Seite 10 — Lösung der Übungsaufgaben

Übung 1

(1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$ $\neq$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ $=$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Übung 2:

(1) Ist allgemein gültig gemäß Distributivgesetz für die Matrizenmultiplik.

(2) $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - A \cdot B + B \cdot A - B^2$

$\neq A^2 - B^2$, weil i.a. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Übung 3:

1) $A \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$, $B \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$, $C \in M_{2\times4}(\mathbb{R})$, $D \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$

somit sind möglich

$A \cdot B$, $B \cdot A$, $D \cdot A$, $B \cdot C$, $B \cdot D$, $D \cdot C$

2) a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -1 \\ 43 & 23 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 6 & 24 \\ -7 & -9 & -1 \\ 9 & 15 & -3 \end{pmatrix}$

c) $B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 8 & 6 \\ -7 & -23 & -2 & -4 \\ 11 & 39 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

d) $D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 3 \\ 10 & 20 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Übung 4:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_4 = 7 \end{array} \right\} \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 - 1 \cdot x_4 = 4 \\ 0 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 = 0 \\ 2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 7 \end{array} \right\} \iff$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{=:x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}}_{=:b}$$

Seite 12 – Beantwortung der Fragen

Frage 1:

$$P_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Frage 2:

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seite 15 – Beantwortung der Fragen

Frage 1: ... von Zeile 1 ist das 3-fache der Zeile 4 abzuziehen ...

$$E_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Frage 2: ... Zum 2-fachen der Zeile 2 ist die Zeile 3 zu addieren ...

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seite 21 – Erläuterungen

(2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

am Beispiel zweier Matrizen

$A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23}\cdot b_{32} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} \\ a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23}\cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11}\cdot a_{11} + b_{21}\cdot a_{12} + b_{31}\cdot a_{13} & b_{11}\cdot a_{21} + b_{21}\cdot a_{22} + b_{31}\cdot a_{23} \\ b_{12}\cdot a_{11} + b_{22}\cdot a_{12} + b_{32}\cdot a_{13} & b_{12}\cdot a_{21} + b_{22}\cdot a_{22} + b_{32}\cdot a_{23} \end{pmatrix}$$

Somit gilt

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T,$$

was die allgemeine Regel in diesem Spezialfall bestätigt.

Seite 22 – Lösung der Übungen

Übung 1:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Übung 2:

A ist schiefsymmetrisch,
B ist symmetrisch, C ist schiefsymmetrisch.

Übung 3:

Für eine schiefsymmetrische Matrix gilt: $a_{ij} = -a_{ji}$ $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ $\Longrightarrow$ $a_{ii} = -a_{ii}$ $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ $\Longleftrightarrow$ $2 \cdot a_{ii} = 0$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$

$\Longleftrightarrow$ $a_{ii} = 0$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ $\Longleftrightarrow$

Jede schiefsymmetrische Matrix besteht auf ihrer Hauptdiagonalen aus lauter Nullen.

Nur die Null-Matrix ist sowohl symmetrisch als auch schiefsymmetrisch.

Notwendiges Kriterium hermitescher Matrix:

$$a_{ji} = \overline{a_{ij}} \Longrightarrow \forall_{i \in \{1,\dots,n\}} : a_{ii} = \overline{a_{ii}} \Longrightarrow$$

Bei einer hermiteschen Matrix sind die Diagonalelemente sämtlich reell.

Übung 4: Es muß gelten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2\cdot i \\ -i & 0 & 1 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = A^H = \begin{pmatrix} 1 & \overline{(-i)} & \overline{b} \\ \overline{a} & 0 & \overline{c} \\ \overline{2i} & \overline{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad a = \overline{(-i)} = i$$

$$\overline{b} = 2i \Longleftrightarrow b = -2i$$

$$c = \overline{1} \Longleftrightarrow c = 1,$$

so daß gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2\cdot i \\ -i & 0 & 1 \\ -2i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seite 25 – Begründungen und Erläuterungen

Zu 1.: Annahme: A hat zwei Inverse B, C, d.h. es gilt

$$A \cdot B = B \cdot A = I \text{ und}$$
$$A \cdot C = C \cdot A = I$$

Dann gilt: $B = B \cdot I = B \cdot (A \cdot C)$
$$= (B \cdot A) \cdot C = I \cdot C = C$$

Zu 2.: D.h., wenn die quadratische Matrix A invertierbar ist, so hat das LGS
$A \cdot x = b$ genau eine Lösung, die man zudem durch Links-Multiplikation der "rechten Seite" des LGS mit der Inversen von A sofort ausrechnen kann.

Zu 3.: Es gelte $Ax = 0$ mit $x \neq 0$, $A \in Mat_n(\mathbb{R})$. Wenn es eine Inverse A^{-1} gäbe, so könnte man schließen

$$Ax = 0 \Longleftrightarrow A^{-1} \cdot (Ax) = (A^{-1}A) \cdot x$$
$$= I \cdot x = x = 0 \lightning$$

Zu 4: Begründung durch Nachrechnen.

Zu 5: Begründung durch Nachrechnen

Seite 34 – Lösung der Übungen

Übung 1: (A ist invertierbar, weil $2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2 \neq 0$)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II - 2 \times I} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I - 3 \times II} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I : 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Übung 2 : Führe das Gauss-Jordan-Verfahren für die Matrix A durch

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III - I]{II - 2 \times I}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III - 3 \times II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{III : (-4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \xrightarrow[II - III]{I - III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II} \times (-1)]{\text{I} + 2\times\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Das Gauss-Jordan-Verfahren kommt zum Abschluss, was die Invertierbarkeit von A beweist.

Führe das Gauss-Jordan-Verfahren für die Matrix B durch :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} - \text{I}]{\text{II} + 2\times\text{I}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} + \text{II}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad ↯$$

Hier tritt das bekannte Unlösbarkeitsmuster auf – die Matrix B ist damit nicht invertierbar und die Inverse ist daher nicht angebbar.

Seite 35 – Lösung der Übung

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$