Theoretische Informatik

Logik

Prädikatenlogik

Logik

Prädikatenlogik

- Definition (Variablen, Aussageformen, Prädikat)
  - Aussageformen (Prädikate) in den Variablen x, y, … auf den Grundmengen M_x, M_y, … sind sprachliche Gebilde, die nach Ersetzung der Variablen x, y, … durch Elemente aus M_x, M_y, … in Aussagen übergehen.
  - Eine Aussageform ist weder wahr noch falsch, hat also keinen Wahrheitswert.
  - Alle Vorkommnisse einer Variable (x,y,…) in einem Kontext werden durch den selben Wert (M_x, M_y, …) aus der Grundmenge ersetzt.
  - Prädikate werden als P(x, y, …) geschrieben.

- Beispiel
  - x ist eine gerade Zahl

Logik

Prädikatenlogik

- Beispiel 1 (Prädikat hat eine Variable)
  - » istGerade(x) bedeutet
    - » Prädikat: „istGerade“
    - » x: Variabel
    - » Zu verstehen wie „eine Maschine“, die entscheidet, ob x gerade ist oder nicht
    - » D.h. Steckt man eine 2 rein, so liefert „die Maschine“ das Prädikat „wahr“

Prädikatenlogik

- Beispiel 2 (Prädikat hat zwei Variablen)
  - » istKleinerAls(x, y) bedeutet
    - » Prädikat: „ istKleinerAls“
    - » x, y: Variabel
    - » D.h. Steckt man ein 2 und 3 rein, so liefert die das Prädikat „wahr“

- Bemerkung: Prädikat istKleinerAls(x, y) hat die Stelligkeit 2

Logik

Prädikatenlogik

- Prädikate können mittels Junktoren UND, ODER, NICHT, IMPLIKATION, ÄQUIVALENZ kombiniert werden
- Beispiel:
  - $\underbrace{istPrimzahl(x)}_{P_1} \; \underbrace{\wedge}_{und} \; \underbrace{\text{istGrößerAls}(10, \text{x})}_{P_2}$

Prädikatenlogik

- Definition Quantoren

Der Allquantor $(\forall x)$ und der Existenzquantor $(\exists x)$ sind zwei weitere Operatoren der Logik.

- Die Aussage $\forall x : P(x)$ ist genau dann wahr, wenn
  1. M_x nicht leer ist und
  2. wenn für alle Elemente $e \in M_x$ gilt:durch Ersetzen von x durch e in $P(x)$ wird $P(e)$ eine wahre Aussage.
- Die Aussage $\exists x : P(x)$ ist genau dann wahr, wenn M_x ein Element e enthält, so dass $P(e)$ eine wahre Aussage ist.
- $\forall$ und $\exists$ binden stärker als die anderen logischen Operatoren:
  Z. B. wird $\forall x : P(x) \wedge q$ als $(\forall x : P(x)) \wedge q$ geklammert.

Logik

Prädikatenlogik

- Beispiele Quantoren

1. »$\forall x \in \mathbb{N} : x$ ist eine positive Zahl
2. »$\forall x \in \mathbb{N} : 2x$ ist eine gerade Zahl«
3. »$\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 4$«

Logik

Prädikatenlogik

- Beispiele Quantoren
  - Es gilt für $x \in \mathbb{N} \wedge (x < 2 \vee x > 4)$: $A(x) \leftrightarrow x^2 < 2^x$
    (Beweis möglich mit vollständiger Induktion)
  - Folgende Aussagen:
    - $\forall x \in \mathbb{N}: x^2 < 2^x$ ist falsch
    - $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 < 2^x$ ist wahr
    - $\forall x \in \mathbb{N}: x > 4 \rightarrow x^2 < 2^x$ ist wahr

Logik

Prädikatenlogik

- Beispiele: Folgende Aussagen:
  - » $\forall x \in \mathbb{N}: \ \mathrm{x} > 3 \rightarrow x^2 > 9$ ist wahr
  - » *Sogar die Rückrichtung gilt*
    $\forall x \in \mathbb{N}: \ x^2 > 9 \rightarrow \mathrm{x} > 3$ ist wahr
  - » *Und somit gilt auch*
    $\forall x \in \mathbb{N}: \ \mathrm{x} > 3 \leftrightarrow x^2 > 9$ ist wahr
  - » $\forall x \in \mathbb{R}: \ \mathrm{x} > 3 \rightarrow x^2 > 9$ ist wahr
  - » *doch*
    $\forall x \in \mathbb{R}: \ x^2 > 9 \rightarrow \mathrm{x} > 3$ ist falsch
  - » *Wieder richtig:*
    $\forall x \in \mathbb{R}: \ x^2 > 9 \leftrightarrow (\mathrm{x} > 3 \ \vee \ \mathrm{x} < -3)$ ist wahr

Logik

Prädikatenlogik

- Beispiele für Prädikatenlogik
  - » $\forall x$: (Katze(x) → Säugetier(x))
  - » Übersetzt: Alle Katzen sind Säugetiere
  - » Bemerkung: Es kann auch Säugetiere geben, die keine Katzen sind, aber es gibt keine Katzen, die keine Säugetiere sind

Logik

Prädikatenlogik

- Beispiele für Prädikatenlogik
  - » $\forall x$: (Katze(x) ^ Säugetier(x))
  - » Übersetzt: Alles ist eine Katze und ein Säugetier

Logik

Prädikatenlogik

- Beispiele für Prädikatenlogik
  - » $\exists x$: (Katze(x) ^ Säugetier(x))
  - » Übersetzt: Es existiert etwas, was eine Katze und ein Säugetier ist

Logik

Prädikatenlogik

- Satz: Prädikatenlogische Gesetze

$$\begin{array}{lrcl} \text{a)} & \neg(\forall x : P(x)) & = & \exists x : \neg P(x) \\ \text{b)} & \neg(\exists x : P(x)) & = & \forall x : \neg P(x) \end{array}$$

- Zu a) Die Verneinung der Aussage „Alles ist grün“
  lässt sich formulieren als „Es gibt etwas, das nicht grün ist“

- Zu b) Wenn die Aussage „Es gibt etwas, das grün ist.“ verneint wird, so sind „Es gilt
  - » nicht ein Ding ist grün oder
  - » Alles ist nicht grün

Logik

Prädikatenlogik

- Beispiel „Gesunde Informatiker“
  - » Modellieren Sie folgende Aussagen in der Prädikatenlogik:
    - » A »Jeder, der Sport treibt, ist gesund«
    - » B »Wer krank ist, treibt keinen Sport«
    - » C »Es gibt gesunde Informatiker, die sportlich nicht aktiv sind«
  - » Aussagenformen (Prädikate sind):
    - » sport(x) »x treibt Sport«.
    - » krank(x) »x ist krank«.
    - » info(x) »x ist Informatiker«.
  - » Die Behauptungen sind nun:

A $\forall x\colon sport(x) \rightarrow \neg krank(x)$

B $\forall x\colon krank(x) \rightarrow \neg sport(x)$

C $\exists x\colon info(x) \wedge \neg krank(x) \wedge \neg sport(x)$

Logik

Prädikatenlogik – Übung

- Modellieren Sie folgende Aussagen in der Prädikatenlogik:
  - » 1. Wer im Urlaub ist, arbeitet nicht.
  - » 2. Jeder, der arbeitet, macht Fehler.
  - » 3. Wer im Urlaub arbeitet, macht sicher einen Fehler

- ToDo
  - » Spezifizieren die notwendigen Prädikate
  - » Formalisiere die drei Behauptungen in der Prädikatenlogik

Logik

Prädikatenlogik – Beispiel „Die Simpsons“

Lisa weiß aus der Schule:

1) Die Großeltern sind die Eltern der Eltern.
2) Eine Tante ist eine Schwester der Eltern.
3) Eine Schwester hat die gleichen Eltern und ist weiblich
4) Es gibt keine Person ohne Mutter.

Lisa überlegt wer in ihrer Familie ihre Tante ist:

5) Homer ist Elternteil und männlich
6) Marge ist Elternteil und weiblich
7) IngridG ist Elternteil von Marge und weiblich
8) IngridG ist Elternteil von PattyB. PattyB ist weiblich

Können wir ihr in der Aussagenlogik helfen ?

Prädikatenlogik – Beispiel „Die Simpsons“

- Definition atomarer Aussagen

  „Homer ist männlich“ ✓

  „Homer ist Vater von Lisa“ ✓

  „Eine Schwester ist weiblich“ ?

- Welches Subjekt/Objekt ist gemeint?

  Wie kann es angegeben werden?

Aussagenlogik ist nicht mächtig genug um diese Aussagen auszudrücken

Prädikatenlogik – Beispiel „Die Simpsons“

Prädikate, Relationen

E (x,y):	x ist Elternteil von y
M (x):	x ist männlich
P (x):	x ist Person
S (x,y):	x ist Schwester von y
T (x,y):	x ist Tante von y
W (x):	x ist weiblich
Ge (x,y):	x ist Großelter von y
V (x,y):	x ist Vater von y
M (x,y);	x ist Mutter von y

Konstanten (Fakten)

Lisa	- die Person Lisa
Homer	- die Person Homer
Marge	- die Person Marge
IngridG	- die Person IngridG
PattyB	- die Person PattyB

1) Die Großeltern sind die Eltern der Eltern.
2) Eine Tante ist eine Schwester der Eltern.
3) Eine Schwester hat die gleichen Eltern und ist weiblich
4) Es gibt keine Person ohne Mutter.

Logik

Prädikatenlogik – Beispiel „Die Simpsons“

B1) $\forall\, x,y\, [\ \exists\, z\, [E(x,z) \wedge E(z,y)\,] \rightarrow Ge(x,y)]$

B2) $\forall\, x,y\, [\, \exists\, z\, [E(z,y) \wedge S(x,z)\,] \rightarrow T(x,y)]$

B3) $\forall\, x,y\, [\, \exists\, z\, [E(z,y) \wedge E(z,x)\,] \wedge W(x) \quad \rightarrow \quad S(x,y)\,]$

B4) $\neg\, \exists\, x\, [\, P(x) \wedge \forall\, y\, [\, \neg\, M(y,x)\,]\,)]$

B5) $E(Homer, Lisa) \wedge M(Homer)$

B6) $E(Marge, Lisa) \wedge W(Marge)$

B7) $E(IngridG, Marge) \wedge W\, (IngridG)$

B8) $E(IngridG, PattyB) \wedge W\, (PattyB)$

Prädikatenlogik – Beispiel „Die Simpsons“

- Umgang mit Prädiktaten / Formeln
  - » Wertetabelle?
    - » Nein
  - » Bool‘sche Algebra
    - » Nein
  - » Prädikaten-Kalkül
    - » Ja, Nachfolger des Aussagen-Kalküls