Actuariat 3 - Modélisations avancées en assurance vie

Chapitre 2 - Risques viagers

A. Matoussi

Année 2018-2019

Table des matières

1 Calcul de valeurs actuelles probables

1.1 Valeur actuelle probable

Pour une série de flux connus $F_0, F_1, \ldots$, une série de conditions de paiements aléatoires $C_0, C_1, \ldots$ et un facteur d'actualisation $0 < v < 1$ (hypothèse de constance du taux d'intérêt), la valeur actuelle des flux est

$$VA = \sum_{k=0}^{\infty} F_k v^k 1_{C_k}.$$

et la valeur actuelle probable est

$$VAP = E(VA) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k v^k P(C_k).$$

Des exemples sont donnés ci-dessous : ê

— figure 1, $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = \cdots = r$, C_i est la condition 'être en vie en $t = i$'.

— figure 2, $F_0 = 0$, pour $i \neq k, F_i = 0$ et $F_k = c$, C_k est la condition 'être en vie pour la $k$ème période'.

— figure 3, $F_0 = 0$, pour $i \neq k, F_i = 0$ et $F_k = c$, C_k est la condition 'être en décédé pour la $k$ème période'.

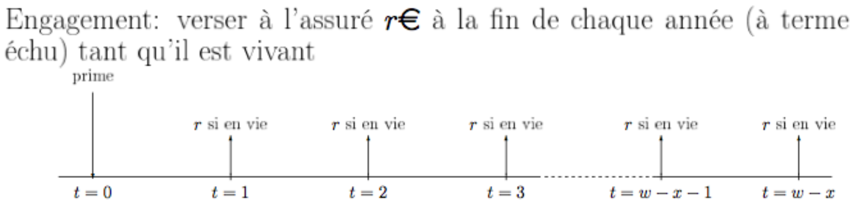


FIGURE 1 – Exemple de flux d'une rente

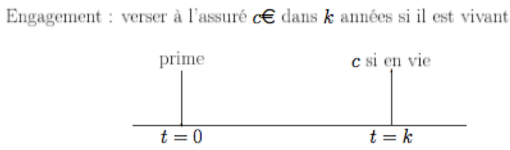


FIGURE 2 – Exemple de flux d'une capital différé

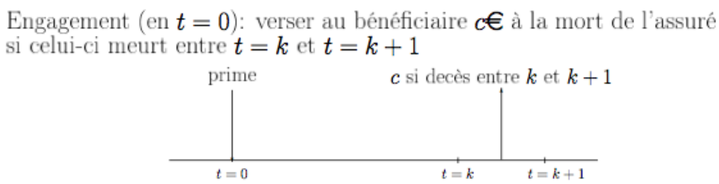


FIGURE 3 – Exemple de flux d'un capitaèl décès

1.2 Définition des rentes viagières

1.2.1 Rente viagière à termes anticipés

Une rente viagière à termes anticipés est une série annuelle de flux de 1 euro jusqu'au décès de l'individu à commencer d'aujourd'hui. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$VA(rente) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k 1_{T_x > k}, \quad VAP(rente) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \ddot{a}_x. \tag{1}$$

1.2.2 Rente viagière à termes échus

Une rente viagière à termes échus est une série annuelle de flux de 1 euro jusqu'au décès de l'individu à partir de la première année. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$VA(rente) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k 1_{T_x > k}, \quad VAP(rente) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x = a_x. \tag{2}$$

La relation entre rente anticipée et à terme est simplement

$$a_x = \ddot{a}_x - 1$$

1.2.3 Rente viagière différée et temporaire

Une rente viagière différée et temporaire est une série annuelle de flux de 1 euro jusqu'au décès de l'individu dont les versements ne peuvent avoir lieu qu'entre $[s, s+t[$. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$VA(difftemp) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^k 1_{T_x > k}, \quad VAP(difftemp) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^k {}_k p_x = {}_{s|t}\ddot{a}_x. \tag{3}$$

La rente peut être seulement temporaire de t années si $s = 0$ et notée ${}_{|t}\ddot{a}_x = {}_{0|t}\ddot{a}_x$, ou seulement différé de s années si $t = \infty$ et notée ${}_{s|}\ddot{a}_x = {}_{s|\infty}\ddot{a}_x$.

A termes échus (paiements entre $]s, s+t]$), on obtient de manière analogue

$${}_{s|t}a_x = \sum_{k=s+1}^{s+t} v^k {}_k p_x. \tag{4}$$

La rente peut être seulement temporaire de t années si $s = 0$ et notée ${}_{|t}a_x = {}_{0|t}a_x$, ou seulement différé de s années si $t = \infty$ et notée ${}_{s|}a_x = {}_{s|\infty}a_x$.

1.3 Exemple manuel à l'aide des tables

A partir du tableau suivant

x	p_x	q_x	k	${}_k p_{60}$	q_{60+k}
60	0.9843	0.01566	0	1	0.01566
61	0.9831	0.01686	1	0.9843	0.01686
62	0.9819	0.01812	2	0.9677	0.01812
63	0.9806	0.01943	3	0.9502	0.01943
64	0.9794	0.02064	4	0.9317	0.02064
65	0.978	0.02202	5	0.9125	0.02202
66	0.9766	0.02339	6	0.8924	0.02339
67	0.9747	0.02532	7	0.8715	0.02532
68	0.9726	0.02737	8	0.8495	0.02737
69	0.9703	0.02965	9	0.8262	0.02965

Déterminez les annuités suivantes ${}_{0|3}\ddot{a}_{60}$, ${}_{2|3}\ddot{a}_{60}$ et ${}_{5|3}\ddot{a}_{60}$ et les équivalents à termes échus pour $v = 0.975$.

On sélectionne les bons termes du tableau précédent

$${}_{0|3}\ddot{a}_{60} = \sum_{k=0}^{0+3-1} v^k {}_k p_{60} = {}_0 p_{60} + v {}_1 p_{60} + v^2 {}_2 p_{60}$$

$$ {}_{2|3}\ddot{a}_{60} = \sum_{k=2}^{2+3-1} v^k {}_k p_{60} = v^2 {}_2p_{60} + v^3 {}_3p_{60} + v^4 {}_4p_{60} $$

$$ {}_{5|3}\ddot{a}_{60} = \sum_{k=5}^{5+3-1} v^k {}_k p_{60} = v^5 {}_5p_{60} + v^6 {}_6p_{60} + v^7 {}_7p_{60} $$

$$ {}_{0|3}a_{60} = \sum_{k=1}^{0+3} v^k {}_k p_{60} = v_1 p_{60} + v^2 {}_2p_{60} + v^3 {}_3p_{60} $$

$$ {}_{2|3}a_{60} = \sum_{k=3}^{2+3} v^k {}_k p_{60} = v^3 {}_3p_{60} + v^4 {}_4p_{60} + v^5 {}_5p_{60} $$

$$ {}_{5|3}a_{60} = \sum_{k=6}^{5+3} v^k {}_k p_{60} = v^6 {}_6p_{60} + v^7 {}_7p_{60} + v^8 {}_8p_{60} $$

On trouve

${}_{0\|3}\ddot{a}_{60}$	${}_{2\|3}\ddot{a}_{60}$	${}_{5\|3}\ddot{a}_{60}$	${}_{0\|3}a_{60}$	${}_{2\|3}a_{60}$	${}_{5\|3}a_{60}$
2.8797	2.642682	2.300662	2.760411	2.526727	2.190385

1.4 Définition des capitaux au décès

1.4.1 Capital au décès

Un capital au décès est le versement de 1 euro en fin d'année du décès. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$ VA(capdec) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} 1_{k+1 \geq T_x > k}, \quad VAP(capdec) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x \times q_{x+k} = A_x. \qquad (5) $$

Par définition, le capital est à terme échu.

1.4.2 Capital au décès avec différé et temporaire

Un capital au décès avec différé et temporaire est le versement de 1 euro en fin d'année du décès seulement si le décès a lieu entre $[s, s+t[$. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$ VA(capdec) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^{k+1} 1_{k+1 \geq T_x > k}, \quad VAP(capdec) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^{k+1} {}_kp_x \times q_{x+k} = {}_{s|t}A_x. \qquad (6) $$

1.5 Exemple manuel à l'aide des tables

Toujours pour un individu d'âges $x = 60$ et $v = 0.975$, on obtient les valeurs de rente suivantes à partir de la table TD8890 (cf.??).

A_{60}	${}_{\|10}A_{60}$	${}_{5\|}A_{60}$	${}_{5\|10}A_{60}$
0.629797	0.1712248	0.5488664	0.1940527

A partir du tableau suivant :

x	p_x	q_x	k	${}_kp_{60}$	q_{60+k}
60	0.9843	0.01566	0	1	0.01566
61	0.9831	0.01686	1	0.9843	0.01686
62	0.9819	0.01812	2	0.9677	0.01812
63	0.9806	0.01943	3	0.9502	0.01943
64	0.9794	0.02064	4	0.9317	0.02064
65	0.978	0.02202	5	0.9125	0.02202
66	0.9766	0.02339	6	0.8924	0.02339
67	0.9747	0.02532	7	0.8715	0.02532
68	0.9726	0.02737	8	0.8495	0.02737
69	0.9703	0.02965	9	0.8262	0.02965

Déterminez les annuités suivantes ${}_{0|2}A_{60}$, ${}_{2|2}A_{60}$ et ${}_{4|2}A_{60}$ et ${}_{0|3}A_{60}$, ${}_{2|3}A_{60}$ et ${}_{4|3}A_{60}$ pour $v = 0.975$. On sélectionne les bons termes du tableau précédent

$$ {}_{0|2}A_{60} = \sum_{k=0}^{0+2-1} v^{k+1} {}_kp_{60} \times q_{60+k} $$

$$ {}_{2|2}A_{60} = \sum_{k=0}^{2+2-1} v^{k+1} {}_kp_{60} \times q_{60+k} $$

$$ {}_{4|2}A_{60} = \sum_{k=4}^{4+2-1} v^{k+1} {}_kp_{60} \times q_{60+k} $$

$$ {}_{0|3}A_{60} = \sum_{k=0}^{0+3-1} v^{k+1} {}_kp_{60} \times q_{60+k} $$

$$ {}_{2|3}A_{60} = \sum_{k=0}^{2+3-1} v^{k+1} {}_kp_{60} \times q_{60+k} $$

$$ {}_{4|3}A_{60} = \sum_{k=4}^{4+3-1} v^{k+1} {}_kp_{60} \times q_{60+k} $$

On trouve

${}_{0\|2}A_{60}$ ${}_{0\|3}A_{60}$	${}_{2\|2}A_{60}$ ${}_{2\|3}A_{60}$	${}_{4\|2}A_{60}$ ${}_{4\|3}A_{60}$
0.03104208	0.03294106	0.03420562
0.04729641	0.04988852	0.05168699

1.6 En résumé

Une annuité éternelle sans condition de survie a pour valeur actuelle la série géométrique de raison v, tandis qu'une annuité temporaire et inconditionnelle a pour valeur actuelle la somme des n premiers de la suite géométrique de raison v

$$ \ddot{a} = 1 + v + v^2 + \cdots = \frac{1}{1-v}, \; \ddot{a}_n = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v}. $$

Autrement dit toutes rentes ont une valeur actuelle du type

$$ VA = \frac{1 - v^{\lfloor T_x \rfloor + 1}}{1-v} 1_{T_x \in D} $$

pour D un domaine particulier.

De plus, tous capitaux au décès ont une valeur actuelle du type

$$VA = v^{\lfloor T_x \rfloor + 1} 1_{T_x \in D}$$

pour D un domaine particulier.

La variable aléatoire $\lfloor T_x \rfloor$ est parfois notée $K_x = \lfloor T_x \rfloor$ et appelé le temps résiduel abrégé. Cette variable est par construction entière et de masse de probabilité

$$P(K_x = k) = P(k + 1 \geq T_x > k | T_x > 0) = {}_k p_x q_{x+k} = {}_{k|1} q_x$$

1.7 Capitaux et rentes croissantes

1.7.1 Rente viagère croissante

Une rente viagère à termes anticipés croissante est une série croissante de flux annuels de 1 euro, 2 euro, 3 euro, ...jusqu'au décès de l'individu à commencer d'aujourd'hui. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$VA(rente) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) v^k 1_{T_x > k}, \quad VAP(rente) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) v^k {}_k p_x = (I\ddot{a})_x.$$

Son équivalent à termes échus est

$$(Ia)_x = \sum_{k=1}^{\infty} (k) v^k {}_k p_x.$$

Une rente viagère à termes anticipés croissante temporaire est une série croissante de flux annuels de 1euro, 2euro, 3euro, ...jusqu'au décès de l'individu à commencer d'aujourd'hui pendant au plus n années. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$VA(rente) = \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) v^k 1_{T_x > k}, \quad VAP(rente) = \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) v^k {}_k p_x = {}_{|n}(I\ddot{a})_x.$$

Son équivalent à termes échus est

$${}_{|n}(Ia)_x = \sum_{k=1}^{n} (k) v^k {}_k p_x.$$

1.7.2 Rente viagère décroissante

Une rente viagère à termes anticipés croissante est une série décroissante de flux annuels de $n$euro, $n - 1$euro, $n - 2$euro, ...jusqu'au décès de l'individu à commencer d'aujourd'hui (pendant au plus n années). Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$VA(rente) = \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) v^k 1_{T_x > k}, \quad VAP(rente) = \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) v^k {}_k p_x = {}_{|n}(D\ddot{a})_x.$$

Son équivalent à termes échus est

$${}_{|n}(Da)_x = \sum_{k=1}^{n} (n - k) v^k {}_k p_x.$$

1.7.3 Capital au décès croissant

Un capital au décès croissant est le versement de $k+1$euro lorsque l'année du décès est k. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$VA(capdec) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}1_{k+1\geq T_x>k}, \quad VAP(capdec) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}{}_kp_x \times q_{x+k} = (IA)_x.$$

Par définition, le capital est à terme échu.

1.7.4 Capital au décès croissant temporaire ou différé

Un capital au décès croissant temporaire est le versement de $k+1$euro lorsque l'année du décés est k pour $k \leq n-1$. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$VA(capdec) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}1_{k+1\geq T_x>k}, \quad VAP(capdec) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}{}_kp_x \times q_{x+k} = {}_{|n}(IA)_x.$$

Un capital au décès croissant différé est le versement de $k+1$euro lorsque l'année du décès est k pour $k \geq n$. Ses valeurs actuelle et actuelle probable sont

$$VA(capdec) = \sum_{k=n}^{\infty}(k+1)v^{k+1}1_{k+1\geq T_x>k}, \quad VAP(capdec) = \sum_{k=n}^{\infty}(k+1)v^{k+1}{}_kp_x \times q_{x+k} = {}_{n|}(IA)_x.$$

On peut montrer la relation suivante

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}A_x, \quad {}_{|n}(IA)_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|n-k}A_x, \quad {}_{n|}(IA)_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k+n|}A_x.$$

1.8 Relations entre rentes et capitaux

1.8.1 Facteur d'escompte viager

Considérons un âge $x \in \mathbb{N}$ et $s, t \in \mathbb{N}$. Partons de la définition de la rente viagère avec différé et temporaire (3)

$${}_{s|t}\ddot{a}_x = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^k{}_kp_x = \sum_{k=s}^{+\infty} v^k{}_kp_x - \sum_{k=s+t}^{+\infty} v^k{}_kp_x$$

On obtient ${}_{s|t}\ddot{a}_x = {}_{s|}\ddot{a}_x - {}_{s+t|}\ddot{a}_x$. De même, pour les rentes à termes échus via (4), on a ${}_{s|t}a_x = {}_{s|}a_x - {}_{s+t|}a_x$. De plus, via (3) et (**??**)

$${}_{s|}\ddot{a}_x = \sum_{k=s}^{+\infty} v^k{}_kp_x = \sum_{i=0}^{+\infty} v^{i+s}{}_{i+s}p_x = v^s\sum_{i=0}^{+\infty} v^i{}_sp_{x\,i}p_{x+s}$$

On en déduit que ${}_{s|}\ddot{a}_x = v^s \times {}_sp_x \times \ddot{a}_{x+s}$. De même, pour les capitaux, via (5) et (**??**), on trouve ${}_{s|}A_x = v^s \times {}_sp_x \times A_{x+s}$.

Le coefficient $v^s \times {}_sp_x$ est appelé facteur d'escompte viager.

Par exemple, pour $x = 60$, $s = 5$ et $v = 0.975$, on a bien

$${}_{5|}\ddot{a}_{60} = 10.2057 = 0.8810957 \times 0.9125104 \times 12.69352 = v^5{}_sp_x \times \ddot{a}_{65}$$

Résumons les propriétés

${}_{s\|t}\ddot{a}_x = {}_{s\|}\ddot{a}_x - {}_{s+t\|}\ddot{a}_x$
${}_{s\|}\ddot{a}_x = v^s \times {}_s p_x \times \ddot{a}_{x+s}$
${}_{s\|t}a_x = {}_{s\|}a_x - {}_{s+t\|}a_x$
${}_{s\|}A_x = v^s \times {}_s p_x \times A_{x+s}$

1.8.2 Lien capitaux-rentes

Considérons un âge $x \in \mathbb{N}$, un taux d'actualisation $v \in]0, 1[$. On peut montrer que

$$(1 - v)\ddot{a}_x + A_x = 1.$$

En réexprimant la probabilité de décès (exactement) à l'âge $x + k$, on a

$${}_k p_x \times q_{x+k} = {}_k p_x - {}_{k+1}p_x$$

Par les définitions (5) et (1), cela entraine

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_k p_x \times q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}({}_k p_x - {}_{k+1}p_x)$$

Ainsi on trouve

$$\Leftrightarrow A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_k p_x - \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}{}_{k+1}p_x = v\ddot{a}_x + v^0{}_0 p_x - \sum_{k=-1}^{\infty} v^{k+1}{}_{k+1}p_x = v\ddot{a}_x + 1 - \sum_{i=0}^{\infty} v^i{}_i p_x = 1 - \ddot{a}_x + v\ddot{a}_x$$

Par exemple, pour $x = 60$ et $v = 0.975$, on a bien

$$(1 - v)\ddot{a}_{60} + A_{60} = 0.025 \times 14.80812 + 0.629797 = 1.$$

1.8.3 Récurrences

Considérons un âge $x \in \mathbb{N}$. On a

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1} \text{ et } A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}.$$

Par exemple, pour $x = 60$ et $v = 0.975$, on a

$$\ddot{a}_{x+1} = \frac{\ddot{a}_x - 1}{vp_x} = \frac{14.80812 - 1}{0.025 \times 0.9843437} = 15.42938.$$

2 Tarification sur le principe d'équité actuarielle

2.1 Principe

Le principe de l'équité actuarielle consiste à équilibrer les engagements de l'assureur envers les assurés en imposant l'égalité des valeurs actuelles probables des flux futurs de l'assuré $\Pi_0, \Pi_1, \dots$ et des flux de l'assureur $R_0, R_1, \dots$, i.e.

$$VAP(\Pi_0, \dots) = VAP(R_0, \dots).$$

Dans le cas d'une prime pure unique Π versé en $t = 0$, on obtient simplement

$$\Pi = VAP(R_0, \dots).$$

Pour un montant de risque X, on définit les primes pure et ajustée par

— la prime pure $\pi^P(X) = E(X)$,
— la prime ajustée $\pi^A(X) = E(X) + \alpha\sqrt{Var(X)}$.

Dans ce cours, on ne s'intéressera qu'à la prime pure.

2.2 Capital au décès avec prime unique

Considérons un contrat où l'assuré d'âge x paie une prime unique Π et recevra un capital K l'année suivant le décès. Par le principe d'équité,

$$VAP(\Pi, 0, \dots) = VAP(0, \dots, 0, K_{\lceil T_x \rceil}, 0, \dots) \Leftrightarrow \Pi = KA_x.$$

Typiquement pour $K = 50000$, un taux d'intérêt de 2.5% et $x = 60$, on trouve une prime

```
## Warning: package 'lifecontingencies' was built under R version 3.4.3
## [1] 31830.6
```

2.3 Capital au décès avec prime annuelle

Considérons un contrat où l'assuré d'âge x paie une prime annuelle Π et recevra un capital K l'année suivant le décès. Par le principe d'équité,

$$VAP(\Pi, \dots, \Pi_{\lfloor T_x \rfloor}, 0, \dots) = VAP(0, \dots, 0, K_{\lceil T_x \rceil}, 0, \dots) \Leftrightarrow \ddot{a}_x \times \Pi = K \times A_x \Leftrightarrow \Pi = K\frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Typiquement pour $K = 50000$, un taux d'intérêt de 2.5% et $x = 60$, on a

```
## [1] 2136.439
```

2.4 Contrat de retraite

Considérons un contrat où l'assuré d'âge x paie une prime annuelle Π jusqu'à l'âge $n > x$ et recevra une rente R ensuite jusqu'à son décès. Les dates de versement des primes sont donc 0,1,..., $n - x - 1$ et de prestation sont $n - x, \dots, \lceil T_x \rceil - x$. Par le principe d'équité,

$$VAP(\Pi_0, \dots, \Pi_{n-x-1}, 0, \dots) = VAP(0, \dots, 0, R_{n-x}, \dots, R_{\lceil T_x \rceil - x}, 0, \dots)$$

$$\Leftrightarrow {}_{0|n-x}\ddot{a}_x \times \Pi = R \times {}_{n-x|\infty}\ddot{a}_x \Leftrightarrow \Pi = R\frac{{}_{n-x|\infty}\ddot{a}_x}{{}_{0|n-x}\ddot{a}_x}.$$

Typiquement pour $R = 1000$, un taux d'intérêt de 2.5%, $x = 60$ et $n = 65$, on a

```
## [1] 2233.319
```

3 Provisions mathématiques

Du fait de l'inversion du cycle de production, l'assureur doit établir des réserves financières (appelés provisions mathématiques en assurance vie) pour faire face à ses engagements futurs envers l'assuré. Les provisions mathématiques appartiennent à l'assuré car l'assuré a payé une garantie.

3.1 Provisions mathématiques

Pour des flux futurs payés par l'assuré $\Pi_0, \Pi_1, \dots$ et des flux versés par l'assureur $R_0, R_1, \dots$, on définit L_t la perte en t de l'assureur par

$$L_t = VA(R_t, R_{t+1}, \dots) - VA(\Pi_t, \Pi_{t+1}, \dots).$$

Les provisions mathématiques sont la quantité

$${}_tV_x = E(L_t) = VAP(R_t, R_{t+1}, \dots) - VAP(\Pi_t, \Pi_{t+1}, \dots).$$

Par définition, on a ${}_0V_x = 0$.

3.2 Approche générale pour les provisions mathématiques de capitaux au décès

Considérons des flux futurs payés par l'assuré $\Pi_0, \Pi_1, \dots$ (s'il est vivant) et des flux versés par l'assureur $R_0, R_1, \dots$ (R_k si l'assuré décède entre $[k, k+1[$). Si l'assuré en vivant en k, les provisions mathématiques dites prospectives sont

$${}_kV_x = \sum_{j=0}^{\infty} R_{k+j+1} \times v^{j+1} \times {}_jp_{x+k} \times q_{x+k+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{k+j} \times v^j \times {}_jp_{x+k}.$$

Les provisions mathématiques dites rétrospectives (équivalentes) sont

$${}_kV_x = \frac{1}{v^k {}_kp_x} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \Pi_j \times v^j \times {}_jp_x - \sum_{j=0}^{k-1} R_j \times v^{j+1} \times {}_jp_x \times q_{x+j} \right).$$

On dispose de la formule de récurrence suivante

$$\Pi_k + {}_kV_x = vq_{x+k} \times R_{k+1} + vp_{x+k} \times {}_{k+1}V_x \Leftrightarrow \Pi_k = vq_{x+k}(R_{k+1} - {}_{k+1}V_x) + v \times {}_{k+1}V_x - {}_kV_x.$$

3.3 Approche générale pour les provisions mathématiques de rentes

Considérons des flux futurs payés par l'assuré $\Pi_0, \Pi_1, \dots$ (s'il est vivant) et des flux versés par l'assureur $R_0, R_1, \dots$ (R_k si l'assuré en vie entre $[k, k+1[$). Si l'assuré en vivant en k, les provisions mathématiques dites prospectives sont

$${}_kV_x = \sum_{j=0}^{\infty} R_{k+j+1} \times v^{j+1} \times {}_jp_{x+k} - \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{k+j} \times v^j \times {}_jp_{x+k}.$$

Les provisions mathématiques dites rétrospectives (équivalentes) sont

$${}_kV_x = \frac{1}{v^k {}_kp_x} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \Pi_j \times v^j \times {}_jp_x - \sum_{j=0}^{k-1} R_j \times v^{j+1} \times {}_jp_x \right).$$

3.4 Capital au décès avec prime unique

Considérons un contrat où l'assuré d'âge x paie une prime unique Π et recevra un capital K l'année suivant le décès. On a

$$VAP_0(assure) = \Pi, VAP_0(assureur) = Ka_x.$$

Pour $k \geq 1$, on a

$$VAP_k(assure) = 0, VAP_k(assureur) = KA_{x+k}.$$

Si l'assuré est en vie en k, les provisions sont

$$_kV_x = KA_{x+k},$$

Sinon elles sont nulles.

3.5 Capital au décès avec prime annuelle

Considérons un contrat où l'assuré d'âge x paie une prime annuelle Π et recevra un capital K l'année suivant le décès. On a

$$VAP_0(assure) = \Pi\ddot{a}_x, VAP(assureur) = Ka_x.$$

Pour $k \geq 1$, on a

$$VAP_k(assure) = \Pi\ddot{a}_{x+k}, VAP_k(assureur) = KA_{x+k}.$$

Si l'assuré est en vie en k, les provisions sont

$$_kV_x = KA_{x+k} - \Pi\ddot{a}_{x+k},$$

Sinon elles sont nulles.

3.6 Contrat de retraite

Considérons un contrat où l'assuré d'âge x paie une prime annuelle Π jusqu'à l'âge $n > x$ et recevra une rente R ensuite jusqu'à son décès. On a

$$VAP_0(assure) = {}_{0|n-x}\ddot{a}_x \times \Pi, VAP_0(assureur) = R \times {}_{n-x|\infty}\ddot{a}_x.$$

Pour $k \geq 1$, on a

$$VAP_k(assure) = \Pi \times {}_{0|n-x-k}\ddot{a}_{x+k} 1_{k<n-x},\ VAP_k(assureur) = R \times {}_{n-x-k|\infty}\ddot{a}_{x+k} 1_{k<n-x} + R \times \ddot{a}_{x+k} 1_{k \geq n-x}.$$

Si l'assuré est en vie en k, les provisions sont

$$_kV_x = \left(R \times {}_{n-x-k|\infty}\ddot{a}_{x+k} - {}_{0|n-x-k}\ddot{a}_{x+k} \times \Pi\right) 1_{k<n-x} + R \times \ddot{a}_{x+k} 1_{k \geq n-x},$$

sinon elles sont nulles.

4 Applications numériques en R

4.1 Exemple de lois paramétriques

L'implémentation dans R de ces lois a été faite dans les packages `ActuDistns` et `reliaR`.

```r
library(reliaR)
x <- 60
#parameters
alpha <- log(1.078316)
theta <- 1.921184e-4
A <- 0.01
k <- 1.921184e-1
scale <- 1
#Gompertz
pgompertz(x+1, alpha=alpha, theta=theta, lower=FALSE) /
  pgompertz(x, alpha=alpha, theta=theta, lower=FALSE)
```

```
## [1] 0.9817687
```

```r
#Makeham
pgompertz(x+1, alpha=alpha, theta=theta, lower=FALSE) /
  pgompertz(x, alpha=alpha, theta=theta, lower=FALSE)*exp(-A)
```

```
## [1] 0.9719999
```

```r
#Weibull
pweibull(x+1, k, scale, lower=FALSE) / pweibull(x, k, scale, lower=FALSE)
```

```
## [1] 0.9930399
```

4.2 Utilisation des tables de mortalité dans R

L'utilisation de tables de mortalité en R se fait avec le package `lifecontingencies`. La classe `"lifetable"` permet de manipuler les tables.

```r
library(lifecontingencies)
ltb1 <- new("lifetable", x=0:10, lx=seq(1000, 0, -100), name="school example")
```

Les fonctions génériques `summary()`, `print()` et `plot()` sont possibles. Typiquement

```r
summary(ltb1)
```

```
## This is lifetable:  school example
##  Omega age is:  9
##  Expected curtated lifetime at birth is:  4.5
```

La lecture d'une table se fait suivant le format (csv, excel, texte) sous forme de `data.frame` que l'on convertit en table. Chargeons des données réelles de la table TD8890

```r
library(lifecontingencies)
library(CASdatasets)
data(freTD8890)
TD8890 <- new("lifetable", x=freTD8890$Age, lx= freTD8890$Lx)
head(TD8890)
```

```
##   x     lx
## 1 0 100000
## 2 1  99129
## 3 2  99057
## 4 3  99010
```

```
## 5 4  98977
## 6 5  98948
```

Les calculs de probabilités peuvent se faire à la main ou avec les fonctions prévues à cet effet

```
(TD8890@lx[TD8890@x == 60] - TD8890@lx[TD8890@x == 61])/TD8890@lx[TD8890@x == 60]
```

```
## [1] 0.01565629
```

```
qxt(TD8890, 60, 1)
```

```
## [1] 0.01565629
```

```
TD8890@lx[TD8890@x == 61]/TD8890@lx[TD8890@x == 60]
```

```
## [1] 0.9843437
```

```
pxt(TD8890, 60, 1)
```

```
## [1] 0.9843437
```

L'espérance de vie résiduelle se calcule facilement à l'aide `exn()` et se vérifie manuellement à l'aide de la formule

$$e_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

On obtient

```
exn(TD8890, x=60)
```

```
## [1] 18.33563
```

```
sum(TD8890@lx[TD8890@x > 60]/TD8890@lx[TD8890@x == 60])
```

```
## [1] 18.33563
```

4.3 Exemple de rentes et de capitaux au décès

Pour les calculs de VAP, le choix du taux actualisation v est déterminant qui s'ensuive. Ainsi le package `lifecontigencies` propose la classe `"actuarialtable"` pour manipuler qui est la combinaison d'une `"lifetable"` et d'un taux d'intérêt.

```
TD8890tb <- new("actuarialtable", x=TD8890@x, lx=TD8890@lx, interest=2.5/100)
```

Pour un individu d'âges $x = 60$, on obtient la valeur de rente suivant à partir de la table, respectivement $\ddot{a}_x$ et a_x

```
axn(TD8890tb, x=60, m=0)
```

```
## [1] 14.89891
```

```
axn(TD8890tb, x=60, m=1)
```

```
## [1] 13.89891
```

On peut vérifier à la main ces calculs

```
omega <- sum(TD8890@x > 60)
sum(TD8890@lx[TD8890@x >= 60]/TD8890@lx[TD8890@x == 60] / (1+2.5/100)^(0:omega))
```

```
## [1] 14.89891
```

```r
sum(TD8890@lx[TD8890@x > 60]/TD8890@lx[TD8890@x == 60] / (1+2.5/100)^(1:omega))
```

```
## [1] 13.89891
```

Retrouvons les termes ${}_{0|3}\ddot{a}_{60}$, ${}_{2|3}\ddot{a}_{60}$ et ${}_{5|3}\ddot{a}_{60}$

```r
i <- 1/0.975-1
c(axn(TD8890tb, x=60, m=0, n=3, i=i), axn(TD8890tb, x=60, m=0, n=3, i=i, pay="arrears"))
```

```
## [1] 2.879700 2.760411
```

```r
c(axn(TD8890tb, x=60, m=2, n=3, i=i), axn(TD8890tb, x=60, m=2, n=3, i=i, pay="arrears"))
```

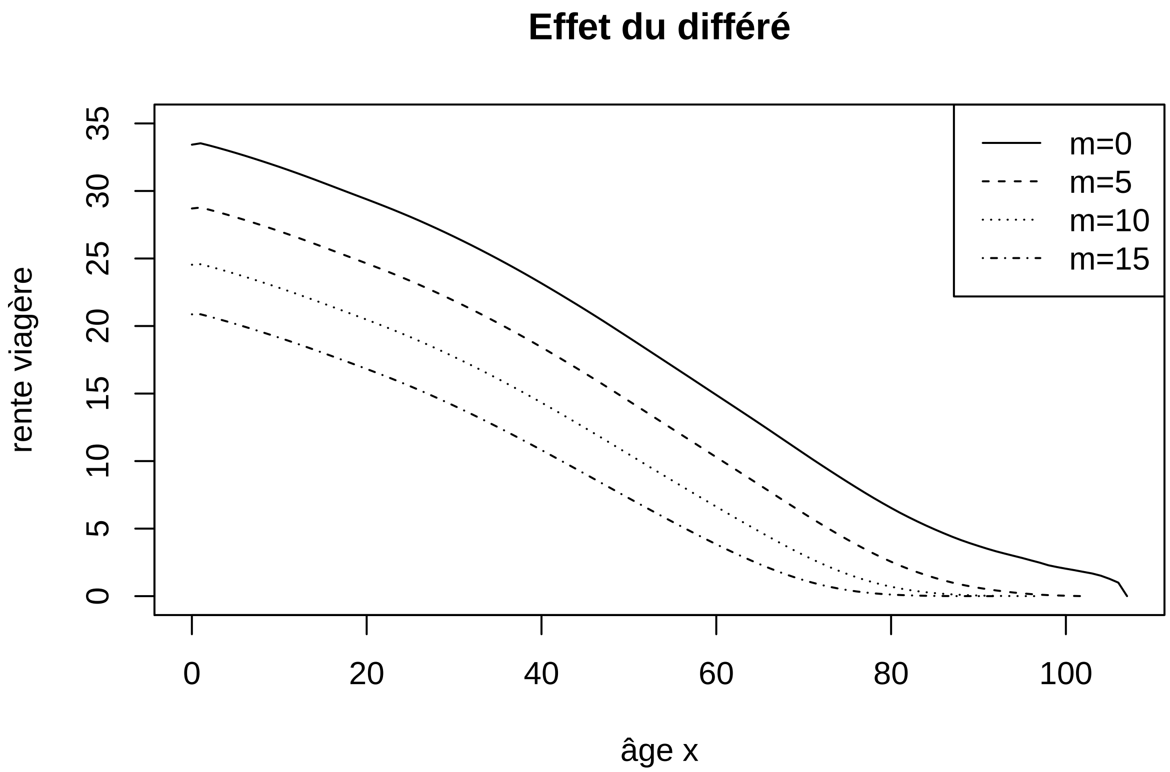
```
## [1] 2.642682 2.526727
```

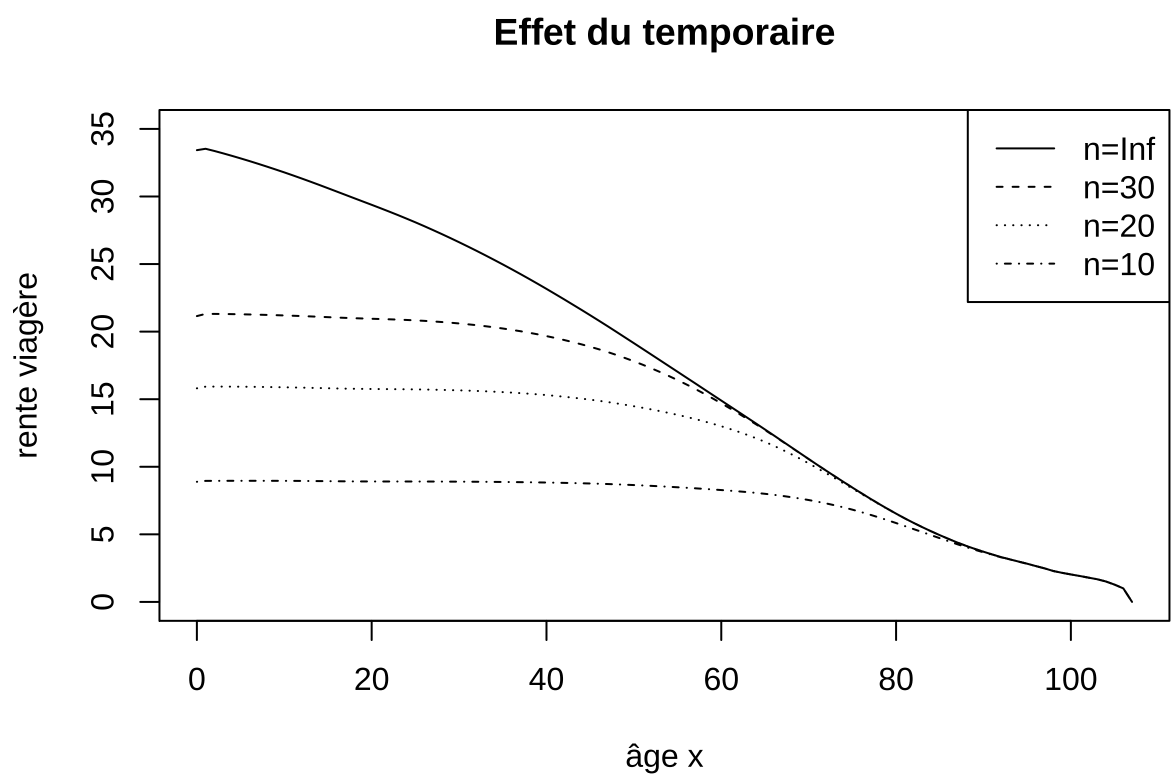
```r
c(axn(TD8890tb, x=60, m=5, n=3, i=i), axn(TD8890tb, x=60, m=5, n=3, i=i, pay="arrears"))
```

```
## [1] 2.300662 2.190385
```

Vectorisons les fonctions d'annuités sur le paramètre d'âge `x` et construisons maintenant nos graphiques.

```r
aXn <- Vectorize(axn, "x")
```





Pour un individu d'âges $x = 60$, on obtient la valeur de capital suivant à partir de la table, respectivement A_x

```
Axn(TD8890tb, x=60)
```

```
## [1] 0.636612
```

On peut vérifier à la main ces calculs

```
omega <- sum(TD8890@x >= 60)
qxplusk <- c(-diff(TD8890@lx[TD8890@x >= 60]), 0)/TD8890@lx[60+1:omega]
kpx <- TD8890@lx[TD8890@x >= 60]/TD8890@lx[TD8890@x == 60]
sum(kpx * qxplusk / (1+2.5/100)^(1:omega))
```

```
## [1] 0.6366044
```

Retrouvons les capitaux précédents

```
i <- 1/0.975-1
c(Axn(TD8890tb, x=60, n=2, m=0, i=i), Axn(TD8890tb, x=60, n=2, m=2, i=i), Axn(TD8890tb, x=60,
```

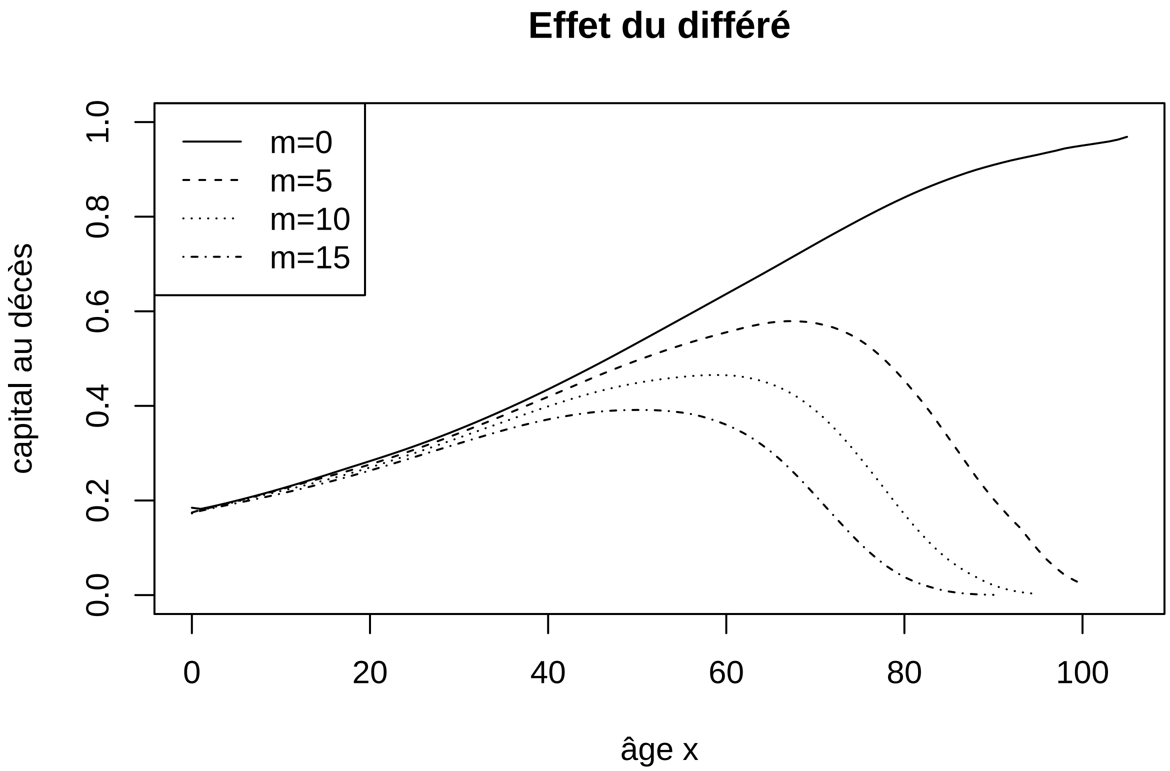
```
## [1] 0.03104208 0.03294106 0.03420562
```

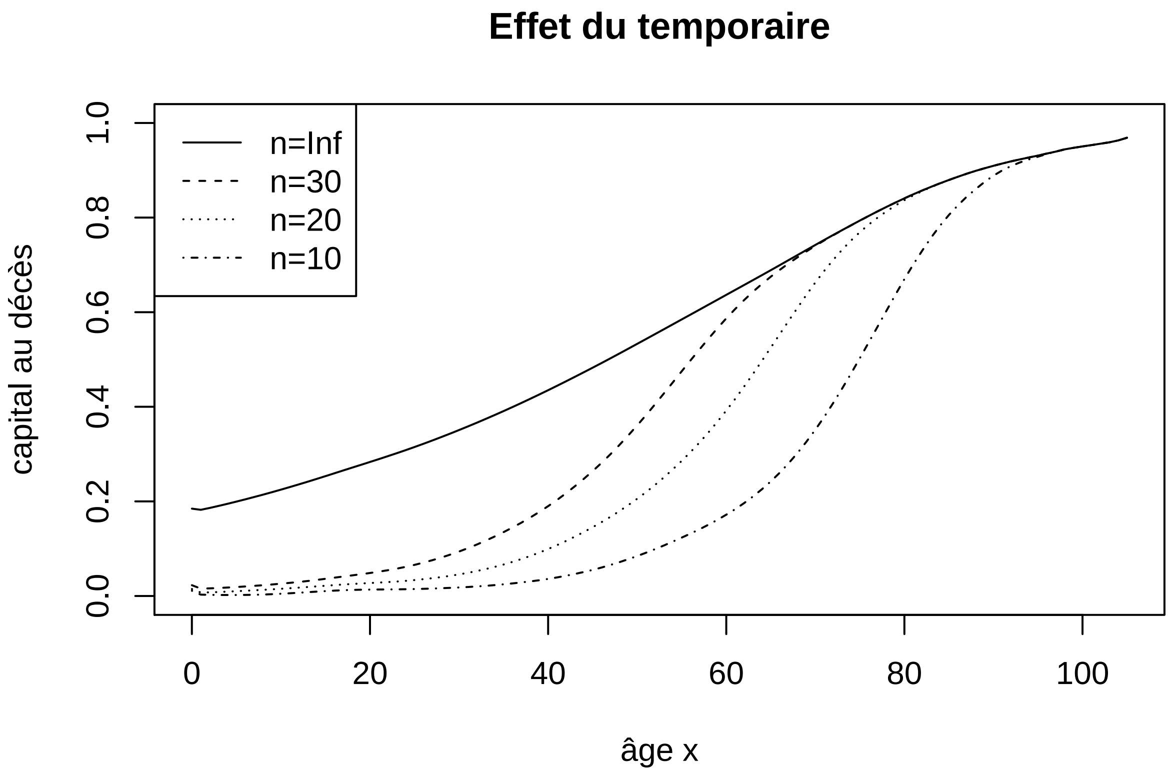
```
c(Axn(TD8890tb, x=60, n=3, m=0, i=i), Axn(TD8890tb, x=60, n=3, m=2, i=i), Axn(TD8890tb, x=60,
```

```
## [1] 0.04729641 0.04988852 0.05168699
```

Vectorisons les fonctions d'annuités sur le paramètre d'âge `x` et construisons maintenant nos graphiques.

```
AXn <- Vectorize(Axn, "x")
```

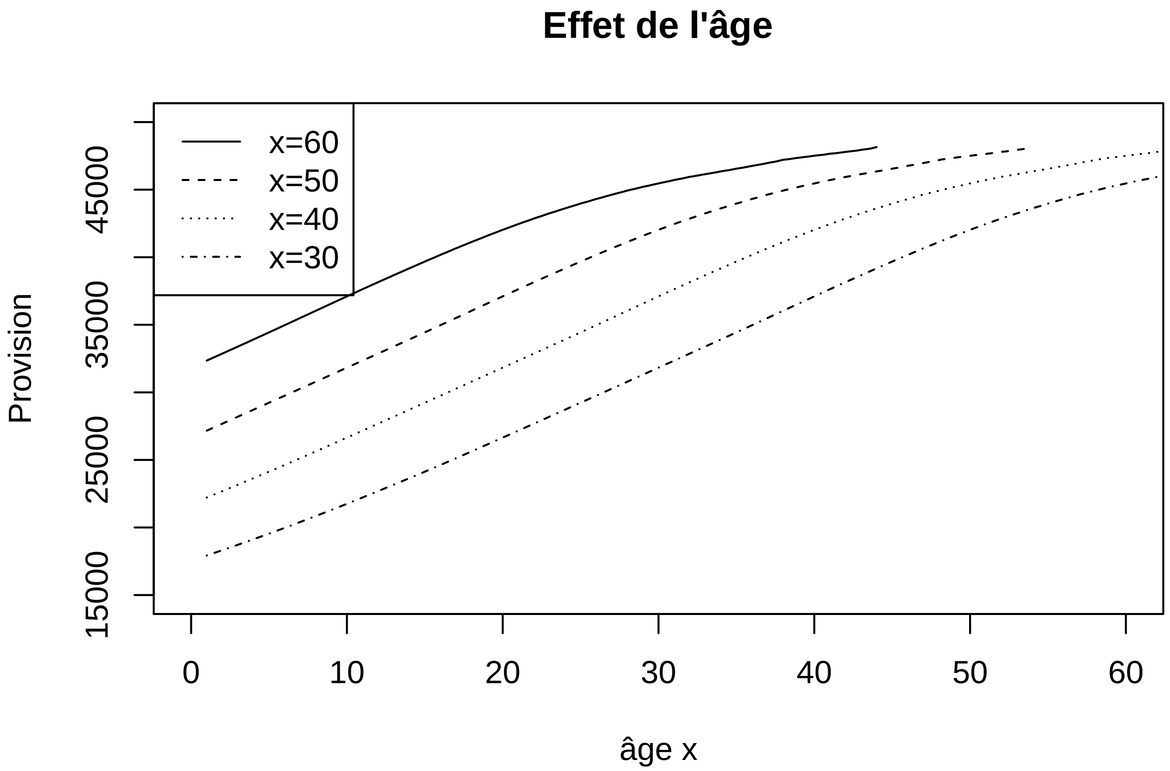




4.4 Exemple de provisions mathématiques

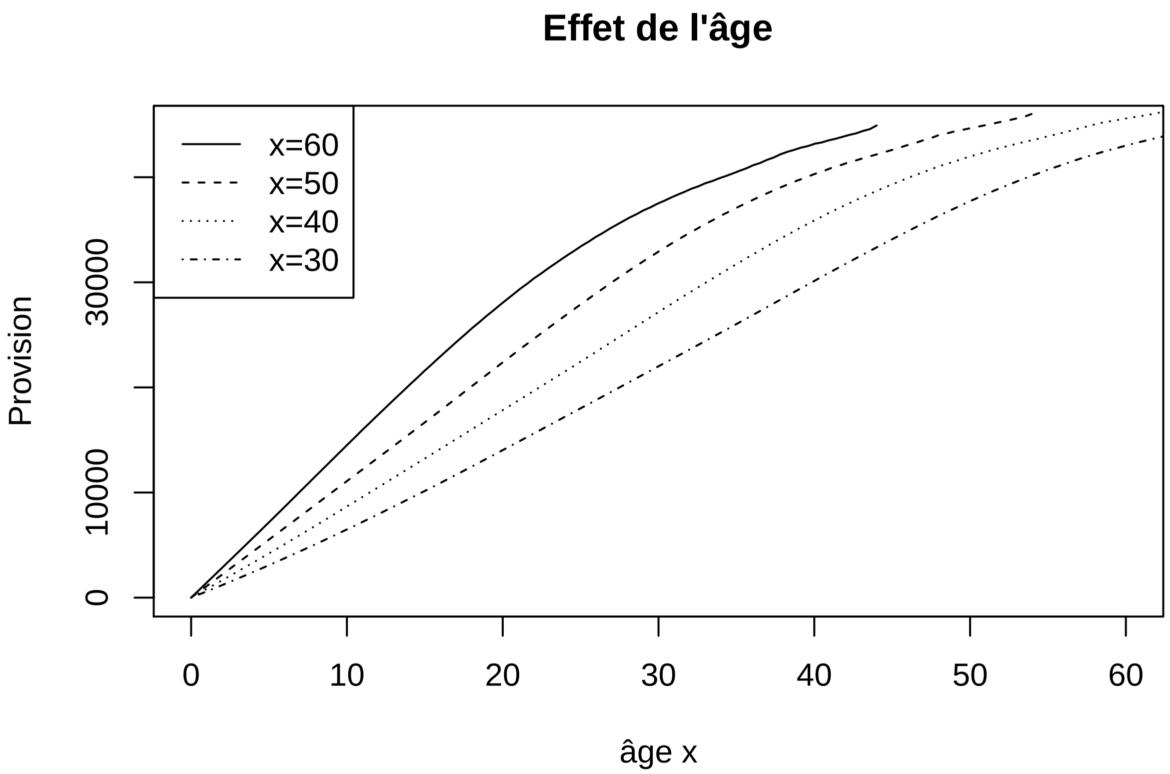
Reprenons notre exemple dans R

```
Vkx.capuniq <- function(x, k, K)
  K * AXn(TD8890tb, x=x+k)
```



Reprenons notre exemple dans R

```
Vkx.capannu <- function(x, k, K)
{
  prem <- Axn(TD8890tb, x=x)*K / axn(TD8890tb, x=x, m=0)
  K * AXn(TD8890tb, x=x+k) - prem * aXn(TD8890tb, x=x+k, m=0)
}
```



Reprenons notre exemple dans R

```r
aXNM <- Vectorize(axn, c("x", "n", "m"))
Vkx.retraite <- function(x, n, k, R)
{
  prem <- axn(TD8890tb, x=x, m=n-x)*R / axn(TD8890tb, x=x, m=0, n=n-x)
  k1 <- k[k < n-x]
  k2 <- k[k >= n-x]
  res <-  aXNM(TD8890tb, x=x+k1, m=n-x-k1)*R - prem * aXNM(TD8890tb, x=x+k1, m=0, n=n-x-k1)
  c(res, aXNM(TD8890tb, x=x+k2)*R)
}
```