Lineare Algebra - Kapitel 0 - Einführung

Rolf Felder

January 9, 2023

0.1 Organisation - Termine / Zeiten

Folgende vorläufigen organisatorische Rahmenbedingungen gelten

- Vorlesung findet gemäß der im RaPla eingetragenen Termine b.a.w. im Raum F492 statt.
- Vorlesungsblöcke - Start jeweils 9:30, Ende jeweils 13:45

  1. 90 Minuten : Vorlesung
  2. 15 Minuten : Pause
  3. 90 Minuten : Vorlesung
  4. 15 Minuten : Mittagspause
  5. 45 Minuten : Vorlesung

  Gibt es hier Änderungsbedarf wegen Mittagspause ?

- Pro Vorlesung 5 Lehreinheiten (LE)
- Zur Vorlesung immer einen Taschenrechner verfügbar haben (braucht nicht programmierbar zu sein)
- Vorlesungstermine stehen im RaPla - hier immer wieder mal reinschauen für den Fall, dass sich Änderungen ergeben (haben)

0.1 Organisation - Ablage Vorlesungsmaterialien

Zur Vorlesung gibt es einen Pfad in Moodle :

KA-Technik / KA-T-Informatik / KA-TINF22 / KA-TINF22B4 / KA-TINF22B4 Lineare Algebra.

Passwort : Alle Teilnehmer des Kurses TINF22B4 sollten ohne weitere Aktivitäten / ohne Passwort auf den Moodle-Raum zugreifen können.

In diesem Moodle-Raum werden alle zur Vorlesung relevanten Dokumente, Mails, ... abgelegt.

0.2 Vorlesungskonzept

Folgendes Vorlesungskonzept wird umgesetzt

- Frontalunterricht mit
  - Folien
  - 'Tafelaufschrieb' in Form von handschriftlichen Notizen, die die Folien ergänzen und während der Vorlesung besprochen und unmittelbar nach der Vorlesung in Moodle abgelegt werden
- Vorlesungsskriptum
  - sind die Folien, die in der Vorlesung gezeigt werden
  - wird vor jeder Vorlesung in Moodle abgelegt
- Folien sind geeignet zur Vor- und Nacharbeitung der Unterrichtseinheiten
- Die Vorlesung und die Tafelaufschriebe ergänzen die Folieninhalte um zusätzliche Verständniselemente (Beispiele und Auflösung der in die Vorlesung eingestreuten Übungen)
- Fragen jederzeit in der Vorlesung stellen oder über Email an felder.rolf@edu.dhbw-karlsruhe.de

0.3 Übungskonzept

Folgendes Übungskonzept wird umgesetzt

- In die Vorlesungen sind unter **'Üben und Verstehen'** Übungen eingestreut zum Selbstlösen oder gemeinsamen Lösen (Lösungen werden anhand handschriftlicher Notizen (s. 'Tafelaufschrieb') in der Vorlesung besprochen). **Diese Übungsaufgaben sind klausurrelevant !!**
- Zu jedem Kapitel im Skriptum / zu jeder Vorlesungseinheit gibt es Übungsaufgaben auf einem oder zwei Übungsblättern (**mit '*' gekennzeichnete Aufgaben sind nicht klausurrelevant**). Alle **nicht gekennzeichneten Aufgaben sind klausurrelevant**.
- Übungsaufgaben werden zusammen mit dem Vorlesungsskriptum vor der jeweiligen Unterrichtseinheit in Moodle abgelegt.
- Lösungen zu allen Übungsaufgaben werden zu Beginn der jeweils folgenden Vorlesung **bedarfsweise - hier wirklich bei Bedarf auch melden !!!** - besprochen und ein paar Tage vor der Folgevorlesung auch in Moodle abgelegt.
- Empfehlungen
  - Vorlesung strukturiert orientiert an den Folien nacharbeiten
  - Aufgaben der Übungsblätter konsequent bearbeiten
- Fragen, auch zu Übungsaufgaben, jederzeit stellen oder über Email an felder.rolf@edu.dhbw-karlsruhe.de

0.4 Klausuren - Abschluss-Klausur

- Am Ende des Semesters findet eine 90-minütige Klausur statt. Datum nach heutigem Planungsstand ist der 28.3.2023, 9:00-11:00.

- Hilfsmittel sind
  - Frei gestaltetes Formel-/Notizen-Blatt (Vorder- und Rückseite DinA4)
  - Taschenrechner Casio fx-991DE Plus (sind nicht programmierbar und nicht grafikfähig, werden von der DHBW für die Klausur zur Verfügung gestellt)

- Am 14.3. nach der 10. Vorlesung, genau 2 Wochen vor der Klausur, wird in Moodle eine Probeklausur bereitgestellt, die jeder bis zur 11. Vorlesung am 21.3. selbstständig bearbeiten sollte. In der 11. Vorlesung wird diese Probeklausur vollständig besprochen und vorgerechnet und hierbei der klausurrelevante Stoff in komprimierter Weise wiederholt.

0.5 Gliederung / Themen der Vorlesung

Auszug aus der Modulbeschreibung 'Mathematik 1' :

1. Semester

Lineare Algebra

- Grundlagen der diskreten Mathematik
- Grundlegende algebraische Strukturen
- Vektorräume und lineare Abbildungen
- Determinanten, Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit
- Anwendungsbeispiele.

2. Semester

Analysis

- Folgen und Reihen, Stetigkeit
- Differentialrechnung einer Veränderlichen im Reellen
- Integralrechnung einer Veränderlichen im Reellen
- Anwendungsbeispiele

Mit Abschluss des Moduls haben die Studierenden die Fähigkeit zu mathematischem Denken und Argumentieren entwickelt. Sie verfügen über ein Grundverständnis der linearen Algebra und Analysis einer reellen Veränderlichen und sind in der Lage, diese Kenntnisse auf Probleme aus dem Bereich der Ingenieurwissenschaften und Informatik anzuwenden.

Gliederung / Themen der Vorlesung

Folgende Themen werden in der Vorlesung behandelt

Mathematische Grundlagen und Diskrete Mathematik :

- Kapitel 1 : Logik / Aussagen / Quantoren
  (Nur Einführung - Rest wird in Theoretischer Informatik besprochen)
- Kapitel 2 : Mengen / Mengenalgebra / Zahlenmengen
- Kapitel 3 : Relationen und Abbildungen
- Kapitel 4 : Vollständige Induktion
  (Nur Erwähnung - Leerkapitel - wird in Theoretischer Informatik besprochen)
- Kapitel 5 : Zahlentheorie und algebraische Strukturen (ggT, modulares Rechnen + Gruppen, Ringe, Körper und Repräsentanten hierzu, Polynome und Polynomringe)
- Kapitel 6 : Komplexe Zahlen (wichtiger Repräsentant für einen Körper)

0.5 Gliederung / Themen der Vorlesung

Lineare Algebra :

- Kapitel 7 : Vektoren und Vektorraeume
- Kapitel 8 : Lineare Gleichungssysteme + Gauß'sches Eliminationsverfahren
- Kapitel 9 : Matrizen
- Kapitel 10 : Vektorraumtheorie : Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension
- Kapitel 11 : Lineare Abbildungen
- Kapitel 12 : Determinanten
- Kapitel 13 : Eigenwerte / Eigenvektoren / Diagonalisierbarkeit

Schwerpunktmäßig beschäftigt sich die Vorlesung mit der Suche nach und dem Betrachten von grundlegenden Strukturen. Aus der Schule bekannte Objekte der **Vektorgeometrie** oder **Analytischen Geometrie** treten als Ausprägungen / Repräsentanten dieser Strukturen auf.

0.6 In der Vorlesung vorausgesetzte Kenntnisse-selbständig wiederholen und Lücken füllen - Wichtig !!!!!

In der Vorlesung vorausgesetzte Kenntnisse sind i.w. die, die in den angebotenen Mathe-Vorbereitungskursen behandelt werden. Aus der Linearen Algebra sind das

- Die vier Grundrechenarten +,-,x,/ in den natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen
- Lineare und quadratische Gleichungen (insbes. abc- bzw. pq-Formel)
- Termumformungen und Klammerrechnen (insbes. Ausklammern, Ausmultiplizieren, binomische Formeln)
- Bruchrechnen (i.w. Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Hauptnenner-Bildung)
- Potenzrechnen und Rechnen mit Wurzeln
- Trigonometrische Terme (incl. Winkel- und Bogenmaßschreibweise)
- Trigonometrische Funktionen, e-Funktion sowie Logarithmusfunktion
- Analytische Geometrie (i.w. Vektoren, Vektorschreibweise, Rechnen mit Vektoren, Skalarprodukt, Vektorprodukt)
- Einfache Grenzwertberechnungen (einfaches Beispiel : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$)

Wesentliche Teile des vorausgesetzten Basiswissens finden sich in den Folgefolien auf den Seiten 12 - 21, die nicht besprochen werden, sondern zur Selbstkontrolle und ggf. und im Bedarfsfall als Anstoß für ein persönliches Wiederholungsprogramm benutzt werden können.

Rechnen mit Klammern

Auflösen von Klammern	**Beispiele**
$a + (b + c) = a + b + c$	$23 + (-13 + 7) = 23 - 13 + 7 = 17$
$a + (b - c) = a + b - c$	$44 + (-13 - 17) = 44 - 13 - 17 = 14$
$a - (b + c) = a - b - c$	$56 - (-49 + 11) = 56 + 49 - 11 = 94$
$a - (b - c) = a - b + c$	$79 - (-45 - 23) = 79 + 45 + 23 = 147$

Eine **Plusklammer** löst man auf, indem man das Pluszeichen vor der Klammer und die Klammer weglässt.
Eine **Minusklammer** löst man auf, indem man bei den Termen in der Klammer die Pluszeichen zu Minuszeichen und die Minuszeichen zu Pluszeichen ändert und das Minuszeichen vor der Klammer sowie die Klammer weglässt.

Ausmultiplizieren

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\qquad$ $6 \cdot 17 = 6 \cdot (10 + 7) = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 7 = 60 + 42 = 102$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ $\qquad$ $23 \cdot 9 = 23 \cdot (10 - 1) = 23 \cdot 10 - 23 \cdot 1 = 230 - 23 = 207$

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$ $\qquad$ $(10 + 7) \cdot (30 + 4) = 10 \cdot 30 + 10 \cdot 4 + 7 \cdot 30 + 7 \cdot 4 = 578$

Sind mehrere Klammern ineinander geschachtelt, so löst man die Klammern von innen nach außen auf.

Ausklammern

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ $\qquad$ $0{,}5 \cdot 6 + 0{,}5 \cdot 8 = 0{,}5 \cdot (6 + 8) = 7$

$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$ $\qquad$ $9 \cdot 8 - 9 \cdot 28 = 9 \cdot (8 - 28) = 9 \cdot (-20) = -180$

Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(x + 2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(5 - 3c)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3c + (3c)^2 = 25 - 30c + 9c^2$

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ $\qquad$ $81 \cdot 79 = (80 + 1) \cdot (80 - 1) = 6400 - 1 = 6399$

Die binomischen Formeln werden sowohl „von links nach rechts“ als auch „von rechts nach links“ verwendet.

Zerlegung nach Vieta

$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + \underbrace{(a + b)}_{p} \cdot x + \underbrace{a \cdot b}_{q}$ $\qquad$ $(x + 3) \cdot (x + 4) = x^2 + 7 \cdot x + 12$

$p = 3 + 4 \qquad q = 3 \cdot 4$

Wenn $x^2 + p \cdot x + q$ in das Produkt zweier Klammern $(x + a) \cdot (x + b)$ zerlegt werden kann, dann gilt: $a + b = p$ und $a \cdot b = q$.

Man beginnt am besten damit, das Absolutglied q in zwei Faktoren zu zerlegen. Diese müssen als Summe den Vorfaktor p ergeben.

Rechnen mit Brüchen

Erweitern

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ mit $k \neq 0$

Beispiele

$\frac{3}{4}$ erweitert mit 5 ergibt $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$.

Kürzen

$\frac{a}{b} = \frac{a:k}{b:k}$ mit $k \neq 0$

$\frac{24}{56}$ gekürzt mit 8 ergibt $\frac{24:8}{56:8} = \frac{3}{7}$.

Addition und Subtraktion bei gleichen Nennern

$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$

$\frac{4}{9} + \frac{11}{9} = \frac{4+11}{9} = \frac{15}{9}$; $\frac{4}{9} - \frac{11}{9} = \frac{4-11}{9} = -\frac{7}{9}$

Addition und Subtraktion bei verschiedenen Nennern

$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a \cdot c \pm b \cdot c}{c \cdot d}$

$\frac{4}{9} + \frac{11}{4} = \frac{4 \cdot 4}{9 \cdot 4} + \frac{11 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 4 + 11 \cdot 9}{9 \cdot 4} = \frac{115}{36}$

$\frac{4}{9} - \frac{11}{4} = \frac{4 \cdot 4}{9 \cdot 4} - \frac{11 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 4 - 11 \cdot 9}{9 \cdot 4} = -\frac{83}{36}$

Multiplikation

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{4 \cdot 9}{3 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{12}{5}$

Division

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

$\frac{-4}{3} : \frac{8}{5} = \frac{-4}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{-4 \cdot 5}{3 \cdot 8} = \frac{-5}{3 \cdot 2} = -\frac{5}{6}$

Potenzen und Logarithmen

Potenzen

$$x^0 = 1 \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad x^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt[n]{x}$$

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \qquad \left(x^a\right)^b = x^{ab}$$

$$x^a \cdot y^a = (x\,y)^a \qquad \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

Logarithmen

$$\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \qquad \log_a(1) = 0 \qquad \log_a(b^x) = x \cdot \log_a(b)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a(b)$$

Terme und Gleichungen

Binomische Formeln $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\quad (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ $\quad x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$ax^2 + bx + c = 0$ $\quad x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Potenzgleichungen $x^n = a \quad (a > 0)$ falls n gerade: $x_{1;2} = \pm \sqrt[n]{a}$

falls n ungerade: $x = \sqrt[n]{a}$

$x^n = a \quad (a < 0)$ falls n ungerade: $x = -\sqrt[n]{-a}$

Exponentialgleichungen $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b) \quad (a,b > 0)$

Lineare Gleichungen

Eine Gleichung, in der die Lösungsvariable nur in der ersten Potenz auftritt, heißt **lineare Gleichung**.

Beispiele

$7x + 4 = \frac{1}{2}(9 - x) + 15$

Lineare Gleichungen mit Formvariablen

Dies sind lineare Gleichungen, die außer der Lösungsvariablen x noch **Formvariablen** enthalten. Als Lösung erhält man einen Term, der die Formvariable mit enthält.
Diesen Term nennt man **Lösungsterm**.

$$x - 3a = 7$$
$$x = 3a + 7$$

$L = \{x \mid x = 3a + 7\}$
oder kurz: $L = \{3a + 7\}$.

Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung wie $2x^2 - 5x + 8 = 0$ heißt **quadratische Gleichung**, da als höchste Potenz der Lösungsvariablen ein quadratischer Term in der Gleichung auftritt. Je nachdem, ob durch den Vorfaktor des quadratischen Terms dividiert wird oder nicht, unterscheidet man die **normierte** und die **allgemeine Form** der quadratischen Gleichung, für die es die folgenden Lösungsformeln gibt:

pq-Formel

Normierte Form: $x^2 + px + q = 0$

Lösungsformel: $x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diskriminante: $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

abc-Formel

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$

Lösungsformel: $x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Diskriminante: $D = b^2 - 4ac$

Die Anzahl der Lösungen hängt von der **Diskriminante** D ab:
Für $D < 0$ gibt es keine Lösung, für $D = 0$ gibt es eine (doppelte) Lösung $x_1 = x_2$, für $D > 0$ gibt es zwei verschiedene Lösungen.

Bruchgleichungen

Eine Gleichung wie $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{2}$, bei der die Lösungsvariable im Nenner eines Bruchterms auftritt, nennt man eine **Bruchgleichung**. Die so genannten Nullstellen $x_1, x_2, \ldots$ der Nenner müssen bei der **Definitionsmenge** ausgeschlossen werden: $\mathbf{D = R \backslash \{x_1, x_2, \ldots\}}$.
Anschließend ermittelt man den Hauptnenner und multipliziert mit diesem. Die entstehende Gleichung enthält dann keine Brüche mehr.

Beispiel

Lösen Sie die Bruchgleichung $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} = 3$.

Bruchgleichungen mit Formvariablen

Das Vorgehen ist im Prinzip wie bei den Bruchgleichungen ohne Formvariablen. Allerdings kommen die Formvariablen bei den Einschränkungen der Definitionsmenge mit ins Spiel, und die Lösungen können meist nur in Abhängigkeit der Formvariablen angegeben werden.

Beispiel

Lösen Sie die Bruchgleichung $1 + \frac{2a}{x} = \frac{x}{x-a}$ nach x auf.

Geben Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit der Formvariablen a an.

Ungleichungen

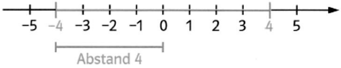
Mit Ungleichungen rechnet man im Prinzip wie mit Gleichungen. Wenn man aber eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, dann ändert sich die Richtung des Größer- bzw. Kleinerzeichens.
Hier werden nur lineare Ungleichungen behandelt, d.h. die Lösungsvariable tritt nur in der ersten Potenz auf.

Beispiel
Lösen Sie die Ungleichung $2x - 9 < 4x - 1$ nach x auf und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

Betragsgleichungen und Betragsungleichungen

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für den Betrag von x: $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geqq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

Auf einer Zahlengeraden entspricht der Betrag einer Zahl dem (positiven) Abstand der Zahl von 0, also dem Ursprung.



$|-4| = |4| = 4$

Zum Lösen einer Betragsgleichung oder Betragsungleichung wird stets eine Fallunterscheidung nach folgendem Prinzip durchgeführt:

I) Der Term zwischen den Betragsstrichen ist größer null:
Betragsstriche durch Klammern ersetzen.

II) Der Term zwischen den Betragsstrichen ist kleiner null:
Zunächst die Betragsstriche durch Klammern ersetzen und dann ein Minuszeichen vor die Klammer setzen.

Potenzgleichungen

Die Gleichung $x^n = a$ nennt man Potenzgleichung; z.B. $x^3 = 125$.

Für die Lösungen von **Potenzgleichungen** der Form $x^n = a$; $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ gilt:

	n gerade	n ungerade
$a > 0$	$\sqrt[n]{a}$ und $-\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	0	0
$a < 0$	keine Lösung	$-\sqrt[n]{\lvert a \rvert}$

Beispiele

Geben Sie die Lösungsmenge der Potenzgleichung an.

a) $x^4 = 5$ b) $x^6 = 0$ c) $x^3 = -8$

Wurzelgleichungen

Steht die Variable unter der Wurzel, spricht man von einer Wurzelgleichung. Beim Lösen von Wurzelgleichungen ist Folgendes zu beachten:

- Der Term unter der Wurzel (Radikand) darf keine negative Zahl ergeben. Dies muss bei der Definitionsmenge berücksichtigt werden.
- Eine Wurzelgleichung der Form $\sqrt[n]{x} = a$ hat für $a < 0$ keine Lösung.
- Oft wird die gegebene Wurzelgleichung potenziert, um sie lösen zu können. Allerdings ist das Potenzieren keine Äquivalenzumformung; diese neue Gleichung hat dann manchmal Lösungen, die nicht für die Wurzelgleichung zutreffen.
- Jede dieser Lösungen muss als Probe in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden; wenn die Probe stimmt, werden die berechneten Zahlen in die Lösungsmenge aufgenommen.

Beispiel Lösen Sie die Wurzelgleichung.

a) $\sqrt[3]{x} = 4$ b) $\sqrt{x + 2} = x$

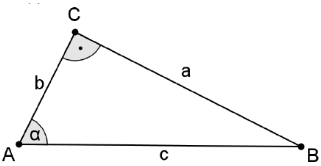
Analytische Geometrie

Mittelpunkt der Strecke AB	$M\left(\frac{a_1+b_1}{2} \mid \frac{a_2+b_2}{2} \mid \frac{a_3+b_3}{2}\right)$
Betrag eines Vektors	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
Einheitsvektor	$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{\lvert\vec{a}\rvert} \cdot \vec{a}$
Skalarprodukt	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\varphi$
Winkel zwischen zwei Vektoren	$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$
Orthogonalität	$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
Geradengleichung	g: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$
Ebenengleichungen	
Parameterform	E: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$
Normalenform	E: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$
Koordinatenform	E: $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = d$
Schnittwinkel	
Gerade – Gerade	$\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\rvert}{\lvert\vec{u}_1\rvert \cdot \lvert\vec{u}_2\rvert}$
Gerade – Ebene	$\sin\varphi = \frac{\lvert\vec{u} \cdot \vec{n}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{n}\rvert}$
Ebene – Ebene	$\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert}$
Abstandsberechnungen	
Punkt – Punkt	$d(A;B) = \left\lvert \overrightarrow{AB} \right\rvert = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}$

Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$

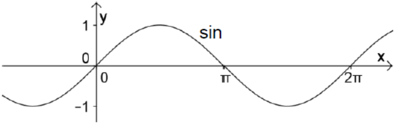
Trigonometrie $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

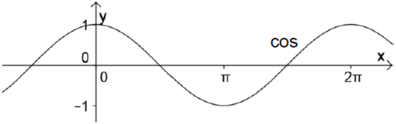
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$



Winkelfunktionen

Gradmaß α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Bogenmaß x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

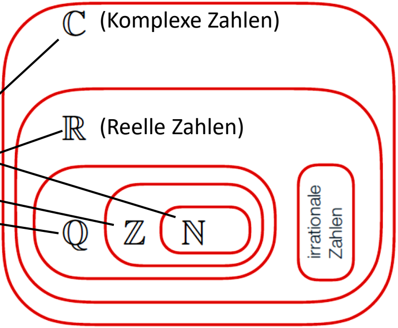




0.7 Einfache Grundlagen - Mathematische Zahlenwelt

Grundlegende Zahlenbereiche

- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$
  - ohne Null $\mathbb{N}^+ := \{1, 2, \ldots\}$
- Ganze Zahlen:
- Rationale Zahlen
  - nichtnegativ
  - positiv
- Reelle Zahlen
  - nichtnegativ
  - positiv
- Komplexe Zahlen



0.7 Einfache Grundlagen - Summenzeichen

Summenzeichen :

Die Summe von n Termen a1, a2, a3, ..., an können wir verkürzt mit dem Symbol Σ („Sigma") schreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Dabei ist i die Laufvariable / der Laufindex, a_i ist der i-te Term einer Summe, 1 und n sind die Unter- und Obergrenzen der Summe.

0.7 Einfache Grundlagen - Summenzeichen

Rechenregeln für das Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \text{ , wenn } m < n$$

$$\sum_{i=1}^{n} b a_i = b \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm c_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} c_i$$

0.7 Einfache Grundlagen - Summenzeichen

Rechenregeln für Doppelsummen

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha \cdot aij = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} aij$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \pm b_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \pm \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}$$

0.7 Einfache Grundlagen - Produktzeichen

Produktzeichen

Das Produkt der Zahlen a1, a2, a3, ..., an können wir verkürzt mit dem Symbol Π („Pi") schreiben:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Fakultät

Ein bekanntes Produkt ist

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Ausgesprochen: „n Fakultät".

Es gilt zudem 0! = 1.

0.8 Literatur

Verwendete Literatur

- Teschl, Mathematik für Informatiker,Springer Vieweg, 4. Auflage
- **Hartmann, Mathematik für Informatiker, Springer-Vieweg, 6. Auflage**
- **Albrecht Beutelspacher, Lineare Algebra, Vieweg**
- Albrecht Beutelspacher, Mathe-Basics zum Studienbeginn, Survival-Kit Mathematik
- Felix Riese, Folienskript Mathematik für Informatiker, Januar-März 2017
- **Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1+2**

Am Ende der jeweiligen Kapitel erfolgt jeweils nochmal eine detaillierte Literaturangabe.