Übungsblatt-9 Lineare Algebra (Matrizen)-Kap. 9 - Lösungen

Aufgabe 1 : Bestimmen Sie die $4 \times 4-$Matrix mit den folgenden Eigenschaften : Es gelte $a_{jk} = 1$ für j=k, $a_{jk} = 2$ für j=k-2, $a_{jk} = 3$ für j=k+2, $a_{jk} = 4$ sonst.

Lösung Aufgabe 1 : Die gesuchte Matrix lautet $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 : Welche $4 \times 4-$Matrizen erzeugen die folgenden Zeilenoperationen in einer $4 \times n-$Matrix ?

a) P_{24} vertauscht die Zeilen 2 und 4
b) E_{14} addiert das 3-fache der 1. Zeile zur 4. Zeile
c) E_{23} subtrahiert das doppelte der 2.Zeile von der 3. Zeile
d) E_{134} subtrahiert das doppelte der 1.Zeile von der 3. Zeile und addiert die 1. Zeile zur 4. Zeile

Lösung Aufgabe 2 :

a) $P_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $E_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $E_{134} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 : Führen Sie mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die folgenden Rechenoperationen durch (,sofern diese möglich sind)

a) $2 \cdot A + C - B^T$ b) $A^T - B - 3 \cdot C^T$ c) $2 \cdot (A + B^T)^T - C^T$ d) $A - 2 \cdot C + B$

Lösung Aufgabe 3 :

a) $2 \cdot A + C - B^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 0 \\ -3 & 12 & 7 \end{pmatrix}$

b)$A^T - B - 3 \cdot C^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -9 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

c)$2 \cdot (A + B^T)^T - C^T = 2A^T + 2B - C^T =$

$$2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

d) $A - 2 \cdot C + B$ - Diese Berechnung ist nicht möglich, da B eine 3×2-Matrix ist, während A und C 2×3-Matrizen sind.

Aufgabe 4 : Führen Sie bei a)-g) folgende Matrix-Multiplikationen durch :

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ Wann stimmen die Ergebnismatrizen aus f) und g) überein ?

Lösung zu Aufgabe 4 :

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 3 & 9 \\ 42 & 48 & 6 & 18 \\ 14 & 16 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 & 100 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 46 & 61 \\ 10 & 14 & 18 \\ 5 & 8 & 11 \\ 12 & 22 & 32 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 12 & 29 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p & -4q \\ p & 7q \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p & -4p \\ q & 7q \end{pmatrix}$

Übereinstimmung bei f) und g) herrscht, wenn $p = q$ gilt.

Aufgabe 5 : Berechnen Sie A^3 mit

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$. Wie lautet das Ergebnis zu A^6, A^{12}, A^{30} ?

Lösung Aufgabe 5 : Es gilt :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = abc \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$A^6 = (A^3)^2 = a^2b^2c^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A^{12} = (A^3)^4 = a^4b^4c^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{30} = (A^3)^{10} = a^{10}b^{10}c^{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 : Berechnen Sie jeweils die Inverse der Matrizen mittels Gauss-Jordan-Verfahren

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 13 & 4 \end{pmatrix}$.

d) Lösen Sie das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 13 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 30 \end{pmatrix}$

unter Verwendung der in c) berechneten inversen Matrix C^{-1}.

Lösung Aufgabe 6 :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 1 & 0 \\ 5 & 7 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \to (II \cdot 3) \to \begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 1 & 0 \\ 15 & 21 & | & 0 & 3 \end{pmatrix} \to (II - 5 \cdot I) \to \begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -5 & 3 \end{pmatrix}$

$\to (I - 4 \cdot II) \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & | & 21 & -12 \\ 0 & 1 & | & -5 & 3 \end{pmatrix} \to (\frac{1}{3} \cdot I) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 7 & -4 \\ 0 & 1 & | & -5 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 2 & 7 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \to (II - 2 \cdot I) \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \to (I - 3 \cdot II) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 7 & -3 \\ 0 & 1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 13 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to (II - I \oplus III - 3 \cdot I) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\to (5 \cdot III) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 35 & 20 & | & -15 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to (III - 7 \cdot II) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & | & -8 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

$\to (-\frac{1}{2} \cdot III) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \to (II - III) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & | & -5 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$$\rightarrow (\tfrac{1}{5}\cdot II, \tfrac{1}{4}\cdot III) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & \frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} \rightarrow (I - 2\cdot II) \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & \frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 13 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 30 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 13 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 30 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 : Beweisen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{pmatrix}$ invertierbar ist, falls $a \neq 0$ und $a \neq b$ gelten.

Lösung Aufgabe 7 : Wie in der Vorlesung besprochen, starten wir das Gauss-Jordan-Verfahren

$$\begin{pmatrix} a & b & b & | & 1 & 0 & 0 \\ a & a & b & | & 0 & 1 & 0 \\ a & a & a & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (II - I, III - I) \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & b & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-b & a-b & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (III - II) \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & b & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun kann man sofort erkennen : Wenn $a \neq b$ und $a \neq 0$, so kann man den linken Teil des Schemas in die $3 \times 3-$Einheitsmatrix transformieren, was Invertierbarkeit der Matrix A bedeutet.

Aufgabe 8 : Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal ?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$

Lösung Aufgabe 8 : Laut Vorlesung ist eine Matrix A orthogonal genau dann, wenn $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$, wenn also die Inverse von A gerade ihre Transponierte ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn unterschiedliche Spalten von A paarweise orthogonal zueinander sind und die Spalten der Matrix A (als Vektoren aufgefasst) die Länge / den Betrag 1 haben **oder** wenn unterschiedliche Zeilen von A paarweise orthogonal zueinander sind und die Zeilen der Matrix A (als Vektoren aufgefasst) die Länge / den Betrag 1 haben

Hiervon ausgehend kann nun festgestellt werden :

Die Matrix in a) ist nicht orthogonal, da z.B. der erste Spaltenvektor nicht orthogonal zum zweiten Spaltenvektor ist.

Die Matrix in b) ist orthogonal, weil alle 3 Spaltenvektoren die Länge 1 haben und diese paarweise zueinander orthogonal sind.

$$s_1 \cdot s_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = 1, s_1 \cdot s_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = 0,$$

$$s_1 \cdot s_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = 0, s_2 \cdot s_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = 1$$

$$s_2 \cdot s_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = 0, s_3 \cdot s_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = 1$$

Die Matrix in c) ist orthogonal, weil die Zeilenvektoren jeweils die Länge 1 haben und zueinander orthogonal sind. Im Detail

$$s_1 \cdot s_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \frac{8-2\sqrt{12}}{16} + \frac{8+2\sqrt{12}}{16} = 1$$

$$s_1 \cdot s_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \frac{4}{16} - \frac{4}{16} = 0$$

$$s_2 \cdot s_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \frac{8+2\sqrt{12}}{16} + \frac{8-2\sqrt{12}}{16} = 1$$

Aufgabe 9 : Verifizieren Sie die folgende Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & \frac{a_{13}+a_{31}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}+a_{32}}{2} \\ \frac{a_{13}+a_{31}}{2} & \frac{a_{23}+a_{32}}{2} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} & \frac{a_{13}-a_{31}}{2} \\ \frac{a_{21}-a_{12}}{2} & 0 & \frac{a_{23}-a_{32}}{2} \\ \frac{a_{31}-a_{13}}{2} & \frac{a_{32}-a_{23}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Was fällt Ihnen auf ? Was vermuten Sie für eine allgemeine Gesetzmäßigkeit ? Formulieren Sie diese.

Lösung zu Aufgabe 9 : Verifikation ist einfache Matrizenrechnung, die hier nicht ausführlich dargestellt werden soll.

Auffälligkeit : Jede $3 \times 3-$Matrix kann geschrieben werden als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix.

Allgemeine Gesetzmässigkeit : Jede $n \times n-$Matrix kann geschrieben werden als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix.