Übungsblatt-2 Lineare Algebra (Mengen)-Kapitel 2-Lösungen

Aufgabe 1 : Geben Sie die Elemente der folgenden Mengen an

a) $\{x|x \in \mathbb{N}, 2.5 < x < 12, \text{x ist durch 2 und durch 3 teilbar}\}$
b) $\{x|x \in \mathbb{Z}, -15 \leq x \leq 43, \text{x ist durch 13 teilbar}\}$

Lösung Aufgabe 1 :

a) $\{x|x \in \mathbb{N}, 2.5 < x < 12, \text{x ist durch 2 und durch 3 teilbar}\} = \{6\}$

b) $\{x|x \in \mathbb{Z}, -15 \leq x \leq 43, \text{x ist durch 13 teilbar}\} = \{-13, 0, 13, 26, 39\}$

Aufgabe 2 : Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{2, 4, 5\}$.

a) Geben Sie die Potenzmengen der folgenden Mengen an : $A, A \cap B, (A \cup C) \cap B$
b) Geben Sie das kartesische Produkt $(A \cap B) \times C$ an.

Lösung Aufgabe 2 :

a) Zunächst gilt : $A \cap B = \{1, 3\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $(A \cup C) \cap B = \{1, 3, 5\}$.

Für die Potenzmengen ergibt sich :

$P(A) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
$P(A \cap B) = \{\{\}, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$
$P((A \cup C) \cap B) = \{\{\}, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$

b)$(A \cap B) \times C = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5)\}$

Aufgabe 3 : Beweisen Sie für Mengen $A, B, C \subseteq M$ mittels Benutzung von Wahrheitstafeln

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
b) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Lösung Aufgabe 3 :

Aufgabe 3a)

x ϵ A	**x ϵ B**	**x ϵ C**	**x ϵ B ∩ C**	**x ϵ A U (B ∩ C)**	**x ϵ A U B**	**x ϵ A U C**	**x ϵ (A U B) ∩ (A U C)**
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	F	W	W	W	W
W	F	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W	W	W
F	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	F	F	W	F	F
F	F	W	F	F	F	W	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Aufgabe 3 b)

x ϵ A	**x ϵ B**	**x ϵ A U B**	$x \in (A\, UB)^{C}$	$x \in A^{C}$	$x \in B^{C}$	$x \in (A^{C} \cap B^{C})$
W	W	W	F	F	F	F
W	F	W	F	F	W	F
F	W	W	F	W	F	F
F	F	F	W	W	W	W

Aufgabe 3c)

x ϵ A	**x ϵ B**	**x ϵ C**	**x ϵ B ∩ C**	**x ϵ A \ B ∩ C**	**x ϵ A \ B**	**x ϵ A \ C**	**x ϵ (A \ B) U (A \ C)**
W	W	W	W	F	F	F	F
W	W	F	F	W	F	W	W
W	F	W	F	W	W	F	W
W	F	F	F	W	W	W	W
F	W	W	W	F	F	F	F
F	W	F	F	F	F	F	F
F	F	W	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Aufgabe 4 : Beweisen Sie für die Mengen $A, B, C \subseteq M$ folgende Mengengleichungen mittels der Regeln / Gesetze der Mengenalgebra

a) $A \cap (B \cup \bar{A}) = A \cap B$ **b)** $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$ **c)** $A \triangle (A \cup B) = B \setminus A$
d) $A \triangle (A \cap B) = A \setminus B$ **e)** $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap \overline{A}) = (A \cap B) \cup (C \cap \overline{A})$
f) $(A \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \cap (A \cup (B \cap C)) = A$

Lösung zu Aufgabe 4 :

Lösung zu a) : $A \cap (B \cup \bar{A}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{A}) = A \cap B$

Lösung zu b) : $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap B = B$

Lösung zu c) : $A \triangle (A \cup B) = (A \setminus (A \cup B)) \cup ((A \cup B) \setminus A) = (A \cap (\overline{A \cup B})) \cup ((A \cup B) \cap \bar{A}) =$

$(A \cap (\bar{A} \cap \bar{B})) \cup ((A \cup B) \cap \bar{A}) = ((A \cap \bar{A}) \cap \bar{B}) \cup ((A \cup B) \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap \bar{A} =$

$(A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A}) = B \cap \bar{A} = B \setminus A$

Lösung zu d) : $A \triangle (A \cap B) = (A \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \setminus A) = (A \cap (\overline{A \cap B})) \cup ((A \cap B) \cap \bar{A}) =$

$(A \cap (\overline{A \cap B})) \cup ((B \cap A) \cap \bar{A}) = (A \cap (\overline{A \cap B})) \cup (B \cap (A \cap \bar{A})) =$

$A \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap \bar{B} = A \setminus B$

Lösung zu e) :

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap \overline{A}) = (A \cap B) \cup \left[(B \cap C) \cap (A \cup \overline{A})\right] \cup (C \cap \overline{A}) =$$

$$(A \cap B) \cup (B \cap C \cap A) \cup (B \cap C \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A}) = (A \cap B) \cup (C \cap \overline{A}).$$

Lösung zu f) :

$$(A \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \cap (A \cup (B \cap C)) = (A \cup (\overline{B} \cup \overline{C})) \cap (A \cup (B \cap C)) =$$

$$A \cup ((\overline{B} \cup \overline{C}) \cap (B \cap C)) = A \cup ((\overline{B \cap C}) \cap (B \cap C)) = A \cup \emptyset = A$$

Aufgabe 5 (*): Von den als Mitglied eingetragenen Personen eines Sportvereins ist folgendes bekannt

1. Keine Person spielt zugleich Handball- und Fussball
2. Alle eislaufenden Personen spielen auch Fußball
3. Jede Person ist Eisläufer oder Skifahrer

Begründen Sie, dass aus diesen Angaben folgt, dass jede handballspielende Person auch Ski fährt.

Lösung zu Aufgabe 5 (*) : Seien

- V die Menge der Personen, die Mitglied in dem Sportverein sind
- H die Menge der Personen, die Handball spielen
- F die Menge der Personen, die Fußball spielen
- E die Menge der Personen, die Eisläufer sind
- S die Menge der Personen, die Skifahrer sind

Dann gilt, die 3 Vorgaben aus der Aufgabe in die formale Sprache der Mengenlehre übersetzt

1. Keine Person spielt zugleich Handball- und Fussball : $H \cap F = \emptyset$.
2. Alle eislaufenden Personen spielen auch Fußball : $E \subseteq F$.
3. Jede Person ist Eisläufer oder Skifahrer : $E \cup S = V$.

Nehme eine beliebige handballspielende Person, genannt p, her - dann gilt

- $p \in H \Rightarrow p \notin F$, wegen $H \cap F = \emptyset$
- $p \notin E$, weil andernfalls gelten würde $p \in E \subset F \Rightarrow p \in F$, was ja gerade nicht der Fall ist
- Wenn $p \notin E$ und nach 3. gilt $E \cup S = V$, muss $p \in S$ gelten

Aufgabe 6 (*): Bei einem psychologischen Experiment werden 50 Mäuse in ein Labyrinth geschickt. Man konstatiert folgendes :
25 Mäuse waren männlich; 25 Mäuse waren vorher abgerichtet davon 10 Männchen; 20 Mäuse liefen am ersten Abzweigpunkt nach links, davon 4 Männchen. Von den vorher abgerichteten Mäusen gingen 15 nach links, davon waren 3 männlich. Bestimmen Sie die Anzahl der weiblichen Mäuse, die vorher nicht abgerichtet waren und die am ersten Abzweigpunkt nicht nach links liefen.

Lösung zu Aufgabe 6 (*): Seien

- M die Menge der männlichen Mäuse
- A die Menge der Mäuse, die vorher abgerichtet wurden
- L die Menge der Mäuse, die am ersten Abzweigpunkt nach links laufen

Dann gilt nach den in der Aufgabe genannten Konstatierungen

- 25 Mäuse waren männlich : $|M| = 25$
- 25 Mäuse waren vorher abgerichtet, davon 10 Männchen : $|A| = 25, |A \cap M| = 10$
- 20 Mäuse liefen am ersten Abzweigpunkt nach links, davon 4 Männchen : $|L| = 20, |L \cap M| = 4$
- Von den vorher abgerichteten Mäusen gingen 15 nach links, davon waren 3 männlich: $|L \cap A| = 15, |L \cap A \cap M| = 3$

Gesucht ist $|\overline{M} \cap \overline{A} \cap \overline{L}|$.

Nun gilt $\overline{M} \cap \overline{A} \cap \overline{L} = \overline{M \cup A \cup L}$.

Nach der Siebformel für 3 Mengen gilt :

$$|M \cup A \cup L| = |M| + |A| + |L| - |M \cap A| - |M \cap L| - |A \cap L| + |M \cap A \cap L|$$

Einsetzen der o.g. Zahlen ergibt sofort

$$|M \cup A \cup L| = |M| + |A| + |L| - |M \cap A| - |M \cap L| - |A \cap L| + |M \cap A \cap L| =$$

$25 + 25 + 20 - 10 - 4 - 15 + 3 = 44$, was impliziert, dass das Komplement der Menge $M \cup A \cup L$ die Mächtigkeit 50-44=6, so dass die Antwort lautet :

Die Anzahl der weiblichen Mäuse, die vorher nicht abgerichtet waren und die am ersten Abzweigpunkt nicht nach links liefen, beträgt 6.