucht.

Darstellung von Relationen

Mengendarstellung: { (1,1), (1,2), (2,1), (3,1), (3,3), (3,4), (4,4) }

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix



Gerichteter Graph

x	y
1	1
1	2
2	1
3	1
3	3
3	4
4	4

Tabelle

Gerichtete Graphen

Ist V eine endliche Menge und R eine Relation auf V, so ist auch R endlich.

Das Objelt (V, R) kann häufig *graphisch* dargestellt werden:
Die Elemente von V werden als Punkte in der Ebene repräsentiert und zwei Punkte x, y aus V durch einen gerichteten Pfeil oder Bogen von x nach y verbindet, genau wenn xRy gilt.

Die Elemente von V nennt man Punkte / Ecken / Knoten, während die Elemente R gerichtete Kanten heißen.

Das Paar (V, R) ist ein gerichteter Graph oder auch ein Digraph.

Eigenschaften von Relationen

Betrachtet seien nun Relationen R auf einer Menge A d.h. $R \subseteq A \times A$. Dann kann eine solche Relation unter anderem folgende Eigenschaften haben:

1. **Reflexiv:**

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

2. **Symmetrisch:**

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \implies (b, a) \in R$$

3. **Transitiv:**

$$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$$

Zur Beachtung: Wenn nicht ausdrücklich ausgeschlossen, können a, b und gegebenfalls noch c auch die gleichen Objekte sein.

Äquivalenzrelationen

ℹ Definition

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* ist.

Repräsentanten der Äquivalenzklasse

ℹ Definition

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $A \times A$. Dann bezeichnet für ein beliebiges $a \in A$ die Menge $[a] = \{x \in A | (a, x) \in R\}$ die *Äquivalenzklasse* von a bezüglich R.

a nennt man einen *Repräsentaten der Äquivalenzklasse*

Ordnungsrelation

Neben den Äquivalenzrelationen ist ein zweiter Typ von Relationen verbreitet - der Typ der *Ordnungsrelation*. Hierzu benötigen wir zwei weitere Detaileigenschaften, die eine Relation haben kann:

Betrachtet seien wieder Relationen R auf einer Menge A d.h. $R \subseteq A \times A$. Dann kann eine solche Relation folgende weitere Eigenschaften haben:

1. **Antisymmetrisch:**

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \text{ und } (b, a) \in R \implies a = b$$

2. **Asymmetrisch:**

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \implies (b, a) \notin R$$

Ordnungsrelation

ℹ Definition

Eine Relation R auf einer Menge A heißt Ordnung(srelation), wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Beispiel:
Eine typische Ordnung ist die Relation $\leq$ auf der Menge der natürlichen, der ganzen, der rationalen oder auch der reellen Zahlen.

Strikte Ordnungsrelation

Zu jeder Ordnung R gibt es eine zugehörige strikte Ordnung, die folgend definiert wird.

> **Definition**
>
> Eine Relation R in einer Menge A heißt strikte Ordnung(srelation), wenn sie asymmetrisch und transitiv ist.

Beispiel:
Die zur Ordnungsrelation $\leq$ gehörige strikte Ordnungsrelation auf der Menge der natürlichen, der ganzen, der rationalen oder auch der reellen Zahlen ist die strikte Ordnungsrelation $<$.

Vergleichbarkeit

> **Definition**
>
> Zwei Elemente a und b aus A heißen vergleichbar bezüglich der Ordnungsrelation R, wenn aRb oder bRa gilt. Wenn bezüglich einer Ordnung je zwei verschiedene Elemente miteinander vergleichbar sind, so spricht man von einer *totalen Ordnung*, andernfalls von einer *partiellen Ordnung*.

Beispiele:

1. $a \leq b$ ist eine totale Ordnung auf der Menge der natürlichen Zahlen, denn für zwei Zahlen a, b gilt immer $a \leq b$ oder $b \leq a$.
2. Die Teilmengenbeziehung $\subseteq$ ist eine partielle Ordnung, denn bei zwei Mengen muss nicht notwendigerweise eine Menge in der anderen enthalten sein.

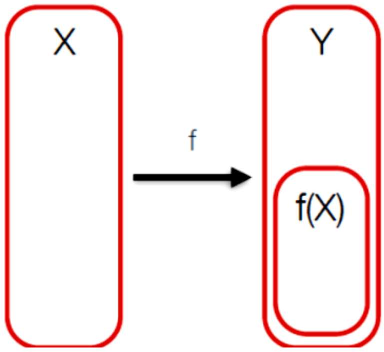
Abbildungen

Abbildungen

Abbildung f: $f \; : \; X \to Y \; , \; x \mapsto f(x) = y$

Definitionsbereich von f (X) Wertebereich von f (Y)

Man liest: „f ist die Abbildung von X nach Y, die x nach f(x) abbildet."



Abbildungen werden häufig mit f bezeichnet. f: X → Y
Dabei ist die Menge **X** der **Definitionsbereich**
und die Menge **Y** der **Wertebereich** von f**.**

Anmerkungen :

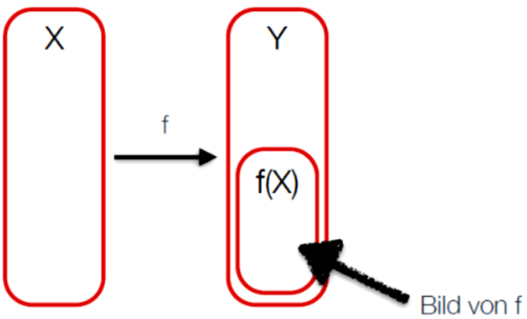
- Bei einer Abbildung wird jedem x des Definitionsbereiches X **genau ein** y des Wertebereiches Y zugeordnet
- Die Abbildung f kann auf jedes $x \in X$ angewendet werden
- Nicht jedes $y \in Y$ muss als Wert der Abbildung f angenommen werden

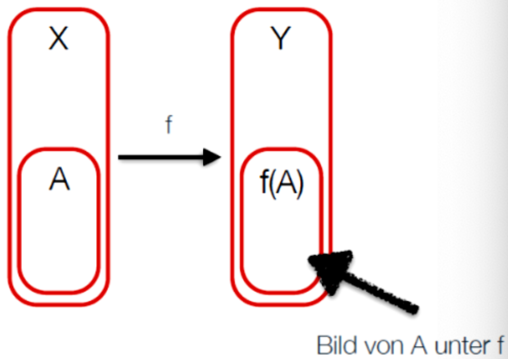
Bild

Definition: Bild

Bild von f: $f(X) := \{y \in Y \mid \exists x \in X \; : \; f(x) = y\}$

Das zu jedem x ∊ X gehörende eindeutige y ∊ Y mit (x,y) ∊ f wird meist als f(x) bezeichnet.
f(x) ist das Bild von x unter f.



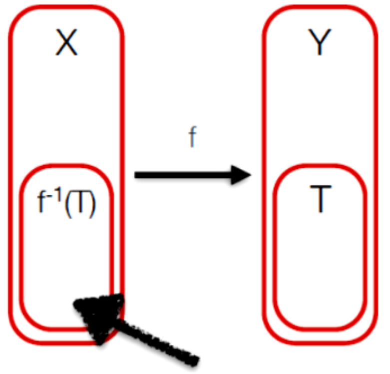


Anmerkung : Im Vergleich zum Wertebereich wird jedes Element der Menge $f(X)$ als Wert der Abbildung f angenommen. **Bild- und Wertebereich** einer Abbildung f sind deshalb immer genau zu unterscheiden. Immer gilt $f(X) \subseteq Y$.

Urbild

Definition: Urbild

Urbild von T unter f: $f^{-1}(T) = \{x \in X \mid f(x) \in T\}$ mit $T \subseteq Y$



Insbesondere gilt $y \neq z \Rightarrow f^{-1}(y) \neq f^{-1}(z)$. Andernfalls würden zwei identische Elemente aus X auf verschiedene Elemente in Y abgebildet, was der Eigenschaft einer Abbildung widerspricht. Sprachlich ausgedrückt : Zu **ungleichen Bildern** gehören **ungleiche Urbilder**.

Eigentschaften einer Abbildung:

Definition

Sei f eine Abbildung von X nach Y.

- Man nennt f *injektiv*, wenn keine zwei verschiedene Elemente von X auf dasselbe Element von Y abgebildet werden.
- Man nennt f *surjektiv*, wenn es zu jedem Element y in Y ein x in X gibt mit $f(x) = y$.
- Man nennt eine Abbildung *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Anmerkungen:

- Injektivität einer vorgegebenen Abbildung f kann man üblicherweise auf zwei Arten zeigen. Gemäß Definition der Injektivität gilt:
  f injektiv $\iff$ Keine zwei verschiedene Elemente werden auf dasselbe Element abgebildet
  $\iff [a \neq b \implies f(a) \neq f(b)] \iff [\neg(f(a) \neq f(b)) \implies \neg(a \neq b)] \implies [f(a) = f(b) \implies a$
  Art 1: $a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$ und *Art 2:* $f(a) = f(b) \implies a = b$
- Surjektivität bedeutet $f(X) = Y$ d.h. *Bildbereich von X = Wertebereich von f*
- Ist f injektiv oder sogar bijektiv, so kann die Abbildung f^{-1} gebildet werden.
  Diese Abbildung wird Umkehrabbildung von f genannt und wird mit f^{-1} bezeichnet.

f^{-1} ist eine Abbildung von Y nach X.

Gleichmächtigkeit von Mengen

Frage: Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente?
Antwort: Wenn es eine Zahl n gibt, so dass die eine Menge n Elemente hat und die andere Menge ebenso.

Fragen zum Verständnis:

- Wenn es sich um *endliche* Mengen handelt: Muss man die Elemente beider Mengen wirklich zählen?
- Was machet man, wenn es sich um *unendliche* Mengen handelt? Gibt es z.B. mehr natürliche Zahlen als Quadratzahlen
  In dieser Notlage kommt einem der Begriff der *Abbildung* zu Hilfe, den man an dieser Stelle nutzbringend zum Einsatz bringen kann:

Definition

Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \implies B$ gibt.

Hinweise

- zur Erkennung der Gleich- bzw. Ungleichmächtigkeit bildet man praktisch Paare aus $A \times B$. Wenn dann Einzelexemplare übrig bleiben, die keinen Partner finden, so sind die Mengen nicht gleich mächtig
- Wenn zwei Mengen A und B gleichmächtig sind, gibt es damit natürlich auch eine bijektive Abbildung $g : B \implies A$, nämlich $g = f^{-1}$

Mächtigkeit vergleichen - Mittel

endliche Mengen

Bei endlichen Mengen kann man zählen oder eine geeignete Abbildung definieren.

unendliche Mengen

Bei unendlichen Mengen kann man nicht zählen - hier bleibt nur der Weg, eine geeignete Abbildung zu definieren und diese hinsichtlich Bijektivität zu untersuchen.

Anmerkungen

- die genaue Mächtigkeit einer *endlichen* Menge zu bestimmen, ist nicht immer trivial und bedarf mitunter weiterer Hilfen, z.B. der *Kombinatorik*
- unendlich ist nicht gleich unendlich:
  - die Mächtigkeit der Menge der *natürlichen Zahlen* ist gleich der Mächtigkeit der *rationalen Zahlen* aber kleiner als die Mächtigkeit der *reellen Zahlen*
- *Kontinuumshypothese:* es gibt keine Mengen die mächtiger sind als die Menge der natürlichen Zahlen und weniger mächtig als die Menge der reellen Zahlen. Dies lässt sich im Rahmen der Standardaxiome der reinen Mengenlehre weder beweisen noch widerlegen
- Alle Zahlenmengen, die die gleiche Mächtigkeit wie die Menge der Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ haben, werden bezüglich ihrer Mächtigkeit als *abzählbar unendlich* bezeichnet. Die Menge der reellen Zaheln $\mathbb{R}$ wird bezüglich ihrer Mächtigkeit als *überabzählbar unendlich* bezeichnet.