# Kapitel 7 Lineare Algebra - Vektoren und Vektorräume

Rolf Felder

January 29, 2023

# 7.1 Vektorraumdefinition

Nachdem die algebraischen Strukturen **Gruppe**, **Ringe** und **Körper** eingeführt wurden, die algebraischen Struktur **Boole'scher Verband** an den Beispielen $P(\Omega), \cap, \cup)$ und $(\{0,1\}, \wedge, \vee)$ nur angedeutet wurde, kommt nun eine weitere algebraische Struktur, die des **Vekorraumes** dazu. Diese ist **der Betrachtungsgegenstand** für die gesamte lineare Algebra.

**Definition Vektorraum :** Ein Vektorraum V mit Skalaren aus einem (Skalar-)Körper K besteht aus einer kommutativen Gruppe (V,+) und einer skalaren Multiplikation '$\cdot$': $K \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, so dass für alle $v, w \in V$ und für alle $\lambda, \mu \in K$ gilt :

1. $\lambda(\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$
2. $1 \cdot v = v$
3. $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
4. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

Ein Vektorraum mit (Skalar-)Körper K wird K-Vektorraum oder Vektorraum über K genannt. Ist K=$\mathbb{R}$ , so wird von einem reellen, ist K=$\mathbb{C}$, so wird von einem komplexen Vektorraum gesprochen.

Die **Elemente eines Vektorraumes** werden als **Vektoren** bezeichnet und angesprochen. Was ein im Einzelfall ein Vektor ist, wird bestimmt von der Art des Vektorraumes.

# 7.1 Vektorraumdefinition

Im Anschluss an die Definition des Vektorraums sollen nun konkrete Repräsentanten von Vektorräumen angesehen werden. Bevor wir zum Hauptrepräsentanten $(\mathbb{R}^n, +)$ kommen, sollen weitere nicht so prominente Beispiele für Vekrorräume zumindest genannt werden.

# 7.1 Vektorraumdefinition

Weitere Beispiele für Vektorräume über den reeellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind

- die Menge der Lösungen eines linearen homogenen Gleichungssystems - hier ist ein Vektor eine Lösung eines linearen homogenen Gleichungssystems
- die Menge fest dimensionierter Matrizen - hier ist ein Vektor eine Matrix
- die Menge magischer Quadrate der Ordnung n (Spaltensumme für alle Spalten = Zeilensumme für alle Zeilen) - hier ist ein Vektor ein magisches Quadrat
- die Menge der reellwertigen Funktionen - hier ist ein Vektor eine Funktion
- die Menge aller Polynome $\mathbb{R}[X]$ - hier ist ein Vektor ein Polynom
- die Menge der unendlichen Zahlenfolgen mit reellwertigen Folgengliedern - hier ist ein Vektor eine Zahlenfolge

Wir werden im Verlaufe der Vorlesung auf einige dieser Exemplare wieder zu sprechen kommen.

Wir begeben uns nun, um Anschaulichkeit zum Verständnis der auftretenden theoretischen Konstrukte zu nutzen, in einen der bekanntesten und am weitesten verbreiteten aller Vektorräume, den n-dimensionalen Verktorraum $K^n$ mit den Vektoren, die für $K = \mathbb{R}$ aus dem 2- und 3-dimensionalen Raum aus der Schule bekannt sein sollten. Wir betrachten also die 'natürliche' und geläufige Ausprägung von Vektoren.

# 7.2 Der Vektorraum $K^n$

Vektoren als Elemente der Vektorräume $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ werden zur Definition der Vektorarithmetik (wie aus der Schule gewohnt und vollkommen unbefangen, weil es ganz praktisch ist) in Komponentenform geschrieben:

Ein Vektor a im $\mathbb{R}^2$ wird geschrieben als $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Ein Vektor a im $\mathbb{R}^3$ wird geschrieben als $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Ein Vektor a im $\mathbb{R}^n$ wird geschrieben als $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .... \\ .... \\ a_n \end{pmatrix}$.

Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ ist die komponentenweise Darstellung voll und ganz kompatibel mit der 2- oder 3-dimensionalen Vorstellung von einem Vektor in der Ebene bzw. im Raum, der durch Richtung und Länge gekennzeichnet ist.

**Wichtiger Hinweis :** In der Vorlesung werden die Buchstaben, die einen Vektor i.S. eines Elementes eines Vektorraumes bezeichnen, nicht mit einem Pfeil versehen, wie dies in der Schulmathematik üblich war.

# 7.2 Der Vektorraum $K^n$

**Definition** : Ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ kann mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden. Es soll gelten

$$\lambda \cdot a = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \dots \\ \dots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

**Definition** : Zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ können addiert werden. Es soll gelten

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind die beiden Definitionen voll und ganz kompatibel mit der 2- oder 3-dimensionalen Vorstellung von Vektoren als gerichtete Größen mit einer definierten Länge und den Operationen mit diesen in der Ebene bzw. im Raum (Addition von zwei Vektoren, Vervielfachung der Länge eines Vektors).

## 7.2 Der Vektorraum $K^n$

**Definition** : Der Vektor

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .... \\ .... \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ wird als der Nullvektor bezeichnet.}$$

**Definition** : Gegeben ist der Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .... \\ .... \\ a_n \end{pmatrix}$. Dann wird der Vektor $-a = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ .... \\ .... \\ -a_n \end{pmatrix}$ als der zum Vektor a inverse Vektor bezeichnet. Man bezeichnet den Vektor -a mitunter auch als Gegenvektor zu a.

Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind die beiden Definitionen voll und ganz kompatibel mit der 2- oder 3-dimensionalen Vorstellung dieser Vektoren in der Ebene bzw. im Raum.

**Erkenntnis :** Die kommutative Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$ bildet mit der Multiplikation mit reellen Skalaren einen reellen Vektorraum bzw. einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

**Definition** : Seien die Vektoren $a_1, a_2, ..., a_m \in \mathbb{R}^n$ sowie die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ...., \lambda_m \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann nennt man den Ausdruck $\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + ... + \lambda_m \cdot a_m$ eine **Linearkombination** der Vektoren $a_1, a_2, ...., a_m$.

# 7.2 Der Vektorraum $K^n$

Bisher hatten wir im Kapitel 7.2 auschliesslich die Ausprägung $K = \mathbb{R}$ bzw. $K^n = \mathbb{R}^n$ betrachtet. Die bisher betrachteten Definitionen und Sätze sind ohne Abstriche und Besonderheiten auf beliebige Körper $K$ erweiterbar.

**Erweiterung 1** - $K = \mathbb{C}$ : Die kommutative Gruppe $(\mathbb{C}^n, +)$ bildet zusammen mit der Multiplikation mit komplexwertigen Skalaren einen komplexen Vektorraum bzw. einen Vektorraum über den komplexen Zahlen, dem Körper $\mathbb{C}$.

Die Körper $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ sind Körper mit unendlich vielen Elementen. Demzufolge haben auch die hierauf basierenden Vektorräume $K^n$ unendlich viele Elemente.

**Ergänzung 2** - $K = \mathbb{Z}_p$ (p Primzahl) : Die kommutative Gruppe $(\mathbb{Z}_p^n, +)$ bildet zusammen mit der Multiplikation mit Zahlen $\in \mathbb{Z}_p$ einen $\mathbb{Z}_p-$Vektorraum bzw. einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_p$.

Die Körper $\mathbb{Z}_p$ (p Primzahl) sind endliche Körper, so dass auch die hierauf aufgebauten Vektorräume endlich viele Elemente haben.

# 7.2 Der Vektorraum $K^n$ - Üben und Verstehen

**Übung 1 :** Gegeben seien die Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Linearkombinationen

a) $s_1 = 2 \cdot a - 4 \cdot b + 6 \cdot c$

b) $s_2 = 2(b - 2a) + 10(c + b)$

**Übung 2 :** Betrachtet werde ein Vektorraum $\mathbb{Z}_p^n, n \in \mathbb{N}$ über dem Körper $\mathbb{Z}_p$, $p$ Primzahl.

1. Wieviele verschiedene Elemente hat der Vektorraum $\mathbb{Z}_2^3$ ? Welcher Vektor im $\mathbb{Z}_2^3$ entspricht dem Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ?
2. Wieviele verschiedene Elemente hat der Vektorraum $\mathbb{Z}_{23}^4$ ? Welcher Vektor im $\mathbb{Z}_{23}^4$ entspricht dem Vektor $\begin{pmatrix} -20 \\ 46 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix}$ ?

# 7.3 Definition Unterraum

**Definition Unterraum :** Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$. Ist U mit den Verknüpfungen von V selbst wieder ein K-Vektorraum, so heißt U **Untervektorraum** (oder auch kurz **Unterraum** oder **Teilraum**) von V.

**Satz :** Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ eine nichtleere Teilmenge von V. Dann ist U genau dann ein Untervektorraum von V, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind

1. $u + v \in U$ für alle u, v $\in$ U und
2. $\lambda u \in U$ für alle $\lambda \in K, u \in U$

**Beispiele :** Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des reellen Vektorraumes $(\mathbb{R}^n, +)$

- $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = ... = x_n\}$
- $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1\}$
- $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$
- $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 = x_2^2\}$
- $U_5 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 1\}$
- $U_6 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$

**Satz :** $V$ sei ein Vektorraum, $U_1, U_2$ seien zwei Unterräume von $V$. Dann gilt $U_1 \cap U_2$ ist wieder ein Unterraum von $V$ (s. Aufgabe 2, Übungsblatt 7).

**Satz :** $V$ sei ein Vektorraum, $U_1, U_2$ seien zwei Unterräume von $V$. Dann gilt $U_1 \cup U_2$ ist i.a. kein Unterraum von $V$ (s. Aufgabe 2, Übungsblatt 7).

# 7.4 Faktorräume

Welche der folgenden Teilmengen der $\mathbb{R}^2$ bilden einen Unterraum des Vektorraumes $(\mathbb{R}^2, +)$ ? Was stellen $U_1, U_2$ geometrisch dar ?

- $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ fest}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
- $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, r_1, r_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R} \text{ fest}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Welche der folgenden Teilmengen der $\mathbb{R}^3$ bilden einen Unterraum des Vektorraumes $(\mathbb{R}^3, +)$ ? Was stellen $V_1, V_2$ geometrisch dar ?

- $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, r_i, s_i \in \mathbb{R} \text{ fest}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$
- $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, r_i, s_i, v_i \in \mathbb{R} \text{ fest}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

**Antworten :** $U_1, V_1$ sind Unterräume, $U_2, V_2$ sind keine Unterräume. Was aber sind dann $U_2, V_2$ ?

# 7.4 Faktorräume

**Definition :** Sei $V$ ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum von $V$. Für ein $v \in V$ nennt man die Menge

$$v + U = \{v + u : u \in U\}$$

die Nebenklasse von $U$ durch $v$. Der Vektor v ist ein **Repräsentant** der Nebenklasse. Der Vektor v wird auch **Führer der Nebenklasse** oder auch **Nebenklassenführer** genannt. Die Nebenklasse von $U$ durch 0, nämlich $0 + U = U$ ist die triviale Nebenklasse.

**Erkenntnis 1 :** Eine allgemeine Gerade im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ist eine Nebenklasse der durch den Nullpunkt verlaufenden Gerade, die einen Vektorraum und damit einen Unterraum darstellt, durch den Stützvektor der Geraden. Ganz analog ist eine allgemeine Ebene im $\mathbb{R}^3$ eine Nebenklasse der durch den Nullpunkt verlaufenden Ebene, die einen Vektorraum und damit einen Unterraum darstellt, durch den Stützvektor der Ebenen.

**Erkenntnis 2:** Durch die Relation $v_1 \sim v_2 \Longleftrightarrow v_1 + U = v_2 + U$ wird auf dem Vektorraum V eine Äquivalenzrelation definiert und es gilt $[v] = v + U$ für alle $v \in V$.

**Begründung :** Es gilt

1. Reflexivität : Für alle $v \in V : v \sim v \Leftrightarrow v + U = v + U$
2. Symmetrie : Für alle $v_1, v_2 \in V : v_1 \sim v_2 \Rightarrow v_2 \sim v_1$
3. Transitivität : Für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$

   $$v_1 \sim v_2 \wedge v_2 \sim v_3 \Leftrightarrow v_1 + U = v_2 + U = v_3 + U \Rightarrow v_1 + U = v_3 + U \Rightarrow v_1 \sim v_3.$$

4. $w \in [v] \Leftrightarrow w \sim v \Leftrightarrow w + U = v + U \Leftrightarrow w - v \in U \Leftrightarrow w \in v + U.$

# 7.4 Faktorräume

**Satz :** Sei $V$ ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum von V. Dann sind für $v_1, v_2 \in V$ die beiden Nebenklassen

$$v_1 + U \text{ und } v_2 + U$$

entweder disjunkt oder gleich.

**Beweis :** Da $\sim$ Äquivalenzrelation ist, folgt der Satz aus der Tatsache (s. Kapitel 3), dass zwei Äquivalenzklassen entweder disjunkt oder gleich sind.

**Beispiel 1 :** Hierzu seien betrachtet eine durch den Ursprung verlaufende Gerade $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und verschiedene Stützvektoren, die diese Gerade parallel im $\mathbb{R}^2$ verschieben oder gleich lassen

**oder**

**Beispiel 2 :** Eine durch den Ursprung verlaufende Ebene $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und verschiedene Stützvektoren, die diese Ebene im $\mathbb{R}^3$ parallel verschieben oder gleich lassen.

Passend für beide Beispiele ist zu konstatieren

- Verschiedene Stützvektoren, die die Gerade/Ebene parallel verschieben, bilden die Äquivalenzklassen, deren Schnitt leer ist
- Verschiedene Stützvektoren, die die Gerade/Ebene unverändert lassen, befinden sich allesamt in einer einzigen Äquivalenzklasse.

# 7.4 Faktorräume

**Definition :** Sei wieder $V$ ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum von V. Dann ist die Menge der Nebenklassen durch die Menge der Elemente von V
$\{v + U : v \in V\} =: V/U$ der sogenannte **Faktorraum von V nach U**.

**Satz :** Sei wieder $V$ ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum von V. Dann ist der Faktorraum $V/U$ vermöge der folgendermassen definierten Operationen

1. $(v_1 + U) + (v_2 + U) = v_1 + v_2 + U$ sowie
2. $r \cdot (v + U) = r \cdot v + U$

ein K-Vektorraum. Das **neutrale Element** in diesem Vektorraum ist die Nebenklasse **U**.

**Bemerkung :** Es ist sicherzustellen, dass die so definierten Operationen wohldefiniert sind, d.h. es muss irrelevant sein, welche Vertreter der jeweiligen Äquivalenzklassen in Form der Nebenklassen zur Durchführung der Operation ausgewählt werden.

**Plausibilisierung :** Hierzu sei wieder betrachtet eine durch den Ursprung verlaufende **Gerade** $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und verschiedene Nebenklassen in Form zu dieser **Geraden parallele Geraden** im $\mathbb{R}^2$. Bei der Addition zweier Geraden ist es irrelevant, welcher Stützvektor bei jeder der beiden Geraden verwendet wird **oder** es sei wieder betrachtet eine durch den Ursprung verlaufende **Ebene** $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und verschiedene Nebenklassen in Form zu dieser **Ebenen parallele Ebenen** im $\mathbb{R}^3$. Bei der Addition zweier Ebenen ist es wiederum irrelevant, welcher Stützvektor bei jeder der beiden Ebenen verwendet wird

# 7.4 Faktorräume - Üben und Verstehen

**Übung 1 :** Gegeben sei der Unterraum $U = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$. Sind folgende Nebenklassen von U gleich oder disjunkt ?

1. $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + U$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + U$
2. $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + U$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + U$

**Übung 2 :** Sei $U \subset V$ ein **echter** Unterraum des Vektorraumes V. Bewerten Sie folgende Aussagen zu **Nebenklassen** als 'wahr' oder 'falsch' und begründen Sie :

1. Jede Nebenklasse ist ein Unterraum
2. Jeder Unterraum ist eine Nebenklasse
3. Die leere Menge ist eine Nebenklasse
4. Es ist möglich, dass eine Nebenklasse in einer anderen Nebenklasse enthalten ist
5. Die Gleichung $v + U = U$ impliziert $v = 0$
6. Die Gleichung $v + U = U$ impliziert $v \in U$
7. Der Faktorraum von V nach U ist eine Menge von Nebenklassen
8. Zu $U$ gehören mindestens zwei Nebenklassen
9. Im Fall von $V = \mathbb{R}^n$ gibt es unendlich viele verschiedene Nebenklassen von U.
10. Im Fall von $V = \mathbb{Z}_p^n$ gibt es unendlich viele verschiedene Nebenklassen von U.

**Übung 3 :** Gegeben sei der Unterraum $U = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ des $\mathbb{Z}_2^2$. Wieviele verschiedene Nebenklassen von U gibt es ?

# 7.5 Skalarprodukt - Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

**Definition :** Das Skalarprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^n$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ berechnet sich zu } u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot v_k .$$

**Spezialfälle :** Das Skalarprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$$u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \text{ berechnet sich zu } u \cdot v = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z .$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$

$$u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \text{ berechnet sich zu } u \cdot v = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y .$$

**Satz :** Für das Skalarprodukt gelten die folgenden Rechenregeln $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ :

- $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ (Skalarprodukt ist **(distributiv) linear**)
- $(\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v)$ (Skalarprodukt ist **linear**)
- $u \cdot v = v \cdot u$ (Skalarprodukt ist **symmetrisch**)
- $u \cdot u \geq 0$ sowie $u \cdot u = 0 \iff u = 0$ (Skalarprodukt ist **positiv definit**)

Ein mit einem Skalarprodukt versehener reeller Vektorraum, d.h. ein mit einem Skalarprodukt versehener Vektorraum über dem Zahlkörper $\mathbb{R}$, wird allgemein auch mit dem Begriff **euklidischer Vektorraum** bezeichnet.

# 7.5 Skalarprodukt - Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

## Länge / Norm / Betrag eines Vektors :

**Definition** **(Norm/Betrag)**
Die Länge **(oder Norm oder Betrag)** eines Vektors **v** ist die Quadratwurzel aus **v** · **v**:

$$||v|| = \sqrt{v \cdot v}$$

**Beispiel :**

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow ||v|| = \sqrt{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}.$$

**Bemerkung :** Geometrisch ergibt sich die Länge eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ bereits mittels Anwendung des Satzes des Pythagoras. Dort wäre die Definition eher als Satz zu klassifizieren. Diese Anschauungshilfe fehlt in Räumen höherer Dimensionen.

**Definition** (Einheitsvektor)
Ein Einheitsvektor **u** ist ein Vektor mit der Länge 1. Es gilt:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 1$$

# 7.5 Skalarprodukt - Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

## Normierung eines Vektors auf die Länge 1 :

Wir teilen einen Vektor **v** ( $\neq 0$ ) durch seine Länge.

Dann ist $\boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{v}||}$ ein Einheitsvektor in dieselbe Richtung wie **v**.

**Beispiel:**

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{v}||} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

**u** zeigt auf einen Punkt der Oberfläche der „Einheitskugel“ mit dem Mittelpunkt im Ursprung.

# 7.5 Skalarprodukt - Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Mit der so definierten Norm $||u||$ für $u \in \mathbb{R}^n$ wird der $\mathbb{R}^n$ zu einem sogenannten **normierten Vektorraum**. Die Norm besitzt folgende Eigenschaften

1. $||k \cdot u|| = |k| \cdot ||u||$ für $u \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$
2. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, u, v \in \mathbb{R}^n$ (Dreiecksungleichung)
3. $||u|| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

Die Begründungen für die Eigenschaften **(1)** und **(3)** sind klar. Die Begründung von Eigenschaft **(2)** folgt später.

Die mittels Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definierte Norm ist ein Spezialfall (p=2) der **p-Norm** auf dem $\mathbb{R}^n$, die als

$$||u||_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } u \in \mathbb{R}^n$$

definiert ist. Die **2-Norm** wird auch als **euklidische Norm** bezeichnet. Wenn nichts anderes vorgegeben ist, gilt in der Vorlesung $||.||_2 = ||.||$.

Man kann allgemein beweisen, dass gilt

$$\lim_{p \to \infty} ||u||_p = \max_{i=1,..,n} |u_i| =: ||u||_\infty .$$

Eine Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit dem Eigenschaften (1),(2),(3) wird allgemein als **Norm** bezeichnet.

# 7.6 Skalarprodukt - Spezialfälle $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

**Satz :** Für 2 Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \textbf{ bzw. } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gilt :

$$||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos(u,v) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \textbf{ bzw. } ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos(u,v) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3.$$

**Beweis (für $\mathbb{R}^3$) :** Betrachte das Dreieck, das von den Vektoren **u** und **v** ausgehend vom Ursprung gebildet wird. Das Dreieck besitzt die Seitenlängen $||u||, ||v||, ||u-v||$. Nach dem Cosinussatz der ebenen Trigonometrie gilt :

$$||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2 \cdot ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos(u,v) \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos(u,v) = ||u||^2 + ||v||^2 - ||u-v||^2 =$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_2^2 + v_2^2 + v_3^2 - (u_1 - v_1)^2 - (u_2 - v_2)^2 - (u_3 - v_3)^2 =$$

$$2u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3,$$

was (nach Teilung durch 2 auf beiden Seiten der Gleichung) zu beweisen war.

**Hinweis :** Der Beweis ergibt sich allein aus der bekannten Geometrie der Fläche und des Raumes. Die Länge einer Dreieckseite, ausgedrückt durch die Koordinaten der beiden Endpunkte, resultiert allein aus der Anwendung des Satzes des Pythagoras.

# 7.6 Skalarprodukt - Spezialfälle $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Somit ergibt sich der folgende

**Satz :** In den Vektorräumen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ gilt für jeweils zwei Vektoren $v, w$ :

$$v \cdot w = ||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos(v, w),$$

was die folgenden Erkenntnisse rechtfertigt

## Winkel zwischen zwei Vektoren

**Rechter Winkel**
Das Skalarprodukt **v** · **w** ist 0, falls **v** im rechten Winkel zu **w** steht.

**Kosinusformel**
Sind **v** und **w** Vektoren ungleich **0**, dann gilt

$$\frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{||\boldsymbol{v}|| \cdot ||\boldsymbol{w}||} = \cos\varphi$$

sowie

**Orthogonalität :** Die Vektoren v und w sind orthogonal zueinander $\leftrightarrow v \cdot w = 0$.

**Ungleichung von Cauchy und Schwarz :** Es gilt $|v \cdot w| \leq ||v|| \cdot ||w||$ (hiermit können wir die Dreiecksungleichung **(2)** auf Seite 20 nun begründen).

# 7.6 Skalarprodukt - Spezialfälle $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Mit der **Kosinusformel** kann man den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen, was an folgendem Beispiel dargestellt sei :

**Beispielaufgabe**

Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

**Lösung**

- Skalarprodukt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 4 + 6 = 10$
- Länge von **v** ist $||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{20}$
- Länge von **w** ist $||\boldsymbol{w}|| = \sqrt{10}$
- Kosinus des Winkels $\dfrac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{||\boldsymbol{v}|| \cdot ||\boldsymbol{w}||} = \cos \alpha = \dfrac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- $\alpha = 45°$

Der Winkel zwischen zwei Vektoren kann damit Werte zwischen 0° und 180° annehmen.

# 7.6 Skalarprodukt - Spezialfälle $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ - Üben und Verstehen

**Übung 1 :** Zeigen Sie : Die Vektoren $a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, bilden ein **orthonormiertes** System, d.h. die Vektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander und besitzen jeweils die Länge/den Betrag 1.

**Übung 2 :** Bestimmen Sie den Einheitsvektor zu $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ?

**Übung 3 :** Begründen Sie, dass die auf Seite 21 auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definierte

$\infty-$**Norm** $||u||_\infty = \left|\left| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} \right|\right|_\infty = \max\limits_{k=1,2,..,n} |u_k|$ tatsächlich die Eigenschaften

1. $||k \cdot u||_\infty = |k| \cdot ||u||_\infty$ für $u \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$
2. $||u + v||_\infty \leq ||u||_\infty + ||v||_\infty, u, v \in \mathbb{R}^n$ (Dreiecksungleichung)
3. $||u||_\infty = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

erfüllt.

# 7.6 Skalarprodukt - Spezialfälle $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$-Erinnerung

**Erinnerung : Aus der Schule sollte noch bekannt sein**

**Geradengleichung** g: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$

**Ebenengleichungen**

- **Parameterform** E: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$
- **Normalenform** E: $\left(\vec{x} - \vec{p}\right) \cdot \vec{n} = 0$
- **Koordinatenform** E: $a\, x_1 + b\, x_2 + c\, x_3 = d$

**Hinweis :** Diese Konstrukte werden keine Thema in der Vorlesung sein. An geeigneten Stellen dienen diese aber zur Veranschaulichung theoretischer Konstrukte.

# 7.7 Skalarprodukt - Abbildung - Zusammenfassung

**Zusammenfassung 'Längen/Beträge/Normen und Skalarprodukte'**

1. **für alle Dimensionen**, d.h. $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ :
   1. **Skalarprodukt** $v \cdot w$ wird durch **Multiplizieren der Komponenten** und anschliessendes **Aufsummieren** berechnet.
   2. unter der **Länge/Betrag/Norm** $||v||$ ist, wenn nichts anderes vereinbart ist, die $||.||_2-$Norm, d.h. die **Quadratwurzel** aus $v \cdot v$ verstanden.
   3. der Vektor $\frac{v}{||v||}$ ist der zu v gehörige **Einheitsvektor**, der die Länge/den Betrag 1 hat.
   4. **v und w orthogonal zueinander** $\Leftrightarrow v \cdot w = 0$
   5. **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung :** $|v \cdot w| \leq ||v|| \cdot ||w||$ oder anders verkleidet
   $$\left|\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
2. **im Spezialfall** $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ :
   1. - **Winkel zw. Vektoren v und w :** $\cos(v, w) = \frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||}$ (ist auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinerbar)

Der Begriff der **Orthogonalität** ist **elementar wichtig** wird an zahlreichen Stellen der Vorlesung immer wieder aufgegriffen werden.

# 7.8 Verallgemeinerte Skalarprodukte

Das auf Seite 17 definierte Standard-Skalarprodukt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann mit kleinen Abwandlungen folgendermassen auf ein Skalarprodukt $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ verallgemeinert werden, indem für $u, v \in \mathbb{C}^n$ definiert wird

$$< u, v >= \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \overline{v_i}.$$

Mit dieser Definition gelten folgende Gesetzmäßigkeiten für $u, v, w \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$ :

1. $< u, v + w >=< u, v > + < u, w >$ sowie $< u + v, w >=< u, w > + < v, w >$
2. $< u, v >= \overline{< v, u >}$ (**hermitesch**)
3. $< \lambda \cdot u, v >= \lambda \cdot < u, v >$ sowie $< u, \lambda \cdot v >= \overline{\lambda} \cdot < u, v >$ (**semilinear**)
4. $< u, u > \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sowie $< u, u >= 0 \iff u = 0$ (Skalarprodukt ist **positiv definit**)

Ein solches **semilineares** Skalarprodukt wird als **hermitesch** und ein Vektorraum versehen mit einem solchen **hermiteschen** Skalarprodukt wird als **unitärer Vektorraum** bezeichnet (analog der Bez. **euklidischer Vektorraum**, vergl. Kap. 7, S. 17).
Die Schreibweise $<, >$ wird ganz allgemein in Vektorräumen zur Definition sogenannter **Bilinearformen** verwendet. Mit solch allgemeinen **Bilinearformen** werden wir uns im Rahmen der Vorlesung nicht näher beschäftigen. Wichtig ist, mitzunehmen, dass es sich hierbei um Abbildungen in den einem Vektorraum zugrundeliegenden Zahlkörper handelt und ähnlichen Gesetzmäßigkeiten gehorcht wie unser auf Seite 17 definiertes Standard-Skalarprodukt.
Das Standard-Skalarprodukt in euklidischen Vektorräumen sowie das hermitesche Skalarprodukt in unitären Vektorräumen werden an einigen Stellen der Folgekapitel immer wieder zum Vorschein kommen.

# 7.9 Einsatzgebiete Vektoren in der Informatik

Vektoren im 3-dimensionalen Raum sind elementar und omnipräsent in vielen Themen der Robotik und Vorausberechnung von Raumbewegungen aller Art.

Vektoren im n-dimensionalen Raum bilden ideale Modellierungsobjekte in vielen Bereichen der Programmierung und Datenbanktechnik.

Normen in Vektorräumen werden benötigt, um Vektoren messbar zu machen. Das braucht man z.B. dann, wenn numerische Verfahren Vektoren berechnen und man Fehlerabweichungen oder die Qualität von Näherungen beurteilen will. Die numerische Lösung linearer Gleichungssysteme ist hierfür ein nennenswertes Beispiel.

# 7.10 Was ist mitzunehmen ?

- Vektorraumeigenschaften kennen und diese für gegebene Kombinationen von Mengen und Operationen nachweisen / widerlegen können
- Vorliegen eines Unterraumes nachweisen / widerlegen können
- Mit Vektoren rechnen können (Addition/Subtraktion, skalare Multiplikation, Skalarprodukt)
- Mit Faktorräumen und deren Elementen, den Nebenklassen umgehen und rechnen können
- Länge/Norm eines Vektors bestimmen können
- Zu einem vorgegebenen Vektor seinen Einheitsvektor bestimmen können
- Eigenschaften einer Norm nachweisen können

# 7.11 Verwendete Literatur

Hartmann, Mathematik für Informatiker, Kapitel 6.1+6.2 (zu Vektorräumen)

Einschlägige Schulbücher Berufliche / Allgemeinbildende Gymnasien (zu Vektoren)

Beutelspacher, Lineare Algebra, Kapitel 10

# 7.12 Übungsaufgaben

Zum Üben und Verstehen - Übungsblatt 7 - Aufgaben 1 - 4