Übungsblatt-5 Lineare Algebra (Algebr. Strukturen)-Kap. 5 - Lösungen

Aufgabe 1 : Bestimmen Sie jeweils den ggT der folgenden Zahlenpaare

a) (1008,840) b) (481,1755) c) (2940,1617)

und stellen den ermittelten ggT jeweils als Vielfachsumme der beiden Zahlen auf zwei verschiedene Arten dar.

Lösung Aufgabe 1 :

a) - Lösungsweg 1 :

$1008 = 1 \cdot 840 + 168 \rightarrow$

$840 = 5 \cdot 168 \Rightarrow$

ggT(1008,840)=168 und $168 = 1 \cdot 1008 - 1 \cdot 840$ oder alternativ $168 = 1007 \cdot 840 - 839 \cdot 1008$, was man durch die Gleichungsaddition

$$\left.\begin{Bmatrix} 168 & = & 1 \cdot 1008 & - & 1 \cdot 840 \\ 0 & = & -840 \cdot 1008 & + & 1008 \cdot 840 \end{Bmatrix}\right. +$$

herausfindet.

Lösungsweg 2 :

$$\begin{pmatrix} 1008 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 840 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 168 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 840 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 168 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ggT } (1008, 840) = 168$$

und

$$\text{ggT } (1008, 840) = 168 = 1 \cdot 1008 - 1 \cdot 840.$$

Mittels der Vektoraddition

$$\begin{pmatrix} 168 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 168 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

findet man eine alternative Darstellung : $168 = (-4) \cdot 1008 + 5 \cdot 840$.

b) - Lösungsweg 1 :

$1755 = 3 \cdot 481 + 312 \rightarrow 481 = 1 \cdot 312 + 169 \rightarrow 312 = 1 \cdot 169 + 143 \rightarrow$

$169 = 1 \cdot 143 + 26 \rightarrow 143 = 5 \cdot 26 + 13 \rightarrow 26 = 2 \cdot 13 \Rightarrow$

ggT(481,1755)=13 und

$13 = 143 - 5 \cdot 26 = 143 - 5 \cdot (169 - 143) = 6 \cdot 143 - 5 \cdot 169 = 6 \cdot (312 - 169) - 5 \cdot 169 =$

$6 \cdot 312 - 11 \cdot 169 = 6 \cdot 312 - 11 \cdot (481 - 312) = 17 \cdot 312 - 11 \cdot 481 = 17 \cdot (1755 - 3 \cdot 481) - 11 \cdot 481 =$

$17 \cdot 1755 - 62 \cdot 481$ oder alternativ $13 = 1693 \cdot 481 - 464 \cdot 1755$, was man durch die Gleichungsaddition

$$\left.\begin{cases} 13 & = & 17 \cdot 1755 & - & 62 \cdot 481 \\ 0 & = & -481 \cdot 1755 & + & 1755 \cdot 481 \end{cases}\right\} +$$

herausfindet.

Lösungsweg 2 :

$$\begin{pmatrix} 1755 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 481 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 312 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 481 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 312 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 169 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 312 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 169 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 143 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 169 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 143 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 143 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ -62 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 26 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ -62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -37 \\ 135 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{ggT}\,(1755, 481) = 13 \text{ und ggT}\,(1755, 481) = 13 = 17 \cdot 1755 - 62 \cdot 481.$$

Eine alternative Darstellung findet man mittels Durchführung der Vektoraddition

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ -62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -37 \\ 135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -20 \\ 73 \end{pmatrix}$$

zu $13 = (-20) \cdot 1755 + 73 \cdot 481$.

c) - Lösungsweg 1 :

$2940 = 1 \cdot 1617 + 1323 \rightarrow 1617 = 1 \cdot 1323 + 294 \rightarrow 1323 = 4 \cdot 294 + 147 \rightarrow 294 = 2 \cdot 147 \Rightarrow$

ggT(2940,1617)=147 und

$147 = 1323 - 4 \cdot 294 = 1323 - 4 \cdot (1617 - 1323) = 5 \cdot 1323 - 4 \cdot 1617 =$

$5 \cdot (2940 - 1617) - 4 \cdot 1617 = 5 \cdot 2940 - 9 \cdot 1617$ oder alternativ $147 = 2931 \cdot 1617 - 1612 \cdot 2940$, was man durch die Gleichungsaddition

$$\left.\begin{cases} 147 & = & 5 \cdot 2940 & - & 9 \cdot 1617 \\ 0 & = & -1617 \cdot 2940 & + & 2940 \cdot 1617 \end{cases}\right\} +$$

herausfindet.

Lösungsweg 2 :

$$\begin{pmatrix} 2940 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1617 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1323 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1617 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1323 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 294 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1323 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 294 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 147 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 294 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 147 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{ggT}\ (2940, 1617) = 147 \text{ und }\ \text{ggT}\ (2940, 1617) = 147 = 5 \cdot 2940 - 9 \cdot 1617.$$

Eine alternative Darstellung erhält man mittels der Vektoraddition

$$\begin{pmatrix} 147 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 147 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

zu $167 = (-6) \cdot 2940 + 11 \cdot 1617$.

Aufgabe 2 :

a) Erstellen Sie jeweils die Additions- und Multiplikationstabelle für den Restklassenkörper $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Leiten Sie aus der Multiplikationstabelle ab, welchen Rest die Zahlen
(i) 49^{50} (ii) 128^{949} bei der Division durch 3 ergeben.

b) Erstellen Sie jeweils die Additions- und Multiplikationstabelle für den Restklassenkörper $\mathbb{Z}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Leiten Sie aus der Multiplikationstabelle ab, welchen Rest die Zahlen
(i) 52^{50} (ii) 128^{949} bei der Division durch 7 ergeben.

c) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

(i) $(4 \cdot 3 - 1) \cdot 4$ **(ii)** $\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{4} - 1)$ **(iii)** $\sum_{n=1}^{4} n$ **(iv)** $\sum_{n=1}^{4} n^2$

d) Bearbeiten Sie folgende Aufgaben/Fragen ohne eigens erstellte Additions- bzw. Multiplikationstabellen im Restklassenkörper $\mathbb{Z}_{11}$:

- Was ist -8 ? Was ist -3 ?
- Was ist $\frac{1}{7}$? Was ist $\frac{1}{10}$?
- Berechnen Sie $4 - 6 + \frac{3}{5}$

Lösung zu Aufgabe 2 :

Zu a) :

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

(i) : Die Zahl 49 entspricht in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der 1, weil 49 in der Restklasse [1] liegt. In $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gerechnet ergibt 1^{50} den Wert 1. Somit ergibt 49^{50} durch 3 geteilt den Rest 1.

(ii) : Die Zahl 128 entspricht in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der 2, weil 128 in der Restklasse [2] liegt. In $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gerechnet, gilt $2^1 = 2, 2^2 = 1, 2^3 = 2, 2^4 = 1, ..., 2^{949} = 2$. Somit ergibt 128^{949} durch 3 geteilt den Rest 2.

Zu b) :

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

x	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

(i) : Die Zahl 52 entspricht in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ der 3, weil 52 in der Restklasse [3] liegt. In $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ gerechnet, gilt

$$\begin{array}{lll} 3^1 = 3 & 3^7 = 3 & \ldots \\ 3^2 = 2 & 3^8 = 2 & \ldots \\ 3^3 = 6 & 3^9 = 6 & \ldots \\ 3^4 = 4 & 3^{10} = 4 & \ldots \\ 3^5 = 5 & 3^{11} = 5 & \ldots \\ 3^6 = 1 & 3^{12} = 1 & \ldots \end{array}$$

Es geht also in 6-er Schritten nach oben. Von der 50 in 6-er-Schritten nach unten gezählt, landet man bei der 2, was impliziert, dass 52^{50} durch 7 geteilt den Rest 2 ergibt.

(ii) : Die Zahl 128 entspricht in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dem Element 2, weil 128 in der Restklasse [2] liegt. In $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ gerechnet, gilt

$$\begin{array}{lll} 2^1 = 2 & 2^4 = 2 & \ldots \\ 2^2 = 4 & 2^5 = 4 & \ldots \\ 2^3 = 1 & 2^6 = 1 & \ldots \end{array}$$

Es geht also in 3-er Schritten nach oben. Von der 949 in 3-er-Schritten nach unten gezählt, landet man bei der 1, was impliziert, dass 128^{949} durch 7 geteilt den Rest 2 ergibt.

Zu c) :

- **(i) :** $(4 \cdot 3 - 1) \cdot 4 = (2 + 4) \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$
- **(ii) :** $\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{4} - 1) = 2 \cdot (4 + 4) = 2 \cdot 3 = 1$
- **(iii) :** $\sum_{n=1}^{4} n = 1 + 2 + 3 + 4 = 0$
- **(iv) :** $\sum_{n=1}^{4} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 4 + 1 = 0$

Zu d) :

- Was ist -8 in $\mathbb{Z}_{11}$? -8 in $\mathbb{Z}_{11}$ ist die Zahl, die zu 8 dazuzuaddieren ist, um 0 zu erhalten: -8 ist damit 3, weil $8 + 3 = 11$ durch 11 geteilt den Rest 0 ergibt.

  Was ist -3 in $\mathbb{Z}_{11}$? -3 in $\mathbb{Z}_{11}$ ist die Zahl, die zu 3 dazuzuaddieren ist, um 0 zu erhalten: -3 ist damit 8, weil $3 + 8 = 11$ durch 11 geteilt den Rest 0 ergibt.

- Was ist $\frac{1}{7}$ in $\mathbb{Z}_{11}$? $\frac{1}{7}$ in $\mathbb{Z}_{11}$ ist die Zahl, mit der 7 zu multiplizieren ist, um 1 zu erhalten: $\frac{1}{7}$ ist damit 8, weil $7 \cdot 8 \bmod 11$ gerade den Wert 1 ergibt.

Was ist $\frac{1}{10}$ in $\mathbb{Z}_{11}$? $\frac{1}{10}$ in $\mathbb{Z}_{11}$ ist die Zahl, mit der 10 zu multiplizieren ist, um 1 zu erhalten: $\frac{1}{10}$ ist damit 10, weil $10 \cdot 10 \bmod 11$ gerade den Wert 1 ergibt.

- Berechnen Sie $4 - 6 + \frac{3}{5}$. Erkenne hierzu
  - -6 entspricht der 5 in $\mathbb{Z}_{11}$, weil $6 + 5 \bmod 11 = 0$.
  - $\frac{1}{5}$ in $\mathbb{Z}_{11}$ ist 9, weil $5 \cdot 9 \bmod 11 = 1$.

  Rechne nun : $4 - 6 + \frac{3}{5} = 4 + 5 + 3 \cdot 9 = 4 + 5 + 5 = 3$

Aufgabe 3 : Führen Sie folgende Polynomdivisionen durch und bestimmen Sie gemäß Satz zur Polynomdivision (s. Kapitel 5.5.3, Seite 30) $s(x)$ sowie das Restpolynom $r(x)$

1. in $\mathbb{R}[x]$: **(i)** $(2x^4 + 2x^2 + x + 1) : (x + 2)$ **(ii)** $(4x^3 + 2x^2 + 1) : (2x^2 + 3x)$
2. in $\mathbb{Z}_2[X]$: **(i)** $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + 1)$ **(ii)** $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 1)$

Lösung Aufgabe 3 :

1. **(i) :** Es gilt $p(x) = 2x^4 + 2x^2 + x + 1, q(x) = x + 2$:

$$\begin{array}{c}
2x^4 + 2x^2 + x + 1 \quad : \quad (x+2) \quad = 2x^3 - 4x^2 + 10x - 19 \\
\pm 2x^4 \pm 4x^3 \\
- - - - - - - - \\
-4x^3 + 2x^2 + x + 1 \\
\mp 4x^3 \mp 8x^2 \\
- - - - - - - - \\
10x^2 + x + 1 \\
\pm 10x^2 \pm 20x \\
- - - - - - - - \\
-19x + 1 \\
\mp 19x \mp 38 \\
- - - - - - - - \\
39
\end{array}$$

Somit gilt

$$2x^4 + 2x^2 + x + 1 = (2x^3 - 4x^2 + 10x - 19) \cdot (x + 2) + 39$$

und damit $s(x) = 2x^3 - 4x^2 + 10x - 19, r(x) = 39$.

(ii) : Es gilt $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 1, q(x) = 2x^2 + 3x$:

$$\begin{array}{c}
4x^3 + 2x^2 + 1 \quad : \quad (2x^2 + 3x) \quad = 2x - 2 \\
\pm 4x^3 \pm 6x^2 \\
- - - - - - - - \\
-4x^2 + 1 \\
\mp 4x^2 \mp 6x \\
- - - - - - - - \\
6x + 1
\end{array}$$

Somit gilt

$$4x^3 + 2x^2 + 1 = (2x - 2) \cdot (2x^2 + 3x) + (6x + 1)$$

und damit $s(x) = 2x - 2, r(x) = 6x + 1$.

2. **(i) :** Es gilt $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, q(x) = x^2 + 1$:

$$\begin{array}{cccc} x^3 + x^2 + x + 1 & : & (x^2+1) & = x + 1 \\ \pm x^3 \pm x & & & \\ - - - - - - - - & & & \\ x^2 + 1 & & & \\ \pm x^2 \pm 1 & & & \\ - - - - - - - - & & & \\ 0 & & & \end{array}$$

Somit gilt

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1) \cdot (x^2+1) + 0$$

und damit $s(x) = x + 1, r(x) = 0$.

(ii) : Es gilt $p(x) = x^4 + x^2 + 1, q(x) = x + 1$:

$$\begin{array}{cccc} x^4 + x^2 + 1 & : & (x+1) & = x^3 + x^2 \\ \pm x^4 \pm x^3 & & & \\ - - - - - - - - & & & \\ x^3 + x^2 + 1 & & & \\ \pm x^3 \pm x^2 & & & \\ - - - - - - - - & & & \\ 1 & & & \end{array}$$

Somit gilt

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^3 + x^2) \cdot (x+1) + 1$$

und damit $s(x) = x^3 + x^2, r(x) = 1$.

Aufgabe 4 : Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben zur ggT-Bestimmung von Polynomen

1. Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_2[X]$, den ggT der Polynome $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ und $x^3 + x + 1$.
2. Bestimmen Sie in $\mathbb{R}[X]$ den ggT der Polynome $x^2 - 1, x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ und $x^4 + x^3 + x + 1$.

Lösung zu Aufgabe 4 :

1. Bestimme den **ggT** der beiden Polynome $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ und $x^3 + x + 1$. Mache dies mittels euklidischem Algorithmus für Polynome, indem fortgesetzt Polynomdivisionen durchgeführt werden. Erste Polynomdivision :

$$\begin{array}{cccc} x^7 + x^5 + x^3 + 1 & : & (x^3 + x + 1) & = \quad x^4 + x + 1 \\ \pm x^7 \pm x^5 \pm x^4 & & & \\ - - - - - - & & & \\ x^4 + x^3 + 1 & & & \\ \pm x^4 \pm x^2 \pm x & & & \\ - - - - - - & & & \\ x^3 + x^2 + x + 1 & & & \\ \pm x^3 \pm x \pm 1 & & & \\ - - - - - - & & & \\ x^2 & & & \end{array}$$

Zweite Polynomdivision :

$$\begin{array}{c} x^3+x+1 \quad : \quad x^2 \quad = \quad x \\ \pm x^3 \\ ------- \\ x+1 \end{array}$$

Dritte Polynomdivision :

$$\begin{array}{c} x^2 \quad : \quad (x+1) \quad = \quad x \\ \pm x^2 \pm x \\ ------- \\ x \end{array}$$

Vierte Polynomdivision :

$$\begin{array}{c} x+1 \quad : \quad x \quad = \quad 1 \\ \pm x \\ ------- \\ 1 \end{array}$$

Der ggT der beiden Polynome ist 1.

2. Bestimme den **ggT** der drei Polynome x^2-1, x^3+2x^2+2x+1 und x^4+x^3+x+1 gemäß Kapitel 5.5.5, Seite 32 sukzessive. Bestimme zunächst den ggT der beiden Polynome mit dem höchsten Grad. Mache dies mittels euklidischem Algorithmus für Polynome, indem fortgesetzt Polynomdivisionen durchgeführt werden. Erste Polynomdivision :

$$\begin{array}{c} x^4+x^3+x+1 \quad : \quad (x^3+2x^2+2x+1) \quad = \quad x-1 \\ \pm x^4 \pm 2x^3 \pm 2x^2 \pm x \\ ------------ \\ -x^3-2x^2+1 \\ \mp x^3 \mp 2x^2 \mp 2x \mp 1 \\ ------------ \\ 2x+2 \end{array}$$

Zweite Polynomdivision :

$$\begin{array}{c} x^3+2x^2+2x+1 \quad : \quad (2x+2) \quad = \quad \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x \\ \pm x^3 \pm x^2 \\ -------- \\ x^2+2x+1 \\ \pm x^2 \pm x \\ ------- \\ x+1 \end{array}$$

Dritte Polynomdivision :

$$\begin{array}{c} 2x+2 \quad : \quad (x+1) \quad = \quad 2 \\ \pm 2x \pm 2 \\ ------- \\ 0 \end{array}$$

Damit gilt

$$\mathbf{ggT}(x^4+x^3+x+1, x^3+2x^2+2x+1) = x+1.$$

Das dritte Polynom x^2-1 ist teilbar durch $x+1$, was impliziert, dass der ggT der drei vorgegebenen Polynome das Polynom $x+1$ ist.

Aufgabe 5 (*) :

1. Unterwerfen Sie das Wort **J O B** einer Verschiebechiffre mit dem Verschiebeparameter $t = 17$. Wie lautet der Geheimtext ?

2. Unterwerfen Sie das Wort **L O K** einer multiplikativen Chiffre mit dem Parameter $s = 19$. Wie lautet der Geheimtext ?

3. Entschlüsseln Sie den Geheimtext **I W R**, wenn Sie wissen, dass mit einer multiplikativen Chiffre mit dem Parameter $s = 5$ verschlüsselt wurde und $5 \cdot 21 = 1 \bmod 26$ gilt.

Lösung Aufgabe 5 (*) :

1. **J(9) O(14) B(1)** $\rightarrow 9 + 17 \bmod 26 = 0, 14 + 17 \bmod 26 = 5, 1 + 17 \bmod 26 = 18 \rightarrow$ **A(0) F(5) S(18)**.

2. **L(11) O(14) K(10)** $\rightarrow 11 \cdot 19 \bmod 26 = 1, 14 \cdot 19 \bmod 26 = 6, 10 \cdot 19 \bmod 26 = 8 \rightarrow$ **B(1) G(6) I(8)**.

3. **I(8) W(22) R(17)** $\rightarrow 8 \cdot 21 \bmod 26 = 12, 22 \cdot 21 \bmod 26 = 20, 17 \cdot 21 \bmod 26 = 19 \rightarrow$ **M(12) U(20) T(19)**.

Aufgabe 6 (*) : Bewegungen, die Figuren in sich selbst überführen, werden Symmetrien genannt. Diese Symmetrien bilden bezgl. der Hintereinanderausführung der einzelnen Bewegungen eine Gruppe. Als Beispiel einer Symmetrie soll bei dieser Aufgabe das Rechteck **A B C D**

```
D  –  – – – – – – – – – – –   |   – – – – – – – – – – –  –  C
   |                          |                          |
   |                          |                          |
   –  – – – – – – – – – – –   –   – – – – – – – – – – –  –  S2
   |                          |                          |
   |                          |                          |
A  –  – – – – – – – – – – –   |   – – – – – – – – – – –  –  B
                              S1
```

betrachtet werden. Folgende Bewegungen, die das Rechteck in sich selbst überführen sind möglich

- **I** : Identische Bewegung, die das Rechteck unverändert lässt.
- **D** : Drehung des Rechtecks um 180°.
- S_1 : Spiegelung des Rechtecks an der Achse S_1.
- S_2 : Spiegelung des Rechtecks an der Achse S_2.

Stellen Sie die Verknüpfungstafel für die Hintereinanderausführung der 4 Bewegungen in der Form

$\circ$	I	D	S_1	S_2
I				
D				
S_1				
S_2				

und überzeugen Sie sich, dass diese symmetrische Gruppe tatsächlich eine Gruppe bildet. Ist die Gruppe kommutativ ?

Lösung Aufgabe 6 (*) : Es ergibt sich folgende Verknüpfungstabelle

$\circ$	I	D	S_1	S_2
I	I	D	S_1	S_2
D	D	I	S_2	S_1
S_1	S_1	S_2	I	D
S_2	S_2	S_1	D	I

Aus der Verknüpfungstabelle leiten sich folgende Feststellungen ab

- **I** ist das neutrale Element der Gruppe.
- Jede Bewegung ist zu sich selbst invers.
- Es gilt das Assoziativgesetz.
- Es gilt das Kommutativgesetz - die Tabelle ist symmetrisch, was bedeutet, dass es sich um eine kommutative Gruppe handelt.

Bemerkung : Diese Gruppe der Rechteckbewegungen witrd als die **Kleinsche Vierergruppe** bezeichnet. Analog kann man die Bewegungsgruppe für ein gleichseitiges Dreieck definieren. In diesem Fall ergibt sich eine Gruppe mit 6 Elementen. Weitergehend kann man solche Symmetriegruppen bezgl. aller regelmäßigen n-Ecke betrachten. Die Anzahl der Operationen und die Anzahl der möglichen Verknüpfungsergebnisse werden hierbei immer größer.

Wer sich mit solchen Gruppen und weitergehender Gruppentheorie beschäftigen möchte, sei auf das kleine Büchlein

- Elementar(st)e Gruppentheorie, Tobias Glosauer, Springer Spektrum-Verlag

verwiesen.