Kapitel 1 Diskrete Mathematik - Logik

Rolf Felder

January 4, 2023

1.0 Logik-Überblick

Zum Thema Logik sollen folgende Themen betrachtet werden

- Aussagen und Aussageformen
- Prädikate
- Quantoren
- Mathematische Schlussweisen

Das Thema **Logik** wird auch im Rahmen der theoretischen Informatik behandelt. Deshalb beschränken wir uns auf die inhaltlichen Teile, die für die Formulierung und Darstellung der mathematischen Inhalte und Problemstellungen dieser Vorlesung schon am Anfang (unmittelbar ab Kapitel 2) unerlässlich sind.

1.1 Aussagen und Aussageformen

Definition

Unter einer Aussage soll ein sprachliches Gebilde verstanden werden, für das es sinnvoll ist zu fragen, ob es wahr oder falsch ist.

Beispiele :

- 2 ist eine Primzahl
- 36 ist durch 15 teilbar
- 15 ist eine gerade Zahl

In der weiteren Betrachtung haben die Aussagen Namen, in Form von Großbuchstaben des Alphabetes. Jede dieser **Aussagevariablen** kann immer nur 2 Werte, nämlich 'W' (für WAHR) oder 'F' (für Falsch) annehmen. 2 Aussagen können miteinander verknüpft werden. Folgende Basisverknüpfungen / Basisoperationen sind geläufig

1.1 Aussagen und Auss.formen - Verknüpfung von Aussagen

Und-Veknüpfung

A	B	A ∧ B
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Implikation

A	B	A → B
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Oder-Veknüpfung

A	B	A V B
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Äquivalenz

A	B	A ↔ B
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Negation

A	¬ A
W	F
F	W

XOR-Verknüpfung ('**Entweder-oder**')

A	B	A XOR B
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

1.1 Aussagen und Aussagenformen

Definition

Eine Aussageform ist ein Ausdruck oder eine Formel, man spricht auch von Aussageformel, in der Aussagevariablen mittels der aussagelogischen Basisoperationen miteinander verknüpft sind

Beispiele :

- $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$
- $(A \vee B) \vee C$
- $(A \wedge B) \wedge C$

Durch Einsetzen von Aussagen in die Aussagevariablen wird aus der Aussageform eine Aussage. Wenn zwei Aussageformen bei allen möglichen Variablenbesetzungen zum gleichen Wahrheitswert führen, so nennt man diese gleichwertig. Diese Konstellation wird mittels des Äquivalenzzeichens $\Longleftrightarrow$ angezeigt. Man spricht hier auch von einer sog. Tautologie. Eine **Tautologie** ist eine Aussage, die immer wahr ist. Im Gegenzug hierzu ist eine **Kontradiktion** eine Aussage, die immer falsch ist.

1.1 Aussagen und Aussageformen - Verknüpfung von Aussagen

Erläuterung :

Die verwendeten Tabellen werden Wahrheitstafeln genannt. In der Kopfzeile enthält eine Wahrheitstafel Aussagevariablen oder Aussageformeln. In den Spalten mit den Aussagevariablen sind alle möglichen W-F-Kombinationen einzutragen. Bei

- einer Aussagevariablen sind das 2 Kombinationen
- zwei Aussagevariablen sind das 4 Kombinationen
- drei Aussagevariablen sind das 8 Kombinationen
- ....
- n Aussagevariablen sind das 2^n Kombinationen

Rechts neben den Spalten mit den Aussagevariablen sind eine oder mehrere Aussageformen aufzuführen.

Eine Wahrheitstafel kann verglichen werden mit einer Wertetabelle zu einer z.B. reellen Funktion.

1.1 Aussagen und Aussageformen - Verknüpfung von Aussagen

Zur Beachtung : Es gelten Vorrangregeln in absteigender Reihenfolge

- $\neg$ hat stärkste Bindung
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
- $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$
- $\rightarrow$ bindet stärker als $\leftrightarrow$

Beispiel : $\neg A \wedge B \rightarrow \neg(C \vee D)$ ist gleichbedeutend mit $((\neg A) \wedge B) \rightarrow (\neg(C \vee D))$ aber etwas anderes als $\neg A \wedge B \rightarrow \neg C \vee D$

Man kann also Klammern einsparen - Empfehlung : Das Ganze ist fehleranfällig und u.U. bei der Nutzung von Sprachelementen programmiersprachenspezifisch - daher besser immer Klammern setzen !!

1.1 Aussagen und Aussageformen - Sonderbetrachtung zur Implikation und Äquivalenz

Notwendige und hinreichende Bedingung :

Wenn gilt : $A \longrightarrow B$, so sagt man,

- dass A einerseits hinreichend ist für B
- dass B andererseits notwendig ist für A

Wenn gilt : $A \longleftrightarrow B$, so sagt man, dass A notwendig und hinreichend ist für B und umgekehrt.

Beispiel-1 : Wenn ein Haus in der Stadt brennt, rückt die Feuerwehr aus.
Notwendigkeit von B für A : Wenn die Feuerwehr nicht ausrückt, kann kein Haus brennen in der Stadt.

Beispiel-2 : Wenn es regnet, ist die Strasse nass.
Notwendigkeit von B für A : Wenn die Strasse nicht nass ist, kann es nicht regnen.

Wichtiger Hinweis : Die Verknüpfungszeichen $\rightarrow$ und $\Rightarrow$, $\leftarrow$ und $\Leftarrow$, sowie $\leftrightarrow$ und $\Leftrightarrow$ werden in der Vorlesung synonym verwendet. In der Literatur werden die Zeichen mit der einfachen Linierung bei Verknüpfung zwischen Aussagen und die Zeichen mit der doppelten Linierung bei der Verknüpfung zwischen Aussagen und Aussageformen bzw. ausschließlich zwischen Aussageformen verwendet.

1.1 Aussagen und Aussageformen - Tautologien und Kontradiktionen

Definition : Eine **Tautologie** ist eine Aussage, die immer wahr ist - unabhängig vom Wahrheitswert ihrer einzelnen Bestandteile.

Beispiele zu Tautologien :

- $A \vee \neg A$
- $A \Longleftrightarrow \neg(\neg A)$

Definition : Eine **Kontradiktion** ist eine Aussage, die immer falsch ist - eine **Kontradiktion** vereinigt zwei sich einander widersprechende Aussagen.

Beispiele zu Kontradiktionen :

- $A \wedge \neg A$
- $A \Longleftrightarrow \neg A$

1.1 Aussagen und Aussageformen - Wichtige Äquivalenzen

Es gelten folgende Rechenregeln mit Aussagevariablen A, B, C, die die Werte 'W' oder 'F' annehmen können

1. $A \vee B \iff B \vee A$ (Kommutativgesetz)
2. $A \wedge B \iff B \wedge A$ (Kommutativgesetz)
3. $(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$ (Assoziativgesetz)
4. $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$ (Assoziativgesetz)
5. $A \wedge (A \vee B) \iff A$ (Verschmelzungsgesetz/Absorptionsgesetz)
6. $A \vee (A \wedge B) \iff A$ (Verschmelzungsgesetz/Absorptionsgesetz)
7. $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Distributivgesetz)
8. $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (Distributivgesetz)
9. $A \wedge$'W'$\iff A$ sowie $A \vee$ 'F'$\iff A$ (neutrale Elemente von 'Und' bzw. 'Oder')
10. $A \wedge \neg A \iff$ 'F' und $A \vee \neg A \iff$ 'W' (das ist die Definition des sogenannten inversen Elementes zu A, was genau die Verneinung $\neg A$ darstellt)

Regeln 1 - 6 definieren die Struktur für einen **Verband**, zuzüglich der Regeln 7 und 8 die Struktur für einen **distributiven Verband** und schließlich nochmals ergänzt um die Regeln 9 und 10 die Struktur für einen **Boolschen Verband**.
Für Negationen gelten folgende Gesetzmäßigkeiten die sich mittels Wahrheitstafeln oder mittels der Regeln 1 - 10 direkt beweisen lassen

1. $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$ (De Morgansches Gesetz für $\wedge$)
2. $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$ (De Morgansches Gesetz für $\vee$)
3. $\neg\neg A \iff A$ (Gesetz der doppelten Negation)

1.1 Aussagen und Aussageformen - Üben und Verstehen

Übung 1 : Lösen Sie durch Benutzung einer Wahrheitstafel

1. Beweisen Sie die Gesetzmäßigkeit $\neg A \vee B \Longleftrightarrow (A \rightarrow B)$
2. Schaltjahre sind die Jahre, die durch 4 teilbar sind, ausser den Jahren, die durch 100, aber nicht durch 400 teilbar sind. x sei eine beliebig fest vorgegebene Jahreszahl. Gegeben sind folgende Aussagen
   - A : x ist durch 4 teilbar
   - B : x ist durch 100 teilbar
   - C : x ist durch 400 teilbar
   - S : x ist Schaltjahr

   Zeigen Sie, dass die Aussageform $A \wedge (B \rightarrow C)$ äquivalent zu S ist.

Übung 2 : Zeigen Sie mittels Anwendung der Rechenregeln für Aussageformen, dass die Aussageform $B \rightarrow (A \rightarrow (A \wedge B))$ eine Tautologie darstellt

Übung 3 : Zeigen Sie mittels einer Wahrheitstafel die Gültigkeit der beiden Verschmelzungsgesetze

1. $A \vee (A \wedge B) \Longleftrightarrow A$
2. $A \wedge (A \vee B) \Longleftrightarrow A$

1.1 Aussagen und Aussageformen - Ausblick

Mit den genannten Rechenregeln werden auf dem Gebiet der Boolschen Algebra aufgebaut

- das systematische Rechnen in Boolschen Verbänden (hier wird statt $\vee$ das Zeichen $+$, statt $\wedge$ das Zeichen $\cdot$ sowie statt $\Leftrightarrow$ bzw. $\leftrightarrow$ das Zeichen $=$ verwendet).
- die Theorie der Boolschen Funktionen - auch binäre Funktionen genannt
- die Schaltalgebra - Stichworte :
  - Werte 0 (für 'F'), 1 (für 'W')
  - 2-stellige Operationen $\cdot$ für $\wedge$ und $+$ für $\vee$
  - einstellige Operation 'Negation'

Diese Themen sind Gegenstand der theoretischen Informatik und werden daher in dieser Vorlesung nicht weiter behandelt.

1.2 Prädikatenlogik

Definition

Ein Prädikat ist ein Ausdruck, der eine oder mehrere Variable enthält, und der

1. durch Einsetzen eines Wertes in die Variable
2. durch Bindung der Variablen an einen Quantor

in eine Aussage übergeht.

Beispiele zu (1) :

- $A(x)$: x ist ein Schaltjahr mit $x \in \mathbb{N}$
- $A(x)$: $x^2 > -1$ mit $x \in \mathbb{R}$
- $A(x, y)$: $x > y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

1.3 Quantoren

Beispiele zu (2) :

- $\forall (x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})) : x^2 < 2$
- $\exists (x \in \mathbb{N})$: x ist ein Schaltjahr

Definition

Als abkürzende Schreibweisen für die Konstrukte ‚Für alle' und ‚es gibt', sind folgende sogenannte Quantoren definiert

- $\forall$ oder $\bigwedge$: Allquantoren (jeweils ergänzt um die betreffenden Variablen zuzgl. einschränkender Wertebereiche)
- $\exists$ oder $\bigvee$: Existenzquantoren (jeweils ergänzt um die betreffenden Variablen zuzgl. einschränkender Wertebereiche)
- $\exists!$ oder $\dot{\bigvee}$: Existenzquantor i.S. 'es existiert genau ein Element'
- $\nexists$: Existenzquantor i.S. 'es existiert kein Element'

Durch Quantoren werden Prädikate zu Aussagen. Betrachtenswert ist die Bildung der logischen Verneinung solcher Aussagen. Hierzu folgende Beispiele/Übungen :

1.3 Quantoren - Üben und Verstehen

Übung : Schreiben Sie folgende Aussagen in der Form mit Quantoren.

1. Alle Quadratzahlen sind gerade
2. Alle Quadratzahlen sind nicht negativ
3. Alle Fenster eines Hauses sind geschlossen
4. In jedem Zimmer eines Hauses gibt es ein Fenster, das geöffnet ist
5. In jeder deutschen Grossstadt gibt es einen Stadtbezirk, in dem es eine Strasse gibt, in der kein Tretroller abgestellt wurde

1.3 Quantoren - Regeln zur Verneinung bei Quantoren

Problemstellung : Es sind die Aussagen

1. $\forall(n \in \mathbb{N}) : 2^n > 1$
2. $\exists(x > 2, x \in \mathbb{N}), x$ gerade Zahl : x ist nicht Summe von 2 Primzahlen

zu verneinen.

Satz :

- $\neg(\forall x : A(x))$ ist gleichwertig mit $\exists x : (\neg A(x))$
- $\neg(\exists x : A(x))$ ist gleichwertig mit $\forall x : (\neg A(x))$

Folgerung :

- $\neg(\exists y \forall x : A(x, y)) \Longleftrightarrow$

  $\forall y(\neg(\forall x : A(x, y))) \Longleftrightarrow \forall y \exists x : (\neg A(x, y))$

- $\neg(\forall y \exists x : A(x, y)) \Longleftrightarrow$

  $\exists y(\neg(\exists x : A(x, y))) \Longleftrightarrow \exists y \forall x : (\neg A(x, y))$

1.3 Quantoren - Üben und Verstehen

Übung : Verneinen Sie die Aussagen aus der Übung von Seite 16

1. Alle Quadratzahlen sind gerade
2. Alle Quadratzahlen sind nicht negativ
3. Alle Fenster eines Hauses sind geschlossen
4. In jedem Zimmer eines Hauses gibt es ein Fenster, das geöffnet ist
5. In jeder deutschen Grossstadt gibt es einen Stadtbezirk, in dem es eine Strasse gibt, in der kein Tretroller abgestellt wurde

1.4 Mathematische Schlussweisen

Die Gesetzmässigkeiten der Aussagenlogik begründen einige klassische Formen von mathematischen Schlussweisen

- Widerlegung einer Aussage durch Angabe eines Gegenbeispiels
  $(\neg(\forall x : A(x)) \Longleftrightarrow \exists x : (\neg A(x))\ )$
- Beweis durch Widerspruch (Kontraposition) : $A \longrightarrow B \ \Longleftrightarrow \neg B \longrightarrow \neg A$
- Beweis der Äquivalenz durch den Beweis von zwei Implikationen
  $(A \longleftrightarrow B \Longleftrightarrow (A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$
- Beweis der Äquivalenz durch den Beweis einer anderen Äquivalenz
  $(A \longleftrightarrow B \Longleftrightarrow \neg A \longleftrightarrow \neg B)$
- Indirekter Beweis : Es ist zu beweisen, dass eine Aussage B wahr ist. Man nimmt nun das Gegenteil **'B ist nicht wahr'** an und folgert daraus etwas, was offensichtlich **falsch** ist. Dann kann **'B ist nicht wahr'** nicht wahr sein, weil aus etwas **Wahrem** nicht etwas **Falsches** folgen kann. Damit ist **'B ist nicht wahr'** falsch, was bedeutet, dass **B wahr** ist.

  Prominente Beispiele indirekter Beweise : sind die zum Nachweis folgender Gesetzmäßigkeiten

  - $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl
  - Es gibt unendlich viele Primzahlen

1.5 Einsatzgebiete Logik in der Informatik

Formale Logik, formale Aussagen und deren Beherrschung sind elementar und grundlegend für viele Bereiche der Programmierung. Auch bei Abfrageoperationen z.B. auf Datenbanken ist die formale Logik unverzichtbar.

Insbesondere in den Algorithmen von Verschlüsselungssystemen und kryptographischen Verfahren sind logische Operationen essentiell - beispielsweise XOR-Operationen bei Strom- und Block-Chiffren (Beispiele DES ('Data Encryption Standard') und AES ('Advanced Encryption Standard'))

1.6 Was ist mitzunehmen ?

Mitzunehmen sind

- Die sechs aussagelogischen Basisoperationen und ihre Funktionsweise können
- Begriffe Aussage, Aussageform(el), Prädikat kennen und damit umgehen können
- Nach den Rechenregeln bei Aussageformen rechnen können
- Beweismethode mittels Wahrheitstafeln können
- Quantoren, ihre Bedeutung und ihre Schreibweisen können
- Aussagen in der Alltagssprache in Quantorschreibweise transformieren können und umgekehrt
- Aussagen, die aus Prädikaten und Quantoren entstehen, verneinen können

1.7 Verwendete Literatur

Hartmann, Mathematik für Informatiker, Kapitel 2

Beutelspacher, Mathe-Basics zum Studienbeginn, Kapitel 1

1.8 Übungsaufgaben

Zum Üben und Verstehen - Übungsblatt 1 - Aufgaben 1 - 4