Kapitel 8 - Lineare Algebra - Lineare Gleichungssysteme

Rolf Felder

January 27, 2023

8.1 Betrachten Linearer Gleichungssysteme aus (allen) Richtungen

Vektoren und lineare Gleichungen

Zentrale Problemstellung der Linearen Algebra:

Lösen eines Systems von Gleichungen

- Lineare Gleichungen, d.h. die Unbekannten werden nur mit Zahlen multipliziert
- Kein Produkt x mal y taucht auf.

Beispiel für ein lineares System:

$$x - 2y = 1$$
$$3x + 2y = 11$$

Zwei Gleichungen und zwei Unbekannte

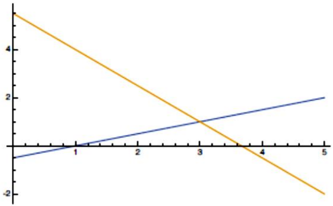
8.1 Betrachten Linearer Gleichungssysteme aus (allen) Richtungen

Vektoren und lineare Gleichungen

Zeilenbild:
$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned}$$

Eine Lösungsmöglichkeit wäre „Zeile für Zeile" vorzugehen:
$$x - 2y = 1 \to y = (x-1)/2$$
$$3x + 2y = 11 \to y = (11-3x)/2$$

Das entsprechen zwei Geraden in der xy-Ebene.
Der Punkt x=3, y=1 liegt auf beiden Geraden und löst beide Gleichungen simultan.
→ Lösung des Systems



8.1 Betrachten Linearer Gleichungssysteme aus (allen) Richtungen

Vektoren und lineare Gleichungen

Spaltenbild

Wir stellen das lineare Gleichungssystem als „Vektorgleichung“ dar:

$$x\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\11\end{pmatrix}$$

Im Spaltenbild suchen wir diejeninge Linearkombination der Vektoren auf der linken Seite, die den Vektor auf der rechten Seite ergibt.

Linearkombination:

$$3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\11\end{pmatrix}$$

8.1 Betrachten Linearer Gleichungssysteme aus (allen) Richtungen

Vektoren und lineare Gleichungen

Matrizengleichung A**x** = **b**:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

- **Zeilenbild:**
  Linke Seite multiplizieren wir zeilenweise

$$1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1$$
$$3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$$

- **Spaltenbild:**
  Spalten kombinieren wir

$3 \cdot$ (1. Spalte) + (2. Spalte)
$\rightarrow$ Vektor der rechten Seite

- **Lösungsvektor x** besteht aus den Zahlen x = 3 und y = 1

- Damit erhalten wir für A**x** = **b**:

8.1 Betrachten Linearer Gleichungssysteme aus (allen) Richtungen

Drei Gleichungen und drei Unbekannte

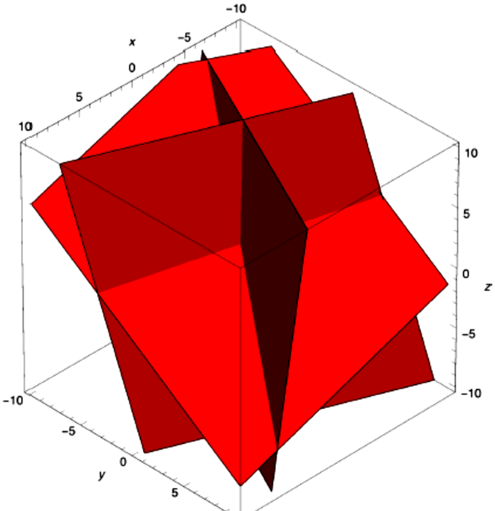
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 5y + 2z &= 4 \\ 6x - 3y + z &= 2 \end{aligned}$$

Wir suchen die Zahlen x, y und z, die alle drei Gleichungen gleichzeitig lösen.

Spaltenbild: Wir kombinieren drei Spalten, um eine vierte zu erzeugen.
Zeilenbild: Wir sehen drei Ebenen, die sich genau in einem Punkt schneiden.

8.1 Betrachten Linearer Gleichungssysteme aus (allen) Richtungen

Interpretation im Zeilenbild



8.1 Betrachten Linearer Gleichungssysteme aus (allen) Richtungen

Darstellung des Spaltenbilds

Vektorielle Schreibweise für die drei Gleichungen:

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix}$$

Unbekannte x, y und z sind die Koeffizienten dieser Linearkombination.

Man benötigt x = 0, y = 0, z = 2 als Koeffizienten.

8.1 Betrachten Linearer Gleichungssysteme aus (allen) Richtungen

Matrixform der Gleichungen

Wir erhalten in Matrixform eine 3 × 3-Matrix

Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrixform A**x = b**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren also A mit den Unbekannten **x**, um die rechte Seite **b** zu erhalten.

→ **Matrixmultiplikation**

8.2 Praxis des Gauss'schen Eliminationsverfahrens

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems hat sich das Gauss'sche Eliminationsverfahren als praktikables Lösungsverfahren etabliert, was immer angewendet werden kann und immer zu einer Lösung führt und welches relativ einfach zu programmieren ist.

An den folgenden drei Beispielen soll das Gauss'sche Eliminationsverfahren dargestellt werden (zunächst Beschränkung auf den Spezialfall 3 Gleichungen - 3 Unbekannte sowie auf das reine Doing (ohne theoretischen Unterbau))

Beispiel-1 : Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\begin{gathered} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{gathered}$$

Beispiel-2 : Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\begin{gathered} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{gathered}$$

Beispiel-3 : Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\begin{gathered} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5 \\ 4x_1 - 8x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4 \end{gathered}$$

8.2 Praxis des Gauss'schen Eliminationsverfahrens

Lösungsprozess Beispiel-1 : Startschema $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 2 & -1 & -3 & | & -8 \\ -3 & 2 & 2 & | & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(II-2·I, III+3·I)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & -7 & -5 & | & -10 \\ 0 & 11 & 5 & | & 10 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\text{(III+II, (-1)·)II} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 7 & 5 & | & 10 \\ 0 & 4 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(III} \leftrightarrow \text{II)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 7 & 5 & | & 10 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\text{(II : 4)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 7 & 5 & | & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(III-7 ·II)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(III:5)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rückwärtselimination} \rightarrow x_3 = 2, x_2 = 0, x_1 = -1$$

Das lineare Gleichungssystem aus Beispiel 1 besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung.

8.2 Praxis des Gauss'schen Eliminationsverfahrens

Lösungsprozess Beispiel-2 : Startschema $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & | & 4 \\ 2 & 0 & -4 & | & -2 \\ -1 & 5 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{II-2}\cdot\text{I, III+I}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & | & 4 \\ 0 & -10 & 0 & | & -10 \\ 0 & 10 & 0 & | & 10 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(\text{III+II}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & | & 4 \\ 0 & -10 & 0 & | & -10 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{II:(-10)}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Rückwärtselimination $\rightarrow x_2 = 1, x_1 = -1 + 2 \cdot x_3 \rightarrow$ Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \Rightarrow$$

Das lineare Gleichungssystem aus Beispiel 2 besitzt unendlich viele Lösungen.

Die Menge $\mathbb{L}$ ist eine Nebenklasse $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U$, wobei U $=$

Unterraum **Gerade durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor** $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8.2 Praxis des Gauss'schen Eliminationsverfahrens

Lösungsprozess Beispiel-3 : Startschema $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & | & 5 \\ 4 & 0 & -8 & | & 2 \\ 1 & -5 & -2 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(II-4·I, III-I)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & | & 5 \\ 0 & -20 & 0 & | & -18 \\ 0 & -10 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\text{(II:(-2))} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & | & 5 \\ 0 & 10 & 0 & | & 9 \\ 0 & -10 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(III+II)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & | & 5 \\ 0 & 10 & 0 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & | & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Die letzte Gleichung des umgeformten Gleichungssystems lautet 0=8. Das ist unmöglich $\Rightarrow$ Das lineare Gleichungssystem aus Beispiel 3 besitzt keine Lösung.

8.2 Praxis des Gauss'schen Eliminationsverfahrens

Ergebnis Beispiel-1 : Typisches Ergebnisbild für eindeutige Lösbarkeit bei einem $3 \times 3-$System $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \neq 0 & x & x & | & x \\ 0 & x \neq 0 & x & | & x \\ 0 & 0 & x \neq 0 & | & x \end{pmatrix}$$

Ergebnis Beispiel-2 : Typisches Ergebnisbild für unendliche viele Lösungen bei einem $3 \times 3-$System $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \neq 0 & x & x & | & x \\ 0 & x \neq 0 & x & | & x \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Ergebnis Beispiel-3 : Typisches Ergebnisbild für Unlösbarkeit bei einem $3 \times 3-$System $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \neq 0 & x & x & | & x \\ 0 & x \neq 0 & x & | & x \\ 0 & 0 & 0 & | & x \neq 0 \end{pmatrix}$$

8.2 Praxis des Gauss'schen Eliminationsverfahrens

Beim Vorgehen zur Lösung der 3 Beispiele von Linearen Gleichungssystemen (LGS) haben wir vorausgesetzt, dass die folgenden Eingiffe in das Gleichungssystem die Lösungsmenge nicht verändern :

- Multiplikation einer Zeile mit einem skalaren (reellen) Vielfachen
- Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Vertauschung zweier Zeilen

Warum diese Voraussetzung erfüllt ist, begründen wir in Kapitel 9. Dort werden wir noch allgemeiner formulieren : Folgende **elementaren Zeilenumformungen** im Schema eines Linearen Gleichungssystems (LGS) verändern die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht

1. Vertauschung zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit einem skalaren (reellen) Vielfachen (allgemein einem Körperelement)
3. Addition des beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (das können auch negative Vielfache sein $\rightarrow$ Subtraktion)

Wichtig : Beim Gauss'schen Eliminationsverfahren beschränken wir uns ausschliesslich auf Zeilenoperationen. Auch analoge Spaltenoperationen wären möglich. Diese haben aber z.B. bei einem Spaltentausch zur Konsequenz, dass sich die Aufeinanderfolge der Variablen verändert, was zusätzlichen Ballast bedeutet, so dass wir hierauf an dieser Stelle verzichten.

8.2 Praxis des Gauss'schen Eliminationsverfahrens

Zusammenfassung und Verallgemeinerung auf $n \times n-$Systeme :

Zur Lösung eines linearen n $\times$n-Gleichungssystems (n Gleichungen mit n Unbekannten) wird das Gauss'sche Eliminationsverfahren genutzt. Dieses besteht aus zwei aufeinanderfolgenden Schritten

1. Der Vorwärtselimination
2. der Rückwärtselimination

8.2 Praxis des Gauss'schen Eliminationsverfahrens

Die Vorwärtselimination :

- Festlegung einer Zeile des Gleichungssystems als erste Pivotzeile. Dies ist eine Zeile des Gleichungssystems, in der der Koeffizient von $x_1 \neq 0$ ist - eine solche Zeile muss es geben. Diese Zeile ist die oberste Zeile des Gleichungssystems - im Bedarfsfall nach Durchführung eines Zeilentausches.
- In allen Zeilen ab der zweiten Zeile wird der Koeffzient von x_1 eliminiert, in dem zu der jeweiligen Zeile ein geeignetes Vielfaches der ersten Zeile addiert wird. Nach diesem Schritt ist in allen Zeilen, ausser der ersten Zeile, die Unbekannte x_1 verschwunden.
- Festlegung einer Zeile des Gleichungssystems (ab der zweiten Zeile) als zweite Pivotzeile. Dies ist eine Zeile des Gleichungssystems, in der der Koeffizient von $x_2 \neq 0$ ist - wenn es diese gibt (falls nicht, mache mit x_3 weiter). Diese Zeile ist die zweite Zeile des Gleichungssystems - im Bedarfsfall wieder nach Durchführung eines Zeilentausches.
- In allen Zeilen ab der dritten Zeile wird der Koeffzient von x_2 eliminiert, in dem zu der jeweiligen Zeile ein geeignetes Vielfaches der zweiten Zeile addiert wird. Nach diesem Schritt ist in allen Zeilen, ausser (der ersten und) der zweiten Zeile, die Unbekannte x_2 verschwunden.
- .....

Mit diesem Verfahren wird sukzessive solange fortgefahren,

- bis die n-te Zeile Pivotzeile ist (genau eine Lösung) o d e r
- bis die k-te Zeile ($k < n$) Pivotzeile ist und unterhalb dieser Zeile nur Nullzeilen auftreten (unendlich viele Lösungen) o d e r
- eine Zeile 0=x≠0 auftritt (keine Lösung)

8.2 Praxis des Gauss'schen Eliminationsverfahrens

Die Rückwärtselimination (im Falle genau einer oder ∞ vieler Lösungen) :

- Beginnend mit der letzten von der Nullzeile verschiedenen Zeile des nach dem letzten Schritt der Vorwärtselimination vorliegenden Gleichungssystems ist nach einer Unbekannten aufzulösen. Die letzte Zeile sei die k-te Zeile. Dann ist nach dem ganz links stehenden x_i aufzulösen.
- Der nach der Auflösung vorliegende Ausdruck für x_j ist in die (k-1)-te Gleichung einzusetzen. Diese ist nach dem ganz links stehenden x_j aufzulösen.
- In die (k-2)-te Gleichung sind die für x_j, x_i vorliegenden Ausdrücke einzusetzen ; anschliessend ist diese nach dem dort ganz links stehenden x_l aufzulösen
- ....
- ....
- In die erste Gleichung sind alle für $x_i, x_j, x_l, \ldots$ erhaltenen Ausdrücke einzusetzen. Diese ist dann nach x_1 aufzulösen.

Die Lösungsmenge sind nun alle Vektoren $(.., x_i, .., x_j, .., x_l, ..)$. Alle x_m, nach denen im Laufe der Rückwärtselimination nicht aufgelöst wurde, können frei gewählt werden.

8.3 Ausblick und Stand zur Lösung eines LGS

Folgende Erweiterungen sind möglich

- Das Verfahren der Gauss-Elimination ist anwendbar für alle Gleichungssysteme aus m Gleichungen mit n Unbekannten (n=m (quadratisch), n > m, n <m)
- bei der Anwendung des Verfahrens können entspr. der Beispiele Ergebnisbilder

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} x\neq 0 & x & x & x & .. & x & x \\ 0 & x\neq 0 & x & x & .. & x & x \\ . & . & . & . & .. & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & x\neq 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & .. & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ bei eindeutiger Lösbarkeit}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} x\neq 0 & x & x & x & x & .. & x & x \\ 0 & x\neq 0 & x & x & x & .. & x & x \\ . & . & . & . & . & .. & . & . \\ 0 & 0 & 0 & .. & x\neq 0 & .. & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & .. & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ bei } \infty \text{ vielen Lösungen}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x\neq 0 & x & x & .. & x & x \\ 0 & x\neq 0 & x & .. & x & x \\ . & . & . & .. & . & . \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & x\neq 0 \end{array}\right) \text{ bei Unlösbarkeit auftreten.}$$

- Es können auch größere Stufen als 1 in der Dreiecks-/Trapezform auftreten

8.3 Ausblick und Stand zur Lösung eines LGS

Bisher wurde erreicht

- jedes lineare Gleichungssystem aus m Gleichungen mit n Unbekannten kann nun (auch ohne letzte Klärung der Theorie) mittels der 'Mechanik' des Gauss'schen Eliminationsverfahrens auf obere Dreiecks-/Trapezform transformiert werden, aus welcher die Lösung / die Lösungsvielfalt - im Falle ihrer Exixtenz -mittels Rückwärtselimination sofort abgeleitet werden kann.

Noch offen sind Antworten auf Fragen

- Wieso führt das Verfahren immer zum Ziel ?
- Wieso verändern die im Gauss'schen Eliminationsverfahren verwendeten Zeilenoperationen die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystem nicht ?
- Welche Struktur hat die Lösungsmenge eines Gleichungssystems ?
- Wie sehe ich einem Gleichungssystem an, ob es eindeutig, unendlich vielfach oder gar nicht lösbar ist, ohne das Gleichungssystem zu lösen ?
- Gibt es weitere Verfahren zur Lösung eines LGS ? Antwort : Ja, es gibt (teilweise in Spezialfällen) diverse vollkommen unterschiedliche Lösungsverfahren. Einige dieser Verfahren und die Rahmenbedingungen ihrer Anwendbarkeit werden im Laufe dieser Vorlesung besprochen - es gibt aber noch viele, viele mehr - aber

Ganz wichtig : Das Gauss'sche Eliminationsverfahren funktioniert immer und man kann es relativ einfach programmieren.

8.3 Ausblick und Stand zur Lösung eines LGS - Üben und Verstehen

Übung 1 : Prüfen Sie die Lösbarkeit der folgenden Gleichungssysteme und geben Sie ggf. die Lösungen an

- LGS 1 :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -4x_1 & - & 8x_2 & - & 3x_3 & = & 7 \\ -2x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & = & -6 \end{array}$$

- LGS-2 :

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Übung 2 : Welche Bedingung müssen die reellen Zahlen a, b erfüllen, damit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcc} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a+b \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & a-b \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 2b \end{array}$$

lösbar ist.

8.4 Was ist mitzunehmen

- Mechanik und Funktionsweise des Gauss'schen Eliminationsverfahrens ist zu können und anzuwenden auf beliebige Gleichungssysteme - speziell auf quadratische Gleichungssysteme

- Begriff **elementare Zeilenumformungen** mitnehmen und immer wissen, dass damit die Umformungen

  1. Vertauschung zweier Zeilen
  2. Multiplikation einer Zeile mit einem skalaren (reellen) Vielfachen (allgemein einem Körperelement)
  3. Addition des beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (das können auch negative Vielfache sein $\rightarrow$ Subtraktion)

  gemeint sind.

8.5 Einsatzgebiete Lineare Gleichungssysteme in der Informatik

Lineare Gleichungssysteme sind elementar und omnipräsent in vielen Anwendungen und Anwendungsgebieten der Informatik

8.6 Verwendete Literatur

Peter Hartmann Mathematik für Informatiker, Kapitel 8.1

8.7 Üben und Verstehen

Zum Üben und Verstehen - Übungsblatt 8 - Aufgaben 1 - 6