



Theoretische Informatik

Logik

Aussagenlogik

Logik

Aussagenlogik - Beispiel

- Aussagen einer Person (Max)

- » A1 Wenn ich genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Auto.
- » A2 Wenn ich nicht genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Fahrrad.
- » A3 Wenn ich ein Auto kaufe, fahre ich nach Spanien in Urlaub.
- » A4 Wenn ich ein Fahrrad kaufe, bleibe ich im Urlaub in Karlsruhe.
- » A5 Ich habe im Vorjahr kein gespartes Geld verbraucht.
- » A6 In diesem Jahr habe ich keine anderen Ausgaben.
- » A7 Es stimmt nicht, dass ich nicht genug Geld gespart habe und weder im Vorjahr gespartes Geld verbraucht habe noch in diesem Jahr andere Ausgaben habe.

- Frage: wo geht's hin in den Urlaub?

Logik

Aussagenlogik

- Definition: Ein **Formales System** besteht aus
 - » einer **Sprache**, also einer Menge von Symbolfolgen.
Eine **Symbolfolge** besteht aus einer endlich langen Liste (Folge) von **Symbolen**.
 - » einer Menge von **Axiomen**, die als »vorgegebene« Symbolfolgen dienen, aus welchen durch Anwenden der Regeln neue Symbolfolgen entstehen.
 - » einer **Grammatik**, also einer Menge von **Regeln**, die angeben wie man aus Symbolfolgen neue Symbolfolgen erzeugen kann, die so auch zur Sprache gehören. Man nennt dies auch **Syntax** der Sprache.
 - » einer **Semantik** welche die **Bedeutung**, der Symbolfolgen angibt.
 - » Die Semantik ist Funktion (**Interpretation**), welche einer Symbolfolge einen **Wert** (Bedeutung) zuordnet.
 - » Manchmal gibt es mehr als eine Interpretation!

Logik

Aussagenlogik

- Definition: Aussagen

- » **Aussagen** sind sprachliche Gebilde, denen einer der beiden **Wahrheitswerte** »wahr« oder »falsch« zugeordnet werden kann.
- » Aussagen werden durch Buchstaben A, B, ... abgekürzt.

- Beispiele

- » A = »Delfine sind Fische« falsch
- » B = »5 ist eine Primzahl« wahr
- » C = »Es gibt nur endlich viele Primzahlen« falsch
- » D = »Es regnet« ?

Aussagenlogik – Nochmals unser Beispiel

- Aussagen einer Person XY (=Max)
 - » A1 Wenn ich genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Auto.
 - » A2 Wenn ich nicht genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Fahrrad.
 - » A3 Wenn ich ein Auto kaufe, fahre ich nach Spanien in Urlaub.
 - » A4 Wenn ich ein Fahrrad kaufe, bleibe ich im Urlaub in Karlsruhe.
 - » A5 Ich habe im Vorjahr kein gespartes Geld verbraucht.
 - » A6 In diesem Jahr habe ich keine anderen Ausgaben.
 - » A7 Es stimmt nicht, dass ich nicht genug Geld gespart habe und weder im Vorjahr gespartes Geld verbraucht habe noch in diesem Jahr andere Ausgaben habe.
- Frage: wo geht's hin in den Urlaub?
- WELCHE AUSSAGEN LASSEN SICH EXTRAHIEREN?

Aussagenlogik – Nochmals unser Beispiel

■ WELCHE AUSSAGEN LASSEN SICH EXTRAHIEREN?

- » $G :=$ XY hat genug Geld gespart
- » $A :=$ XY kauft ein Auto
- » $F :=$ XY kauft ein Fahrrad
- » $S :=$ XY fährt nach Spanien in Urlaub
- » $K :=$ XY bleibt im Urlaub in Karlsruhe
- » $V :=$ XY hat im Vorjahr gespartes Geld verbraucht
- » $D :=$ XY hat in diesem Jahr andere Ausgaben

- » A1 Wenn ich genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Auto.
- » A2 Wenn ich nicht genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Fahrrad.
- » A3 Wenn ich ein Auto kaufe, fahre ich nach Spanien in Urlaub.
- » A4 Wenn ich ein Fahrrad kaufe, bleibe ich im Urlaub in Karlsruhe.
- » A5 Ich habe im Vorjahr kein gespartes Geld verbraucht.
- » A6 In diesem Jahr habe ich keine anderen Ausgaben.
- » A7 Es stimmt nicht, dass ich nicht genug Geld gespart habe und weder im Vorjahr gespartes Geld verbraucht habe noch in diesem Jahr andere Ausgaben habe.

Logik

Aussagenlogik

- Sprache der Aussagenlogik, Formelmenge

- » Symbole der Aussagenlogik sind:

- ▶ **Aussagenvariablen:** A, B, C, \dots

- ▶ **Junktoren (logische Operatoren)** wie $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$.

- » Menge der Formeln

- ▶ Eine Aussagenvariable A ist eine Formel

- ▶ Sind a und b Formeln, so sind

$(a \wedge b)$	» a und b «	Konjunktion
$(a \vee b)$	» a oder b «	Disjunktion
$(a \Rightarrow b)$	» Wenn a dann b «	Implikation
$(a \Leftrightarrow b)$	» a genau dann, wenn b «	Äquivalenz
$(\neg a)$	» Nicht a «	Negation

ebenfalls Formeln.

- ▶ **Klammerung:** ist a eine Formel, dann ist (a) auch eine Formel.

Logik

Aussagenlogik

- Vorrangregeln

(..) bindet stärker als \neg
 \neg bindet stärker als \wedge
 \wedge bindet stärker als \vee
 \vee bindet stärker als \Rightarrow
 \Rightarrow bindet stärker als \Leftrightarrow

Damit ist $a \vee b \wedge \neg c$ so zu lesen: $(a \vee (b \wedge (\neg c)))$.

Sind a_1, a_2, \dots, a_n Formeln, so sind

$\bigwedge_{i=1}^n a_i$	Steht für: $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$
$\bigvee_{i=1}^n a_i$	Steht für: $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$

ebenfalls Formeln.

Logik

Aussagenlogik

Anmerkungen zu » $a \vee b$ «

$a \vee b$ meint in der Mathematik und Logik das *inklusive Oder*, d. h. $a \vee b$ ist wahr,

wenn a oder b oder *beide* wahr sind.

Exklusives Oder, welches genau wahr ist, wenn genau eine der beiden Aussagen wahr ist, umgangssprachlich **entweder-oder**.

a	b	$a \vee b$	$a \text{ xor } b$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Logik

Aussagenlogik

- Wahrheitswerte

- » Wahrheitswert einer atomaren Aussage:

- » „wahr“ oder „falsch“

- » „1“ oder „0“

- » Semantik der logischen Operatoren:

- » Wahrheitswert der Verknüpfung in Abhängigkeit zum Wahrheitswert der verknüpften Teilformeln.

- » Angabe z.B. mit Wahrheitstabellen

Logik

Aussagenlogik – Anmerkungen zu $a \rightarrow b$

- Den Operator $a \rightarrow b$ liest man als: »a **impliziert** b« oder »aus a folgt b« oder » $a \rightarrow b$ ist wahr, wenn, falls a wahr ist, auch b wahr ist«.
- a nennt man die **Prämisse**, b die **Konklusion** der **Implikation**.
- Ist $a \rightarrow b$ wahr, so nennt man
 - » a die **hinreichende Bedingung** für b,
 - » b die **notwendige Bedingung** für a.
- Eine Implikation ist wahr, wenn die Prämisse falsch ist.
→ »10 ist eine Primzahl \rightarrow Elefanten können fliegen« ist wahr!
- »aus etwas Wahrem kann nur etwas Wahres folgern;
jedoch: aus etwas Falschem kann man beliebiges folgern«.
- Die Umkehrung $b \rightarrow a$ der Implikation $a \rightarrow b$ gilt nicht zwangsläufig!

Logik

Aussagenlogik

- Beispiel: Umkehrung einer Implikation
 - » Seien A und B zwei Aussagen mit folgender Bedeutung:
 - » A: Die Ampel ist rot
 - » B: Ich muss anhalten
 - » Allgemein gilt folgende Regel:
 - » $A \rightarrow B$: »Wenn die Ampel rot ist, muss ich anhalten.«
 - » Aber: $B \rightarrow A$ gilt nicht zwangsläufig:
 - »Wenn ich anhalte, ist die Ampel rot.«

Logik

Aussagenlogik - Beispiel

- Aussagen einer Person XY
 - » A1 Wenn ich genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Auto.
 - » A2 Wenn ich nicht genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Fahrrad.
 - » A3 Wenn ich ein Auto kaufe, fahre ich nach Spanien in Urlaub.
 - » A4 Wenn ich ein Fahrrad kaufe, bleibe ich im Urlaub in Karlsruhe.
 - » A5 Ich habe im Vorjahr kein gespartes Geld verbraucht.
 - » A6 In diesem Jahr habe ich keine anderen Ausgaben.
 - » A7 Es stimmt nicht, daß ich nicht genug Geld gespart habe und weder im Vorjahr gespartes Geld verbraucht habe noch in diesem Jahr andere Ausgaben habe.
- Frage: wo geht's hin in den Urlaub?

Aussagenlogik – Nochmals unser Beispiel

- WELCHE AUSSAGEN LASSEN SICH EXTRAHIEREN?
 - » $G := XY$ hat genug Geld gespart
 - » $A := XY$ kauft ein Auto
 - » $F := XY$ kauft ein Fahrrad
 - » $S := XY$ fährt nach Spanien in Urlaub
 - » $K := XY$ bleibt im Urlaub in Karlsruhe
 - » $V := XY$ hat im Vorjahr gespartes Geld verbraucht
 - » $D := XY$ hat in diesem Jahr andere Ausgaben

Logik

Aussagenlogik

1. Wenn ich genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Auto.
2. Wenn ich nicht genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Fahrrad.
3. Wenn ich ein Auto kaufe, fahre ich nach Spanien in Urlaub.
4. Wenn ich ein Fahrrad kaufe, bleibe ich im Urlaub in Karlsruhe.
5. Ich habe im Vorjahr kein gespartes Geld verbraucht.
6. In diesem Jahr habe ich keine anderen Ausgaben.
7. Es stimmt nicht, daß ich nicht genug Geld gespart habe und weder im Vorjahr gespartes Geld verbraucht habe noch in diesem Jahr andere Ausgaben habe.

G := XY hat genug Geld gespart
 A := XY kauft ein Auto
 F := XY kauft ein Fahrrad
 S := XY fährt nach Spanien in Urlaub
 K := XY bleibt im Urlaub in Karlsruhe
 V := XY hat im Vorjahr gespartes Geld verbraucht
 D := XY hat in diesem Jahr andere Ausgaben

B1	wenn G , dann A	$G \Rightarrow A$
B2	wenn (nicht G), dann F	$\neg G \Rightarrow F$
B3	wenn A , dann S	$A \Rightarrow S$
B4	wenn F , dann K	$F \Rightarrow K$
B5	nicht V	$\neg V$
B6	nicht D	$\neg D$
B7	nicht ((nicht G) und (nicht V und nicht D))	$\neg(\neg G \wedge (\neg V \wedge \neg D))$