Theoretische Informatik

Logik

Resolutionskalkül

Logik

Aussagenkalkül - Resolutionskalkül

- Aussagenkalkül unhandlich, schwer mechanisierbar.
- Lösungen:
  - » Einfache Formeln nur in KNF (Konjunktive Normalform)
  - » Weniger Axiome notwendig durch Mengendarstellung (Klauseln)
  - » Statt komplexe Gesamt-Formel (KNF) direkt abzuleiten, wird aus Axiomen und $\neg$ G ein Widerspruch abgeleitet.

- Bemerkung
  - » Durch KNF ist die Menge der Formeln beschränkt auf die Operatoren: **$\neg$, $\wedge$, $\vee$.**
  - » Menge der Regeln: Resolutionsregel (Disjunktion – unsere Regel 6)

Aussagenkalkül - Resolutionskalkül

Regel Res (Resolutionsregel)

$$\frac{\begin{array}{c} a \vee c \\ \neg a \vee b \end{array}}{b \vee c}$$

- Regel Res in

Mengenschreibweise

$$\frac{\begin{array}{c} \{ a, c \} \\ \{ \neg a, b \} \end{array}}{\{ b, c \}}$$

Logik

Wiederholung

Aussagenkalkül – Resolutionskalkül - Beispiel mit Max Reise

1. Wenn ich genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Auto.
2. Wenn ich nicht genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Fahrrad.
3. Wenn ich ein Auto kaufe, fahre ich nach Spanien in Urlaub.
4. Wenn ich ein Fahrrad kaufe, bleibe ich im Urlaub in Karlsruhe.
5. Ich habe im Vorjahr kein gespartes Geld verbraucht.
6. In diesem Jahr habe ich keine anderen Ausgaben.
7. Es stimmt nicht, daß ich nicht genug Geld gespart habe und weder im Vorjahr gespartes Geld verbraucht habe noch in diesem Jahr andere Ausgaben habe.

G := XY hat genug Geld gespart
A := XY kauft ein Auto
F := XY kauft ein Fahrrad
S := XY fährt nach Spanien in Urlaub
K := XY bleibt im Urlaub in Karlsruhe
V := XY hat im Vorjahr gespartes Geld verbraucht
D := XY hat in diesem Jahr andere Ausgaben

B1	wenn G, dann A	$G \Rightarrow A$
B2	wenn (nicht G), dann F	$\neg G \Rightarrow F$
B3	wenn A, dann S	$A \Rightarrow S$
B4	wenn F, dann K	$F \Rightarrow K$
B5	nicht V	$\neg V$
B6	nicht D	$\neg D$
B7	nicht ((nicht G) und (nicht V und nicht D))	$\neg(\neg G \wedge (\neg V \wedge \neg D))$

Logik

B1	wenn G, dann A	$G \Rightarrow A$
B2	wenn (nicht G), dann F	$\neg G \Rightarrow F$
B3	wenn A, dann S	$A \Rightarrow S$
B4	wenn F, dann K	$F \Rightarrow K$
B5	nicht V	$\neg V$
B6	nicht D	$\neg D$
B7	nicht ((nicht G) und (nicht V und nicht D))	$\neg(\neg G \wedge (\neg V \wedge \neg D))$

B1) {¬G, A}

B2) {G, F}

B3) {¬A, S}

B4) {¬F, K}

B5) {¬V}

B6) {¬D}

B7) {D, V, D}

Goal {¬S}

Logik

B1	wenn G, dann A	$G \Rightarrow A$
B2	wenn (nicht G), dann F	$\neg G \Rightarrow F$
B3	wenn A, dann S	$A \Rightarrow S$
B4	wenn F, dann K	$F \Rightarrow K$
B5	nicht V	$\neg V$
B6	nicht D	$\neg D$
B7	nicht ((nicht G) und (nicht V und nicht D))	$\neg(\neg G \wedge (\neg V \wedge \neg D))$

B1) {¬G, A}

B2) {G, F}

B3) {¬A, S}

B4) {¬F, K}

B5) {¬V}

B6) {¬D}

B7) {G, V, D}

Goal {¬S}

Res 1) B7,B5: {G, D}

Res 2) Res1, B6: {G}

Res 3) Res2, B1: {A}

Res 4) Res3, B3: {S}

Res 5) Res4, Goal: {}
R4, Goal

Widersruch. Also ist S wahr

Logik

B1	wenn G, dann A	$G \Rightarrow A$
B2	wenn (nicht G), dann F	$\neg G \Rightarrow F$
B3	wenn A, dann S	$A \Rightarrow S$
B4	wenn F, dann K	$F \Rightarrow K$
B5	nicht V	$\neg V$
B6	nicht D	$\neg D$
B7	nicht ((nicht G) und (nicht V und nicht D))	$\neg(\neg G \wedge (\neg V \wedge \neg D))$

B1) $\{\neg G, A\}$
B2) $\{G, F\}$
B3) $\{\neg A, S\}$
B4) $\{\neg F, K\}$
B5) $\{\neg V\}$
B6) $\{\neg D\}$
B7) $\{G, V, D\}$

Goal $\{\neg S\}$

Res 1) B7,B5: $\{G, D\}$
Res 2) Res1, B6: $\{G\}$
Res 3) Res2, B1: $\{A\}$
Res 4) Res3, B3: $\{S\}$

Res 5) Res4, Goal: $\{\}$

Widersruch. Also ist S wahr

$$\text{Aus } (B1, \ldots Bn) \wedge \neg S \leftrightarrow 0 \;\; \text{folgt } S \leftrightarrow 1$$

Logik

Wiederholung

Aussagenkalkül – Resolutionskalkül – Beispiel Inspektor Craig

- Formalisieren Sie folgende Behauptungen und stellen Sie über Umformungen/Normalform die Lösung fest.
- Ein Fall von Inspektor Craig (nach Smullyan):

1. Wenn A schuldig und B unschuldig ist, so ist C schuldig.
2. C arbeitet niemals allein.
3. A arbeitet niemals mit C.
4. Niemand außer A, B und C war beteiligt, und mindestens einer von Ihnen ist schuldig.

Logik

Wiederholung

Aussagenkalkül – Resolutionskalkül – Beispiel Inspektor Craig

1. Wenn A schuldig und B unschuldig ist, so ist C schuldig.
2. C arbeitet niemals allein.
3. A arbeitet niemals mit C.
4. Niemand außer A, B und C war beteiligt, und mindestens einer von Ihnen ist schuldig.

- Formalisierung
  - » aus (1): $A \wedge \neg B \rightarrow C$ (1‘)
  - » aus (2) $C \rightarrow A \vee B$ (2‘)
  - » aus (3): $A \rightarrow \neg C$ (3‘)
  - » aus (4): $A \vee B \vee C$ (4‘)

Umformung

aus (1‘): $\neg (A \wedge \neg B) \vee C$

$\leftrightarrow \neg A \vee B \vee C$ (1“)

aus (2‘): $\neg C \vee A \vee B$ (2“)

aus (3‘): $\neg A \vee \neg C$ (3“)

Logik

Aussagenkalkül – Resolutionskalkül – Beispiel Inspektor Craig

- „Axiome“ — „Mengenschreibweise“
  - $\neg A \lor B \lor C$ (1“) $\{\neg A, B, C\}$
  - $\neg C \lor A \lor B$ (2“) $\{A, B, \neg C\}$
  - $\neg A \lor \neg C$ (3“) $\{\neg A, \neg C\}$
  - $A \lor B \lor C$ (4“) $\{A, B, C\}$

Logik

Aussagenkalkül – Resolutionskalkül – Beispiel Inspektor Craig

(1) $\{\neg A, B, C\}$

(2) $\{A, B, \neg C\}$

(3) $\{\neg A, \neg C\}$

(4) $\{A, B, C\}$

- Ist B schuldig?
- Goal: $\{\neg B\}$
- Ableitungen

I.	(1) und Goal:	$\{\neg A, C\}$	
II.	I, (3)	$\{\neg A\}$	
III.	II, (2)	$\{B, \neg C\}$	
IV.	(2) und Goal:	$\{A, \neg C\}$	
V.	II und IV:	$\{\neg C\}$	
VI.	II und (4):	$\{B, C\}$	
VII.	V und VI:	$\{B\}$	
VIII.	VII und Goal:	$\{\}$	→ Widerspruch

Erfolg! B ist schuldig

Logik

Aussagenkalkül – Resolutionskalkül – Beispiel Inspektor Craig

(1) $\{\neg A, B, C\}$

(2) $\{A, B, \neg C\}$

(3) $\{\neg A, \neg C\}$

(4) $\{A, B, C\}$

- Ist A schuldig?
- Goal: $\{\neg A\}$
- Ableitungen

I.	(2) und Goal:	$\{\neg C, B\}$
II.	I, (1)	$\{\neg A, B\}$
III.	II, (2)	$\{B, \neg C\}$
IV.	(4) und Goal:	$\{B, C\}$
V.	III und IV:	$\{B\}$
VI.	IV und (3):	$\{\neg A\}$

VII. Keine Ergebnis, also keine { } → kein Widerspruch

Kein Erfolg

Aussagenkalkül - Beispiel

- Aufgabe: Nimmt er heute den aufblasbaren Walfisch mit?
  - » Im Flugzeug hören Sie folgende Geschichte
    - » Person A: Ich habe dabei mein Qietsch-Entchen, mein U-Boot, meinen aufblasbaren Walfisch und meinen Massageschwamm.
    - » Person B: Und mit all den Sachen steigst Du in die Badewanne?
    - » Person A: Nein, natürlich nicht. Ich habe meine Präferenzen.
      Wenn mein Entchen schwimmt, dann ist das U-Boot nicht mit drin.
      Wenn ich das Entchen nicht mitnehme, dann ist sicher mein aufblasbarer Walfisch drin.
      Ist das Entchen im Wasser und das U-Boot nicht, ist der Massageschwamm drin.
      Heute Abend nehme ich meinen Massageschwamm nicht mit in die Wanne
  - » Formalisieren Sie die Aussagen!
  - » Nimmt er heute den aufblasbaren Walfisch mit? (Lösung mit Aussagenkalkül/ Resolutionskalkül)