2. Boolesche Algebra

#DigitalTechnik

Themen

Allgemeines

- Benannt nach George Boole (1815 - 1864)
- Rechensystem mit einer *endlichen* Wertemenge und gewissen Regeln:
  - endliche Wertemenge $\mathbb{W}$
  - zwei zweistellige Operatoren $\otimes, \oplus$
  - Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in \mathbb{W}$:
    $a \otimes b \in \mathbb{W}$
    $a \oplus b \in \mathbb{W}$

*Es gelten die vier **Huntingtonschen Axiome**:*

H1 — Kommutativgesetz

$$a \otimes b = b \otimes a$$
$$a \otimes b = b \oplus a$$

H2 — Distributivgesetz

$$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$$
$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

H3 — Neutrales Element
$\exists e, n \in \mathbb{W}$ mit:

$$a \oplus n = a$$
$$a \otimes e = a$$

H4 — Inverses Element
Für alle $a \in \mathbb{W}$ gibt es $\overline{a} \in \mathbb{W}$ mit

$$a \otimes \overline{a} = n$$
$$a \oplus \overline{a} = e$$

Hinweis: Verknüpfung mit dem inversen Element ergibt das neutrale Element der jeweils anderen Verknüpfung.

Spezialfall - Schaltalgebra

Wertemenge besteht aus zwei Werten:

$$\begin{aligned}\mathbb{W} &= \{\text{true}, \text{false}\} \\ &= \{1, 0\} \\ &= \{\text{on}, \text{off}\}\end{aligned}$$

→ "Aussagenlogik", "Rechnen mit Wahrheitswerten"

Operatoren:

- statt $\otimes$ → UND/AND $\wedge$, ($\cdot$)
- statt $\oplus$ → ODER/OR $\vee$, $(+)$
  zwischen zwei Variablen kann der Operator " $\cdot$ " weggelassen werden: $a \cdot b = ab$

einstelliger Operator definiert durch *H4*:

$\overline{a}$ → NICHT/NOT, $\overline{a}$, $\neg a$

Huntington'sche Axiome in der Schaltalgebra

H1 — Kommutativgesetz

$a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$

H2 — Distributivgesetz

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge v)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

H3 — Neutrales Element

$\exists_{1,0} \in \mathbb{W}:$

$a \wedge 1 = a$; $a \vee 0 = a$

H4 — Inverses Element

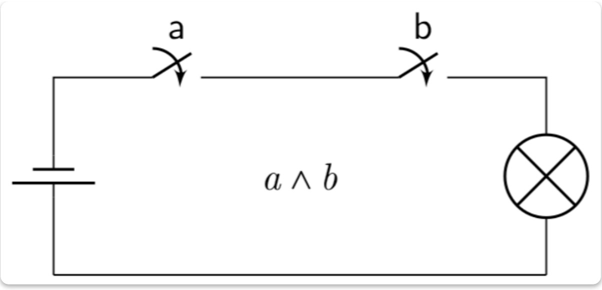
$\exists_{\overline{a}}$:

$a \wedge \overline{a} = 0$; $a \vee \overline{a} = 1$

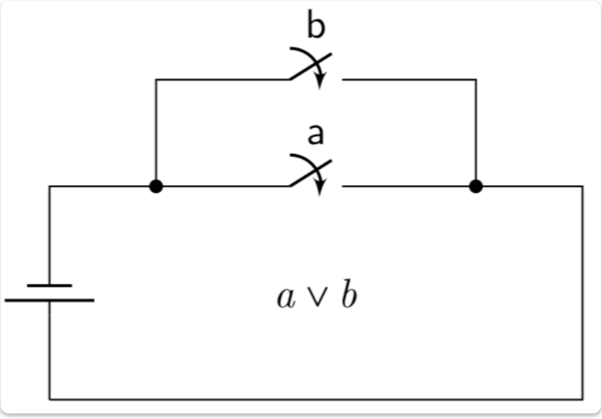
Warum Schaltalgebra?

Die zweistelligen Operatoren können durch Stromkreise mit zwei Schaltern dargestellt werden:

UND - $a \wedge b$



ODER - $a \vee b$



Außerdem können die Operatoren mit Wertetabellen dargestellt werden:
UND:

b	a	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ODER:

b	a	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NICHT:

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Terme

Terme bestehen aus:

- Konstanten
- Variablen als Platzhalter
- ein- / zweistellige Operatoren
- Klammern

Belegung:

$Eingangsbelegung$ ist die Zuordnung jeweils eines konkreten Wertes zu jeder (Eingangs-)Variablen.
$Ausgangsbelegung$ ist der Wert, der sich ergibt, wenn man einen Term bei einer konkreten Eingangsbelegung "auswertet".

Auswertung von Termen:

$(a \land \neg c) \lor 1 \land (b \land c) \lor (0 \land d)$

1. Festlegen einer konkreten Eingangsbelegung
   - Ersetzen der Variablen durch die entsprechenden Werte
2. Auswertung von "innen nach außen", beginnend mit dem Teilausdruck mit der höchsten Bindungskraft bis zum letzen Teil mit der niedrigsten Bindungskraft.
   $() > \neg > \land > \lor$
   - bei gleicher Bindungskraft (also gleichen Operatoren) Auswertung von links nach rechts

A	B	C	D	((A ∧	¬C)	∨	(VERUM	∧	(B ∧ C)))	∨	(FALSUM	∧ D)
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	*1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	*1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	*1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	*1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	*0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	*0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	*1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	*1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	*1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	*1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	*0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	*0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	*0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	*0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	*0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	*0	0	0

Gesetze

Aus den Huntingtonschen Axiomen lassen sich mehrere Gesetze ableiten:

Assoziativgesetz:

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

Idempotenzgesetz:

$$a \wedge a = a$$
$$a \vee a = a$$

Absorptionsgesetz:

$$a \wedge (a \vee b) = a$$
$$a \vee (a \wedge b) = a$$

DeMorgan:

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$
$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$

0-Dominanz

$$a \wedge 0 = 0$$

1-Dominanz

$$a \vee 1 = 1$$

Beweis von Gesetzen

a) algebraische Umformungen

mit Hilfe der Axiome und bereits bewiesener Gesetze

Bsp.: *Idempotenz:* $a \wedge a \overset{!}{=} a$ $\qquad \overset{!}{=} \rightarrow \text{was zu beweisen ist}$

$a \overset{H3}{=} a \wedge 1 \overset{H4}{=} a \wedge (a \vee \neg a) \overset{H2}{=} (a \wedge a) \vee (a \wedge \neg a) \overset{H4}{=} (a \wedge a) \vee 0 \overset{H3}{=} a \wedge a \quad \blacksquare$ $\qquad \blacksquare \rightarrow \text{q.e.d (}$

b) über Wertetabellen

Für alle *Eingangsbelegungen* ergeben die beiden Terme links und rechts jeweils dieselbe *Ausgangsbelegung*.

Bsp.: *Assoziativität:* $(a \vee b) \vee c \overset{!}{=} a \vee (b \vee c)$

NR	c	b	a	$a \vee b$	$(a \vee b) \vee c$	$b \vee c$	$a \vee (b \vee c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1
2	0	1	0	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	1
4	1	0	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1	1

NR	c	b	a	$a \vee b$	$(a \vee b) \vee c$	$b \vee c$	$a \vee (b \vee c)$
6	1	1	0	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1

→ ■

c) Existenz des inversen Elements über H4

falls: $a \wedge \neg b = 0$ und $a \vee \neg b = 1$, dann $a = b$

Bsp.: $DeMorgan\text{:}\ \neg(a \wedge b) \overset{!}{=} \neg a \vee \neg b$

über

$$\neg\neg(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \overset{!}{=} 0$$
$$\neg\neg(a \wedge b) \vee (\neg a \neg b) \overset{!}{=} 1$$

$$\begin{aligned}
&\neg\neg(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \\
&\overset{\text{dopp. Neg.}}{=} (a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \\
&\overset{H2}{=} ((a \wedge b) \wedge \neg a) \vee ((a \wedge b) \wedge \neg b) \\
&\overset{\text{H1 \& AssG}}{=} (b \wedge (a \wedge \neg a)) \vee (a \wedge (b \wedge \neg b)) \\
&\overset{H4}{=} (b \wedge 0) \vee (a \wedge 0) \\
&\overset{0-Dom.}{=} 0 \vee 0 \\
&\overset{\text{Idem. oder H3}}{=} 0 \quad ◧
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\neg\neg(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) \\
&\overset{\text{dopp. Neg.}}{=} (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \\
&\overset{\text{H2}}{=} (a \vee (\neg a \vee \neg b)) \wedge (b \vee (\neg a \vee \neg b)) \\
&\overset{\text{H1 \& AssG}}{=} ((a \vee \neg a) \vee \neg b) \wedge ((b \vee \neg b) \vee \neg a) \\
&\overset{\text{H4}}{=} (1 \vee \neg b) \wedge (1 \vee \neg a) \\
&\overset{\text{1-Dom.}}{=} 1 \wedge 1 \\
&\overset{\text{Idem. oder H3}}{=} 1 \quad ◨
\end{aligned}$$

$$\text{insegsamt: } ■$$

Nachtragsbeweise:

doppelte Negation: $\neg\neg a = a$

Beweisen über spezielle Interpretation von $H4$: $\neg\neg a \wedge \neg a \overset{!}{=} 0$ und $\neg\neg a \vee \neg a \overset{!}{=} 1$

$\neg\neg a \wedge \neg a \overset{\text{H4}}{=} 0$ ■

$\neg\neg a \vee \neg a \overset{\text{H4}}{=} 1$ ■

0-Dominanz: $a \wedge 0 \overset{!}{=} 0$

$a \wedge 0 \overset{\text{H4}}{=} a \wedge (a \wedge \neg a) \overset{\text{AssG}}{=} (a \wedge a) \wedge \neg a \overset{\text{Idem.}}{=} a \wedge \neg a \overset{\text{H4}}{=} 0$

1-Dominanz: $a \vee 1 \overset{!}{=} 1$

Absorptionsgesetz: $a \wedge (a \vee b) \overset{!}{=} a$ und gleichzeitig $a \vee (a \wedge b) \overset{!}{=} a$

$a \wedge (a \vee b) \overset{\text{H2}}{=} (a \wedge a) \vee (a \wedge b) \overset{\text{Idem.}}{=} a \vee (a \wedge b) \overset{\text{H3}}{=} (a \wedge 1) \vee (a \wedge b) \overset{\text{H2}}{=} a \wedge (1 \vee b) \overset{\text{1-Dom}}{=} a \wedge 1 \overset{\text{H3}}{=} a$ ■

Darstellung von Funktionen

Definition

Eine Funktion der *Schaltalgebra*, abhängig von n Variablen, ordnet jeder Eingangsbelegung genau eine Ausgangsbelegung zu.

1. Funktionsterm
2. Wertetabelle (geht hier auch zur Definition einer Funktion aufgrund der endlichen Wertemenge)
   Äquivalenz von Funktionen: Eine durch einen Funktionsterm gegebene Funktion ist äquivalent zu einer durch einen anderen Funktionsterm gegebenen Funktion, wenn sie dieselbe Wertetabelle aufweist.
   Hinweise:

- Für jede Funktion gibt es unterschiedlich viele äquivalente Funktionsterme!
- Die Anzahl nicht-äquivalenter Funktionen abhängig von n Variablen ist endlich!

Funktionen abhängig von n Eingangsvariablen

$n = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_0 = 0 \text{ „Nullfunktion“} \\ f_1 = 1 \text{ „Einsfunktion“} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{zwei verschiedene Funktionen abhängig von keiner Variablen}$$

$n = 1$

a	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

$$\left.\begin{array}{l} f_2(a) = a \text{ „Identität von a“} \\ f_1(a) = \overline{a} \text{ „Negation von a“} \\ f_0(a) = 0 \text{ „Nullfunktion“} \\ f_3(a) = 1 \text{ „Einsfunktion“} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{vier verschiedene Funktionen abhängig von einer Variablen}$$

$n = 2$

b	a	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$f(a,b)$		0	$\neg(a \vee b)$	$\overline{a \to b}$	$\overline{b}$	$\overline{b \to a}$	$\overline{a}$	$(a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b) = a\bar{b} \vee \bar{a}b$	$\neg(a \wedge b)$	$a \wedge b$	$a \leftrightarrow b$	a	$b \to a$	b	$a \to b$	$a \vee b$	1
Bezeichnung		Nullfunktion	Nicht-ODER	Inhibition (negierte Implikation)	Negation von b	Inhibition (negierte Implikation)	Negation von a	Exklusiv-Oder / Antivalenz	Nicht-UND	UND-Funktion	Äquivalenz	Identität von a	Implikation (aus b folgt a)	Identität von b	Implikation (aus a folgt b)	ODER-Funktion	Einsfunktion

$\Rightarrow$ insgesamt **16** verschiedene Funktionen abhängig von 2 Variablen!

n

n	#Fkt $= 2^{2^n}$	#ZeilenWertetabelle $= 2^n$
0	2	1
1	4	2
2	16	4
3	256	8
4	65536	16
5	$\approx 4 Mrd.$	32
6	$\approx 16 Trillionen$	64