2. Mengen

#Mathe1 #Mathe #Mengen

Themen

---

1. Mengen

Definition

Unter einer *Menge* versteht man jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten *m* unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von *M* genannt werden) zu einem Ganzen.

Konventionen

- Mengen werden mit Großbuchstaben bezeichnet
- Objekte (Kleinbuchstaben) werden als Elemente bezeichnet
- "x ist Element der Menge A", formal: $x \in A$
- "x ist nicht Element der Menge A", formal: $x \notin A$

Beschreibung von Mengen

- Aufzählend: $A := \{a, b, \ldots, z\}$
  - Mengenklammer {} fasst Buchstaben zur Menge zusammen
  - Menge ist durch die Aufzählung ihrer Elemente beschrieben
  - Nicht alle Elemente müssen aufgeschrieben werden, Verwendung von ...
- Charakteristische / definierte Eigenschaften als Schreibweise:
  $M := \{w : w \text{ hat die Eigenschaft } \ldots\}$
  "M ist die Menge aller Objekte w mit den Eigenschaften ..."

Teilmengenbeziehung und Gleichheit

Definition

Es seien die Mengen X und Y.

1. Falls jedes Element von X auch Element von Y ist, so heißt X Teilmenge von Y.

   Schreibweise: $X \subseteq Y$ (*Mengeninklusion*)

2. Gilt $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$, so sind beide Mengen *gleich*.

   Schreibweise: $X = Y$
   Also ist jedes Element aus X auch Element von Y und umgekehrt.

3. Gilt $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$, so sagt man "$X$ ist eine *echte Teilmenge von Y*"

   Schreibweise: $X \subset Y$

Mächtigkeit von endlichen Mengen

Definition

Die Mächtigkeit bzw. Kardinalität einer Menge ist die Anzahl der Elemente dieser Menge.

Schreibweise: $|A|$ für die Mächtigkeit der Menge A

Endliche vs. unendliche Mengen

- Mächtigkeit einer endlichen Menge ist eine Zahl
- Mächtigkeit einer unendliche Menge U lautet $|U| = \infty$

Beispiele:

- Für $A := \{a, b, \ldots, z\}$ gilt $|A| = 26$

- $|C| = |D| = |E| = 6$ für
  - $C := \{a, c, e, f, g, h\}$
  - $D := \{a, c, a, a, e, f, g, g, g, g, g, h, h\}$
  - $E := \{h, g, f, a, c, e\}$

> ⚠ **Zur Beachtung**
>
> Mengen mit unendlich vielen Elementen haben die Mächtigkeit unendlich $(= \infty)$ (siehe 3.)

Leere Menge

> **Definition**
>
> Eine Menge, die kein Element bestitz, heißt *leere Menge*
>
> - **Schreibweise**: $\{\} = \emptyset$
> - **Es gilt**: $\emptyset \subset M$ für alle Mengen M
> - **Mächtigkeit**: $|\{\}| = |\emptyset| = 0$

---

2. Mengenalgebra

Operationen mit Mengen

Schnitt, Vereinigung, Differenz

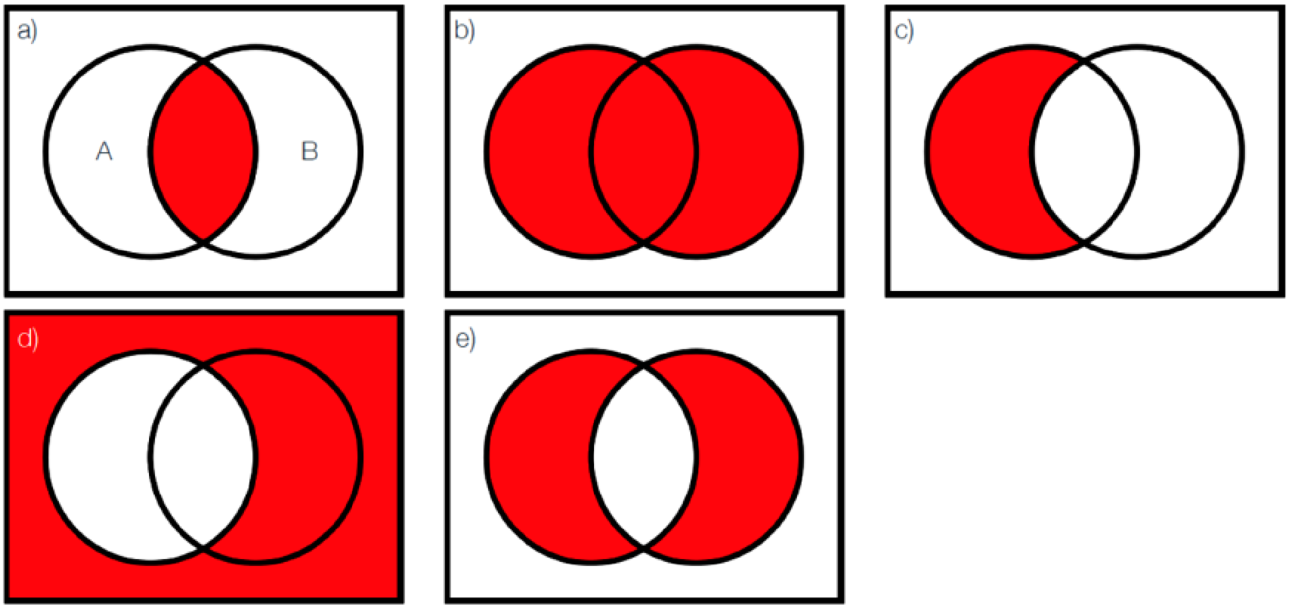
> **Definition**
>
> 1. Die *Schnittmenge* $X \cap Y$ ist die Menge der Elemente, die in X und in Y liegen.
>
>   Schreibweise: $X \cap Y := {a : a \in X und a \in Y}
>
> 2. Die *Vereinigungsmenge* $X \cup Y$ von X und Y ist die Menge der Elemente, die in X oder Y liegen. *Oder bedeutet hier nicht "entweder oder"!*
>
>   Schreibweise: $X \cup Y := {a : a \in X oder a \in Y}

3. Die *Mengendifferenz* $Y \backslash X$ ist die Menge aller Objekte, die in Y, aber nicht in X liegen.

   Schreibweise: $Y \backslash X := {a : a \in Y und a \notin X}

4. Die *symmetrische Differenz* $X \Delta Y := (X \cup Y) \backslash (X \cap Y)$

Bildliche Darstellung



a) $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $A \backslash B$
d) $A^C = \bar{A} = G \backslash A$
e) $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ $(= (A \cup B) \backslash (A \cap B))$

Gesetze der Mengenalgebra

Verknüpfung von Mengen

Definition

Sind X und Y Mengen mit $X \cap Y = \{\}$ so nennt man X und Y *disjunkt* (elementfremd).

Lemma

Sind X und Y Mengen, so gelten stehts

- $X \cap Y \subseteq X \subseteq X \cup Y$
- $X \cap Y \subseteq Y \subseteq X \cup Y$

Ist speziell X eine Teilmenge von Y, so gelten ferner

- $A \cap B = A$
- $A \cup B = B$

Verknüpfung von Mengen - Komplement

Definition

Es ecistiert eine Grundmenge M. Ist $X \subseteq M$, so heißt die Menge $X^C := M \backslash X$ das *Komplement* von X in M. Andere Schreibweise: $X^X = \bar{X}$

Gesetze

Kommutativgesetz

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$

Assoziativgesetz

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Verschmelzungsgesetz / Absorptionsgesetz

5. $A \cap (A \cup B) = A$
6. $A \cup (A \cap A) = A$

Distributivgesetz

7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

neutrale Elemente bezüglich $\cap$ und $\cup$

9. $A \cap M = A$ und $A \cup \emptyset = A$

inverse Elemente bezüglich $\cap$ und $\cup$

10. $A \cap \bar{A} = \emptyset$ und $A \cup \bar{A} = M$

Analog der Definition in der Logik sprechen wir auch bei der Menge der Teilmengen einer Obermenge M versehen mit den beiden Operatoren $\cup$, $\cap$ von einem *Mengenverband* (Gesetzmäßigkeiten 1-6), einem *distributiven Mengenverband* (ergänzt um die Punkte 7 und 8) sowie einem *Boolschen Mengenverband* (ergänzt um die Punkte 9 und 10).

Bei der Komplementbildung von Mengen gelten weiter folgende Gesetzmäßigkeiten (siehe Logik)

De Morgansche Gesetze

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Gesetz der doppelten Negation

$\bar{\bar{A}} = A$

Zusätzlich gilt folgende Festlegung: Differenzmenge $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Aussagenlogik und Mengenalgebra

Es gelten folgende Analogien zwischen Logik und Mengenalgebra

Logik	Mengenalgebra
Negation $\bar{A}$ oder $\neg A$	Komplementmenge $\bar{A}$
Logisches UND $A \wedge B$	Durchschnitt $A \cap B$
Logisches ODER $A \vee B$	Vereinigung $A \cup B$
Wahrheitswert = WAHR	Obermenge Ω
Wahrheitswert = FALSCH	Leere Menge $\emptyset$

Hiermit lassen sich alle *Grundrechenregeln* der Logik den Rechenregeln der Mengenalgebra eindeutig zuordnen und in Beziehungen setzen.
In der Welt der Logik sind die Ereignisse der jeweiligen Operatoren $\wedge$, $\vee$, $\neg$ wiederum Elemente der Menge {WAHR, FALSCH} sowie in der Welt der Teilmengen einer gegebenen Obermenge Ω die Ergebnisse der jeweilligen Operationen $\cap$, $\cup$, $\overline{Menge}$ wiederum

Teilmengen von Ω.
Die Analogien lassen sich noch bezüglich Implikation und Äquivalenz fortsetzen

Logik	Mengenalgebra
$(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$	$(A \subseteq B) \iff (\forall x \in \Omega : x \in A \implies x \in B) \iff \bar{A} \cup B = \Omega$
$(A \iff B) \iff (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$	$(A = B) \iff (\forall x \in \Omega : x \in A \iff x \in B) \iff (\forall x \in \Omega : x \in (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A)) \iff (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A) = \Omega$

Nachweis von Teilmengenbeziehung

Frage: Wie beweist man eine Teilmengenbeziehung $A \subseteq B$ oder $A \subset B$?

Antwort 1: Indem man zeigt -> $\bar{A} \cup B = \Omega$ (Ω sei die Gesamtmenge)
Beispiel 1 - Behauptung: Es gilt $(A \cup B) \cap \bar{C} = \emptyset \implies A \cup B \subseteq C$.
$A \cup B \subseteq C \iff \overline{(A \cup B)} \cup C = \Omega \iff (A \cup B) \cap \bar{C} = \emptyset$, was vorausgesetzt war.
Beispiel 2 - Behauptung: Es gilt $\bar{A} \cup (B \cap C) = \Omega \implies A \subseteq B \cap C (A, B, C \subseteq \Omega)$

Antwort 2: Indem man zeigt -> $x \in A \implies x \in B$.
Beispiel 1 - Behauptung: Es gilt $(A \cup B) \cap \bar{C} = \emptyset \implies A \cup B \subseteq C$.
Beispiel 2 - Behauptung: Es gilt $\bar{A} \cup (B \cap C) = \Omega \implies A \subseteq B \cap C (A, B, C \subseteq \Omega)$
Beispiel 3: Es sei vorausgesetzt für die Mengen M, O, P, Q, die Teilmengen einer Obermenge E sein mögen, dass

1. $M \subseteq P$
2. $O \subseteq Q$
3. $P \cap Q = \emptyset$

---

3. Mächtigkeit von Mengen bestimmen - Siebformel

Summenregel

⚠ Regel

Für zwei endliche und disjunkte Mengen A und B ist die Anzahl der Elemente ihrer Vereinigungsmenge gleich $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Summenregel (Verallgemeinerung)

⚠

Regel

Für n endliche disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ist die Anzahl der Elemente ihrer Vereinigungsmenge gleich $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$.

Zerlegung einer Menge in disjunkte Teilmengen

Regel

Sei E eine gegebene endliche Menge. Dann lässt sich E als Vereinigungsmenge disjunkter Mengen darstellen

- mit einer Menge $A \subseteq E$ gilt: $E = A \cup \bar{A}$
- mit zwei Mengen $A, B \subseteq E$ gilt: $E = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$
- mit drei Mengen $A, B, C \subseteq E$ gilt:
  $E = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup$
  $(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$
- ... usw. ...

Inklusions- / Exklusionsprinzip oder Siebformel für zwei Mengen

Regel

Für zwei beliebig endliche Mengen A und B ist die Anzahl der Elemente ihrer Vereinigungsmenge gleich

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, weil $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.

Siebformel für drei Mengen

Regel

Für drei beliebige endliche Mengen A, B und C ist die Anzahl der Elemente ihrer Vereinigungsmenge gleich
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Siebformel für vier Mengen

Regel

Für vier beliebige endliche Mengen A, B, C und D ist die Anzahl der Elemente ihrer Vergleichsmenge gleich

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D|$$
$$-|A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D|$$
$$+|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$$
$$-|A \cap B \cap C \cap D|.$$

Hinweis

Das Verhalten der Siebformel wie drei oder auch vier Mengen kann analog für mehr Mengen übernommen werden.

---

4. Produktmenge

Definition

Als Produktmenge $A \times B$ zweier *nichtleerer* Mengen A und B bezeichnet man die Menge aller geordneten Paare, deren erste Koordinate Element aus A und deren zweite Koordinate Element aus B ist. Es gilt also $A \times B := \{(x_1, x_2) | x_1 \in A, x_2 \in B\}$.

$A \times B$ wird auch als *kartesisches Produkt* bezeichnet. Ist $A = B$, so schreibt man:

$$A \times B = A^2$$

Beispiel

Für $A = \{a, b\}$ und $B = \{a, d\}$ ist $A \times B = \{(a, a), (a, d), (b, a), (b, d)\}$, dagegen $B \times A = \{(a, a), (a, b), (d, a), (d, b)\}$

Der Begriff der *Produktmenge* lässt sich verallgemeinern auf beliebig viele *Dimensionen*.

Definition

Als Produktmenge $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ von n *nichtleeren* Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bezeichnet man die Menge aller geordneten Tupel, deren i-te Koordinate jeweils

Element aus A_i ist. Es gilt also:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}.$$

Ein bekanntes Beispiel einer solchen höherdimensionalen Produktmenge ist der reelle 3-dimensionale Raum $\mathbb{R}^3$.

---

5. Potenzmenge

Definition

Ist M eine Menge, so ist die Potenzmenge $P(M)$ von M als die Menge aller Teilmengen von M definiert $P(M) := \{U : U \subseteq M\}$.

Merke

Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge und damit immer auch Element der Potenzmenge jeder Menge.

Beispiele: Es gilt:

- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ und damit $|P(\emptyset)| = 1 = 2^0$
- $P(\{a\}) = \{\emptyset\{a\}\}$ und damit $|P(\{a\})| = 2 = 2^1$
- $P(\{a,b\}) = \{\emptyset\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ und damit $|P(\{a,b\})| = 4 = 2^2$
- $P(\{a,b,c\}) = \{\emptyset\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\},\}$ und damit $|P(\{a,b,c\})| = 8 = 2^3$
- analog für alle weiteren
- *Erkenntnis:* $|P(M)| = 2|M|$