6. Vektoren und Vektorräume

#Mathe1 #Mathe

Themen

Vektorraumdefinition

Definition

Ein Vektorraum V mit Skalaren aus eine (Skalar-)Körper K besteht aus einer kommutativen Gruppe $(V, +)$ und einer skalaren Multiplikation '$\cdot$': $K \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, so dass für alle $v, w \in V$ und für alle $\lambda, \mu \in K$ gilt:

1. $\lambda(\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$
2. $1 \cdot v = v$
3. $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
4. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

Ein Vektorraum mit (Skalar-)Körper K wird K-Vektorraum über K genannt. Ist $K = \mathbb{R}$, so wird von einem reellen Vektorraum gesprochen, ist $K = \mathbb{C}$, so wird von einem komplexen Vektorraum gesprochen.

Die *Elemente eines Vektorraumes* werden als *Vektoren* bezeichnet und angesprochen. Was im Einzelfall ein Vektor ist, wird von der Art des Vektorraumes bestimmt.

Beispiele für Vektorräume über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$

- die Menge der Lösungen eines linearen homogenen Gleichungssystem - hier ist ein Vektor eine Lösung eines linearen homogenen Gleichungssystems
- die Menge fest dimensionierter Matrizen - hier ist ein Vektor eine Matrix
- die menge magischer Quadrate der Ordnung n (Spaltensumme für alle Spalten = Zeilensumme für alle Zeilen) - hier ist ein Vektor ein magisches Quadrat
- die Menge der reellwertigen Funktionen - hier ist ein Vektor eine Funktion
- die Menge aller Polynome $\mathbb{R}[x]$ - hier ist ein Vektor ein Polynom
- die Menge der unendlichen Zahlenfolgen mit reellwertigen Folgengliedern - hier ist ein Vektor eine Zahlenfolge

---

Der Vektorraum K^n

Vektoren als Elemente der Vektorräume $R^n, n \in \mathbb{N}$ werden zur Definition der Vektorarithmetik in Komponentenform geschrieben:

Ein Vektor a im $\mathbb{R}^2$ wird geschrieben als $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Ein Vektor a im $\mathbb{R}^3$ wird geschrieben als $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Ein Vektor a im $\mathbb{R}^n$ wird geschrieben als $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$

Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ ist die komponentenweise Darstellung voll und ganz kompatibel mit der 2- oder 3-dimensionalen Vorstellung von einem Vektor in der Ebene bzw. im Raum, der durch Richtung und Länge gekennzeichnet ist.

Verschiedene Definitionen

Skalarmultiplikation und addition zweier Vektoren

Definition

Ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ kann mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden. Es soll gelten

$$\lambda \cdot a = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \dots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ können addiert werden. Es soll gelten:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind die beiden Definitionen voll und ganz kompatibel mit der 2- oder 3-dimensionalen Vorstellung von Vektoren als gerichtete Größen mit einer definierten Länge und den Operationen mit diesen in der Ebene bzw. im Raum (Addition von zwei Vektoren, Vervielfachung der Länge eines Vektors).

Nullvektor und iverser Vektor

Definition

Der Vektor $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ wird als *Nullvektor* bezeichnet.

Gegeben ist der Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_3 \end{pmatrix}$. Dann wird der Vektor $-a = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{pmatrix}$ als der zum Vektor a *inverse Vektor* bezeichnet. Man bezeichnet den Vektor $-a$ mitunter auch als Gegenvektor zu a.

Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind beide Definitionen voll und ganz kompatibel mit der 2- oder 3-dimensionalen Vorstellung dieser Vektoren in der Ebene bzw. im Raum.

Erkenntnis:
Die kommutative Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$ bildet mit der Multiplikation mit reellen Skalaren einen reellen Vektorraum bzw. einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

Linearkombination

Definition

Seien die Vektoraum $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ sowie die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann nennt man den Ausdruck $\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \cdots + \lambda_3 \cdot a_3$ eine *Linearkombination* der Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Die bisher betrachteten Definitionen und Sätze sind ohne Abstriche und Besonderheiten auf beliebige Körper K erweiterbar.

Erweiterung 1

$K = \mathbb{C}$: Die kommutative Gruppe $(\mathbb{C}^n, +)$ bildet zusammen mit der Multiplikation mit komplexwertigen Skalaren einen komplexen Vektorraum bzw. einen Vektorraum über denn komplexen Zahlen, dem Körper $\mathbb{C}$.

Die Körper $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ sind Körper mit unendlich vielen Elementen. Demzufolge haben auch die hierauf basierenden Vektorräume K^n unendlich viele Elemente.

Ergänzung 2

$K = \mathbb{Z}_p$ (p ist eine Primzahl): Die kommutative Gruppe $(Z_p^n, +)$ bildet zusammen mit der Multiplikation mit Zahlen $\in \mathbb{Z}_p$ einen $\mathbb{Z}_p$-Vektorraum bzw. einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_p$.

Die Körper $\mathbb{Z}_p$ sind endliche Köprer, so dass auch die hierauf aufgebauten Vektorräume endlich viele Elemente haben.

Definition Unterräume

Definition

Sei V eine K-Vektorraum und $U \subseteq V$. Ist U mit den Verknüpfungen von V selbst wieder ein K-Vektorraum, so heißt U *Untervektorraum* (oder auch Unterraum, bzw. Teilraum) von V.

Satz

Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ eine nichtleere Teilmenge von V. Dann ist U genau dann ein Untervektorraum von V, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $u + v \in U$ für alle $u, v \in U$
2. $\lambda u \in U$ für alle $\lambda \in K, u \in U$

V sein ein Vektorraum, U_1, U_2 seien zwei Unterräume von V. Dann gilt:

- $U_1 \cap U_2$ ist wiederum ein Unteraum von V
- $U_1 \cup U_2$ ist i.a. kein Unterraum von V

Nebenklasse

Definition

Sein V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum von V. Für ein $v \in V$ nennt man die Menge

$$v + U = \{v + u : u \in U\}$$

die Nebenklase von U durch v. Der Vektor v ist ein *Repräsentant* der Nebenklasse. Der Vektor v wird auch *Führer der Nebenklasse* oder auch *Nebenklassenführer* genannt. Die Nebenklasse U durch 0, nämlich $0 + U = U$ ist die triviale Nebenklasse.

Erkenntnis 1:
Eine allgemeine Gerade $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ist eine Nebenklasse der duch den Nullpunkt verlaufenden Gerade, die einen Vektorraum und damit einen Unterraum darstellt, durch den Stützvektor der Geraden. Analog ist eine allgemeine Ebene im $\mathbb{R}^3$ eine Nebenklasse der durch den Nullpunkt verlaufenden Ebene, die einen Vektorraum und damit einen Unterraum darstellt, durch den Stützpunkt der Ebenen.

Erkenntnis 2:
Durch die Relation $v_1 \sim V_2 \iff v_1 + U = v_2 + U$ wird auf dem Vektorraum V eine Äquivalenzrelation definiert und es gilt $[v] = v + U$ für alle $v \in V$.

Begründung: Es gilt

1. *Reflexivität:* Für alle $v \in V : v \sim v \iff v + U = v + U$
2. *Symmetrie:* Für alle $v_1, v_2 \in V : v_1 \sim v_2 \implies v_2 \sim v_1$
3. *Transitivität:* Für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$

$$v_1 \sim v_2 \wedge v_2 \sim v_3 \iff v_1 + U = v_2 + U = v_3 + U \implies v_1 + U = v_3 + U \implies v_1 \sim v_3$$

4. $w \in [v] \implies w \sim v \iff w + U = v + U \iff w - v \in U \iff w \in v + U$

Satz

Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum von V. Dann sind für $v_1, v_2 \in V$ die beiden Nebenklassen

$$v_1 + U \text{ und } v_2 + U$$

entweder disjunkt oder gleich.

Beweis:

Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt der Satz aus der Tatsache, dass zwei Äquivalenzklassen entweder disjunkt oder gleich sind.

Faktorräume

Definition

Sei V ein Vekorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum vin V. Dann ist die Menge der Nebenklassen durch die Menge der Elemente von V $\{v + U : v \in V\} =: V/U$ der sogenannte *Faktorraum von V nach U*.

Satz

Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum von V. Dann ist der Fakorraum V/U vermöge der folgendermaßen definierten Operationen

1. $(v_1 + U) + (v_2 + U) = v_1 + v_2 + U$ sowie
2. $r \cdot (v + U) = r \cdot v + U$

   ein K-Vektorraum. Das *neutrale Element* in diesem Vektorraum ist die Nebenklasse **U**.

Bemerkung:
Es ist sicherzustellen, dass die so definierten Operationen wohldefiniert sind, d.h. es muss irrelevant sein, welche Vertreter der jeweiligne Äquivalenzklassen in Form der Nebenklassen zur Durchführung der Operation ausgewählt werden.

Plausibilisierung:
Hierzeu werde eine durch den Ursprung verlaufende *Gerade* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ betrachtet, sowie verschieden Nebenklassen in Form einer, zu dieser *Geraden parallele Geraden* im $\mathbb{R}^2$. Bei der Addition zweier Geraden ist es irrelevant, welcher Stützvektor bei jeder der beiden Geraden verwendet wird **oder** es sei betrachtet eine durch den Urpsrung verlaufende *Ebene* $U \subseteq \mathbb{R}^3$, sowie verschiedene Nebenklassen in Form einer, zu dieser *Ebenen parallele Ebenen* im $\mathbb{R}^3$. Bei der Addition zweier Ebenen ist es wiederrum irrelevant, welcher Stützvektor bei jeder der beiden Ebenen verwendet wird.

Skalarprodukt — Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Definition

Das Skalarprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^n$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ berechnet sich zu } u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot v_k$$

Spezialfälle:

- Das Skalarprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \text{ berechnet sich zu } u \cdot v = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

- Das Skalarprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ berechnet sich zu $u \cdot v = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$

Satz

Für das Skalarprodukt gelten die folgenden Rechenregeln $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$:

- $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ (Skalarprodukt ist **(distributiv) linear**)
- $(\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v)$ (Skalarprodukt ist **linear**)
- $u \cdot v = v \cdot u$ (Skalarprodukt ist **symmetrisch**)
- $u \cdot u < 0$ sowie $u \cdot u = 0 \iff u = 0$ (Skalarprodukt ist **positiv definit**)

Ein mit einem Skalarprodukt versehener reeller Vektorraum, d.h. ein mit einem Skalarprodukt versehener Vektorraum über dem Zahlkörper $\mathbb{R}$, wird allgemein auch mit dem Begriff **euklidischer Vektorraum** bezeichnet.

Länge / Norm / Betrag eines Vektors

Definition

Die Länge (oder Norm oder Betrag) eines Vektors v ist die Quadratwurzel aus $v \cdot v$:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

Bemerkung: Geometrisch ergibt sich die Länge eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ bereits mittels Anwendung des Satzes des Pythagoras. Dort wäre die Definition eher als Satz zu klassifizieren. Diese Anschauungshilfe fehlt in Räumen höherer Dimensionen.

Definition

Ein *Einheitsvektor* u ist ein Vektor mit der Länge 1 Es gilt:

$$u \cdot u = 1$$

Normierung eines Vektors auf die Länge 1:

Man teile einen Vektor $v (\neq 0)$ durch seine Länge.

Dann ist $u = \frac{v}{\|v\|}$ ein Einheitsvektor in die selbe Richtung wie v.

Mit der so definierten Norm $\|u\|$ für $u \in \mathbb{R}^n$ wird der $\mathbb{R}^n$ zu einem sogenannten *nomierten Vektorraum*. Die Norm besitzt folgende Eigenschaften:

1. $\|k \cdot u\| = |k| \cdot \|u\|$ für $u \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$
2. $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|, u, v \in \mathbb{R}^n$ (Dreiecksgleichung)
3. $\|u\| = 0 \iff u = 0$

Die mittels Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definierte Norm ist ein Spezialfall $(p = 2)$ der **p-Norm** auf dem $\mathbb{R}^n$, die als

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } u \in \mathbb{R}^n$$

definiert ist. Die **2-Norm** wird auch als **euklidische Norm** bezeichnet. Wenn nichts anderes vorgegeben ist, gilt in der Vorlesung $\| \dots \|_2 = \| \dots \|$.

Man kann allgemein beweisen, dass gilt

$$\lim_{p \to \infty} \|u\|_p = \max_{i=1,\dots,n} |u_i| =: \|u\|_\infty$$

Eine Abbildung $\mathbb{R}^n \mathbb{R}_0^+$ mit den Eigenschaften 1 - 3 wird allgemein als **Norm** bezeichnet.

Skalarprodukt — Spezialfälle

Satz

Für zwei Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ bzw. } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gilt:

$$\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(u, v) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \text{ bzw. } \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(u, v) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Beweis (für $\mathbb{R}^3$):
Betrachtet sei das Dreieck, das von den Vektoren u und v ausgehend vom Ursprung gebildet wird. Das Dreieck besitzt die Seitenlänge $\|u\|, \|v\|, \|u - v\|$.
Nach dem Cosinussatz der ebenen Trigonometrie gilt:

$$
\begin{gathered}
\|u-v\|^2 \\
=\|u\|^2+\|v\|^2-2 \cdot\|u\| \cdot\|v\| \cdot \cos (u, v) \iff 2 \cdot\|u\| \cdot\|v\| \cdot \cos (u, v) \\
=\|u\|^2+\|v\|^2-\|u-v\|^2 \\
=u_1^2+u_2^2+u_3^2+v_1^2+v_2^2+v_3^2-\left(u_1-v_1\right)^2-\left(u_2-v_2\right)^2-\left(u_3-v_3\right)^2 \\
=2 u_1 v_1+2 u_2 v_2+2 u_3 v_3
\end{gathered}
$$

Hinweis:
Der Beweis ergibt sich allein aus der bekannten Geometrie der Fläche und des Raumes. Die Länge einer Dreieckseite, ausgedrückt durch die Koordinaten der beiden Endpunkte, resultiert allein aus der Anwendung des Satzes des Pythagoras.

Somit ergibt sich der folgende

Satz

In den Vektorräumen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ gilt für jeweils zwei Vektoren v, w:

$$
v \cdot w=\|v\| \cdot\|w\| \cdot \cos (v, w)
$$

was die folgenden Erkenntnisse rechtfertigt.

Winkel zwischen zwei Vektoren

Definition

Rechter Winkel:

Das Skalarprodukt $v \cdot w$ ist 0, falls v im rechten Winkel zu w steht.

Kosinusformel:

Sind v und w Vektoren ungleich 0, dann gilt:

$$
\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot\|w\|}=\cos \varphi
$$

Orthogonalität:

Die Vektoren v und w sind orthogonal zueinander, wenn gilt $v \cdot w=0$

Ungleichung von Cauchy und Schwarz:

Es gilt $|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

Mit der *Kosinusformel* kann amn den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen.
Beispiel:

- $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- *Skalarprodukt:* $v \cdot w = 4 + 6 = 10$
- *Länge von v ist:* $\|v\| = \sqrt{20}$
- *Länge von w ist:* $\|w\| = \sqrt{10}$
- *Kosinus des Winkels:* $\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\alpha = 45°$
  Der Winkel zwischen zwei Vektoren kann damit Werte zwischen $0°$ und $180°$ annehmen.

Weitere Formeln

⚠ Gleichungen

Geradengleichung $g : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$

Ebenengleichungen

- Parameterform: $E : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$
- Normalenform: $E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$
- Koordinatenform: $E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Skalarprodukt — Abbildung

Zusammenfassung 'Längen/Beträge/Normen und Skalarprodukte'

1. für alle Dimensionen, d.h. $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$:
   1. *Skalarprodukt* $v \cdot w$ wird durch **Multiplizieren der Komponenten** und anschließendes **Aufsummieren** berechnet
   2. unter der *Länge/Betrag/Norm* $\|v\|$ ist, wenn nichts anderes vereinbart ist, die $\| \,.\, \|_2$ -Norm, d.h. die **Quadratwurzel** aus $v \cdot v$ zu verstehen
   3. der Vektor $\frac{v}{\|v\|}$ ist der zu v gehörige *Einheitsvektor*, der die Länge / den Betrag 1 hat.

4. v und w **orthogonal zueinander** $\iff v \cdot w = 0$
5. *Cauchy und Schwarz Ungleichung:* $|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ oder anders

$$\left|\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. **Spezialfall** $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$:
   1. *Winkel zwischen den Vektoren* v *und* w: $\cos(v, w) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$

Der Begriff der **Orthogonalität** ist **elementar wichtig**.

Verallgemeinerte Skalarprodukte

Das zuvor definierte Standard-Skalarprodukt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann mit kleinen Abwandlungen auf ein Skalarprodukt $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ verallgemeinert werden, indem für $u, v \in \mathbb{C}^n$ definiert wird

$$< u, v >= \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \overline{v}_i$$

Mit dieser Definition gelten folgende Gesetzmäsigkeiten für $u, v, w \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $< u, v + w >=< u, v > + < u, w >$ sowie $< u + v, w >=< u, w > + < v, w >$
2. $< u, v >=< v, u >$ (*hermitesch*)
3. $< \lambda \cdot u, v >= \lambda \cdot < u, v >$ sowie $< u, \lambda \cdot v >= \overline{\lambda} \cdot < u, v >$ (*semilinear*)
4. $< u, u >\in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sowie $< u, u >= 0 \iff u = 0$ (Skalarprodukt ist *positiv definit*)

Ein solches *semilineares* Skalarprodukt wird als *hermitesch* bezeichnet und ein Vektorraum, versehen mit einem solchen *hermiteschen* Skalarprodukt wird als *unitärer Vektorraum* bezeichnet (analog der Bezeichung **euklidischer Vektorraum**).
Die Schreibweise $<, >$ wird ganz allgemein in Vektorräumen zur Definition sogenannter *Bilinearformen* verwendet.
Wichtig ist, mitzunehmen, dass es sich hierbei um Abbildungen, in dem einem Vektorraum zugrundeliegender Zahlkörper handelt und ähnlichen Gesetzmäsigkeiten gehorcht wie dem **Standard-Skalarprodukt**.