1. Logik

#TheoretischeInformatik #TheoretischeInformatik1 #Logik

Themen

Aussagenlogik

Siehe auch PDF

Definition

Ein *Formales System* besteht aus:

- einer *Sprache*, also einer Menge von *Symbolfolgen*.
  Eine *Symbolfolge* besteht aus einer endliche langen Liste (Folge) von *Symbolen*.
- einer Menge von *Axiomen*, die als -vorgegebene- Symbolfolgen dienen, aus welchen durch Anwenden der Regeln neue Symbolfolgen entstehen.
- einer *Gramatik*, also einer Menge an *Regeln*, die angeben wie man aus Symbolfolgen neue Symbolfolgen erzeugen kann, die so auch zur Sprqache gehören. Man nennt dies auch *Syntax* der Sprache
- einer *Semantik* welche die *Bedeutung*, der Symbolfolgen angibt.
  - Die Semantik ist Funktion (*Interpretation*), welche einer Symbolfolge einen *Wert* (Bedeutung) zuordnet.
  - *Manchmal gibt es mehr als eine Interpretation!*

Definition Aussagen ›

Sprache der Aussagenlogik, Formelmenge

- Symbole der Aussagenlogik sind:
  - *Aussagenvariablen*: A, B, C,...
  - *Junktoren* (logische Operatoren) wie $\land$, $\lor$, $\implies$, $\iff$, $\neg$
- Mengen der Formeln
  - Eine Aussagenvariable A ist eine Formel
  - Sind a und b Formeln, so sind Tabelle ebenfalls Formeln.
  - *Klammerung:* ist a eine Formel, dass ist (a) auch eine Formel.

	Zeichensatz	
$(a \land b)$	a und b	**Konjunktion**
$(a \lor b)$	a oder b	**Disjunktion**
$(a \implies b)$	Wenn a dann b	**Implikation**
$(a \iff b)$	a genau dann, wenn b	**Äquivalenz**
$(\neg a)$	Nicht a	**Negation**

Vorangregeln

$(\ldots)$	bindet stärker als	$\neg$
$\neg$	bindet stärker als	$\land$
$\land$	bindet stärker als	$\lor$
$\lor$	bindet stärker als	$\implies$
$\implies$	bindet stärker als	$\iff$

Damit ist $a \lor b \lor \neg c$ so zu lesen: $(a \lor (b \land (\neg c)))$.

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Formeln, so sind

$\bigwedge_{i=1}^{n} a_i$	Steht für: $a_1 \land a_2 \land \ldots \land a_n$
$\bigvee_{i=1}^{n} a_i$	Steht für: $a_1 \lor a_2 \lor \ldots \lor a_n$

ebenfalls Formeln.

Anmerkung zu $a \vee b$

Wahrheitswerte

- Wahrheitswerte einer atomaren Aussage:
  - *wahr* oder *falsch*
  - *1* oder *0*
- Semantik der logischen Operatoren
  - Wahrheitswert der Verknüpfung in Abhängigkeit zum Wahrheitswert der verknüpften Teilformeln
  - Angabe z.B. mit [Wahrheitstafeln]

Anmerkungen zu $a \implies b$

- den Operator $a \implies b$ liest man als: "a *impliziert* b" oder "aus a folgt b" oder "$a \implies b$ ist wahr, wenn, falls a wahr ist, auch b wahr ist"
- a nennt man die *Prämisse*, b die *Konklusion* der *Implikation*
- ist $a \implies b$ wahr, so nennt man
  - a die *hinreichende Bedingung* für b
  - b die *notwendige Bedingung* für a
- eine Implikation ist wahr, wenn die Prämisse falsch ist
  "10 ist eine Primzahl $\implies$ Elefanten können fliegen" ist wahr!
- "aus etwas Wahrem kann nur etwas Wahres folgern; jedoch: aus etwas Falschem kann man beliebiges folgern"
- die Umkehrung $b \implies a$ der Implikation $a \implies b$ gilt nicht zwangsläufig

---

Wahrheitstafeln

Siehe auch [PDF]

Definition BOOLEsche Werte

- Die Menge {wahr, falsch} wird auch als *Boolesche Menge* bezeichnet und als B notiert.
- Statt "wahr" wird oft auch *True* oder auch *T* bzw. *1* geschrieben
- Statt "falsch" wird oft auch *False* oder auch *F* bzw. *0* geschrieben

[Wahrheitstafeln (Operatoren)]

Rechenregeln zum Umformen von Formeln

- Vereinfachung

Idempotenz

$A \iff \neg\neg A$
$A \land A \iff A$
$A \lor A \iff A$

Kommutativität

$A \land B \iff B \land A$
$A \lor B \iff B \lor A$

Assoziativität

$(A \land B) \land C \iff A \land (B \land C)$
$(A \lor B) \lor C \iff A \lor (B \lor C)$

Distributivität

$(A \lor B) \land C \iff (A \land C) \lor (B \land C)$
$(A \land B) \lor C \iff (A \lor C) \land (B \lor C)$

De Morgan

$\neg(A \land B) \iff \neg A \lor \neg B$
$\neg(A \lor B) \iff \neg A \land \neg B$

Implikation

$A \implies B \iff \neg A \lor B$

Äquivalenz

$(A \iff B) \iff (A \implies B) \land (B \implies A)$

Transitivität

$(A \implies B) \land (B \implies C) \to (A \implies C)$

$A \land 0/F \iff 0/F$

neutrales Element

$A \wedge 1/W \iff A$
$A \vee 0/F \iff A$

$A \vee 1/W \iff 1/W$
$A \wedge \neg A \iff 0/F$
$A \vee \neg A \iff 1/W$

B als überflüssige Aussage

$A \wedge (A \vee B) \iff A$
$A \vee (A \wedge B) \iff A$

Sonderregeln

$(A \wedge B \iff 1/W) \iff A \wedge B$
$(A \wedge B \iff 1/W) \iff (A \iff 1/W) \wedge (B \iff 1/W)$

Belegungsfunktionen

Anzahl der Belegungsfunktionen (Interpretationen)

Enthält eine Aussage a die Aussagenvariablen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dann gibt es 2^n verschiedene Belegungsfunktionen a_i.
D.h. die Wahrheitstabelle hat 2^n viele Zeilen.

Belegungsfunktionen (Interpretationen)

In der Aussagenlogik ist eine Belegung definiert als eine Abbildung der Menge der Aussagevariablen auf die Menge {1, 0}

$a(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ hat den Wert 0 oder 1 - je nach Belegung von $A_1, A_2, \ldots A_n$

Beispiel:
$A \wedge B$ hat vier Belegungsfunktionen:
$a(0,0) = 0$
$a(0,1) = 0$
$a(1,0) = 0$
$a(1,1) = 1$

Beweis

- Für $n = 1$ gibt es genau zwei Funktionen
  $a_1(A_{1)} \implies 0$ und $a_2(A_{1)} \implies 1$
- Wenn es für eine Formel mit n Variablen 2^n viele Belegungsfunktionen $a_1, \ldots, a_n$ gibt und man der Formel eine weitere Aussagenvariablen A_{n+1} "hinzufügt", dann gibt es die für die neue Variable $A_{n+1} \implies 1$.

Es werden nun Funktionen $a_i\prime(x) = a_1(x)$ und $a_i\prime\prime(x) = a_i(x)$ mit $x \in \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $1 \leq i \leq 2$ definiert.
Zusätzlich wird $a_i\prime(A_n + 1) \implies 0$ und $a_i\prime\prime(A_n + 1) \implies 1$ definiert.
Somit ist die Zahl der Belegungsfunktionen verdoppelt. D.h. die Zahl der Belegungsfunktionen beträgt nun 2^{n+1}.

Weitere Definitionen

Definition Erfüllbarkeit

- Eine aussagenlogische Aussage a heißt *erfüllbar*, wenn es eine Belegunsfunktion a der in der Aussage a enthaltenen Aussagenvariablen $(A, B, \ldots)$ gibt, so dass $a($ a$) \implies 1$
- d.h. es gibt mindestens eine Zeile in der Wahrheitstafel, so dass a wahr ist

Definition Tautologie

- Eine *Tautologie* ist in der Logik eine Aussage a, die allgemeingültig, also immer wahr ist
- Eine Aussage a ist immer wahr, wenn für *alle Belegungsfunktionen* a_i der in der Aussage a enthaltenen Aussagenvariablen $(A, B, \ldots)$ stets gilt, dass $a_i(a) \implies 1$ d.h. wenn die Wahrheitstafel für alle Belegungen "wahr" ist

---

Boolesche Algebra

Siehe auch PDF

Definition

- In der Mathematik ist eine *boolesche Algebra* (oder ein boolescher Verband) eine spezielle algebraische Struktur, die die Eigenschaften der logischen Operatoren UND, ODER, NICHT sowie die Eigenschaften der mengentheoretischen Verknüpfungen Durchschnitt, Vereinigungen, Komplement verallgemeinert.

- Gleichwertig zur booleschen Algebra sind boolsche Ringe, die von UND und ENTWEDER-ODER beziehungsweise Durchschnitt und symmetrischer Differenz ausgehen.

- **Anmerkung**: Die boolesche Algebra ist die Grundlage bei der Entwicklung von digitaler Elektronik und wird in allen modernen Programmiersprachen zur Verfügung gestellt.

Aussagenlogische Gesetze

	Idempotenz
1	$a \land a \iff a$
2	$a \lor a \iff a$
3	$\neg\neg a \iff a$
	Kommutativität
4	$a \land b \iff b \land a$
5	$a \lor b \iff b \lor a$
	Assoziativität
6	$a \land (b \land c) \iff (a \land b) \land c \iff a \land b \land c$
7	$a \lor (b \lor c) \iff (a \lor b) \lor c \iff a \lor b \lor c$
	! Distributivität
8	$a \lor (b \land c) \iff (a \lor b) \land (a \lor c)$
9	$a \land (b \lor c) \iff (a \land b) \lor (a \land c)$
	! DeMorgan-Regel
10	$\neg(a \land b) \iff \neg a \lor \neg b$
11	$\neg(a \lor b) \iff \neg a \land \neg b$
	Transitivität
12	$((a \implies b) \land (b \implies c)) \iff (a \implies c)$
	Ausgeschlossener Dritter
13	$a \lor \neg a \iff 1$
14	$a \land \neg a \iff 0$
	Äquivalenz
15	$a \iff b \iff (a \implies b) \land (b \implies a)$
	Implikation
16	$a \implies b \iff \neg a \lor b$
	neutrales Element

	Idempotenz
17	$a \wedge 1 \iff a$
18	$a \vee 0 \iff a$
19	$a \wedge 0 \iff 0$
20	$a \vee 1 \iff 1$
	b ist überflüsige Aussage
21	$a \wedge (a \vee b) \iff a$
22	$a \vee (a \wedge b) \iff a$

Normalform

Siehe auch PDF

verschiedene Definitionen

Definition - Literal

Ein Literal ist eine negierte oder nicht negierte *atomare Aussage*

P - positives Literal, $\neg P$ - negatives Literal

! Definition - Konjunktive Normalform !

- Eine Formel der Aussagenlogik ist in *konjunktiver Normalform* (*KNF*), wenn sie eine **Konjunktion von Disjunktionstermen** ist
- *Disjunktionsterme* sind dabei Disjunktionen von Literalen → Klauseln

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} p_{ij} \right)$$

Beispiele

- $(A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C \vee \neg D)$
- $A \wedge (B \vee C)$
- $A \wedge B$
- 1

! Definition - Disjunktive Normalform !

- Eine Formel der Aussagenlogik ist in *disjunktiver Normalform* (*DNF*), wenn sie eine **Disjunktion von Konjunktionstermen** ist
- *Konjunktionsterme* sind dabei Konjunktionen von Literalen

$$\bigvee_{i=1}^{n}\left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} p_{ij}\right)$$

Beispiele

- $(A \land B) \lor (A \land B \land C) \lor (B \land C) \lor D$
- $A \lor B$
- $A \lor (B \land C)$
- 1

Beispiel

- Boolescher Ausdruck: $a \land \neg(b \land c)$
- Anwendung von deMorgan: $a \land (\neg b \lor \neg c)$ (das ist bereits die KNF)
- Anwendung des Distributivgesetzes: $(a \land \neg b) \lor (a \land \neg c)$ (das ist bereits die DNF)

Regeln für die Anwendung

Regeln

1. Entferne $\implies$, $\iff$ entsprechend der Regeln
2. Negationen nach innen ziehen:
   - $\neg\neg G \rightarrow G$
   - $\neg(G \land H) \rightarrow (\neg G \lor \neg H)$ (deMorgan)
   - $\neg(G \lor H) \rightarrow (\neg G \land \neg H)$ (deMorgan)
3. Anwendung der Distributivgesetzt
   - KNF: $F \lor (G \land H) \rightarrow (F \lor G) \land (F \lor H)$
   - DNF: $F \land (G \lor H) \rightarrow (F \land G) \lor (F \land H)$
4. Überflüssiges Entfernen, Vereinfachen

- $F \wedge 1 \to F$, $F \wedge F \to F$

Satz (aussagenlogische Normalformen)

- Jede aussagenlogische Aussage F kann in *disjunktiver Normalform* geschrieben werden.
- Jede aussagenlogische Aussage F kann in *konjunktiver Normalform* geschrieben werden.

Satz (Eigenschaften der KNF und DNF)

- Eine *KNF* ist gültig gerade dann wenn **alle ihre Klauseln gültig sind**.
- Eine *DNF* ist unerfüllbar gerade dann wenn **alle ihre Klauseln unerfüllbar sind**.

Wahrheitstafelmethode

disjunktive Normalform

A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\neg A \wedge B \wedge C$
1	0	0	1	$A \wedge \neg B \wedge \neg C$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	$A \wedge B \wedge C$

$$(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

konjunktive Normalform

A	B	C	F	
0	0	0	0	$A \vee B \vee C$
0	0	1	0	$A \vee B \vee \neg C$
0	1	0	0	$A \vee \neg B \vee C$
0	1	1	1	
1	0	0	1	

A	B	C	F	
1	0	1	0	$\neg A \vee B \vee \neg C$
1	1	0	0	$\neg A \vee \neg B \vee C$
1	1	1	1	

$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \neg C) \wedge (\neg A \neg B \vee C)$$

Beweise

Siehe auch [PDF]

Vollständige Fallunterscheidung

Definition

Beim Beweis einer Aussage durch die *vollständige Fallunterscheidung* wird eine endliche Anzahl von Fällen betrachtet, die in ihrer Gesamtheit alle möglichen Fälle überdecken und von denen jeder eine einfachere Behandlung des Problems ermöglicht.

Beispiel

Aussage: Jede Primzahl $p \geq 3$ hat die Form $p = 4 \cdot k \pm 1$ mit $k \in \mathbb{N}$

- Man unterscheidet folgende vier Fälle für die Zahl p, von denen immer genau einer eintritt:

$$\begin{aligned} p &= 4k \\ p &= 4k + 1 \\ p &= 4k + 2 \\ p &= 4k + 3 = 4(k+1) - 1 \end{aligned}$$

Direkter Beweis

Definition

Bei einem *direktem Beweis* wird die Behauptung durch Anwendung von bereits bewiesenen Aussagen durch logische Folgerungen bewiesen.

Beispiel

Aussage: Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl n ist stets ungerade.

Beweis:

- Es sei n eine ungerade natürliche Zahl. Dann lässt sich n darstellen als $n = 2k + 1$, wobei k eine natürliche Zahl oder Null ist.
- Ausmultiplizieren von n^2 ergibt: $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
- Aus dieser Darstellung folgt, dass n^2 ungerade ist.

Indirekter Beweis — Widerspruchsbeweis

Definition

Bei einem *indirekten Beweis* zeigt man, dass ein Widerspruch entsteht, wenn die zu beweisende Behauptung falsch wäre.

Beispiel

Aussage: Ist die Wurzel x aus einer geraden natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl, so ist x gerade. (n gerade und $x = \sqrt{n} \in \mathbb{N} \to x \text{ ist gerade}$)

Beweis:

- Angenommen, $x = \sqrt{n}$ wäre ungerade (für n gerade). Dann ist wegen der gerade bewiesenen Behauptung auch $x^2 = n$ ungerade.
- Das ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung das n gerade sei. Also ist die getroffene Aussage falsch, d.h. $x = \sqrt{n}$ ist gerade.

Konstruktiver Beweis

Definition

Bei einem *konstruktiven (Existenz-)Beweis* wird entweder die Lösung selbst genannt oder ein Verfahren angegeben, das zur Lösung führt. D.h. es wird eine Lösung konstruiert.

Beispiel

Aussage: Die Funktion f mit $f(x) = 2x - 1$ besitzt im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle z.

Beweis:

- Die Lösung der Gleichung $2x - 1 = 0$ wird zu $x = \frac{1}{2}$ umgeformt.
- Damit hat man eine Nullstelle $z = \frac{1}{2}$ gefunden und diese auch präzise bestimmt.

Nicht-konstruktiver Beweis

Definition

Bei einem *nicht-konstruktiven Beweis* wird anhand von Eigenschaften auf die Existenz einer Lösung geschlossen.
Manchmal wird sogar indirekt die Annahme, es gäbe keine Lösung, zum Widerspruch geführt, woraus folgt, dass es eine Lösung gibt.
Aus solchen Beweisen geht nicht hervor, wie man die Lösung gewinnt.

Beispiel

Aussage: Die Funktion f mit $f(x) = 2x - 1$ besitzt im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle z.
Beweis:

- f ist stetig und $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt die Behauptung.

Schubfachprinzip

Definition

Verteilt man $n + 1$ Gegenstände auf n Schubfächer, dann befinden sich in mindestens einem Schubfach mindestens zwei Gegenstände.

Formal: Falls man n Objekte auf m Mengen $(n, m > 0)$ verteilt und $n > m$, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mehr als ein Objekt landet.

Beweis:

- Falls das Prinzip nicht stimmt, dann landet in jedem Schubfach höchstens ein Objekt.
- Damit gibt es höchstens so viele Objekte wie Schubfächer.
- Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, dass es mehr Objekte als Schubfächer gibt.

Beispiel

Aussage: In München gibt es mindestens zwei Personen, die exakt dieselbe Anzahl an Haaren auf dem Kopf haben.
Beweis:

- Man teilt alle Einwohner Münchens nach der Anzahl ihrer Haare in *Schubfächer* ein. Typischerweise hat ein Mensch etwa 100.000 bis 200.000, jedoch sicher weniger als 1 Million Haare.
- → es gibt maximal eine Million Schubfächer (von 0 bis 999.999).
- Da es aber etwas 1,5 Millionen Einwohner in München gibt, hat man mehr Einwohner als Schubfächer
- → mindestens ein Schubfach hat zwei oder mehr Personen.

Diese haben nach Definition der Schubfächer dieselbe Anzahl Haare auf dem Kopf.

Vollständige Induktion

Definition

Sei $A : \mathbb{N} \to \{W. F\}$ eine Eigenschaft natürlicher Zahlen, für welche folgende zwei Aussagen gelten:

1. **Induktionsverankerung** (Induktionsanfang):
   Es gilt $A(0)$

2. **Induktionsschritt**:

Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Falls $A(n)$, die *Induktionsvoraussetzung* (*Induktionsannahme*) gilt, dann gilt auch $A(n+1)$, die *Induktionsbehauptung*

Dann gilt $A(n)$ **für alle Zahlen** $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel

Aussage: Sei $n \in \mathbb{N}$ dann gilt:

$$1 + 2 + \ldots n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

(Gauss'sche Summenformel)
Beweis:

- *Induktionsanfang:* $n = 1$

  Für $n = 1$ gilt offensichtlich $1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$

- *Induktionsannahme:* $1 + 2 + \ldots n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

- *Induktionsschritt:* $n \to n+1$

  Anwenden der Induktionsannahme $1 + 2 + \ldots n = \frac{n \times (n+1)}{2}$ in der zu berechnenden Summe $(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1)$ ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{n \times (n+1)}{2} + (n+1) \\ = & \frac{n \times (n+1) + 2(n+1)}{2} \\ = & \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ = & \frac{(n+1) \times (n+2)}{2} \\ = & \frac{n \times (n+1)}{2} \\ = & \frac{n\prime \times (n\prime + 1)}{2} \\ & \text{mit } n\prime \overset{def}{=} n+1 \end{aligned}$$

Strukturelle Induktion

Definition

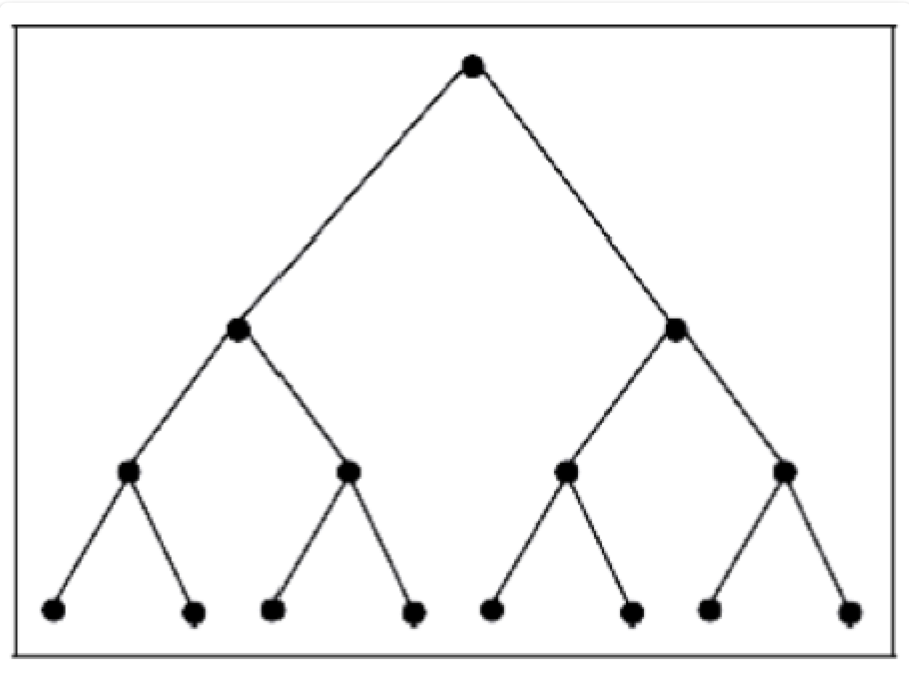
Die *strukturelle Induktion* ist die Verallgemeinerung der **vollständigen Induktion**.
Aussagen über die Elemente von rekursiv aufgebauten Mengen bzw. Datenstrukturen (z.B. formale Sprachen, Listen, Formeln, Graphen) beweisen.
Elemente sind gegeben:

1. als *Atome*
2. durch **endliche Anzahl** von *Konstruktionsschritten*

Induktionsanfang: Beweis für die Atome

Induktionsschritt: Beweis der Behauptung für jede Konstruktionsregel

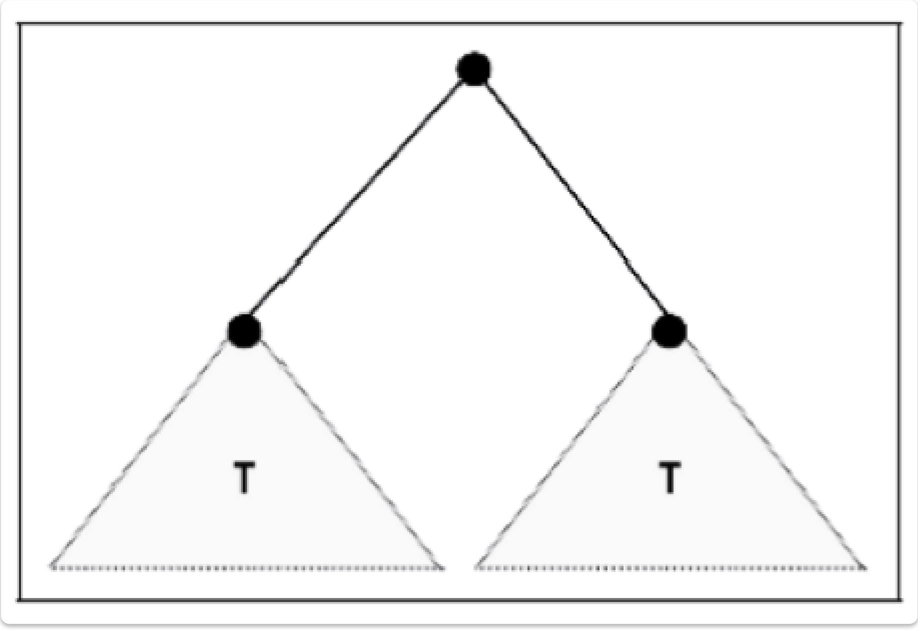
Einführung Binärbaum



Ein *vollstädniger Binärbaum* kann wie folgt rekursiv definiert werden:

- Ein Baum mit nur einem Knoten ist ein vollständiger Baum

- Ist T ein vollständiger Baum, dann ist auch folgendes ein vollständiger Baum:



Beispiel — strukturelle Induktion

Behauptung: Hat ein vollständiger Baum n Blätter, dann hat er $n-1$ innere Knoten.
Beweis:

- Induktionsanfang: Ein Baum mit nur einem Blatt → keine inneren Knoten
- Induktionsannahme: für n: Seit T ein vollständiger Baum mit n Blättern, dann hat er $n-1$ innere Knoten
- Induktionsschritt: $n \to n+1$ (allgemein gültig: bei einem vollständigen Binärbaum ist die Anzahl der Blätter immer $n = 2^k$ für ein natürliches k)
  - Ist B ein vollständiger Binärbaum mit mehr als einem Knoten, so ist er definitionsgemäß zusammengesetzt zu $B = B\prime \text{ und } B\prime\prime$
- Dann gilt:
  - $n = n\prime + n\prime\prime$ (Anzahl der Blätter von B, $B\prime$ und $B\prime\prime$)
  - $$\begin{aligned} m &= 1 + m\prime + m\prime\prime \quad \text{(Anzahl der Knoten von } B, B\prime \text{ und } B\prime\prime\text{, die 1 für die neue Wu} \\ &= 1 + (n\prime - 1) + (n\prime\prime - 1) \text{ nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= n\prime + n\prime\prime - 1 = n - 1 \end{aligned}$$

Aussagenkalkül

Siehe auch PDF

Definition

- Ein Aussagenkalkül wird defniert durch:
  - Menge aussagenlogischer *Formeln*
  - Menge aussagenlogischer *Axiome*
  - Menge aussagenlogischer *Ableitungsregeln*
- Das Aussagenkalkül definiert eine *Ableitungsbeziehung* über Formeln
- "Formel ist ableitbar (herleitbar, beweisbar)"
- Im reinen Aussagenkalkül sind **alle Tautologien** ableitbar
- Beweisbarkeit ist syntaktische Beziehung:
  - "intelligente Textersetzung" d.h. "intelligentes Text-Suche-Tausche-Verfahren"
- Die Ableitung ist "voll automatisierbar", da die Ableitungsregeln exakt vorgegeben sind
- Aussagen (aus denen hergeleitet wird) werden *Prämissen* genannt
- die hergeleiteten Aussagen werden *Konklusionen* genannt

Menge der Formeln:

- Aussagenvariablen $A, B, C, \ldots$
- Mit den Formeln a, b sind auch
  $\neg a$, $a \implies b$ Formeln
- Klammerung: ist a eine Formel, dann ist auch (a) eine Formel
  Es gelten die üblichen Regeln zur Vermeidung von Klammern

Menge der Axiome (per Definition ableitbar)

- A1) $a \implies (b \implies a)$
- A2) $(a \implies (b \implies c)) \implies ((a \implies b) \implies (a \implies c))$

- A3) $(\neg a \implies \neg b) \implies (b \implies a)$

Wahrheitstafel A1

a	b	$b \implies a$	$a \implies (b \implies a)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

→ A1 ist eine Tautologie

Wahrheitstafel A2

a	b	c	$b \implies c$ als d	$a \implies b$ als e	$a \implies c$ als f	$a \implies d$ als g	$e \implies f$ als h	$g \implies h$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

→ A2 ist eine Tautologie

Wahrheitstafel A3

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \implies \neg b$	$b \implies a$	$(\neg a \implies \neg b) \implies (b \implies a)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

→ A3 ist eine Tautologie

Regeln und Beweisregeln

Beweisregeln

Regel

Beweisregeln (*Schlussfiguren*) bilden die Grundlagen des Aussagenkalküls, da sie wahre Aussagen in neue wahre Aussagen überführen.
Beweisregeln werden nach folgendem Schema aufgebaut:

$$\begin{array}{lr} P_1 & \text{Prämisse} \\ P_2 & \text{Prämisse} \\ \ldots & \text{weitere Prämissen} \\ \underline{P_n} & \text{Prämisse} \\ & \\ K & \text{Konklusion} \end{array}$$

Die *Prämissen* sind dabei die bereits als wahr nachgewiesenen Aussagen. Da sie gelten, darf auf die *Konklusion* geschlossen werden.

Modus Ponens

Regel

Der *Modus Ponens* (*Abtrennungsregel*):

$$\begin{array}{cr} a & \text{Prämisse} \\ \underline{a \implies b} & \text{Implikation} \\ & \\ b & \text{Konklusion} \end{array}$$

- Gilt eine Implikation und ihre Prämisse, so gilt auch die Konklusion
- Man kann sie aus der Implikation abtrennen

Beispiele

a: "die Ampel ist rot"

b: "ich muss anhalten"

$a \implies b$: Wenn die Ampel rot ist, muss ich anhalten

b ist ableitbar

Hinweis: $b \implies a$ gilt nicht! Denn die Ampel wird nicht rot, wenn ich anhalte.

---

a: "es regnet"

$a \implies b$: Wenn *es regnet*, ist die Straße nass.

Daraus folgt: b → "die Straße ist nass"

- der Modus Ponens $(a \land (a \implies b)) \implies b$ ist eine Tautologie (Beweis siehe Wahrheitstaffel)

a	b	$a \implies b$	$a \land (a \implies b)$	$(a \land (a \implies b)) \implies b$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Modus Tollens

⚠ **Regel**

Der *Modus Tollens* (*Aufhebungsregel*):

$$\begin{array}{cr} a \implies b & \text{Prämisse: Implikation} \\ \neg b & \text{Prämisse} \\ \hline \\ \neg a & \text{Konklusion} \end{array}$$

- Gilt eine Implikation $a \implies b$, aber ihre Folgerug (b) nicht, dann kann die Voraussetzung (a) der Implikation nicht gelten.

Beispiel

$a \implies b$ (Prämisse: Implikation): "Wenn es regnet, ist die Straße nass"
$\neg b$ (Prämisse): "Die Straße ist nicht nass"
Daraus folgt: a (Konklusion) → "Es regnet nicht"

Sei a eine (wissenschaftliche) Theorie und b eine 'erwartete Beobachtung', die sich aus der Theorie ergeben sollte (also: $a \implies b$).

Zeigt sich nun in einem 'Experiment' aber, dass b nicht gilt, so ist mit dem **Modus Tollens** die Theorie a *falzifiziert*, also als unwahr erkannt.

- der Modus Tollens $((a \implies b) \wedge \neg b) \implies \neg a$ ist eine Tautologie (Beweis siehe Wahrheitstafel

a	b	$\neg b$	$a \implies b$	$(a \implies b) \wedge \neg b$	$\neg a$	$((a \implies b) \wedge \neg b) \implies \neg a$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1

Kettenschlussregel

Regel

Die *Kettenschlussregel* (Transitivität):

$$\begin{array}{rl} a \implies b & \text{Prämisse: Implikation} \\ b \implies c & \text{Prämisse: Implikation} \\ \hline a \implies c & \text{Konklusion} \end{array}$$

- Wenn aus a die Aussage b folgt und aus dieser dann c folgt, dann darf aus a direkt auf c geschlossen werden.

Example

$a \implies b$: "Wenn es regnet, ist die Straße nass"

$b \implies c$: "Wenn die Straße nass ist, dann besteht Schleudergefahr"

Daraus folgt: $a \implies c$ → "Wenn es regnet, besteht Schleudergefahr"

- Beweis der Kettenschlussregel mittels Wahrheitstaffel

a	b	c	$a \implies b$	$b \implies c$	$a \implies b \wedge b \implies c$	$a \implies c$
0	0	0	1	1	*1*	*1*
0	0	1	1	1	*1*	*1*
0	1	0	1	0	0	1

a	b	c	$a \implies b$	$b \implies c$	$a \implies b \wedge b \implies c$	$a \implies c$
0	1	1	1	1	*1*	*1*
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	*1*	*1*

weitere Kalkülregeln

Konjunktion

Regel 3

$$\frac{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}}{a \wedge b}$$

Regel 4

$$\frac{a \wedge b}{a}$$

Disjunktion

Regel 5

$$\frac{\begin{array}{c} a \\ \neg a \vee b \end{array}}{b}$$

Regel 6

$$\frac{\begin{array}{r} a \vee b \\ \neg a \vee c \end{array}}{b \vee c}$$

Resolutionskalkül

Siehe auch [PDF]

Das [Aussagenkalkül] ist unhandlich und schwer mechanisierbar, die Lösung dazu:

- Einfache Formeln nur in konjunktiver Normalform
- Wenige Axiome notwendig durch Mengendarstellung (Klauseln)

- Statt die komplexe Gesamt-Formel (KNF) direkt abzuleiten, wird aus Axiomen und $\neg G$ ein Widerspruch abgeleitet

Bemerkungen:

- Durch die konjunktive Normalform ist die Menge der Formeln auf die Operatoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ beschränkt
- Menge der Regeln: Resolutionsregel (Disjunktion — Regel 6)

Resolutionsregel in Mengenschreibweise:

$$\frac{\begin{array}{r}\{a \vee b\} \\ \{\neg a \vee c\}\end{array}}{\{b \vee c\}}$$

Prädikatenlogik

Siehe auch PDF

Definition

- *Aussagenformen* (*Prädikate*) in den *Variablen* x, y, $\ldots$ auf den Grundmenge M_x, M_y, $\ldots$ sind sprachliche Gebilde, die nach *Ersetzung* der Variablen x, y, $\ldots$ durch Elemente aus M_x, M_y, $\ldots$ in Aussagen übergehen
- Eine Aussagenform ist weder wahr noch falsch, hat also **keinen** Wahrheitswert
- Alle Vorkommnisse einer Variablen (x, y, $\ldots$) in einem Kontext werden durch den selben Wert (M_x, M_y, $\ldots$) aus der Grundmenge ersetzt
- Prädikate werden als $P(x, y, \ldots)$ geschrieben

Example

1. *x ist eine gerade Zahl*
   (Prädikat hat eine Variable)
   istGerade(x) bedeutet:

- Prädikat: "istGerade"
- Variable: x
- zu verstehen wie "eine Maschine", die entscheidet, ob x gerade ist oder nicht
  - d.h. steckt man eine 2 in die Maschine, liefert die das Ergebnis "wahr"

2. *x ist kleiner als y*
   (Prädikat hat zwei Variablen)

istKleinerAls(x, y) bedeutet:

- Prädikat: "istKleinerAls"
- Variablen: x, y
- d.h. steckt man eine 2 und eine 3 rein, so liefert das Prädikat "wahr"

Prädiakte können mittels Junktoren (UND, ODER, NICHT, IMPLIKATION, ÄQUIVALENZEN) kombiniert werden. Bspw.: $\text{istPrimzahl}(x) \wedge \text{istGrößerAls}(10, x)$

Quantoren

Definition

Der *Allquantor* $\forall$ und der Existenzquantor $\exists$ sind ebenfalls Operatoren der Logik.

- Die Aussage $\forall x : P(x)$ ist genau dann wahr, wenn:

1. M_x nicht leer ist
2. wenn für alle Elemente $e \in M$ gilt: durch Ersetzen von x durch e in $P(x)$ wird $P(e)$ eine wahre Aussage

- Die Aussage $\exists x : P(x)$ ist genau dann wahr, wenn M_x ein Element e enthält, so dass $P(e)$ eine wahre Aussage ist
- $\forall$ und $\exists$ binden stärker als die anderen logischen Operatoren

---

Nichtklassische Logiken

Siehe auch PDF

Mehrwertige Logik

Unter *mehrwertiger Logik* versteht man ein logisches System, welches mehr als zwei Wahrheitswerte verwendet.

Beispiel:
Kleene-Logik K_3

- enthält drei Wahrheitswerte:
  - 1 für "wahr"
  - 0 für "falsch"

- ${}^{1}/_{2}$ (auch als i bezeichnet) für "weder wahr noch falsch"