Seite 11 : Lösung der Aufgaben

Aufgabe 1: Es ergibt sich mit

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

* $A \cap B = \{1, 2\}$
* $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
* $A \setminus B = \{-2, -1, 0\}$
* $B \setminus A = \{3, 4\}$

Aufgabe 2:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5.5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

b) $B = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$ = Menge der nicht negativen ganzen Zahlen, die durch 3 teilbar sind.

Aufgabe 3: Zu zeigen ist: $\overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$

Wahrheitstafel:

$a \in X$	$a \in Y$	$a \in X \cap Y$	$a \in \overline{X \cap Y}$	$a \in \bar{X}$	$a \in \bar{Y}$	$a \in \bar{X} \cup \bar{Y}$
W	W	W	F	F	F	F
W	F	F	W	F	W	W
F	W	F	W	W	F	W
F	F	F	W	W	W	W

Beide Spalten sind identisch $\longrightarrow \overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$

Aufgabe 4: Zu zeigen ist

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Beweis: Per Definition gilt

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

Schließe nun folgendermaßen:

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$$
$$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$$
$$= (A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \cup (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) =$$
$$= ((A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})) \cup ((B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B})) =$$
$$= (\emptyset \cup (A \cap \overline{B})) \cup ((B \cap \overline{A}) \cup \emptyset) =$$
$$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$
$$= A \Delta B \text{ laut Definition.}$$

Man kann die Aufgabe 4 auch mittels Wahrheitstafel lösen. Wegen der Verknüpfung einiger Klammern herange-nommen ist dieser Weg etwas umständlicher als der eingeschlagene Weg über die Mengenalgebra.

Erläuterung der Beispiele Seite 13:

Beispiel 1: Es gilt – das ist die Behauptung:

$$(A \cup B) \cap \bar{C} = \emptyset \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

Beweis der Behauptung:

Sei $x \in A \cup B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wegen} \\ (A \cup B) \cap \bar{C} = \emptyset}}{\Longrightarrow} x \notin \bar{C} \Rightarrow x \in C$,

was zu zeigen war

Beispiel 2:

Es gilt:

$$\bar{A} \cup (B \cap C) = \Omega \Rightarrow A \subseteq B \cap C$$

Beweis dieser Implikation:

Sei $a \in A \Rightarrow a \notin \bar{A} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wegen} \\ \bar{A} \cup (B \cap C) = \Omega}}{\Longrightarrow}$

$a \in B \cap C$, was zu zeigen war.

Beispiel 3:

Zu zeigen ist

$$O \subseteq \overline{M} \Leftrightarrow (x \in O \Rightarrow x \in \overline{M})$$

Sei also $x \in O$. Dann gilt

$$x \in O \xRightarrow{\text{Vor. 2.}} x \in Q \xRightarrow{\text{Vor. 3.}} x \notin P \xRightarrow{\text{Vor. 1.}}$$

$$x \notin M \Longleftrightarrow x \in \overline{M},$$

was zu zeigen war.

Seite 14 – Erläuterung zur Siebformel für 2 Mengen

Es gilt

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

Weiter gilt

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

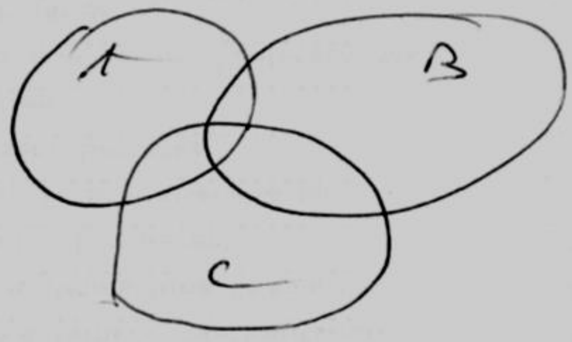
Somit folgt

$$|A| + |B| - |A \cap B| = |A \cap B| + |A \cap \bar{B}|$$

$$+ |A \cap B| + |\bar{A} \cap B| - |A \cap B| =$$

$$|A \cap B| + |A \cap \bar{B}| + |\bar{A} \cap B| = |A \cup B|$$

Seite 14 — Erläuterung zur Siebformel mit 3 Mengen



1. <u>Schritt</u>: $|A|+|B|+|C|$:

(i) Bei dieser Rechnung wurde alles 1x berücksichtigt, was nur in A, nur in B und nur in C enthalten ist.

(ii) Alles, was (nur in A und in B), (nur in A und in C) und (nur in B und in C) enthalten ist, wurde 2x berücksichtigt.

(iii) Alles, was in A und in B und in C enthalten ist, wurde 3x berücksichtigt.

2. <u>Schritt</u>: $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$:

Bis hierhin wurde (ii) korrigiert. Der Teil aus (iii) ist nun ganz verschwunden, so daß dieser Teil wieder hinzuzunehmen ist. $\Longrightarrow$

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

Rechnerische Erläuterung:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$

(Siebformel für 2 Mengen)

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |(A \cup B) \cap C|$$

$$|(A \cup B) \cap C| = |(A \cap C) \cup (B \cap C)| =$$

Siebformel für 2 Mengen

$$|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|$$

$$= |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |(A \cup B) \cap C| =$$

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Seite 15: Erläuterung Beispiel 3:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \quad \text{(Vereinigung von 2 disjunkten Mengen)}$$

$$\Longrightarrow$$

$$|A| = 10 = |(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})|$$

$$= |A \cap B| + |A \cap \overline{B}|$$

$$= |A \cap B| + 6$$

$$= |A \cap B| + 6 \Longrightarrow$$

$$|A \cap B| = 10 - 6 = 4$$

Somit befinden sich 4 Elemente sowohl in A als auch in B.

Seite 16: Lösung der Aufgaben

Aufgabe 1: Lege folgende Bezeichnungen fest

- P = Menge der Pfefferminz-Spezies
- A = " " Anis-Spezies
- F = " " Frucht-Spezies

Verwende die %-Zahlen so, wie sie sind, d.h. gehe von 100 befragten Personen aus (und lasse die Prozentbeziehung dabei weg).

Lt. Vorgaben in der Aufgabe gilt nun:

(1) $|P| = 70$ (4) $|F \cap A| = 30$
(2) $|F| = 50$ (5) $|P \cap A| = 30$
(3) $|P \cap F| = 40$ (6) $|P \cap A \cap F| = 20$

Entsprechend der Siebformel für 3 Mengen ergibt sich damit:

$$|P \cup A \cup F| = 100 = |P| + |A| + |F| - |P \cap A| - |P \cap F| - |A \cap F| + |P \cap A \cap F|$$
$$= 70 + |A| + 50 - 30 - 40 - 30 + 20 = |A| + 40 \implies$$
$$|A| = 100 - 40 = 60$$

Der Prozentsatz der Anis-Liebhaber beträgt 60 %.

Frage: Wo wird die Rahmenbedingung, daß sich jeder der Befragten für mind. eine Geschmacksrichtung entschieden hat, benutzt?

Aufgabe 2: Bezeichnungen

F – Menge der weiblichen Studierenden unter den Teilnehmenden der Vorlesung

E – Menge der Erstsemester unter den an der Vorlesung Teilnehmenden

Gesucht ist laut Aufgabenstellung eine untere Grenze von $|E \cap F|$.

Nach der Siebformel für zwei Mengen gilt

$$|F \cup E| = |F| + |E| - |F \cap E| \iff$$

$$|F \cap E| = |F| + |E| - |F \cup E|$$

$$= 55 + 60 - |F \cup E|$$

Da 80 Studierende die Vorlesung besuchen, gilt weiter $|F \cup E| \leq 80$, was impliziert

$$|F \cap E| = 55 + 60 - |F \cup E|$$

$$= 115 - |F \cup E| \geq 115 - 80$$

$$= 35$$

Die Anzahl der an der Vorlesung teilnehmenden weiblichen Studierenden im ersten Semester beträgt somit mindestens 35.

Alternative Lösung zu Aufgabe 2:

Menge der Hörer $= H$

Dann gilt

$$H = (F \cap E) \cup (\overline{F} \cap E) \cup (F \cap \overline{E}) \cup (\overline{F} \cap \overline{E}),$$

was mit

- $x_1 = |F \cap E|$
- $x_2 = |\overline{F} \cap E|$
- $x_3 = |F \cap \overline{E}|$
- $x_4 = |\overline{F} \cap \overline{E}|$

zu den folgenden Gleichungen führt

$$80 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$
$$55 = x_1 + x_3 \Rightarrow x_3 = 55 - x_1$$
$$60 = x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = 60 - x_1$$

$$80 = x_1 + (60 - x_1) + (55 - x_1) + x_4 \Rightarrow$$

$$x_1 = 35 + x_4 \quad \text{mit } x_4 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x_1 \geq 35$$

Seite 20 : Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1 :

$$A \times B = \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$$

Aufgabe 2 :

$$M_1 = \{(1,-1),(2,-1),(3,-1),(4,-1),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(2,1),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2)\}$$

$$M_2 = \{(1,-1),(2,0),(3,1),(4,2)\}$$

$$M_3 = \{(1,-1),(1,1),(2,2)\}$$

Aufgabe 3 :

$$P(P(\{a\})) = P(\{\emptyset,\{a\}\}) = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{a\}\},\{\emptyset,\{a\}\}\}$$