Seite 10 – Lösung der Übungen

Übung 1:

a) $$S_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 4 \cdot 5 - 6 \cdot 3 \\ -2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -8 \\ 26 \end{pmatrix}$$

b) $$S_2 = 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + 10 \cdot \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 5-4 \\ 2+6 \\ -3-2 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 46 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Übung 2: ① Für einen beliebigen Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^3$ gibt es für x_1, x_2, x_3 jeweils 2 mögliche Werte, so daß es 2^3 verschiedene Vektoren gibt.

Der Vektor

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ entspricht im $\mathbb{Z}_2^3$ dem Vektor $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

② Mit den gleichen Argumentationen wie bei ① ergibt sich für die Anzahl der Elemente des Vektorraums $\mathbb{Z}_{23}^4$ 23^4.

Der Vektor

$$\begin{pmatrix} -20 \\ 46 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix}$$ entspricht im $\mathbb{Z}_{23}^4$ dem Vektor $$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Seite 11 – Darstellung der Beispiele

* U_1 ist ein Unterraum – beide Bedingungen sind erfüllt

* U_2 ist kein Unterraum, weil gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \notin U_2$$

* U_3 ist ein Unterraum – beide Bedingungen sind erfüllt

* U_4 ist kein Unterraum – es gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

$(x_1^2 = x_2^2)$ $(y_1^2 = y_2^2)$

Es müsste nun gelten $(x_1+y_1)^2 = (x_2+y_2)^2$

$\iff 2x_1 \cdot y_1 = 2x_2 \cdot y_2$, was nicht gelten muss

wähle beispielsweise: $x_1 = -1,\ x_2 = 1$

$y_1 = 1,\ y_2 = 1$

* U_5 ist kein Unterraum – betrachte

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1, v_1 \in U_5$

aber $u_1 + v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_5$

* U_6 ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$, weil beide Bedingungen erfüllt sind.

Seite 16 – Lösung der Übungen

Übung 1 :

(1) Annahme: $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}+U = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+U \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \in U$, was nicht der Fall ist

$\Longrightarrow \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}+U \cap \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+U = \emptyset$

(2) Annahme

$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}+U = \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}+U \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \in U$, was wahr ist

$\Longrightarrow$ Nebenklassen sind gleich

Übung 2 :

1 – Falsch : Nur die triviale Nebenklasse 0+U ist ein Vektorraum

2 – Richtig : Ein Unterraum U ist gleich der trivialen Nebenklasse 0+U

3 - Falsch : Zu einer Nebenklasse gehört ein Unterraum, in dem mindestens die 0 enthalten ist

4 – Richtig : Zwei Nebenklassen können gleich sein und damit können Sie ineinander enhalten sein

5 – Falsch : Die Gleichung v+U=U impliziert lediglich, dass v in U enthalten ist.

6 - Richtig : S. 5

7 - Richtig : per definitionem – s. Definition Seite 15, Kap. 7

8 - Richtig : Die Vereinigung aller Nebenklassen ergibt V und U ist eine echte Teilmange von V, so dass es neben der trivialen Nabenklasse U noch mindestens eine weitere Nebenklasse geben muss.

9 – Richtig : Beispielsweise für n = 3 besitzt eine Gerade / Ebene durch den Ursprung – was U darstellen soll – unendliche viele parallele Geraden / Ebenen im Raum, die sämtlich verschieden sind.

10 – Falsch : Der Vektorraum V besitzt nur endlich viele Elemente. Dann kann er auch nur endlich viele verschiedene Nebenklassen besitzen.

Übung 3:

Es gibt die Nebenklassen

- U
- $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + U$

Weitere Nebenklassen gibt es nicht, weil

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + U = U$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + U = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + U \iff$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + U = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + U = U$

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + U = U$

und $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + U \neq U$.

Seite 24 – Lösung der Übungen

Übung 1: Es gilt:

- $a \cdot b = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0$
- $a \cdot c = 0 - 0 + 0 = 0$
- $b \cdot c = 0 - 0 - 0 = 0$
- $\|a\| = \sqrt{\frac{1}{2} + 0^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$
- $\|b\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$
- $\|c\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1$

Übung 2 :

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow v^0 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Lösung Übung 3:

Eigenschaft 1: Sei $k \in \mathbb{R}$ vorgegeben, $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\|k \cdot u\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |k \cdot u_i|$$
$$= \max_{i=1,\dots,n} |k| \cdot |u_i|$$
$$= |k| \cdot \max_{i=1,\dots,n} |u_i| = k \cdot \|u\|_\infty$$

Eigenschaft 2: Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u + v\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |u_i + v_i|$$
$$\leq \max_{i=1,\dots,n} \left(|u_i| + |v_i| \right)$$
$$\leq \max_{i=1,\dots,n} |u_i| + \max_{i=1,\dots,n} |v_i| =$$
$$\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

Eigenschaft 3: $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |u_i| = 0 \iff$$
$$\forall_{i=1,\dots,n} \; u_i = 0 \iff u = 0$$