**Seite 14 : Lösung der Aufgaben**

**Übung 1 :**

– $A$ = Menge aller Schüler einer Stufe

$\forall_{a \in A} : (a,a) \in R \iff$

a und a gehen in die gleiche Schulklasse ✓

$\implies$ $R$ ist reflexiv

$\forall_{a,b \in A} : (a,b) \in R \iff$

a und b gehen in die gleiche Klasse

$\implies$ b und a gehen in die gleiche Klasse

$\iff (b,a) \in R \implies$ $R$ ist symmetrisch

$\forall_{a,b,c \in A} : (a,b) \in R,\ (b,c) \in R \iff$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{a und b gehen in die gleiche Klasse} \\ \text{b und c gehen in die gleiche Klasse} \end{array} \right\}$

$\implies$ a und c gehen in die gleiche Klasse $\implies$ $R$ ist transitiv

Damit ist die gegebene Relation $R$ auf die Menge $A$ eine Äquivalenzrelation.

- $A = \{1,2,3,4\}$

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$

Eigenschaften von $R$

— $R$ ist reflexiv

— $R$ ist symmetrisch

— $R$ ist nicht transitiv: Denn

$(1,2) \in R$, $(2,3) \in R$ aber

$(1,3) \notin R$

Somit ist $R$ keine Äquivalenz-relation.

Übung 2:

(1) $aRb \Longleftrightarrow a \cdot b$ ist gerade Zahl

Die gegebene Relation ist nicht reflexiv und damit keine Äquivalenz-relation

(2) $aRb \Longleftrightarrow a \cdot b$ ist nichtnegative Zahl

- $\forall a \in \mathbb{Z}: aRa \Leftrightarrow a \cdot a = a^2 \geq 0$ ✓ (damit reflexiv)

- $\forall a,b \in \mathbb{Z}: aRb \Leftrightarrow a \cdot b \geq 0$
$\Longleftrightarrow b \cdot a \geq 0$
$\Longleftrightarrow bRa$

(damit symmetrisch)

- Es gilt:

$1 R 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 0 \geq 0$ und

$0 R (-1) \Leftrightarrow 0 \cdot (-1) \geq 0$ aber

$1 \not R (-1)$, weil $1 \cdot (-1) < 0$

(damit nicht transitiv)

(3) $a R b \Leftrightarrow a \cdot b$ ist nichtnegative Zahl

$(a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$

- Reflexivität, Symmetrie sind erfüllt analog zu (c)

- Weiter gilt:

$$\left.\begin{array}{l} a R b \Leftrightarrow a \cdot b \geq 0 \\ b R c \Leftrightarrow b \cdot c \geq 0 \end{array}\right\} \cdot$$

$$\underbrace{(a \cdot b) \cdot (b \cdot c)} \geq 0$$

$$a \cdot b^2 \cdot c \geq 0 \mid : b^2$$

$$a \cdot c \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$a R c$$

$\Rightarrow$ Damit ist $R$ transitiv

Es gibt 2 Äquivalenzklassen

$[1] = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und

$[-1] = \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

**Seite 16 – Erläuterung Beispiel 1:**

Betrachte die Relation "$\leq$" auf die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.

Reflexivität: $a \in \mathbb{N} \Longrightarrow$

$a \leq a$ ✓

Antisymmetrie: $a, b \in \mathbb{N}$

$a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$ ✓

Transitivität: $a, b, c \in \mathbb{N}$

$a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ ✓

**Seite 16 – Erläuterung Beispiel 2 :**

Betrachte die Relation "$<$" auf die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.

Asymmetrie: $a, b \in \mathbb{N}$

$a < b \Longrightarrow b \not< a$ ✓

Transitivität: $a, b, c \in \mathbb{N}$

$a < b$ und $b < c \Longrightarrow a < c$ ✓

**Seite 23 – Lösung der Aufgabe :**

a) f ist injektiv :

$n_1 \neq n_2 \Rightarrow n_1 + 1 \neq n_2 + 1 \Leftrightarrow$

$f(n_1) \neq f(n_2)$

f ist nicht surjektiv, weil es kein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß gilt $f(n) = 1$

b) f ist injektiv : s. a)

f ist surjektiv : Sei $a \in \mathbb{Z}$.

Wähle $a - 1$ und bilde

$f(a-1) = (a-1) + 1 = a$. Damit hat jede ganze Zahl eine ganze Zahl als Urbild von f. Damit ist f auch bijektiv.

c) f ist nicht injektiv : So gilt

$(1,2) \neq (2,1)$ aber $f(1,2) = f(2,1)$

$= 1+2 = 3$

f ist nicht surjektiv, weil es kein Paar $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $f(a,b) = 1$ gibt

d) f ist nicht injektiv, weil $f(1) = f(-1)$.

f ist nicht surjektiv, weil $-1$ kein Urbild besitzt.

e) f ist nicht injektiv (s. d))

f ist surjektiv : $b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \Rightarrow$

$f(\pm\sqrt{b}) = b$

## Seite 25 : Erläuterung der Beispiele :

Beispiel 1:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$Q = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

Betrachte die Abbildung f

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow Q \\ n \longrightarrow n^2 \end{array} \right\}$$

Diese Abbildung ist bijektiv, was beweist, daß es gleichviele natürliche Zahlen wie Quadratzahlen gibt.

Beispiel 2:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Betrachte die Abbildung f

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ 1 & \longmapsto & 0 \\ 2 & \longmapsto & -1 \\ 4 & \longmapsto & -2 \\ 6 & \longmapsto & -3 \\ \vdots & & \\ 3 & \longmapsto & 1 \\ 5 & \longmapsto & 2 \\ 7 & \longmapsto & 3 \\ \vdots & & \end{array} \right.$$

D.h. $2k \mapsto -k$ $(k \in \mathbb{N})$

D.h. $2k+1 \mapsto k$ $(k \in \mathbb{N})$

**Diese Abbildung ist bijektiv, was impliziert, dass die Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist wie die Menge der ganzen Zahlen.**