Übungsblatt-8 Lineare Algebra (Lineare Gleichungssysteme-Kap.8)-Lösungen

Benutzen Sie bei der Lösung der Aufgaben 1 - 6 ausschliesslich das Gauss'sche Eliminationsverfahren. Stellen Sie selbst fest, dass Sie mit seiner Hilfe immer zu einem brauchbaren Ergebnis kommen, das dann, je nach Aufgabenstellung, noch weiterzuverwerten ist.

Aufgabe 1 : Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 18 \\ 3x_1 + 13x_2 + 4x_3 &= 30 \end{aligned} \;.$$

Lösung Aufgabe 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 1 & 7 & 4 & | & 18 \\ 3 & 13 & 4 & | & 30 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(II-I, III+3} \cdot \text{I)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 5 & 4 & | & 15 \\ 0 & 7 & 4 & | & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(II/5)} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & | & 3 \\ 0 & 7 & 4 & | & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(III - 7} \cdot \text{II)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & | & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{5} & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 0, x_2 = 3, x_1 = -3.$$

Aufgabe 2 : Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_4 &= -5 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 8 \end{aligned} \;.$$

Lösung Aufgabe 2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 & 1 & | & 0 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & | & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(I} \leftrightarrow \text{II)} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -1 & | & -5 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & | & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\text{(III - 2} \cdot \text{I,IV - 3} \cdot \text{I)} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -1 & | & -5 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & | & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & | & 12 \\ 0 & 13 & 2 & 5 & | & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(3} \cdot \text{III,3} \cdot \text{IV)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -1 & | & -5 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & | & 0 \\ 0 & 21 & 6 & 12 & | & 36 \\ 0 & 39 & 6 & 15 & | & 69 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{III - 7$\cdot$ II, IV - 13$\cdot$ II}) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -1 & | & -5 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 41 & 5 & | & 36 \\ 0 & 0 & 71 & 2 & | & 69 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (\text{IV - III}) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -1 & | & -5 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 41 & 5 & | & 36 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & | & 33 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{III} \leftrightarrow \text{VI}) \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -1 & | & -5 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 30 & -3 & | & 33 \\ 0 & 0 & 41 & 5 & | & 36 \end{pmatrix} \rightarrow (\ \tfrac{1}{3}\cdot \text{III}) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -1 & | & -5 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -1 & | & 11 \\ 0 & 0 & 41 & 5 & | & 36 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (10 \cdot \text{VI}) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -1 & | & -5 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -1 & | & 11 \\ 0 & 0 & 410 & 50 & | & 360 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{IV -41$\cdot$ III}) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -1 & | & -5 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -1 & | & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 91 & | & -91 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow x_4 = -1, x_3 = 1, x_2 = 2, x_1 = 0$

Aufgabe 3 : Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a_1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= a_2. \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= a_3 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & a_1 \\ 5 & 4 & -5 & | & a_2 \\ 3 & 2 & -1 & | & a_3 \end{pmatrix} \rightarrow (II - 5 \cdot I, III - 3 \cdot I) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & a_1 \\ 0 & -1 & -10 & | & -5a_1 + a_2 \\ 0 & -1 & -4 & | & -3a_1 + a_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (III - II) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & a_1 \\ 0 & -1 & -10 & | & -5a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 6 & | & 2a_1 - a_2 + a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 = -a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{3}{2}a_3 \\ x_2 = \frac{5}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 - \frac{5}{3}a_3 \\ x_3 = \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{6}a_2 + \frac{1}{6}a_3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 : Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a_1 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 &= a_2. \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= a_3 \end{aligned}$$

Welcher Zusammenhang muss zwischen a_1, a_2, a_3 bestehen, damit das Gleichungssystem **(1)** keine Lösung und **(2)** unendlich viele Lösungen besitzt.

Lösung Aufgabe 4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & a_1 \\ 5 & 4 & 1 & | & a_2 \\ 3 & 2 & -1 & | & a_3 \end{pmatrix} \to (II - 5 \cdot I, III - 3 \cdot I) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & a_1 \\ 0 & -1 & -4 & | & -5a_1 + a_2 \\ 0 & -1 & -4 & | & -3a_1 + a_3 \end{pmatrix}$$

$$\to (III - II) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & a_1 \\ 0 & -1 & -4 & | & -5a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2a_1 - a_2 + a_3 \end{pmatrix}$$

zu **(1)** : Das LGS hat keine Lösung, wenn gilt : $2a_1 - a_2 + a_3 \neq 0$.

zu **(2)** : Das LGS hat ∞ viele Lösungen, wenn gilt : $2a_1 - a_2 + a_3 = 0$.

Aufgabe 5 : Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} t \cdot x_1 + x_3 &= 0 \\ t \cdot x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + t \cdot x_3 &= 0 \end{aligned} \quad .$$

Stellen Sie fest, für welche $t \in \mathbb{R}$ das LGS a) genau eine b) unendlich viele Lösungen besitzt. Ist es möglich, dass das Gleichungssystem gar keine Lösung besitzt ?

Lösung Aufgabe 5 :

1. Fall : t=0 : Dann nimmt die Koeeffizientenmatrix des Gleichungssystems die folgende Form an

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to (\text{I} \longleftrightarrow \text{III}) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to (\text{III-II}) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

was bedeutet, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

2. Fall : $t \neq 0$. Dann nimmt die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems die folgende Form an

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & t & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & t & | & 0 \end{pmatrix} \to (\text{I} \longleftrightarrow \text{III}) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & | & 0 \\ 0 & t & 1 & | & 0 \\ t & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to (\text{III - t} \cdot \text{I}) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & | & 0 \\ 0 & t & 1 & | & 0 \\ 0 & -t & 1 - t^2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to (\text{III} + \text{II}\ ) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & \mid & 0 \\ 0 & t & 1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 2-t^2 & \mid & 0 \end{pmatrix}$$

Fall a) : $t^2 = 2 \Longrightarrow (2-t^2) \cdot x_3 = 0$ ist für unendlich viele Werte x_3 erfüllt $\Longrightarrow$ Es gibt unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems.

Fall b) : $t^2 \neq 2 \Longrightarrow x_3 = 0$. Damit impliziert die zweite Gleichung, da $t \neq 0$, dass $x_2 = 0$. Damit ergibt sich aus der ersten Gleichung, dass auch $x_1 = 0$ gelten muss. Damit hat das Gleichungssystem in diesem Fall genau eine Lösung.

Damit gilt : Das Gleichungssystem hat im Fall $t \in \{-\sqrt{2}, 0, +\sqrt{2}\}$ unendlich viele Lösungen und andernfalls genau eine Lösung nämlich die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Grundsätzlich gilt : Ein homogenes linares Gleichungssystem hat immer mindestens eine Lösung - nämlich die triviale Lösung x=0. Es kann also nicht sein, dass das in der Aufgabe betrachtete Gleichungssystem gar keine Lösung besitzt.

Aufgabe 6 : Zeigen Sie, dass die Menge der Lösungen des LGS

$$\begin{gathered} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 8x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 0 \end{gathered}$$

einen reellen Vektorraum darstellt.

Lösung Aufgabe 6 : Bestimme zunächst die Lösungsmenge für das gegebene LGS.

am besten 1. Spalte an einer Stelle auf 1 bringen

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & \mid & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & \mid & 0 \\ 8 & 9 & 3 & 9 & \mid & 0 \end{pmatrix} \to (II - I) \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & \mid & 0 \\ -1 & -6 & 0 & -3 & \mid & 0 \\ 8 & 9 & 3 & 9 & \mid & 0 \end{pmatrix} \to (I \leftrightarrow II) \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 & -3 & \mid & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & \mid & 0 \\ 8 & 9 & 3 & 9 & \mid & 0 \end{pmatrix} \to (II + 3 \times I, III + 8 \times I) \to \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 & -3 & \mid & 0 \\ 0 & -13 & 1 & -5 & \mid & 0 \\ 0 & -39 & 3 & -15 & \mid & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to (III - 3 \times II) \to \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 & -3 & \mid & 0 \\ 0 & -13 & 1 & -5 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix}$$

Rückwärtselimination liefert : $x_3 = 13x_2 + 5x_4, x_1 = -6x_2 - 3x_4$, was die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \\ 13x_2 + 5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ergibt, die einen Vektorraum, nämlich den von den beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Unterraum des $\mathbb{R}^4$, darstellt.