Kapitel 3 Diskrete Mathematik - Relation und Abbildung

Rolf Felder

January 12, 2023

3.1 Relationen

Relationen

Definition
Es seien A und B Mengen und A x B ihr kartesisches Produkt.
Dann bezeichnet man **jede Teilmenge R** von A x B als (binäre) **Relation** auf A x B.
Ist **A = B**, so spricht man von einer **binären Relation** auf A.

Erinnerung:
Das kartesische Produkt zweier Mengen A und B ist die Menge $A \times B := \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$

Eine Teilmenge R hiervon wäre z.B. wie folgt definiert:
$R = \{(a,b)\ :\ a \in A,\ b \in B,\ \text{sowie weitere Bedingungen an a und b}\}$

3.1 Relationen

Grundlagen über Relationen - Beispiele

Beispiele

1. Seien $A := B := \mathbb{R}$

$$R := \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \land \underbrace{x = -y}_{\text{weitere Bedingung}} \}$$

   Elemente dieser Relation sind dann z.B. $(1,-1), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0,0)$

   Kein Element ist z.B. (1,2)

   Man sagt: „x und y stehen in Relation, wenn x=-y ist“

2. Es seien $A = B = \mathbb{N}$. Das kartesische Produkt ist hier eine Menge aller Pärchen natürlicher Zahlen.

$$R = \{(n,m) \ : \ n,m \in \mathbb{N}, \ n < m\}$$

   In dieser Relation liegen nur Pärchen, bei denen der erste Eintrag kleiner ist als der zweite.

   Z.B. (2,3) und (1,18), aber nicht (8,3).

3.1 Relationen

Definition
Ist $R \subseteq M \times N$ eine Relation, so nennt man die durch die Vertauschung der Komponenten entstehende Relation $R^{-1} = \{(y, x) \ : \ (x, y) \in R\} \subseteq N \times M$ die zu R gehörende **Umkehrrelation**.

Zu jeder Relation R existiert eine Umkehrrelation.

Definition : Aus 2 Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ kann man eine neue Relation , **die Verkettung (oder Verknüpfung oder das Produkt) der beiden Relationen**, bilden :

$S \circ R = \{(a, c) |$ Es gibt ein $b \in B,$ mit $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in S\} \subseteq A \times C.$

Beispiel 1 : Gegeben sind $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}, C = \{7, 8, 9\}$ und die Relationen $R = \{(1, 4), (2, 6)\} \subset A \times B$, $S = \{(4, 7), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (6, 8)\}$ $\subset B \times C$. Dann gilt $S \circ R = \{(1, 7), (2, 8)\} \subset A \times C$.

Beispiel 2 : Gegeben seien A, B, C wie in Beispiel 1 sowie die Relationen $R = \{(3, 5)\} \subset A \times B, S = \{(4, 7), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (6, 8)\} \subset B \times C$. Dann gilt $S \circ R = \{(3, 7), (3, 8), (3, 9)\} \subset A \times C$.

3.1 Relationen

Anmerkung : Für $(a, b) \in R$ schreibt man auch aRb, was heißt

- a und b erfüllen R **oder**
- a steht in Relation zu b

In dem Konstrukt aRb tritt R als **Infixoperator** auf.

Im Unterschied hierzu gibt es auch die sog. **Prefix-Notation** $R\ a\ b$ sowie eine **Postfix-Notation** $a\ b\ R$, die wir in dieser Vorlesung nicht gebrauchen.

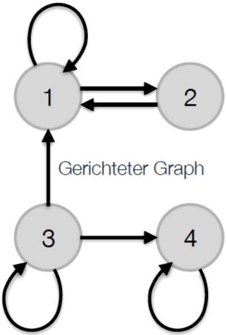
3.1 Relationen

Darstellung von Relationen

Mengendarstellung: { (1,1), (1,2), (2,1), (3,1), (3,3), (3,4), (4,4) }

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix



x	y
1	1
1	2
2	1
3	1
3	3
3	4
4	4

Tabelle

Aufgabe : Stellen Sie folgende Relation als Graph dar:

$$R := \{(x,y) \ : \ x,y \in \{0,1,2,3,4\} \text{ und } x \leq y\}$$

3.1 Relationen

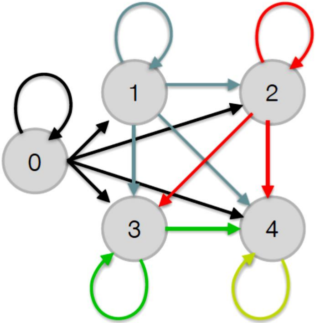
Lösung :

Stellen Sie folgende Relation als Graph dar:

$$R := \{(x, y) \; : \; x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ und } x \le y\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Vollständigkeit halber:
Matrixdarstellung



Der Vollständigkeit halber:
Darstellung als Tabelle

x	y
0	0
0	1
0	2
0	3
0	4
1	1
1	2
1	3
1	4
2	2
2	3
2	4
3	3
3	4
4	4

3.1 Relationen

Darstellung von Relationen - Gerichtete Graphen

Ist V eine endliche Menge und R eine Relation auf V, so ist auch R endlich.

Das Objekt (V,R) kann häufig **graphisch** dargestellt werden:
Die Elemente von V werden als Punkte in der Ebene repräsentiert und zwei Punkte x, y aus V durch einen gerichtete Pfeil oder Bogen von x nach y verbindet, genau wenn xRy gilt.

Die Elemente von V nennt man Punkte/ Ecken/ Knoten, während die Elemente aus R gerichtete Kanten heißen.

Das Paar (V,R) ist ein gerichteter Graph oder auch ein Digraph.

3.1 Relationen

Betrachtet seien nun Relationen R auf einer Menge A d.h. $R \subseteq A \times A$. **Dann kann eine solche Relation u.a. folgende Eigenschaften haben :**

1. **Reflexiv :**
$$\forall a \in \mathrm{A} : (a, a) \in R$$
2. **Symmetrisch :**
$$\forall a, b \in \mathrm{A} : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$
3. **Transitiv :**
$$\forall a, b, c \in \mathrm{A} : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

Zur Beachtung : Wenn nicht ausdrücklich ausgeschlossen, können **a**, **b** und ggf. noch **c** auch die gleichen Objekte sein.

3.2 Äquivalenzrelationen

Definition : Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie **reflexiv, symmetrisch und transitiv** ist.

Definition : Sei R eine Äquivalenzrelation auf $A \times A$. Dann bezeichnet für ein beliebiges $a \in A$ die Menge $[a] = \{x \in A | (a, x) \in R\}$ die **Äquivalenzklasse** von a bezgl. R. a nennt man einen **Repräsentanten der Äquivalenzklasse**.

Beispiel 1 : Relation

$$Q = \{(n, m) | n, m \in \mathbb{N}, n \text{ und } m \text{ haben die gleiche Quersumme } \} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

- Warum ist Q eine Äquivalenzrelation ?
- Zu nennen sind 3 Elemente der Äquivalenzklasse [1003] - wieviele Elemente besitzt diese Äquivalenzklasse ?
- Was ist das Ergebnis der Vereinigung aller Äquivalenzklassen ?
- Wieviele Äquivalenzklassen gibt es ?

3.2 Äquivalenzrelationen

Beispiel 2 : Relation $R = \{(a,b)|5 \text{ teilt } a-b \Longleftrightarrow 5 \text{ teilt } b-a\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Handelt es sich bei R um eine Äquivalenzrelation ? Wenn ja, welches sind die Äquivalenzklassen von R?

Lösung : Begründe, dass R eine Äquivalenzrelation ist

- **Reflexivität :** Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig, dann gilt sicherlich $5|(a-a)$, was gleichbedeutend mit $(a,a) \in R$ ist.
- **Symmetrie :** Sei $(a,b) \in R$, dann gilt $5|(a-b)$. Dann gilt aber trivialerweise auch $5|(b-a)$, was gleichbedeutend ist mit $(b,a) \in R$.
- **Transitivität :** Seien $(a,b),(b,c) \in R$ betrachtet - dann gilt

$$5|(a-b) \text{ und } 5|(b-c) \Rightarrow 5|((a-b)+(b-c)) \Longleftrightarrow 5|(a-c),$$

  was gleichbedeutend damit ist, dass $(a,c) \in R$.

Gehen wir nun auf die Suche nach den zu R gehörigen Äquivalenzklassen. Nehme hierzu eine beliebige Zahl aus $\mathbb{Z}$ her - diese sei z.B. die Zahl 1 - und betrachte

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z}|(1,x) \in R\} = \{x \in \mathbb{Z}|5|(1-x) \Leftrightarrow 5|(x-1)\} = \{\ldots -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
[2] &= \{x \in \mathbb{Z}|(2,x) \in R\} = \{x \in \mathbb{Z}|5|(2-x) \Leftrightarrow 5|(x-2)\} = \{\ldots -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\} \\
[3] &= \{x \in \mathbb{Z}|(3,x) \in R\} = \{x \in \mathbb{Z}|5|(3-x) \Leftrightarrow 5|(x-3)\} = \{\ldots -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\} \\
[4] &= \{x \in \mathbb{Z}|(4,x) \in R\} = \{x \in \mathbb{Z}|5|(4-x) \Leftrightarrow 5|(x-4)\} = \{\ldots -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\} \\
[5] &= \{x \in \mathbb{Z}|(5,x) \in R\} = \{x \in \mathbb{Z}|5|(5-x) \Leftrightarrow 5|(x-5)\} = \{\ldots -5, 0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}
\end{aligned}$$

wonach es wieder von vorne losgeht, so dass sich die 5 Äquivalenzklassen $[0] = [5], [1], [2], [3], [4]$ ergeben.

3.2 Äquivalenzrelationen

Nach Betrachtung der 2 Beispiele erscheinen die folgenden beiden Erkenntnisse plausibel

Satz : Zwei Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation sind **entweder gleich oder disjunkt**.

Beweis / Plausibilisierung : Gelte $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow \exists x : xRa \wedge xRb$.

Sei nun

$$u \in [a] \Rightarrow uRa \Rightarrow uRa \wedge aRx \wedge xRb \Rightarrow uRb \Leftrightarrow u \in [b] \Rightarrow [a] \subseteq [b],$$

und sei umgekehrt

$$v \in [b] \Rightarrow vRb \Rightarrow vRb \wedge bRx \wedge xRa \Rightarrow vRa \Leftrightarrow v \in [a] \Rightarrow [b] \subseteq [a],$$

was $[a] = [b]$ impliziert. Das gemeinsame Element x fungiert praktisch als Brücke zwischen den beiden Äquivalenzklassen, was diese aufgrund der Transitivität gleichmacht.

Satz : Die **Menge der Äquivalenzklassen** induziert eine **Zerlegung**, eine sogenannte **Partition** der Basismenge der betrachteten Äquivalenzrelation in dem Sinne, dass die **Vereinigungsmenge aller Äquivalenzklassen gleich der Basismenge** ist.

3.2 Üben und Verstehen

Übungen :

Übung 1 : Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?

- $A =$ Menge aller Schüler einer Stufe
  $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ und } y \text{ gehen in die gleiche Schulklasse}\}$
- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
  $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$

Übung 2 : Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen

1. $a \mathrm{~R~} b \Longleftrightarrow a \cdot b$ ist gerade Zahl (auf $\mathbb{Z}$)
2. $a \mathrm{~R~} b \Longleftrightarrow a \cdot b$ ist nichtnegative Zahl (auf $\mathbb{Z}$)
3. $a \mathrm{~R~} b \Longleftrightarrow a \cdot b$ ist nichtnegative Zahl (auf $\mathbb{Z} - \{0\}$)

Wie lauten ggf. die zur Äquivalenzrelation gehörigen Äquivalenzklassen ?

3.3 Ordnungsrelationen

Neben den Äquivalenzrelationen ist ein zweiter Typ von Relationen verbreitet - der Typ der **Ordnungsrelationen**. Hierzu benötigen wir zwei weitere Detaileigenschaften, die eine Relation haben kann :

Betrachtet seien wieder Relationen R auf einer Menge A d.h. $R \subseteq A \times A$. **Dann kann eine solche Relation folgende weitere Eigenschaften haben :**

1. **Antisymmetrisch :**

$$\forall a, b \in \text{ A } : (a, b) \in R \textbf{ und } (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

2. **Asymmetrisch :**

$$\forall a, b \in \text{ A } : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$$

3.3 Ordnungsrelationen

Nach diesem Vorspann können wir nun eine Ordnungsrelation definieren.

Definition

Eine Relation R auf einer Menge A heißt Ordnung(srelation), wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Beispiel 1 : Eine typische Ordnung ist die Relation $\leq$ auf der Menge der natürlichen, der ganzen, der rationalen oder auch der reellen Zahlen.

Zu jeder Ordnung R gibt es eine zugehörige strikte Ordnung, die folgend definiert wird.

Definition

Eine Relation R in einer Menge A heißt strikte Ordnung(srelation), wenn sie asymmetrisch und transitiv ist.

Beispiel 2 : Die zur Ordnungsrelation $\leq$ gehörige strikte Ordnungsrelation auf der Menge der natürlichen, der ganzen, der rationalen oder auch der reellen Zahlen ist die strikte Ordnungsrelation $<$.

3.3 Ordnungsrelationen

Weitere Beispiele :

- **Beispiel 3 :** Die Teilmengenrelation $A \subseteq B$ auf der Potenzmenge $P(\Omega)$ einer Menge Ω ist eine Ordnung. Die zugehörige strikte Ordnung ist $A \subset B$ (echte Teilmenge, also $A \neq B$).

- **Beispiel 4 :** Die Relation ,a teilt b' ist eine Ordnung in den ganzen Zahlen. Die zugehörige strikte Ordnung ist ,a teilt b' und a $\neq$ b.

- **Beispiel 5 :** Die Menge aller Zeichenketten (Strings) kann mit der lexikographischen Ordnung versehen werden, indem man zunächst den einzelnen Zeichen natürliche Zahlen zuweist (z.B. gemäß ASCII-Code oder Platzierung im Alphabet bei Zeichenketten, die nur aus Buchstaben bestehen). Dann vergleicht man die Strings von links nach rechts Zeichen für Zeichen (unter Verwendung der Ordnung auf $\mathbb{N}$, wobei die erste Stelle, an der sich die Strings unterscheiden, den Ausschlag gibt. Zum Beispiel : abc $\leq$ aca (,da b $\leq$ c).

3.3 Ordnungsrelationen

Definition

Zwei Elemente a und b aus A heissen vergleichbar bezüglich der Ordnungsrelation R, wenn aRb oder bRa gilt. Wenn bezüglich einer Ordnung je zwei verschiedene Elemente miteinander vergleichbar sind, so spricht man von einer totalen Ordnung, andernfalls von einer partiellen Ordnung (oder Halbordnung).

Beispiele :

1. $a \leq b$ ist eine totale Ordnung auf der Menge der natürlichen Zahlen, denn für 2 Zahlen a, b gilt immer $a \leq b$ oder $b \leq a$.

2. Die Teilmengenbeziehung $\subseteq$ ist eine partielle Ordnung, denn bei zwei Mengen muss nicht notwendigerweise eine Menge in der anderen enthalten sein.

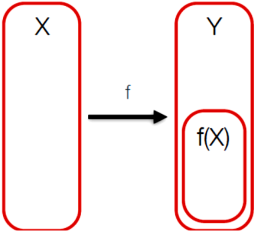
3.4 Abbildungen

Abbildungen

Abbildung f: $f \; : \; X \to Y \; , \; x \mapsto f(x) = y$

Definitionsbereich von f   Wertebereich von f

Man liest: „f ist die Abbildung von X nach Y, die x nach f(x) abbildet."



Abbildungen werden häufig mit f bezeichnet. f: X → Y
Dabei ist die Menge **X** der **Definitionsbereich**
und die Menge **Y** der **Wertebereich** von f.

Anmerkungen :

- Bei einer Abbildung wird jedem x des Definitionsbereiches X **genau ein** y des Wertebereiches Y zugeordnet
- Die Abbildung f kann auf jedes $x \in X$ angewendet werden
- Nicht jedes $y \in Y$ muss als Wert der Abbildung f angenommen werden

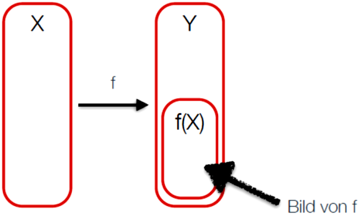
3.4 Abbildungen

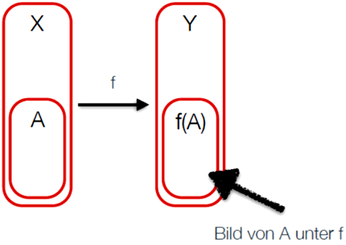
Definition: Bild

Bild von f: $$f(X) := \{y \in Y \mid \exists x \in X \; : \; f(x) = y\}$$

Das zu jedem x ∊ X gehörende eindeutige y ∊ Y mit (x,y) ∊ f wird meist als f(x) bezeichnet.

f(x) ist das Bild von x unter f.



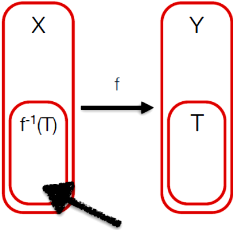


Anmerkung : Im Vergleich zum Wertebereich wird jedes Element der Menge $f(X)$ als Wert der Abbildung f angenommen. **Bild- und Wertebereich** einer Abbildung f sind deshalb immer genau zu unterscheiden. Immer gilt $f(X) \subseteq Y$.

3.4 Abbildungen

Definition: Urbild

Urbild von T unter f: $f^{-1}(T) = \{x \in X \mid f(x) \in T\}$ mit $T \subseteq Y$



Insbesondere gilt $y \neq z \Rightarrow f^{-1}(y) \neq f^{-1}(z)$. Andernfalls würden zwei identische Elemente aus X auf verschiedene Elemente in Y abgebildet, was der Eigenschaft einer Abbildung widerspricht. Sprachlich ausgedrückt : Zu **ungleichen Bildern** gehören **ungleiche Urbilder**.

3.4 Abbildungen

Eigenschaften einer Abbildung :

Definition
Sei f eine Abbildung von X nach Y.
- Man nennt f **injektiv**, wenn keine zwei verschiedene Elemente von X auf dasselbe Element von Y abgebildet werden.
- Man nennt f **surjektiv**, wenn es zu jedem Element y in Y ein x in X gibt mit f(x) = y.
- Man nennt eine Abbildung **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Anmerkungen :

- Injektivität einer vorgegebenen Abbildung f kann man üblicherweise auf zwei Arten zeigen. Gemäß Definition der Injektivität gilt

  f injektiv $\Leftrightarrow$ Keine 2 verschiedene Elemente werden auf dasselbe Element abgebildet

  $$\Leftrightarrow [a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)] \Leftrightarrow [\neg(f(a) \neq f(b)) \Rightarrow \neg(a \neq b)] \Leftrightarrow [f(a) = f(b) \Rightarrow a = b]$$

  Art 1 : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ und **Art 2 :** $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

- Surjektivität bedeutet $f(X) = Y$ d.h. **Bildbereich von X = Wertebereich von f**.
- Ist f injektiv oder sogar bijektiv, so kann die Abbildung f^{-1} gebildet werden. Diese Abbildung wird Umkehrabbildung von f genannt und wird mit f^{-1} bezeichnet. f^{-1} ist eine Abbildung von Y nach X.

3.4 Üben und Verstehen

Aufgabe : Entscheiden Sie, welche der Eigenschaften

- injektiv
- surjektiv
- bijektiv

die folgenden Abbildungen jeweils haben ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$)

a) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(n) = n + 1$
b) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n + 1$
c) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(n, m) = n + m$
d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(n) = n^2$
e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, f(n) = n^2$

3.5 Gleichmächtigkeit von Mengen

Frage : Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente ?

Antwort : Wenn es eine Zahl n gibt, so dass die eine Menge n Elemente hat und die andere Menge ebenso.

Fragen zum Verständnis :

- Wenn es sich um endliche Mengen handelt : Müssen wir die Elemente beider Mengen wirklich zählen ?
- Was machen wir, wenn es sich um unendliche Mengen handelt ? Gibt es z.B. mehr natürliche Zahlen als es Quadratzahlen gibt ?

In dieser Notlage kommt uns der Begriff der **Abbildung** zu Hilfe, den wir an dieser Stelle nutzbringend zum Einsatz bringen können :

Definition : Zwei Mengen **A** und **B** heißen **gleichmächtig** , wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

Bemerkungen :

- Zur Erkennung der Gleich- bzw. Ungleichmächtigkeit bilden wir praktisch Paare aus $A \times B$. Wenn dann Einzelexemplare übrig bleiben, die keinen Partner finden, so sind die Mengen nicht gleich mächtig.
- Wenn zwei Mengen **A** und **B** gleichmächtig sind, gibt es damit natürlich auch eine bijektive Abbildung $g : B \to A$, nämlich $g = f^{-1}$.

3.5 Gleichmächtigkeit von Mengen

Wir haben nun alle Mittel, um zwei Mengen bezgl. ihrer Mächtigkeit miteinander zu vergleichen :

- Bei endlichen Mengen können wir zählen oder eine geeignete Abbildung definieren
- Bei unendlichen Mengen können wir nicht zählen - hier bleibt nur der Weg, eine geeignete Abbildung zu definieren und diese hinsichtlich Bijektivität zu untersuchen.

Streng genommen ist noch kurz zu verifizieren, dass zwei endliche Mengen gemäß der gegebenen abstrakten Definition gleichmächtig sind, wenn diese gleich viele Elemente haben. Akzeptieren wir an dieser Stelle, dass dies klar ist.

Betrachtet seien nun ein paar nichttriviale und (vielleicht) unterhaltsame Beispiele :

Beispiel 1 : Gibt es mehr natürliche Zahlen als Quadratzahlen ? Was meinen Sie ?

Beispiel 2 : Ist die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ von gleicher Mächtigkeit wie die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$? Was meinen Sie ?

Beispiel 3 : Ist die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ von größerer Mächtigkeit als die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$? (Beweis hierzu : **Cantors erstes Diagonalargument)**

3.5 Gleichmächtigkeit von Mengen

Abschliessende Anmerkungen :

- Vorsicht bei endlichen Mengen : Genau zu sagen, wie mächtig eine endliche Menge ist, ist manchmal nicht trivial und bedarf mitunter weiterer Hilfen - z.B. dem mathematischen Gebiet der **Kombinatorik**.

  Ein Beispiel für eine endliche Menge nichttrivialer Mächtigkeit ist die Potenzmenge einer Menge (s. hierzu Aufgabe 6, Übungsblatt 3).

- **Unendlich** ist manchmal gleich **Unendlich** und manchmal nicht. Die Mächtigkeit der Menge der **natürlichen Zahlen** ist gleich der Mächtigkeit der **rationalen Zahlen** aber **kleiner** als die Mächtigkeit der **reellen Zahlen**.

- Aussage der sog. **Kontinuumshypothese** ist, dass es keine Mengen gibt, die mächtiger sind als die Menge der natürlichen Zahlen und weniger mächtig als die Menge der reellen Zahlen. Im Rahmen der Standardaxiome der reinen Mengenlehre kann die Kontinuumshypothese weder bewiesen noch widerlegt werden.

- Alle Zahlenmengen, die die gleiche Mächtigkeit wie die Menge der Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ haben, werden bezgl. ihrer Mächtigkeit als **abzählbar unendlich** bezeichnet. Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wird bezgl. ihrer Mächtigkeit als **überabzählbar unendlich** bezeichnet.

3.6 Einsatzgebiete Relationen und Abbildungen in der Informatik

Relationen und insbesondere Äquivalenzrelationen sind wichtige Werkzeuge zur Strukturierung und Unterteilung gegebener Mengen. Sie spielen eine zentrale Rolle beim Thema modulares Rechnen, welches elementar ist für Themen wie Kryptographie und Verschlüsselung von Daten.

Abbildungen und ihre Grundeigenschaften sind elementar für Teile der Linearen Algebra sowie für das gesamte Gebiet der mathematischen Analysis mit alle ihren Anwendungsgebieten.

3.7 Was ist mitzunehmen ?

Mitzunehmen sind

- Begriff der Relation kennen
- Eigenschaften einer Äquivalenzrelation einer gegebenen Relationen nachweisen/widerlegen können
- Äquivalenzklassen einer vorgegebenen Äquivalenzrelation bestimmen können
- Grundeigenschaften einer vorgegebenen Abbildung verifizieren können (Injektivität, Surjektivität,Bijektivität)
- Mengen hinsichtlich ihrer Mächtigkeit vergleichen und die Hilfsmittel zu ihrer Bestimmung benutzen können.

3.8 Verwendete Literatur

Hartmann, Mathematik für Informatiker, 6. Auflage, Kapitel 1.2, 1.3

Teschl, Mathematik für Informatiker, 4. Auflage, Kapitel 5

Beutelsbacher, Lineare Algebra, 6. Auflage, Kapitel 1.2 - 1.4

Beutelsbacher, Mathe-Basics zu Studienbeginn, Kapitel 4 + 5

3.9 Üben und Verstehen - Aufgaben

Zum Üben und Verstehen - Übungsblatt 3 - Aufgaben 1 - 6