Theoretische Informatik

Logik

Aussagenkalkül

Logik

Aussagenkalkül

- Aussagenkalkül wird definiert durch:
  - Menge aussagenlogischer **Formeln**
  - Menge aussagenlogischer **Axiome**
  - Menge aussagenlogischer **Ableitungsregeln**
- Der Aussagenkalkül definiert eine **Ableitbarkeitsbeziehung** über Formeln
- „Formel ist ableitbar (herleitbar, beweisbar)“
- Im reinen Aussagenkalkül sind alle Tautologien ableitbar
- Beweisbarkeit ist syntaktische Beziehung:
  »intelligente Textersetzung« d. h. »intelligentes Text-Suche-Tausche-Verfahren«
- Die Ableitung ist »voll automatisierbar«, da die Ableitungsregeln exakt vorgegeben sind.
- Aussagen (aus denen hergeleitet wird) werden **Prämissen** genannt
- die hergeleiteten Aussagen werden **Konklusionen** genannt

Logik

Aussagenkalkül

- Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf $\neg, \rightarrow$.
- Menge der Formeln
  1. Aussagenvariable A, B, C, ...
  2. Mit den Formeln a, b sind auch $\neg$ a, a $\rightarrow$ b Formeln.
  3. Klammerung: ist a eine Formel, dann ist auch (a) eine Formel
     Es gelten die üblichen Regeln zur Vermeidung von Klammern
- Menge der Axiome (per Definition ableitbar)
  - » A1) $a \rightarrow (b \rightarrow a)$
  - » A2) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$
  - » A3) $(\neg a \rightarrow \neg b) \rightarrow (b \rightarrow a)$

Logik

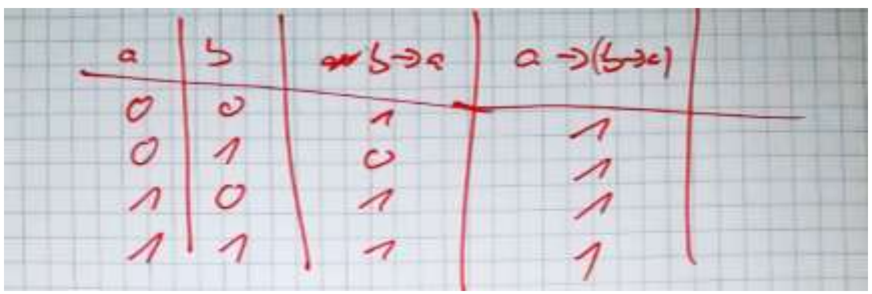
Aussagenkalkül

- Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die Aussagen A1 – A3 Tautologien sind
  - A1) $a \rightarrow (b \rightarrow a)$
  - A2) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$
  - A3) $(\neg a \rightarrow \neg b) \rightarrow (b \rightarrow a)$

Logik

Aussagenkalkül

- Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die Aussagen A1 – A3 Tautologien sind
  - » A1) $a \to (b \to a)$
  - » A2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$
  - » A3) $(\neg a \to \neg b) \to (b \to a)$



a	b	b→a	a→(b→a)
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

a	b	c	d: a→b	e: a→c	f: d→e	g: b→c	h: a→g	h→f
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

a	b	b→a	¬a→¬b	(¬a→¬b)→(b→a)
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Aussagenkalkül – Regeln /Beweisregel

Beweisregeln (Schlussfiguren) bilden die Grundlagen des Aussagenkalküls, da sie wahre Aussagen in neue wahre Aussagen überführen.

Beweisregeln werden nachfolgendem Schema aufgebaut:

$$
\begin{array}{ll}
P_1 & \text{(Prämisse)} \\
P_2 & \text{(Prämisse)} \\
\cdots & \text{(weitere Pämissen)} \\
P_n & \text{(Prämisse)} \\
\hline
K & \text{(Konklusion)}
\end{array}
$$

Die Prämissen sind dabei die bereits als wahr nachgewiesenen Aussagen. Da sie gelten, darf auf die Konklusion geschlossen werden.

Logik

Aussagenkalkül – Regeln /Beweisregel

Regel R1 „Modus Ponens“(Abtrennungsregel):

Abtrennungsregel

a	Prämisse
$a \rightarrow b$	Implikation
$\overline{}$	
b	Konklusion

- Gilt eine Implikation und Ihre Prämisse so gilt auch die Konklusion.
- Man kann sie aus der Implikation abtrennen.

Logik

Aussagenkalkül – Regelanwendung (Beispiel)

Anwendung modus ponens
(Abtrennungsregel)

$$\frac{\begin{array}{c} a \\ a \rightarrow b \end{array}}{b} \quad \text{ist ableitbar}$$

a: Die Ampel ist rot

b: Ich muss anhalten

$a \rightarrow b$:
Wenn die Ampel rot ist,
muss ich anhalten

Hinweis: $b \rightarrow a$ gilt nicht!

Wenn ich anhalte (stehen bleibe),
wird die Ampel nicht - zwangsläufig - rot

Logik

Aussagenkalkül

- Weiteres Beispiel zum Modus ponens (Abtrennungsregel)

Der Modus ponens (Abtrennungsregel) ist folgende Beweisregel:

$$\begin{array}{rl} a & \text{(Prämisse)} \\ a \Rightarrow b & \text{(Prämisse: Implikation)} \\ \hline b & \text{(Konklusion)} \end{array}$$

- Gilt eine Implikation und Ihre Prämisse so gilt auch die Konklusion.
- Man kann sie aus der Implikation abtrennen.

$$\begin{array}{r} \text{»Es regnet.«} \\ \text{»Wenn es regnet, ist die Straße nass.«} \\ \hline \text{»Die Straße ist nass.«} \end{array}$$

Logik

Aussagenkalkül

- Satz (Modus Ponens)
  - Der Modus Ponens

$$(a \ \wedge \ (a \Rightarrow b)) \ \Rightarrow \ b$$

ist eine Tautologie

- Beweis

a	b	$a \Rightarrow b$	$a \wedge (a \Rightarrow b)$	$\ldots \Rightarrow b$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Logik

Aussagenkalkül

- Definition Modus tollens (Aufhebungsregel)

$$\begin{array}{rl} a \Rightarrow b & \text{(Prämisse: Implikation)} \\ \neg b & \text{(Prämisse)} \\ \hline \neg a & \text{(Konklusion)} \end{array}$$

Gilt eine Implikation $a \Rightarrow b$, aber ihre Folgerung (b) gilt nicht, dann kann die Voraussetzung (a) der Implikation nicht gelten.

- Beispiel

» Prämisse:Implikation	Wenn es regnet, ist die Straße nass
» Prämisse	Die Straße ist nicht nass
» Konklusion	Es regnet nicht

Logik

Aussagenkalkül

- Beweisen Sie den Modus Tollens.

$a \Rightarrow b$	(Prämisse: Implikation)
$\neg b$	(Prämisse)
$\neg a$	(Konklusion)

- Satz (Modus Tollens)
  - Der Modus Tollens
    $\big((a \to b) \wedge \neg b\big) \to \neg a$
    ist eine Tautologie.

Logik

Aussagenkalkül

- Beweisen Sie den Modus Tollens.

$$\begin{array}{rl} a \Rightarrow b & \text{(Prämisse: Implikation)} \\ \neg b & \text{(Prämisse)} \\ \hline \neg a & \text{(Konklusion)} \end{array}$$

Es gilt:

$\big((a \rightarrow b) \wedge \neg b\big) \rightarrow \neg a$

a	b	¬b	a ⇒ b	(a ⇒ b) ∧ ¬b	Behauptung
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1

Logik

Aussagenkalkül

- Es gilt

$$\begin{array}{rl} a \Rightarrow b & \text{(Prämisse: Implikation)} \\ \neg b & \text{(Prämisse)} \\ \hline \neg a & \text{(Konklusion)} \end{array}$$

- Und somit auch
  - Sei a eine (wissenschaftliche) Theorie und b eine »erwartete Beobachtung«, die sich aus der Theorie ergeben sollte (also: a → b).
    Zeigt sich nun in einem wissenschaftlichen »Experiment« aber, dass b nicht gilt,
    so ist mit dem Modus tollens die Theorie a falzifiziert,
    also als unwahr erkannt.

Logik

Aussagenkalkül

- Definition Kettenschlussregel, Transitivität
- Der Kettenschluss ist folgende Beweisregel:

$$\begin{array}{ll} a \Rightarrow b & \text{(Prämisse: Implikation)} \\ b \Rightarrow c & \text{(Prämisse: Implikation)} \\ \hline a \Rightarrow c & \text{(Konklusion)} \end{array}$$

Wenn aus a die Aussage b folgt und aus dieser dann c folgt,
dann darf aus a direkt auf c geschlossen werden.

- Beispiel

»Wenn es regnet, ist die Straße nass.«

»Wenn die Straße nass ist, dann besteht Schleudergefahr.«

»Wenn es regnet, dann besteht Schleudergefahr.«

Logik

Aussagenkalkül

- Beweis der Kettenschlussregel mittels Wahrheitstafel

$$\begin{array}{ll} a \Rightarrow b & \text{(Prämisse: Implikation)} \\ b \Rightarrow c & \text{(Prämisse: Implikation)} \\ \hline a \Rightarrow c & \text{(Konklusion)} \end{array}$$

A	B	C	A → B	B → C	A→B ^ B → C	A → C
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Logik

Aussagenkalkül

- Satz Kalkülregeln
  - » Neben dem Modus ponens gibt es noch weitere Kalkülregeln des Aussagenkaküls.

R1 Modus Ponens	$\dfrac{a \quad a \Rightarrow b}{b}$	R2 Transitiv- ität	$\dfrac{a \Rightarrow b \quad b \Rightarrow c}{a \Rightarrow c}$
R3 Konjunktion	$\dfrac{a \quad b}{a \wedge b}$	R4 Konjunktion	$\dfrac{a \wedge b}{a}$
R5 Disjunktion	$\dfrac{a \quad \neg a \vee b}{b}$	R6 Disjunktion	$\dfrac{a \vee b \quad \neg a \vee c}{b \vee c}$

Logik

Aussagenkalkül

- Aufgabe: Abwandlung von Regel 6 (Disjunktion)
  - Begründen oder widerlegen Sie, ob

$$\frac{\begin{array}{l} a \vee b \\ \neg a \vee \boxed{\neg b} \vee c \end{array}}{c}$$

eine gültige Regel ist.

Logik

Aussagenkalkül

- Aufgabe: Abwandlung von Regel 6 (Disjunktion)
  - » Begründen oder widerlegen Sie, ob

$$\frac{\begin{array}{c} a \vee b \\ \neg a \vee \boxed{\neg b} \vee c \end{array}}{c}$$

eine gültige Regel ist.

  - » Dies ist keine gültige Regel, denn um R6 anwenden zu können, muss man wie folgt vorgehen:

$$\frac{\begin{array}{c} a \vee (b) \\ \neg a \vee (\neg b \vee c) \end{array}}{(b) \vee (\neg b \vee c)}$$

Mit der Regel »$x \vee \neg x = 1$« folgt, dass $b \vee \neg b \vee c$ immer wahr ist. Damit ist die Abwandlung von R6 keine gültige Regel.