Übungsblatt-3 Lineare Algebra (Relationen/Abbildungen) - Kapitel 3 - Lösungen

Aufgabe 1 : Welche der folgenden Relationen sind reflexiv/nicht reflexiv, symmetrisch/nicht symmetrisch, transitiv/nicht transitiv ? Welche Relationen sind demzufolge Äquivalenzrelationen?

a) Relation $R_a \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{N}$ mit der Definition $xR_ay :\Leftrightarrow x^a - y^a = ax - ay$
b) Relation $\text{mod}_a \subseteq \mathbb{Z}^2$ für ein a$\in \mathbb{N}$ mit der Definition $x\text{mod}_ay \Leftrightarrow \frac{x-y}{a} \in \mathbb{Z}$
c) Relation R $\subseteq \mathbb{Z}^2$ mit der Definition xRy $\Leftrightarrow x + y$ ist gerade
d) Relation R $\subseteq \mathbb{N}^2$ mit der Definition xRy $\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1} : y = ax^b$.

Lösung zu Aufgabe 1 :

a)Reflexivität : Es gilt $xR_ax :\Leftrightarrow x^a - x^a = ax - ax = 0$, was stimmt. Somit ist R_a reflexiv.

Symmetrie : Es gilt $xR_ay :\Leftrightarrow x^a - y^a = ax - ay$. Dann gilt aber trivialerweise auch $yR_ax :\Leftrightarrow y^a - x^a = ay - ax$. Somit ist R_a auch symmetrisch.

Transitivität : Gelte $xR_ay :\Leftrightarrow x^a - y^a = ax - ay$ sowie $yR_az :\Leftrightarrow y^a - z^a = ay - az \Longrightarrow$

$x^a - y^a = ax - ay$ und $y^a - z^a = ay - az \Longrightarrow$ Addition der beiden Gleichungen führt zu

$(x^a - y^a) + (y^a - z^a) = (ax - ay) + (ay - az) \Longleftrightarrow x^a - z^a = ax - az \Longleftrightarrow xR_az$. Damit ist die Relation R_a transitiv.

R_a **ist Äquivalenzrelation**.

b)Reflexivität :$x\text{mod}_ax \Leftrightarrow \frac{x-x}{a} \in \mathbb{Z}$, was trivialerweise gilt.

Symmetrie : $x\text{mod}_ay \Leftrightarrow \frac{x-y}{a} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{y-x}{a} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y\text{mod}_ax$. Damit liegt Symmetrie vor.

Transitivität :

$x\text{mod}_ay \Leftrightarrow \frac{x-y}{a} \in \mathbb{Z}$

$y\text{mod}_az \Leftrightarrow \frac{y-z}{a} \in \mathbb{Z}$

Durch Addition ergibt sich sofort : $\frac{x-y}{a} + \frac{y-z}{a} = \frac{x-z}{a}$, ein Bruch, der natürlich auch in der Menge der ganzen Zahlen liegt, da die Summe von zwei ganzen Zahlen wieder eine ganze Zahl ergibt. Damit ist mod_a auch transitiv.

mod_a **ist Äquivalenzrelation.**

c)Reflexivität : Es gilt : xRx $\Leftrightarrow x + x$ ist gerade, was stimmt, da das doppelte einer ganzen Zahl immer eine gerade Zahl ist.

Symmetrie : xRy $\Leftrightarrow x + y$ ist eine gerade Zahl. Damit ist auch $y + x$ eine gerade Zahl, was gleichbedeutend ist mit yRx.

Transitivität : Gelte xRy $\Leftrightarrow x + y$ ist eine gerade Zahl und yRz $\Leftrightarrow y + z$ ist eine gerade Zahl $\Longleftrightarrow (x + y) + (y + z) = x + 2y + z$ ist eine gerade Zahl (,a die summe von zwei geraden Zahlen wieder eine gerade Zahl darstellt). Nun ist 2y eine gerade Zahl und damit auch x+z, was gleichbedeutend damit ist, dass gilt xRz. Damit ist R auch transitiv.

R ist Äquivalenzrelation.

d)Reflexivität : xRx $\Longleftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1} : x = ax^b$, was mit $a = b = 1$ erfüllt ist. R ist damit reflexiv.

Symmetrie : Es gilt 2R4, denn es gilt $4 = 1 \cdot 2^2$. Die Gleichung $2 = a \cdot 4^b$ mit $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist nicht möglich. Damit gilt nicht 4R2. Damit ist R nicht symmetrisch.

Transitivität : Gelte xRy $\Longleftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1} : y = ax^b$ und yRz $\Longleftrightarrow \exists c, d \in \mathbb{N}_{\geq 1} : z = cy^d \Rightarrow z = cy^d = c \cdot (ax^b)^d = c \cdot a^d \cdot x^{b \cdot d}$ mit $c \cdot a^d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sowie $b \cdot d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Damit ist R transitiv.

R ist keine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 2 : Betrachten Sie die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Hierauf wird die folgende Relation $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ definiert.

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation darstellt.

Bestimmen Sie $[(2, 2)], [(2, 5)], [(10, 1)]$. Wieviele Äquivalenzklassen gibt es ?

Lösung Aufgabe 2:

Reflexivität: $(a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow a + b = b + a$, was stimmt. Damit ist $\sim$ reflexiv.

Symmetrie : $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Longleftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$, was Symmetrie bedeutet.

Transitivität : Gelte $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ und $(c, d) \sim (e, f) \Leftrightarrow c + f = d + e$. Damit gelten die beiden Gleichungen $a + d = b + c$ (1) und $d + e = c + f$ (2). Bilde die Differenz der beiden Gleichungen (1)-(2) und erhalte : $a - e = b - f \Longleftrightarrow a + f = b + e \Longleftrightarrow (a, b) \sim (e, f)$. Damit ist $\sim$ transitiv.

Bestimmung der Äquivalenzklassen :

Es gilt $(2, 2) \sim (c, d) \Leftrightarrow 2 + d = 2 + c \Longleftrightarrow c = d$. Damit ist $[(2, 2)]$ die Menge aller Paare von natürlichen Zahlen, die in beiden Komponenten übereinstimmen.

Es gilt $(2, 5) \sim (c, d) \Leftrightarrow 2 + d = 5 + c \Longleftrightarrow d - c = 3$. Damit ist $[(2, 5)]$ die Menge aller Paare von natürlichen Zahlen, bei denen die Differenz der zweiten Komponente und der ersten Komponente +3 beträgt.

Es gilt $(10, 1) \sim (c, d) \Leftrightarrow 10 + d = 1 + c \Longleftrightarrow c - d = 9$. Damit ist $[(10, 1)]$ die Menge aller Paare von natürlichen Zahlen, bei denen die Differenz der ersten Komponente und der zweiten Komponente +9 beträgt.

Aus den 3 Beispielen ergibt sich, dass es unendlich viele Äquivalenzklassen gibt.

Aufgabe 3 :
a) Gegeben seien $A = \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}, B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Geben Sie alle Elemente der folgenden Relationen exakt an :

- $R_1 \subseteq A \times B$ mit der Definition $aR_1b \Leftrightarrow a < b$
- $R_2 \subseteq A \times B$ mit der Definition $aR_2b \Leftrightarrow a = b$

b) Es sei folgende Relation R definiert : $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $xRy \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : x^n = y$. Prüfen Sie, ob die folgenden Paare in R liegen : $(2, 4), (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (3, 3), (3, 6)$.

Lösung Aufgabe 3 :

a) $R_1 = \{(3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (7, 8)\}$.

$R_2 = \{(5, 5), (7, 7)\}$.

b) $(2, 4) \in R \Leftrightarrow 2R4 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : 2^n = 4$, was erfüllbar ist mit n=2.

$(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \in R \Leftrightarrow \sqrt{2}R2\sqrt{2} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : (\sqrt{2})^n = 2\sqrt{2}$, was erfüllbar ist mit n = 3.

$(3, 3) \in R \Leftrightarrow 3R3 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : 3^n = 3$, was erfüllbar ist mit n=1.

$(3, 6) \in R \Leftrightarrow 3R6 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : 3^n = 6$, was für kein n$\in \mathbb{N}$ erfüllbar ist.

Aufgabe 4 :

a) Gegeben sind die Mengen $A = \{a, b, c\}, B = \{x, y, z\}, C = \{u, v\}$ und die Relationen $R = \{(a, x), (b, x), (c, y), (c, z)\}$ und $S = \{(x, u), (z, v)\}$.
Geben Sie an (i) R^{-1} (ii) $S \circ R$.

b) Es sei die Relation $R = \{(a, c), (a, d), (b, b), (c, d), (d, a), (d, b)\}$ auf der Menge $M = \{a, b, c, d\}$ gegeben. Bilden Sie die Relationen (i) $R^2 = R \circ R$ (ii) $R^3 = R \circ (R \circ R) = (R \circ R) \circ R$ (überzeugen Sie sich von der Gültigkeit der letzten Gleichung)

Lösung zu Aufgabe 4 :

a) (i) $R^{-1} = \{(x, a), (x, b), (y, c), (z, c)\}$, (ii) $S \circ R = \{(a, u), (b, u), (c, v)\}$

b) (i) $R^2 = \{(a, d), (a, a), (a, b), (b, b), (c, a), (c, b), (d, c), (d, d), (d, b)\} =$

$$\{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (c, a), (c, b), (d, b), (d, c), (d, d)\}.$$

(ii) $R \circ (R \circ R) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, d)\}$

sowie

$$(R \circ R) \circ R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, d)\},$$

was übereinstimmt.

Aufgabe 5 : Überprüfen Sie, ob folgende Abbildungen surjektiv beziehungsweise injektiv sind : a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x+y, y+z)$ b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, x+y, y)$

Lösung Aufgabe 5 :
a) Die Abbildung ist nicht injektiv. Beispiel : Es gilt $(1, 2, 1) \mapsto (3, 3)$ und $(-1, 4, -1) \mapsto (3, 3)$, d.h. 2 verschiedene Elemente werden auf das gleiche Bild abgebildet.
Die Abbildung ist surjektiv : Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann muss gelten $(x + y, y + z) = (a, b) \Leftrightarrow x + y = a, y + z = b \Leftrightarrow x = a - y, z = b - y$. Wähle y beliebig und bestimme dann x, z gemäß der beiden Gleichungen.

b) Die Abbildung ist injektiv : Gelte $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1, x_1 + y_1, y_1) = (x_2, x_2 + y_2, y_2)$ so folgt sofort $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, was bedeutet $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
Die Abbildung ist nicht surjektiv : Beispielsweise kann zu (1,3,1) kein Urbild gefunden werden.

Aufgabe 6 : Zeigen Sie, dass die Mächtigkeit der Potenzmenge **P(M)** einer endlichen Menge **M** den Wert $2^{|M|}$ besitzt, indem Sie eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der $|M|-$stelligen Dualzahlen und **P(M)** definieren.
Lösung Aufgabe 6 : Die Menge M habe $n = |M|$ Elemente $\{a_0, a_1, ..., a_{n-1}\}$. Betrachte die folgende Abbildung ($0 \leq i_0 < i_1 < ... < i_k \leq n-1, D_n =$ Menge der n-stelligen Dualzahlen)

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} P(M) & \to & D_n \\ \emptyset & \mapsto & 0 \\ \{a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_k}\} & \mapsto & 2^{i_k} + ... + 2^{i_1} + 2^{i_0} \end{array} \right\}$$

Die Abbildung φ ist injektiv und surjektiv, die Menge D_n hat bekanntermassen die Mächtigkeit 2^n, was impliziert, dass gilt $P(M) = n = |M|$.