Seite 14 : Lösung der Übungen

Aufgabe 1 : $z_1 = -4i$
$z_2 = 3-2i$
$z_3 = -1+i$

a) $z_1 - 2 \cdot z_2 + 3 \cdot z_3 =$
$-4i - 2 \cdot (3-2i) + 3 \cdot (-1+i) =$
$-9 + 3i$

b) $2 \cdot z_1 \cdot \overline{z_2} = 2 \cdot (-4i) \cdot (3+2i)$
$= (-8i) \cdot (3+2i)$
$= 16 - 24i$

c) $\dfrac{\overline{z_1}}{z_3} = \dfrac{+4i}{-1+i} = \dfrac{+4i \cdot (-1-i)}{(-1+i) \cdot (-1-i)} =$
$= \dfrac{4-4i}{2} = 2 - 2i$

Aufgabe 2 :

a) $z = 4 - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

b) $z = -2 - 6i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} =$
$\sqrt{40}$

c) $z = -3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$
$= 5$

Seite 15 — Anmerkungen zur Körper-Definition der komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl $a + i \cdot b = z$ könnte man auch als Vektor schreiben in der Form $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Man würde dann folgendes definieren:

(1) $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$

(2) Nullelement bzgl. '+' ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) Inversen Elmt zu $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bzgl. '+' ist $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 \\ a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$

(5) Eins-Elmt bzgl '$\cdot$' ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(6) Inverses Elmt zu $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bzgl. '$\cdot$' ist $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$

Lösung Übung Seite 20 :

(i) $z_1 = 3 - i$ (z_1 liegt im 4. Quadranten)

Bestimme

- $|z_1| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$
- $\varphi_1 = \left\{\begin{array}{l} 360^\circ + \arctan\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 341.5651^\circ \\ \text{bzw.} \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 5.8614 \end{array}\right\}$

Polarform : $z_1 = |z_1| \cdot e^{i\cdot\varphi_1} = \ldots$

trigonometrische Form : $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)$

(ii) $z_2 = -6 + 8i$ (z_2 liegt im 2. Quadranten)

Bestimme

- $|z_2| = \sqrt{(-6)^2+8^2} = \sqrt{36+64} = 10$
- $\varphi_2 = \left\{\begin{array}{l} 180^\circ + \arctan\frac{8}{-6} \approx 126.8699^\circ \\ \text{bzw.} \\ \pi + \arctan\frac{8}{-6} \approx 2.2143 \end{array}\right.$

Polarform : $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\cdot\varphi_2}$

trigonometrische Form : $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)$

(iii) $z_3 = -2 - 6i$ (z_3 liegt im 3. Quadranten)

Bestimme

- $|z_3| = \sqrt{(-2)^2+(-6)^2} = \sqrt{40}$
- $\varphi_3 = \left\{\begin{array}{l} 180^\circ + \arctan\frac{-6}{-2} \approx 251.5651 \\ \text{bzw} \\ \pi + \arctan\frac{-6}{-2} \approx 4.3906 \end{array}\right\}$

Polarform : $z_3 = |z_3| \cdot e^{i\cdot\varphi_3}$

trigonometrische Form : $z_3 = |z_3| \cdot (\cos\varphi_3 + i\cdot\sin\varphi_3)$

Lösung Übung Seite 21

$z = -6 + 8i$ (z liegt im 2. Quadranten)

Es gilt

① $|z| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$

② $\varphi = \begin{cases} 180° + \arctan\frac{8}{-6} \approx 126.8699 \\ \pi + \arctan\frac{8}{-6} \approx 2.2143 \end{cases}$

③ $z^4 = |z|^4 \cdot \left(\cos(4 \cdot \varphi) + i \cdot \sin(4 \cdot \varphi)\right)$

$\approx 10000 \cdot (-0.8432 + i \cdot 0.5376)$

$= -8432 + 5376 \cdot i$

Direktes berechnen

$(-6 + 8i)^4$

mittels TR ergibt genau das Ergebnis.

Seite 22 – Lösung der Übung

$z = 625$

Es gilt

- $|z| = 625$
- $\varphi = \begin{cases} 0^\circ \\ \text{bzw.} \\ 0 \end{cases}$

Für die vier 4. Wurzeln aus 625 gilt

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt[4]{625} \cdot e^{i \cdot \frac{0^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4}} = 5 \cdot (\cos 0^\circ + i \cdot \sin 0^\circ) \\ \quad = 5 \\ a_1 = \sqrt[4]{625} \cdot e^{i \cdot \frac{0^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4}} = 5 \cdot (\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ) \\ \quad = 5 \cdot i \\ a_2 = \sqrt[4]{625} \cdot e^{i \cdot \frac{0^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4}} = 5 \cdot (\cos 180^\circ + i \cdot \sin 180^\circ) \\ \quad = -5 \\ a_3 = \sqrt[4]{625} \cdot e^{i \cdot \frac{0^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4}} = \\ \quad 5 \cdot \cos(270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ) \\ \quad = -5 \cdot i \end{cases}$$

In der reellen Welt besitzt 625 die beiden 4. Wurzeln +5, −5. In der komplexen Welt besitzt 625 die vier 4. Wurzeln +5, +5i, −5, −5i.