ESPRIT & Le Mans Université
Institut du Risque et de l'Assurance
A. Matoussi

Année universitaire 19-20
5ème DS & Master 2 Actuariat
MAAF

Fiche 1

Exercice 1.

1. *Donner la définition et deux exemples de contrats à termes.*
2. *Donner la définition d'un swap de taux d'intérêts.*
3. *Donner la définition et trois exemples d'options. Quelle est la différence entre un contrat à terme et une option ? ?*

Exercice 2.

1. *Tracer le tableau et le profil des stratégies suivantes à l'échéance. Quelle intuition vis à vis des marchés chaque stratégie implique ?*
   - *achat d'un call de prix d'exercice K.*
   - *vente d'un call de prix d'exercice K.*
   - *achat d'un put de prix d'exercice K.*
   - *vente d'un put de prix d'exercice K.*

Exercice 3. *"Bull spread"*

1. *Tracer le graphe représentant le gain relatif à la stratégie d'un "Bull spread" :*
   - *achat d'un call C1 de maturité T et de prix d'exercice K_1,*
   - *vente d'un call C2 de même maturité et de prix d'exercice $K_2 > K_1$.*

   Dans quelle situation un trader aurait besoin de ce type de stratégie ?
2. *Un trader achète pour 7 euros un call avec un prix d'exercice de 25 euros et vend pour 5 euros un call avec un prix d'exercice de 30 euros. Calculer le profit de ce bull spread.*

Exercice 4. *"Straddle"*

1. *Tracer le graphe représentant le gain relatif à la stratégie d'un : "Straddle"*
   - *achat d'un call de maturité T et de prix d'exercice K,*
   - *achat d'un put avec la même maturité et le même prix d'exercice.*

   Dans quelle situation un trader aurait besoin de ce type de stratégie ?
2. *Un trader sent que le cours d'une action, qui vaut actuellement 59 euros va décaler violemment dans les trois mois qui viennent. Le trader peut créer un straddle en achetant un call et un put de prix d'exercice 60 euros et de maturité 3 mois. Si le prix du call vaut 4 euros et le put de 3 euros, calculer le profit généré par cette stratégie.*

Exercice 5. *Des Calls sont disponibles sur une action avec comme prix d'exercice* 15 *euros,* $17,5$ *euros et* 20 *euros. Leur prix est de respectivement 4 euros, 2 euros et 0.5 euros. Créer un butterfley spread (achat d'un call de strike* K_1*, vente de deux calls de strikes* K_2 *et achat d'un call de strike* K_3 *avec* $K_2 \in [K_1, K_3]$*)*

1. *Construire le graphique associé au payoff*
2. *Décrire les profits engendrés suivant le prix de l'action à l'échéance.*

Exercice 6. *On se place dans un marché où l'on peut acheter et vendre des calls de tous strikes et de toutes maturités. On peut aussi placer et emprunter de l'argent à taux nul.*

1. *Montrer que s'il existe un call de prix d'exercice* K*, de marturité* T *et de prix* C *tel que* $C > S_0$ *(*S_0 *représente le prix du sous-jacent à* $t = 0$*), alors on peut créer une opportunité d'arbitrage.*
2. *Montrer de même que* $C < (S_0 - K)^+$ *implique une opportunité d'arbitrage.*
3. *Montrer que le prix du Call est croissant par rapport à la maturité et décroissant par rapport au strike si on suppose l'absence d'arbitrage.*
4. *Soit u trader français qui veut acheter 1 dollar à la date* T *au prix* K*. Quel va être sa stratégie ? Quel va être la stratégie de l'americain qui va lui vendre ce dollar ? ?*
5. *On suppose que le sous-jacent vérifie :* $\lambda Put(S_0, K, T) = Put(\lambda S_0, \lambda K, T)$ *où* λ *est un nombre réel. En déduire que* $Call(S_0, K, T) = Put(K, S_0, T)$*.*

Exercice 7. *Option barrière*
On considère un Up and Out Call i.e. une option de profit $(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\forall t \in [0,T],\, S_t \leqslant L\}}$*. Autrement dit si le sous-jacent franchit la valeur* L *l'option est annulée.*

1. *Etudier le cas* $L \leqslant K$ *et le cas où* $S_0 > L$*. On considère de maintenant que* $L > K$ *et* $S_0 < L$*.*
2. *Montrer que si le prix de cette option est supérieur à* $\dfrac{L-K}{L} S_0$ *alors il existe une opportunité d'arbitrage.*

Exercice 8. *On se place dans un modèle binômial (comme celui dans le cours) dont les paramètres sont* $s = 100$*,* $u = 1.1$*,* $d = 0.9$ *et* $r = 1\%$*. On considère un call européen d'échéance* $T = 1$ *et prix d'exercice* $K = 105$*.*
Calculer la valuer du call $t = 0$*, ainsi que la stratégie de couverture parfaite par réplication.*

Exercice 9. *On se place dans un modèle binômial, comme celui décrit dans le cours, et dont les paramètres sont* $S_0 =: s = 4$*,* $u = 2$*,* $d = 0.5$ *et* $r = 1/4$*.*

1. *On considère un put européen de maturité* $N = 2$ *et de prix d'exercice* $K = 5$*.*

   (a) *Dessiner l'arbre de l'évolution du prix de l'action, puis séparement celui de l'option.*

(b) *Calculer le prix du put à $n = 0$, ainsi que la stratégie de couverture.*

(c) *Donner une opportunité d'arbitrage si le prix observé du put est de* 0.8.

2. *On considère une option Lookback d'échéance $N = 2$ et de prix d'exercice $K = 5$, c'est-à-dire une option dont le paiement terminal est $V_2(\omega) = \max_{n=0,\ldots,2}(S_n(\omega) - 5)^+$.*

   Calculer le prix de l'option Lookback à $n = 0$, ainsi que la stratégie de couverture.

Exercice 10. *On désire valoriser dans un modèle à deux périodes une option d'achat de maturité $T = 2$, de prix d'exercice $K = 40$.*

▶ *L'actif risqué vaut $S_0 = 40$ à la date 0, $S^h = 50$ ou $S^b = 20$ à la date 1.*
- *Si le prix est S^h à la date 1, il est de $S^{hh} = 60$ ou $S^{hb} = 40$ à la date 2.*
- *Si le prix est S^b à la date 1, il est de $S^{bh} = 40$ ou $S^{bb} = 10$ à la date 2.*

▶ *L'actif sans risque a un taux égale à $r = 10\%$ sur la première période.*
- *Si le prix est S^h à la date 1, le taux sans risque sur la seconde période est 5%.*
- *Si le prix est S^b à la date 1, le taux sans risque sur la seconde période est 15%.*

1. *Calculer, dans le modèle proposé, les probabilités risque-neutre entre 0 et 1, puis entre 1 et 2 suivant que l'on est en S^h ou S^b à la date 1.*

2. *Quel est le prix de l'option d'achat (à chaque instant) ?*