8. Matrizen

#Mathe #Mathe1

PDFs: Präsentation Kommentierungen Übungen

Themen

Definition und Grundoperationen

Definition

Allgemein ist eine Matrix $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ eine rechteckige Anordnung von reellen Zahlen mit m **Zeilen** und n **Spalten**.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 36 & 72 \\ 31 & 96 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_{4\times 2}(\mathbb{R}),$$

$$\begin{pmatrix} 36 & 72 & 425 & \pi \end{pmatrix} \in M_{1\times 4}(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

Rechenoperationen auf der Menge $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

Addition:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Nullelement:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Inverses Element:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gelten das Assoziativitäts- und Kommutationsgesetz bezüglich der Matrizenaddition.

Skalare Multiplikation:
Seien $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 3\lambda \\ 4\lambda & 5\lambda & 6\lambda \end{pmatrix}$$

Analog gelten für $A, B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda B$$
$$(\lambda + \kappa) \cdot A = \lambda \cdot A + \kappa \cdot A$$
$$\lambda \cdot (\kappa \cdot A) = (\lambda \cdot \kappa) \cdot A$$

Erkenntnis

Die Menge der Matrizen mit m Zeilen n Spalten $= M_{m\times n}(\mathbb{R})$ bildet zusammen mit den Operationen Matrizenaddition und der skalaren Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Konvention

Liegt eine Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ vor, so bezeichnet a_{ij} das Matrix Element

- in der **i-ten Zeile** u n d
- in der **j-ten Spalte**

Multiplikation von Matrizen — $\text{Matrix} \times \text{Matrix}$

Definition

Matrizen können mit einander multipliziert werden wenn die Anzahl der Spalten von A der Anzahl der Zeilen von B entspricht.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & a_{i5} \\ x & x & x & x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & x & b_{1j} & x & x \\ x & x & b_{2j} & x & x \\ x & x & b_{3j} & x & x \\ x & x & b_{4j} & x & x \\ x & x & b_{5j} & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & (A \cdot B)_{ij} & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

A ist 4×5 $\qquad$ B ist 5×6 $\qquad$ AB ist 4×6

Das Matrixelement $(A \cdot B)_{ij}$ ist das *Skalarprodukt* zwischen der i-ten Zeile von A und der j-ten Zeile von B (jeweils als Vektor betrachtet), d.h.

$$(AB)_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + a_{i4} \cdot b_{4j} + a_{i5} \cdot b_{5j}$$

Ist A eine $m \times n$ Matrix und B eine $n \times p$ Matrix können wir diese miteinander multiplizieren.
Das *Produkt* ist dann eine $m \times p$ Matrix

$$\begin{pmatrix} m \text{ Zeilen} \\ n \text{ Spalten} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \text{ Zeilen} \\ p \text{ Spalten} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \text{ Zeilen} \\ p \text{ Spalten} \end{pmatrix}$$

Extremfall:
$1 \times n$ Matrix mal $n \times 1$ Matrix ergibt eine 1×1 Matrix, gleichzeitig ist das Ergebnis das Skalarprodukt.

Hinweis

- Man multipliziert zwei Matrizen, in dem man alle Skalaprodukte "Zeile mal Spalte" berechnet.
- Quadratische Matrizen lassen sich nur dann miteinander multiplizieren, wenn sie dieselbe Größe haben.

Regeln / Gesetzmäßigkeiten

- $A \cdot B \neq B \cdot A$ — damit nicht kommutativ
- $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ — linksseitig distributiv
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ — rechtsseitig distributiv
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ — assoziativ

Für quadratische Matrizen $(n \times n)$ gelten folgende Potenzgesetze:

- $A^p = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ — insgesamt p mal
- $(A^p) \cdot (A^q) = A^{(p+q)}$
- $(A^p)^q = A^{p \cdot q}$

Auf der Menge der *quadratischen $n \times n$ - Matritzen* gibt es die sogenannte Einheitsmatrix I_n, deren Diagonale nur aus 1-en besteht und deren restliche Elemente sämtlich den Wert 0 haben. Es gilt für alle Matrizen $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.

Damit gilt auf der Menge $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ bezüglich der Matrizenmultiplikation zwar nicht das Kommutativgestz aber (immerhin) das Assoziativgestz und es gibt ein neutrales Element, die Einheitsmatrix I_n. Für die Gruppeneigenschaft von $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), \cdot)$ fehlen noch die inversen Elemente (siehe inverse Matrix).

Matrizen für elementare Zeilenumformungen

Die im Rahmen des Gauss'schen Eliminationsverfahren kennengelernten und zur Vereinfachung durchgeführten elementaren Zeilen-Opertionen

- Zeilentausch
- Vervielfachung einer Zeile
- Addition / Subtraktion des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
  werden in die Welt der Matrizen abgebildet. Das baut auf der für ein LGS erkannten Struktur

  $$A \cdot x = b$$

  auf und betont den Stellnwert einer Matrix als wesentliches Strukturelement der linearen Algebra.

Permutationsmatrizen

Definition

Eine *Zeilentausch Matrix* oder auch *Permutationsmatrix* $P_{ij} \in M_{m \times m}(K)$, ist die Matrix, die bei **Linksmultiplikation** mit einer Matrix $A \in M_{m \times n}(K)$ bewirkt, dass die Zeilen i und j von A vertauscht werden.

Die *Permutationsmatrix* ist dabei folgendermaßen besetzt:

1. $p_{kk} = 1$ für alle k außer $k = i$ und $k = j$

2. $p_{ij} = p_{ij} = 1$
3. alle sonstigen Matrixelemente haben dern Wert 0

Weiter gilt:

1. eine Permutationsmatrix ist **immer** eine **quadratische Matrix**
2. eine Permutationsmatrix ist **immer invertierbar**. Die Inverse einer Permuationsmatrix ist die Permutationsmatrix selbst, d.h. es gilt $P_{ij} \cdot P_{ih} = I$
3. eine Permutationsmatrix ist weder eine obere noch eine untere Dreiecksmatrix

Beispiele:

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

   Wie lautet die Matrix P_{13}, mit der A von links multipliziert werden muss, um die Zeilen 1 und 3 von A zu vertauschen?

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Denn es gilt:

$$P_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

2. Die zu verändernde Matrix A muss nicht quadratisch sein. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 15 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

   Wie lautet die Matrix P_{13}, mit der A von link multipliziert werden muss, um die Zeilen 1 und 3 von A zu vertauschen?

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Denn es gilt:

$$P_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 15 & 17 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 15 & 15 & 17 & 18 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Die zu verändernde Matrix kann auch ein Vektor sein. Die Zeilen 1 und 2 eines Vektors $\in \mathbb{R}^3$ sollen getauscht werden. Die zugehörige Zeilentausch-Matrix lautet:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denn es gilt (mit dem Beispiel-Vektor):

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to P_{12} \cdot V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eliminationsmatrizen

Definition

Die *Eliminationsamtrix* $E_{ij} \in M_{m \times m}(K)$, die bei einer **Linksmultiplikation** mit einer Matrix $A \in M_{m \times n}(K)$ bewirkt, dass das r-fache der Zeile i zur Zeile j von A addiert wird, ist folgendermaßen besetzt:

1. $e_{kk} = 1$ für alle $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$
2. $e_{ji} = r$
3. alle sonstigen Matrixelemente haben den Wert 0

Weiter gilt:

1. eine Eliminationsmatrix ist **immer** eine **quadratische Matrix**
2. eine Eliminationsmatrix ist **immer invertierbar**; *Beispiel:* die Inverse

der Eliminationsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung

Eine Eliminationsmatrix ist eine **unter** Dreiecksmatrix, wenn gilt $i < j$ gilt. Andernfalss ist sie eine **obere** Dreiecksmatrix.

Beispiele:

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

   Wie lautet die Matrix E_{13}, mit der A von links multipliziert werden muss, um das 2-fache der Zeile 1 zu Zeile 3 von A zu addieren?

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Denn es gilt:

$$E_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 11 & 14 & 17 & 20 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

2. Die zu verändernde Matrix A muss nicht quadratisch sein. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 15 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

   Wie lautet die Matrix E_{12}, mit der A von link multipliziert werden muss, um von Zeile 2 das 7-fache der Zeile 1 von A zu abzuziehen?

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Denn es gilt:

$$E_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 15 & 17 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -24 & -30 \\ 13 & 14 & 15 & 15 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

3. Die zu verändernde Matrix kann auch ein Vektor sein. Die Zeilen 1 und 2 eines Vektors $\in \mathbb{R}^3$ sollen getauscht werden. Die zugehörige Zeilentausch-Matrix lautet:

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denn es gilt (mit dem Beispielvektor):

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to E_{12} \cdot V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Multiplikationsmatrix

Definition

Die *Multiplikationsmatrix* $M_i \in M_{m \times m}(K)$, die bei **Linksmultiplikation** mit einer Matrix $A \in M_{m \times m}(K)$ bewirkt, dass eine Zeile i durch ihr r-faches ersetzt wird, ist folgendermaßen besetzt:

1. $m_{kk} = 1$ für alle $k \in \{1, 2, \ldots, m\} - \{i\}$
2. $m_{ii} = r$
3. alle sonstigen Matrixelemente haben den Wert 0

Es gilt:

1. eine Multiplikationsmatrix ist **immer** eine **quadratische Matrix**
2. eine Multiplikationsmatrix ist **immer invertiverbar**; *Beispiel:* die Inverse der

$$\text{Multiplikationsmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ist die Matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transposition von Matrizen

Definition

Ist Matrix A wie folgt gegeben, dann gilt für die Transponierte Matrix A^T:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})/M_{m\times n}(\mathbb{C})$ entsteht die zu A transponierte Matrix A^T, indem die komplette i-te Zeile (von links nach rechts) von A in die komplette i-te Spalte (von oben nach unten) von A^T überführt wird.

Es entsteht die zu A adjungierte Matrix $A^H = \overline{A}^T$, wenn in A^T zusätzlich jedes Element komplex konjugiert wird. Falls A eine quadratische Matrix $\in M_{n\times n}(\mathbb{R})/M_{n\times n}(\mathbb{C})$ darstellt, sind folgende Spezialfälle zu betrachten:

Definitionen

- Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ wird *symmetrisch* genannt, wenn gilt $A^T = A$, was gleichbedeutend ist mit der Bedingung $a_{ji} = a_{ij}\ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ wird *schiefsymmetrisch* genannt, wenn gilt $A^T = -A$, was gleichbedeuent ist mit der Bedingung $a_{ji} = -a_{ij}\ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ wird *hermitesch* genannt, wenn gilt $A = A^H := \overline{A}^T$, was gleichbedeutend ist mit der Bedingung $a_{ji} = \bar{a}_{ij}\ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Anmerkung:

Für das Standardskalarprodukt $u \cdot v =: (u, v)$ im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ gilt mit $u, v \in \mathbb{R}^n$ bzw. im komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ gilt mit $u, v \in \mathbb{C}^n$ ausgedrückt in Matrixschreibweise

$$(u, v) = u^T \cdot \text{ bzw. } < u, v >= u^T \cdot \bar{v}$$

Rechengesetze

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
3. $(A \cdot x)^T \cdot y = (x^T \cdot A^T) \cdot y = x^T \cdot (A^T \cdot y)$
4. Mit einer gegebenen *symmetrischen* Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt mit dem Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ mit $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$(A \cdot u, v) = (A \cdot u)^T \cdot v = (u^T \cdot A^T) \cdot v = u^T \cdot (A \cdot v) = (u, A \cdot v)$$

5. Mit einer gegebenen *hermiteschen* Matrix A gilt mit dem semilinearen Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$ mit $u, v \in \mathbb{C}^n$

$$< A \cdot u, v >= (A \cdot u)^T \cdot \overline{v} = (u^T \cdot A^T) \cdot \overline{v} = u^T \cdot (\overline{A \cdot v}) =< u, A \cdot v >$$

   Man nennt eine Matrix A mit den Eigenschaften *4*, *5* auch *selbstadjungiert* bezüglich des jeweils betrachteten Skalarprodukt.

Inversion von quadratischen Matrizen

Definition

Eine quadratische Matrix A heißt invertierbar, wenn es eine Matrix A^{-1} gibt, so dass

$$A^{-1} \cdot A = I \text{ und } A \cdot A^{-1} = I$$

mit Einheitsmatrix I.

Matrix A^{-1} heißt *Inverse zu A*.

$Ax = b$ multipliziert mit A^{-1} ergibt:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \iff x = A^{-1}b$$

→ Was A "bewirkt", macht A^{-1} rückgängig.

Nicht alle Matrizen haben eine Inverse.

Bemerkungen zu inversen Matrizen

1. Eine Matrix A kann **keine zwei Inversen** haben
2. Ist A invertierbar, so ist die einzige Lösung der Gleichungm $Ax = b$ durch $x = A^{-1}b$ gegeben
3. Angenommen es gibt eine **von Null verschiedenen** Vektor x mit $Ax = 0$
   Dann kann A **keine Inverse** besitzen
   - Denn keine Matrix kann den Nullvektor 0 wieder in x überführen
   - ist folglich A invertierbar, so ist die einzige Lösung $Ax = 0$ der Nullvektor $x = 0$
4. Eine 2×2-Matrix **ist invertierbar** genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

5. Eine **Diagonalmatrix ist invertierbar**, wenn **keines der Diagonalelemente Null** ist.

$$\text{Für } A = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \text{ gilt } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

Inverse eines Produkts

Definition

Sind A und B invertierbar, dann ist auch ihr **Produkt** AB invertierbar.

Die Inverse von AB ist

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Sätze

1. Die Menge der invertierbaren Matrizen $\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ bildet mit der Operation 'Matrizenmultiplikation' eine Gruppe. Diese Gruppe ist allerdings nicht kommutativ.

2. Wenn $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine inverse Matrix besitzt, so besitzt auch A^T eine Inverse und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

   Beweis: Es gilt

   $$A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I \text{ und } (A^{-1})^T = (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I$$

   was den Satz beweist

Berechnung der inversen Matrix A^{-1} mittels Gauß-Jordan Elimination

Das Eliminationsverfahren berechnet aus der Gleichung $Ax = b$ die Lösung x direkt. Es ermöglicht uns gleichzeitig die Bestimmung von A^{-1}.

Vorgehen

Wir lösen die Gleichung $A \cdot A^{-1} = I$ spaltenweise.

- Produkt von A mit der ersten Spalte von A^{-1} (in diesem Fall x_1), soll die erste Spalte von I ergeben: $Ax_1 = e_1$
- Genauso funktioniert es mit den anderen Spalten von A^{-1} ...

Beispiel für $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$:
Es ergibt sich

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot (x_1\ x_2\ x_3) = (A \cdot x_1\ A \cdot x_3\ A \cdot x_3) = (e_1\ e_2\ e_3)$$

Um eine 3×3 - Matrix zu invertieren, müssen nun die 3 Gleichungen gelöst werden:

$$\begin{aligned} Ax_1 &= e_1 \\ Ax_2 &= e_2 \qquad \text{Vektoren } x_1, x_2 \text{ und } x_3 \text{ sind dann die Spalten von } A^{-1} \\ Ax_3 &= e_3 \end{aligned}$$

Das Verfahren zur Bestimmung von A^{-1} mittels Gauß-Jordan-Verfahren besteht nun darin, simultan 3 Lineare Gleichungssysteme zu lösen.

Während beim Gauss'schen Eliminationsverfahren mittels elementarer Zeilenumformungen eine vorgegebene Matrix in eine obere Dreiecks- oder Trapezform transformiert wird, transformiert die Gauss-Jordan-Elimination die Matrix in Diagonalform, so dass auf der Diagonalen ausschließlich 1-en stehen.

Anmerkung 1:
Die Überführung einer Matrix in die Diagonalform ist nicht für jede Matrix möglich. Notwendiges und hinreichendes Kriterium ist, dass die Matrix invertierbar ist.

Anmerkung 2:
Man kann zeigen, dass eine invertierbare quadratische Matrix sich allein mittels Zeilenumformungen vom Typ 'Elimination' auf Diagonalform transformieren lässt - d.h. man braucht hierfür insbesondere keine Zeilenvertauschung.

Beispiel:
Es gilt die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ zu der die Inverse bestimmt werden soll.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to (\mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -2 & 1 \end{array}\right) \to (-\frac{1}{11} \cdot \mathrm{II}) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{array}\right) \to (\mathrm{I} - 3 \cdot \mathrm{II}) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{array}\right) \to (\frac{1}{2} \cdot \mathrm{I}) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{array}\right)$$

Die Inverse zu der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ lautet demnach $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$

Bevor man sich in den Prozessablauf der Inversenbestimmung mittels Gauss-Jordan-Elimination begibt, ist es sinnvoll, zu prüfen, ob bzw. dass es zur vorgegebenen Matrix überhaupt eine inverse Matrix existiert. Hierfür gibt es verschiedene Kriterien (diese werden im Verlauf der Vorlesung dargestellt).
Ein **Spezialfall**:
Für 2×2 - Matrizen gilt:
Eine 2×2 - Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar genau dann, wenn gilt $ad - bc \neq 0$

Für andere Fälle wird (nach aktuellem Stand) das Gauss-Jordan-Verfahren angewandt, gibt es keine Inverse, so kommt es während der Anwendung zu einem Muster, das Unlösbarkeit signalisiert (linke Seite $= 0$ rechte Seite $\neq 0$)

Orthogonalität von Matrizen

Definition

Eine Matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ heißt orthogonal, wenn für das Skalarprodukt gilt $(Au) \cdot (Av) = u \cdot v$ für beliebige Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Satz

Für eine Matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- A ist orthogonal

- Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis
- Es gilt $A^{-1} = A^T$

Plausibilisierung: Entscheidend für die Erklärung des Satzes ist die Feststellung

$$(Ae_i) \cdot (Ae_j) = (i\text{-te Spalte von } A) \cdot (j\text{-te Spalte von } A) = e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 \text{ falls } i = j \\ 0 \text{ falls } i \neq j \end{cases}$$

wenn e_i, e_j, i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die Standard-Koordinatenvektoren des $\mathbb{R}^n$ darstellen.

Abbildungen von quadratischen Matrizen

Betrachtet sei die Funktion: $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R}), f : A \to f(A)$

Beispiele:

1. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + 4$ — in diese Funktion kann man in der folgenden Weise Matrizen einsetzen und erhalten

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} M_{n\times n} & \to & M_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ A & \to & A^4 + 3 \cdot A^3 - 5 \cdot A^2 + 4 \cdot I_n \end{array} \right\}$$

Konstanten sind hier als Vielfache der passenden Einheitsmatrix I_n zu verstehen

$f(x) = (x-1) \cdot (x+2)^2$ — auch in diese Funktion kann man in der folgenden Weise Matrizen einsetzen und erhalten

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} M_{n\times n} & \to & M_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ A & \to & (A - I_n) \cdot (A + 2 \cdot I_n)^2 \end{array} \right\}$$

Beispielsweise umgesetzt mit $n = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ -8 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 46 \\ -17 & 30 \end{pmatrix}$$

Matrix-Normen

Die Menge $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ bildet zusammen mit den Operationen Matrizenaddition und der skalaren Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Dieser Vektorraum kann durch Einführung einer Matrixnorm zu einem normierten Vektorraum weiterentwickelt werden.
Normen für Matrizen $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$:

1. Die *p-Matrixnorm*: $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
2. Die *Zeilensummennorm*: $\|A\| = \underset{i=1,2,...,m}{max}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$
3. Die *Spaltensummennorm*: $\|A\| = \underset{j=1,2,...,m}{max}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

Für alle Matrixnormen gelten die 3 definierten Eigenschaften einer Norm:

1. $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}, A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
2. $\|A\| = 0 \iff A = 0$ für $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
3. $\|A + B\| < \|A\| + \|B\|$ für $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Beispiel:
Betrachtet sei die 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$. Zu berechnen sind:

1. die 2-Matrixnorm:

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{((-5)^2 + 1^2) + ((-3)^2 + (-4)^2)} = \sqrt{51} \approx 7,14$$

2. die Zeilensummennorm:

$$\|A\| = \underset{i=1,2,...,m}{max}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = max(|-5| + |1|, |-3| + |-4|) = 7$$

3. die Spaltensummennorm:

$$\|A\| = \underset{j=1,2,...,m}{max}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = max(|-5| + |-3|, |1| + |-4|) = 8$$

Weitere Matrixnormen werden nicht behandelt.