Theoretische Informatik

Logik

Beweise

Logik

Beweise

- Beweis durch vollständige Fallunterscheidung
  - Beim Beweis einer Aussage durch vollständige Fallunterscheidung wird eine endliche Anzahl von Fällen betrachtet, die in ihrer Gesamtheit alle möglichen Fälle überdecken und von denen jeder eine einfachere Behandlung des Problems ermöglicht.

- Beispiel: Behauptung Jede Primzahl $p \geq 3$ hat die Form $p = 4 \cdot k \pm 1$ mit einer Zahl $k \in \mathbb{N}$.
  - Man unterscheidet folgende vier Fälle für die Zahl p, von denen immer genau einer eintritt:

$$p = 4k$$
$$p = 4k + 1$$
$$p = 4k + 2$$
$$p = 4k + 3 = 4(k + 1) - 1$$

Logik

Beweise

- Direkter Beweis
  - » Bei einem direkten Beweis wird die Behauptung durch Anwendung von bereits bewiesenen Aussagen und durch logische Folgerungen bewiesen.

- Beispiel für einen direkten Beweis
  - » Behauptung: Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl n ist stets ungerade.
  - » Beweis:
    - » Es sei n eine ungerade natürliche Zahl. Dann lässt sich n darstellen als $n = 2k + 1$, wobei k eine natürliche Zahl oder Null ist.
    - » Ausmultiplizieren von n^2 ergibt: $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
    - » Aus dieser Darstellung folgt, dass n^2 ungerade ist.

Logik

Beweise

- Indirekter Beweis – Widerspruchsbeweis
  - » Bei einem indirekten Beweis (Widerspruchsbeweis) zeigt man, dass ein Widerspruch entsteht, wenn die zu beweisende Behauptung falsch wäre.

- Beispiel für einen indirekten Beweis
  - » Behauptung: Ist die Wurzel x aus einer geraden natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl, so ist x gerade. (n gerade und $x = \sqrt{n} \in \mathbb{N} \rightarrow$ x ist gerade)
  - » Beweis
    Angenommen, $x = \sqrt{n}$ wäre ungerade (für n gerade).
    Dann ist wegen der gerade bewiesenen Behauptung auch $x^2 = n$ ungerade.
  - » Das ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass n gerade sei.
    Also ist die getroffene Annahme falsch, d. h. $x = \sqrt{n}$ ist gerade.

Logik

Beweise

- Konstruktiver Beweis
  - Bei einem konstruktiven (Existenz-)Beweis wird entweder die Lösung selbst genannt oder ein Verfahren angegeben, das zur Lösung führt.
    D. h. , es wird eine Lösung konstruiert.

- Beispiel für einen konstruktiven Beweis
  - Behauptung:
    Die Funktion f mit $f(x) = 2x - 1$ besitzt im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle z.
  - Beweis:
    Die Lösung der Gleichung $2x-1 = 0$ wird zu $x = ½$ umgeformt.
  - Damit hat man eine Nullstelle $z = ½$ gefunden und diese auch präzise bestimmt.

Logik

Beweise

- Nicht-konstruktiver Beweis
  - Bei einem nicht-konstruktiven Beweis wird anhand von Eigenschaften auf die Existenz einer Lösung geschlossen.
  - Manchmal wird sogar indirekt die Annahme, es gäbe keine Lösung, zum Widerspruch geführt, woraus folgt, dass es eine Lösung gibt.
  - Aus solchen Beweisen geht nicht hervor, wie man die Lösung gewinnt.
- Beispiel für einen nicht-konstruktiven Beweis
  - Behauptung:
    Die Funktion f mit $f(x) = 2x - 1$ besitzt im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle z.
  - Beweis:
    f ist stetig und $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 > 0$
    Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt die Behauptung

Logik

Beweise

- Schubfachprinzip
  - Verteilt man n+1 Gegenstände auf n Schubfächer, dann befinden sich in mindestens einem Schubfach mindestens zwei Gegenstände.
  - Formal: Falls man n Objekte auf m Mengen (n, m > 0) verteilt und n > m, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mehr als ein Objekt landet.
- Beweis:
  - Falls das Prinzip nicht stimmt, dann landet in jedem Schubfach höchstens ein Objekt.
  - Damit gibt es höchstens so viele Objekte wie Schubfächer.
  - Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, dass es mehr Objekte als Schubfächer gibt.

Logik

Beweise

- Beispiel für ein Beweis mittels Schubfachprinzip
  - Behauptung In München gibt mindestens zwei Personen, die exakt dieselbe Anzahl von Haaren auf dem Kopf haben.
  - Beweis:
    - Man teilt alle Einwohner Münchens nach der Anzahl ihrer Haare in »Schubfächer« ein.
      Typischerweise hat der Mensch etwa 100.000 bis 200.000,
      jedoch sicher weniger als 1 Million Haare
    - → es gibt maximal eine Million Schubfächer (von 0 bis 999.999).
    - Da es aber etwa 1,5 Millionen Einwohner in München gibt,
      hat man mehr Einwohner als Schubfächer
    - → mindestens ein Schubfach hat zwei oder mehr Personen.
      Diese haben nach Definition der Schubfächer dieselbe Anzahl Haare auf dem Kopf.

Logik

Beweise

- Vollständige Induktion

Sei $A : \mathbb{N} \rightarrow \{W, F\}$ eine Eigenschaft natürlicher Zahlen, für welche folgende zwei Aussagen gelten:

1. Induktionsverankerung (Induktionsanfang):
   Es gilt $A(0)$.
2. Induktionsschritt:
   Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:
   - Falls $A(n)$, die Induktionsvoraussetzung (Induktionsannahme) gilt, dann gilt auch $A(n+1)$, die Induktionsbehauptung.

Dann gilt $A(n)$ **für alle Zahlen** $n \in \mathbb{N}$.

Logik

Beweise

- Beispiel vollständige Induktion an dem Satz der Gauss'schen Summenformel

Sei $n \in \mathbb{N}$ dann gilt:

$$1+2+\ldots n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

- Beweis mittels vollständiger Induktion

Induktionsanfang: »$n = 1$«

Für $n = 1$ gilt offensichtlich $1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$.

» Induktionsannahme: $1+2+\ldots n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

Induktionschritt »$n \to n+1$«

Anwenden der Induktionsannahme $1+2+\cdots+n = \frac{n \times (n+1)}{2}$ in der zu berechnenden Summe $(1+2+\cdots+n)+(n+1)$ ergibt

$$\frac{n \times (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \times (n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$= \frac{(n+1) \times (n+2)}{2} = \frac{n' \times (n'+1)}{2} \text{ mit } n' \stackrel{\text{def}}{=} n+1$$

Logik

Beweise

- Beweis durch strukturelle Induktion
  - » Strukturelle Induktion ist Verallgemeinerung der »vollständigen Induktion«.
  - » Aussagen über die Elemente von rekursiv aufgebauten Mengen bzw. Datenstrukturen (z. B. formale Sprachen, Listen, Formeln, Graphen) beweisen.
  - » Elemente sind gegeben
    - » **1.** als »Atome«
    - » **2.** durch **endlich Anzahl** von »Konstruktionsschritten«
  - » Induktionsanfang: Beweis für die Atome
  - » Induktionsschritt: Beweis der Behauptung für jede Konstruktionsregel.

Logik

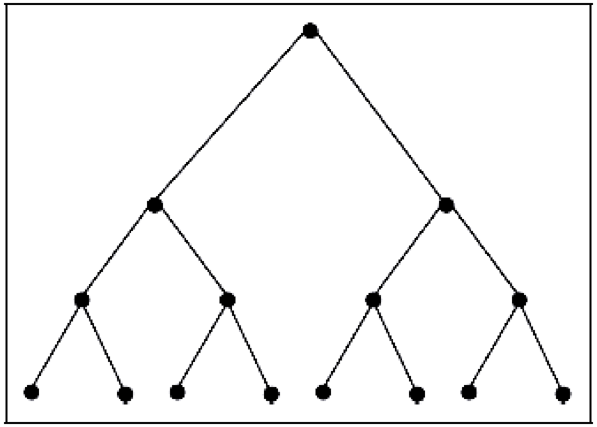
Beweise

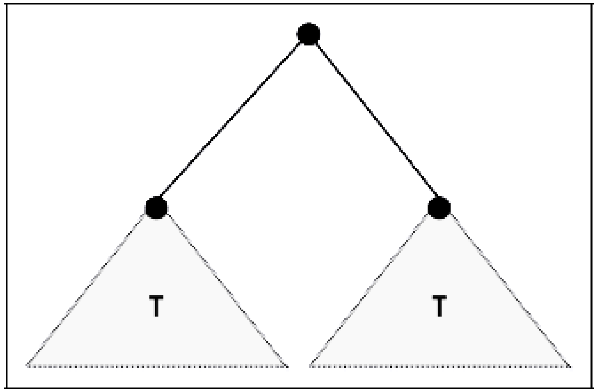
- (Vollständiger) Binärbaum

  » Ein vollständiger Binärbaum kann wie folgt rekursiv definiert werden:

  » **(K1)** Ein Baum mit nur einem Knoten ist ein vollständiger Baum.

  » **(K2)** Ist T ein vollständiger Baum dann ist folgendes auch ein vollständiger Baum:

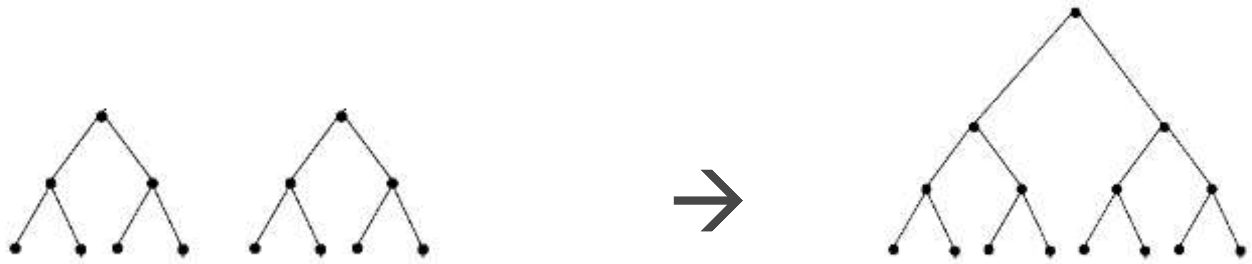




Logik

Beweise

- Beispiel: Beweis durch strukturelle Induktion: Anzahl innerer Knoten in einem Baum
- Behauptung
  - » **Hat ein vollständiger Binärbaum n Blätter, dann hat er n–1 innere Knoten**.
- Beweis mittels struktureller Induktion über den Aufbau des vollständigen Baumes
  - » Induktionsanfang: Ein Baum mit nur einem Blatt → keine inneren Knoten ☺
  - » Induktionsannahme für n: Sei T ein vollständiger Binärbaum mit n Blättern, dann hat er n–1 innere Knoten.
  - » Induktionsschritt n→n+1



Logik

Beweise

- Beispiel: Behauptung
  Hat ein vollständiger Binärbaum n Blätter, dann hat er n–1 innere Knoten.
- Fortsetzung des Beweises:
  - Induktionsschritt n→n+1 (all. gültig: bei einem vollständigen Binärbaum ist die Anzahl der Blätter immer $n = 2^k$ für ein natürliches k)
  - Ist B ein vollständiger Binärbaum mit mehr als einem Knoten, so ist er definitionsgemäß zusammengesetzt zu B = B' und B''
  - Dann gilt:
    - n = n'+n'' (Anzahl der Blätter von B, B' und B'')
    - m = 1 + m' + m''
      (Anzahl der Knoten von B, B' und B'', die 1 für die neue Wurzel)'
      = 1+(n'-1)+(n''-1) (nach Induktionsvoraussetzung)
      = n' + n'' -1 = n – 1 (wzbw.)