Übungsblatt-1 Lineare Algebra (Logik)-Kapitel 1-Lösungen

Aufgabe 1 : Welchen Wahrheitswert haben die Aussagen, die sich aus den folgenden aussagelogischen Aussageformen ergeben, wenn jeweils alle möglichen Wahrheitskombinationen berücksichtigt werden
a) $\neg A \vee \neg(B \vee C)$
b) $((A \wedge B) \vee (B \to C)) \Leftrightarrow (A \vee (B \to C))$

Benutzen Sie zur Lösung Wahrheitstafeln.

Lösung Aufgabe 1 :

Aufgabe 1 a)

A	B	C	B ∨ C	¬ A	¬ (B ∨ C)	¬ A ∨ ¬ (B ∨ C)
W	W	W	W	F	F	F
W	W	F	W	F	F	F
W	F	W	W	F	F	F
W	F	F	F	F	W	W
F	W	W	W	W	F	W
F	F	W	W	W	F	W
F	W	F	W	W	F	W
F	F	F	F	W	W	W

Aufgabe 1 b)

A	B	C	A ∧ B	B → C	(A ∧ B) ∨ (B → C)	A ∨ (B → C)	((A ∧ B) ∨ (B → C)) <=> (A ∨ (B → C))
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	W	W	W
W	F	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W	W	W
F	W	W	F	W	W	W	W
F	F	W	F	W	W	W	W
F	W	F	F	F	F	F	W
F	F	F	F	W	W	W	W

Aufgabe 2 : Beweisen Sie die Wahrheit der Aussageformen
a) $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$
b) $((A \to B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg B$

1. mittels Benutzung einer Wahrheitstafel

2. mittels Benutzung der Rechenregeln für Aussageformen

Lösung Aufgabe 2 :
1. Art mit Wahrheitstafeln :

Aufgabe 2 a)

A	B	A → B	¬ A	¬ B	¬B → ¬A	A → B <=> (¬B → ¬A)
W	W	W	F	F	W	W
W	F	F	F	W	F	W
F	W	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Aufgabe 2 b)

A	B	A → B	¬ B	(A → B) ∧ ¬B	((A → B) ∧ ¬B) = > ¬ B
W	W	W	F	F	W
W	F	F	W	F	W
F	W	W	F	F	W
F	F	W	W	W	W

2. Art mit den Rechenregeln für Aussageformen :

a) Es gilt : $A \longrightarrow B \iff \neg A \vee B$ sowie $\neg B \longrightarrow \neg A \iff \neg(\neg B) \vee \neg A \iff B \vee \neg A \iff \neg A \vee B$, was die zu beweisende Äquivalenz bedeutet.

b) Es gilt :
$(((A \to B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg B) \iff (((\neg A \vee B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg B) \iff$

$(((\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B)) \Rightarrow \neg B) \iff ((\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg B) \iff$

$(\neg(\neg A \wedge \neg B) \vee \neg B) \iff (A \vee B) \vee \neg B \iff A \vee (B \vee \neg B)$. Letzteres ist immer wahr, weil $B \vee \neg B$ immer wahr ist.

Aufgabe 3 :
a) Welche der aussagenlogischen Aussageformen

1. $A \to (B \to (A \wedge B))$
2. $\neg A \to (A \vee B)$
3. $(A \to B) \to B$

sind Tautologien ? Beantworten Sie die Frage jeweils auf zwei Arten

1. mittels Benutzung einer Wahrheitstafel
2. mittels Anwendung der Rechenregeln für Aussageformen

b)**(*)** Beweisen Sie mittels Anwendung der Rechenregeln für Aussageformen für die Aussagevariablen A, B, C die Äquivalenz der beiden Distributivgesetze

$$[A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)] \Leftrightarrow [A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$$

Lösung Aufgabe 3 :

a) 1. Art mit Wahrheitstafeln :

Aufgabe 3 a) - 1. :

A	**B**	**A ∧ B**	**B → A ∧ B**	**A → (B → A ∧ B)**
W	W	W	W	W
W	F	F	W	W
F	W	F	F	W
F	F	F	W	W

Es liegt eine Tautologie vor.

Aufgabe 3 a) - 2. :

A	**B**	**¬ A**	**A v B**	**¬ A → (A v B)**
W	W	F	W	W
W	F	F	W	W
F	W	W	W	W
F	F	W	F	F

Es liegt keine Tautologie vor.

Aufgabe 3 a) - 3. :

A	**B**	**A → B**	**(A → B) → B**
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	W	W
F	F	W	F

Es liegt keine Tautologie vor.

a) 2. Art mit den Rechenregeln für Aussageformen :

1.) $A \to (B \to (A \wedge B)) \iff A \to (\neg B \vee (A \wedge B)) \iff A \to ((\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee B))) \iff$

$A \to (\neg B \vee A) \iff (\neg A \vee (\neg B \vee A)) \iff (\neg A \vee (A \vee \neg B)) \iff ((\neg A \vee A) \vee \neg B)$,

was immer wahr ist. Es liegt daher eine Tautologie vor.

2.) $\neg A \to (A \vee B) \iff \neg(\neg A) \vee (A \vee B) \iff (A \vee (A \vee B)) \iff ((A \vee A) \vee B) \iff A \vee B$,

was nicht immer wahr ist. Es liegt daher keine Tautologie vor.

3.) $(A \to B) \to B \iff (\neg A \vee B) \to B \iff \neg(\neg A \vee B) \vee B \iff (A \wedge \neg B) \vee B \iff$

$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee B) \iff A \vee B$, was nicht immer wahr ist. Daher liegt keine Tautologie vor.

b) Zu zeigen ist :

$$[A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)] \Leftrightarrow [A \wedge (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$$

Der Deutlichkeit Rechnung tragend, ist mit dieser Äquivalenz gemeint : Wenn eines der beiden Distributivgesetze gilt, so gilt auch das andere. Wenn also gilt

$$\forall \text{ Aussagevariablen } A, B, C : [A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)]$$

so gilt auch

$$\forall \text{ Aussagevariablen } A, B, C : [A \wedge (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$$

und umgekehrt.

1. Richtung : Zeige, dass wenn das Distributivgesetz

$$[A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)]$$

für beliebige Aussagevariablen A, B, C gilt, dass dann auch das Distributivgesetz

$$[A \wedge (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$$

für beliebige Aussagevariablen A, B, C gilt. Es ergibt sich folgende Schlusskette

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee A) \wedge ((A \wedge B) \vee C) \Leftrightarrow A \wedge ((A \wedge B) \vee C) \Leftrightarrow$$

$$A \wedge (C \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow A \wedge ((C \vee A) \wedge (C \vee B)) \Leftrightarrow (A \wedge (C \vee A)) \wedge (C \vee B) \Leftrightarrow$$
$$(A \wedge (A \vee C)) \wedge (C \vee B) \Leftrightarrow A \wedge (C \vee B),$$

was im 1. Schritt zu zeigen war.

2. Schritt : Zeige, dass wenn das Distributivgesetz

$$[A \wedge (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$$

für beliebige Aussagevariablen A, B, C gilt, dass dann auch das Distributivgesetz

$$[A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)]$$

für beliebige Aussagevariablen A, B, C gilt. Es ergibt sich folgende Schlusskette

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \Longleftrightarrow ((A \vee B) \wedge A) \vee ((A \vee B) \wedge C) \Leftrightarrow A \vee (C \wedge (A \vee B)) \Leftrightarrow$$

$$A \vee ((C \wedge A) \vee (C \wedge B)) \Leftrightarrow (A \vee (C \wedge A)) \vee (C \wedge B) \Leftrightarrow A \vee (B \wedge C),$$

was im 2. Schritt zu zeigen war.

Hinweis : Es ist bemerkenswert, dass man zur Definition eines distributiven Verbandes und damit eines Boolschen Verbandes nur die Gültigkeit eines der beiden Distributivgesetze fordern muss. Wie der Lösungsweg von b) zeigt, liegt dies ganz wesentlich an der Gültigkeit der beiden Verschmelzungs-/Absorptionsgesetze.

Aufgabe 4 : Verneinen Sie :

a) Alle Tigerkatzen sind gute Mäusejäger
b) Es gibt einen Matrosen, der schwimmen kann
c) Für alle x gilt : $x < 3$
d) Für alle x,y gilt : $x^2 + y^2 = 4$
e) $\forall t \in \mathbb{N} \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : \; (n < m \to |a_n| < \frac{1}{t})$.

Schreiben Sie die jeweilige Aussage und ihre Verneinung in der Quantorschreibweise auf.

Lösung zu Aufgabe 4 :

a) $\forall$ Tigerkatzen : Tigerkatze ist guter Mäusejäger

Verneinung : $\exists$ Tigerkatze : Tigerkatze ist kein guter Mäusejäger

b) $\exists$ Matrose : Matrose kann schwimmen

Verneinung : $\forall$ Matrosen : Matrose kann nicht schwimmen

c) $\forall x : x < 3$

Verneinung : $\exists x : x \geq 3$

d) $\forall x, y : x^2 + y^2 = 4$

Verneinung : $\exists x, y : x^2 + y^2 \neq 4$

e) $\forall t \in \mathbb{N} \; \exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : \; (n < m \to |a_n| < \frac{1}{t})$.

Verneinung :

$\exists t \in \mathbb{N} \; \forall m \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N} : \; \neg((n < m \to |a_n| < \frac{1}{t})) \iff$

$\exists t \in \mathbb{N} \; \forall m \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N} : \; \neg(\neg(n < m) \vee (|a_n| < \frac{1}{t}))) \iff$

$\exists t \in \mathbb{N} \; \forall m \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N} : \; (n < m) \wedge (|a_n| \geq \frac{1}{t}))).$