1. Logik

#Mathe1 #Mathe #Logik

Themen

1. Aussagen und Aussageformen
2. Prädikate
3. Quantoren
4. Mathematische Schlussweisen

---

1. Aussagen und Aussageformen

#AussagenLogik

Definition

Unter einer *Aussage* soll ein sprachliches Gebilde verstanden werden, für das es sinnvoll ist zu fragen, ob es *wahr* oder *falsch* ist.

Verknüpfung von Aussagen

UND $\wedge$

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

ODER $\vee$

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W

A	B	$A \vee B$
F	F	F

XOR

A	B	A XOR B
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Implikation $\implies$

A	B	$A \implies B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Äquivalenz $\iff$

A	B	$A \iff B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Negation $\neg$

A	$\neg A$
W	F
F	W

Definition

Eine *Aussageform* ist ein Ausdruck oder eine Formel, man spricht auch von Aussageformel, in der *Aussagevariablen mittles der aussagelogischen*

Basisoperationen miteinander verknüpft sind.

Durch Einsetzen von Aussagen in die Aussagevariablen wird aus der Aussageform eine Aussage.

⚠ Merke

Wenn zwei Aussageformen bei allen möglichen Variablensetzungen zum gleichen Wahrheitswert führt, so nennt man das *gleichwertig*.

> *Tautologie - eine Aussage die immer wahr ist*

> *Kontradikition - eine Aussage die immer falsch ist*

Wahrheitstafeln

#Wahrheitstafeln

In Wahrheitstafeln werden, für die Aussagevariablen, alle möglichen wahr - falsch Kombinationen eingetragen.
$n \text{ Aussagevariablen} \rightarrow 2^n \text{ Kombinationen}$

Bindungen

⚠ Vorangregeln

- $\neg$ stärkste Bindung
- $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
- $\vee$ bindet stärker als $\implies$
- $\implies$ bindet stärker als $\iff$
  Es können also Klammern eingespart werden, allerdings ist das fehleranfällig -> *Klammer verwenden*

Implikation und Äquivalenz

Impliaktion

Wenn gilt: $A \implies B$, so sagt man:

- A ist hinreichend für B
- B ist notwendig für A
  - ist beides falsch / 0, folgt daraus dass die Implikation wahr ist

Äquivalenz

Wenn gilt: $A \iff B$, so sagt man dass A notwendig und hinreichend für B ist und umgekehrt.

Tautologie

Eine Aussage die immer wahr ist.
Beispiele:

- $A \vee \neg A$
- $A \iff \neg(\neg A)$

Kontradiktion

Eine Aussage die immer falsch ist.
Beispiele:

- $A \wedge \neg A$
- $A \iff \neg A$

Wichtige Äquivalenzen

(Siehe auch [Rechenregeln Logik] - Theoretische Informatik)
Rechenregeln zum Umformen von Formeln - Vereinfachen

Kommutativgesetz

1. $A \wedge B \iff B \wedge A$
2. $A \vee B \iff B \vee A$

Assoziativgesetz

3. $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$
4. $(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$

Verschmelzungsgesetz / Absorptionsgesetz

5. $A \wedge (A \vee B) \iff A$
6. $A \vee (A \wedge B) \iff A$

Distributivgesetz

7. $(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
8. $(A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

neutrales Element

9. $A \wedge 1/W \iff A$
10. $A \vee 0/F \iff A$

Die Regeln 1-6 definieren die Struktur für einen *Verband*, zuzüglich der Regeln 7 und 8 die Struktur für einen *distributiven Verband* und schließlich nochmals ergänz um die Regeln 9 und 10 für einen *Boolschen Verband*.

Für Negationen gelten folgende Gesetzmäßigkeiten die sich mittels #Wahrheitstafeln oder mittels der Regeln 1-10 direkt beweisen lassen.

De Morgan

$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$

Gesetz der doppelten Negation

$\neg\neg A \iff A$

Ausblick

Mit den Rechenregeln (Äquivalenzen) werden auf dem Gebiet der Boolschen Algebra aufgebaut:

- das systematische Rechnen in Boolschen Verbänden
  - $\wedge$ wird zu $\cdot$
  - $\vee$ wird zu +
  - $\iff$ wird zu =
- die Theorie der Boolschen Funktionen
- die Schaltalgebra:
  - W = 1
  - F = 0

---

2. Prädikatenlogik

Definition

Ein Prädiakt ist ein Ausdruck, der eine oder mehrere Variablen enthält, und der

> 1. *durch Einsetzen eines Wertes in die Variable*

> 2. *durch Bindung der Variablen an einen Quantor*

in eine Aussage übergeht.

Beispiel zu 1.:
$A(x)$: x ist ein Schaltjahr mit $x \in \mathbb{N}$
Setzt man für x einen Wert ein, kann dieser Ausdruck wahr werden.

---

3. Quantoren

Beispiel zu 2.:
$\exists (x \in \mathbb{N})$: x ist ein Schaltjahr
Für einige x Element von $\mathbb{N}$ gilt, dass x ein Schaltjahr ist.

Definition

Durch Quantoren werden Prädikate zu Aussagen.
Bei einer Verneinung werden die Quantoren vertauscht und die Werte angepasst.

Merke

Als abkürzende Schreibweise für die Konstrukte 'für alle' und 'es gibt', sind folgende Quantoren definiert:

$\forall$ *Allquantoren*, jeweils ergänzt um die betreffenden Variablen zuzüglich einschränkender Wertebereiche

$\exists$ *Existenzquantoren*, jeweils ergänzt um die betreffenden Variablen zuzüglich einschränkender Wertebereiche

$\exists!$ *Existenzquantor*, dieser beschreibt das genau ein Element existiert

$\nexists$ *Existenzquantor*, dieser beschreibt das kein Element existiert

Beispiel
In jeder deutschen Großstadt gibt es einen Stadtbezirk, in dem es eine Straße gibt, in der kein Roller abgestellt wurde.
$\forall_{x \in \text{Großstädte in DE}} \exists_{Stadtbezirk} \exists_{Straße} : \text{Roller abgestellt} = 0$

Verneinung:

$\exists_{x \in \text{Großstädte in DE}} \forall_{Stadtbezirk} \forall_{Straße} : \text{Roller abgestellt} > 0$

---

4. Schlussweisen

Die Gesetzmäßigkeiten der Aussagenlogik begründen einige klassische Formen von mathematischen Schlussweisen:

- Widerlegung einer Aussage durch Angabe eines Gegenbeispiels
  $(\neg(\forall x : A(x)) \iff \exists x : (\neg A(x)))$

- Beweis durch Widerspruch (Kontraposition):
  $A \implies B \iff \neg B \implies \neg A$

- Beweis der Äquivalenz durch den Beweis von zwei Implikationen
  $(A \iff B \iff (A \implies B) \wedge (B \implies A))$

- Beweis der Äquivalenz durch den Beweis einer anderen Äquivalenz
  $(A \iff B \iff \neg A \iff \neg B)$

- Indirekter Beweis:
  Es ist zu beweisen das eine Aussage B wahr ist. Man nimmt nun das Gegenteil *'B ist nicht wahr'* an und folgert daraus etwas, dass offensichtlich **falsch** ist. Dann kann *'B ist nicht wahr'* nicht wahr sein, weil aus etwas Wahrem nicht etwas Falsches folgen kann. Damit ist 'B ist nicht wahr' falsch, was bedeutet, dass B wahr ist.

  Beispiel:
  Es gibt unendlich viele Primzahlen. *Da es unendlich viele Zahlen gibt, gibt es auch unendlich viele Primzahlen.*