



# Theoretische Informatik

Logik

Normalform

# Logik

## Normalform

### ▪ Definition Literal

- » negierte oder nicht negierte **atomare Aussage**  
P – positives Literal,  $\neg P$  – negatives Literal

### ▪ Definition **Konjunktive Normalform**

- » Eine Formel der Aussagenlogik ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionstermen ist.
- » **Disjunktionsterme** sind dabei Disjunktionen von Literalen  $\rightarrow$  Klauseln.
- » **Literale** sind nichtnegierte oder negierte atomare Aussagen.

$$\bigwedge_{i=1}^n \left( \bigvee_{j=1}^{m_i} p_{ij} \right)$$

# Logik

## Normalform

### ■ Definition Disjunktive Normalform

- » Eine Formel der Aussagenlogik ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionstermen ist.
- » **Konjunktionsterme** sind dabei Konjunktionen von Literalen.

$$\bigvee_{i=1}^n \left( \bigwedge_{j=1}^{m_i} p_{ij} \right)$$

## Normalform

### ■ Beispiele „Konjunktive Normalform“

»  $(A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C \vee \neg D)$

»  $A \wedge (B \vee C)$

»  $A \wedge B$

»  $1$

### ■ Beispiele „Disjunktive Normalform“

»  $(A \wedge B) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee D$

»  $A \vee B$

»  $A \vee (B \wedge C)$

»  $1$

# Logik

## Normalform – Beispiel

- Boolescher Ausdruck:  $a \wedge \neg (b \wedge c)$
- Anwendung von deMorgan (10):
  - »  $a \wedge (\neg b \vee \neg c)$  (das ist bereits die KNF)
- Anwendung des Distributivgesetzes (9)
  - »  $(a \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg c)$  (das ist bereits die DNF)

# Logik

## Normalform – Regeln für die Anwendung

1) Entferne  $\rightarrow, \leftrightarrow$  entsprechend der Def.

2) Negationen nach innen ziehen:

$$\gg \neg \neg G \quad \rightarrow \quad G$$

$$\gg \neg (G \wedge H) \quad \rightarrow \quad (\neg G \vee \neg H) \quad (\text{deMorgan})$$

$$\gg \neg (G \vee H) \quad \rightarrow \quad (\neg G \wedge \neg H) \quad (\text{deMorgan})$$

3) Anwendung der Distributivgesetze

$$\gg \text{KNF: } F \vee (G \wedge H) \quad \rightarrow \quad (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

$$\gg \text{DNF: } F \wedge (G \vee H) \quad \rightarrow \quad (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

4) Überflüssiges Entfernen, Vereinfachen

$$\gg F \wedge 1 \quad \rightarrow F, \quad F \wedge F \rightarrow F$$

# Logik

---

## Normalform

- Satz (Aussagenlogisch Normalformen)
  - » **Jede** aussagenlogische Formel  $F$  kann in **disjunktiver Normalform** geschrieben werden.
  - » **Jede** aussagenlogische Formel  $F$  kann in **konjunktiver Normalform** geschrieben werden.

# Logik

---

## Normalform

- Satz (Eigenschaften der KNF und DNF)
  - » Eine KNF ist gültig  
gerade dann wenn  
alle ihre Klauseln gültig sind
  - » Eine DNF ist unerfüllbar  
gerade dann wenn  
alle ihre Klauseln unerfüllbar sind



# Logik

---

## Normalform

- Wahrheitstafelmethode

- » Eine regelbasierte Möglichkeit eine DNF und eine KNF zu konstruieren, geht mit Wahrheitstafeln.
- » Anmerkung / Problem:  
Wahrheitstafeln werden sehr groß und das Verfahren wird somit ineffizient.

# Logik

## Normalform

- Wahrheitstafelmethode (DNF)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Idee für die DNF?

# Logik

## Normalform

- Wahrheitstafelmethode (DNF)

$A$	$B$	$C$	$F$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\neg A \wedge B \wedge C$$

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$A \wedge B \wedge C$$

$$(\neg A \wedge B \wedge C) \vee$$

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee$$

$$(A \wedge B \wedge C)$$

# Logik

## Normalform

- Wahrheitstafelmethode (KNF)

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

KNF ... ?

# Logik

## Normalform

- Wahrheitstafelmethode (KNF)

$A$	$B$	$C$	$F$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$A \vee B \vee C$$

$$A \vee B \vee \neg C$$

$$A \vee \neg B \vee C$$

$$\neg A \vee B \vee \neg C$$

$$\neg A \vee \neg B \vee C$$

$$(A \vee B \vee C) \wedge$$

$$(A \vee B \vee \neg C) \wedge$$

$$(A \vee \neg B \vee C) \wedge$$

$$(\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge$$

$$(\neg A \vee \neg B \vee C)$$

# Logik

## Normalform

- Aufgabe Aussagenlogische Umformungen in DNF und KNF
  - » Wandeln Sie folgende Formeln in eine DNF oder KNF um. Geben Sie bei jedem Schritt an, welche Gesetze Sie benutzt haben.

1.  $c \rightarrow a \vee b$

2.  $((x \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge \neg z)) \vee (y \rightarrow z)$

3.  $a \wedge \neg b \rightarrow c$

4.  $(\neg a \rightarrow b \vee c) \leftrightarrow \neg c$