ESPRIT & Le Mans Université
Institut du Risque et de l'Assurance
A. Matoussi

Année universitaire 19-20
5ème DS & Master 2 Actuariat
MAAF

Fiche 4

Modèle de Black and Scholes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré complet.

Exercice 1. : Soit $(B_t)_{t \geqslant 0}$ un MB sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ une filtration. Utiliser le théorème de Girsanov pour montrer (sans calculs) que

$$\mathbb{E}\left((B_t + t)^p \exp\left(-B_t - \frac{1}{2}t\right)\right) < \infty, \quad \forall\, 0 \leqslant p < \infty\,.$$

Exercice 2. : *(formule de Bayes)*

On se place dans le cadre du théorème de Girsanov. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité filtré (*le marché financier*). On note $\mathbb{Q}$ *la probabilité risque-neutre*, Z_T sa densité par rapport à la probabilité de référence $\mathbb{P}$ et $(\tilde{B}_t)_{t \geqslant 0}$ le MB sous $\mathbb{Q}$ obtenu par le Th. de Girsanov. On suppose aussi que $\mathbb{E}(Z_T) = 1$.

1) Montrer que le processus $(Z_t)_{t \geqslant 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}$.
2) Soit $0 \leqslant t \leqslant T$, X une v.a. $\mathcal{F}_t$-mesurable. Montrer que $\tilde{\mathbb{E}}\,(X) = \mathbb{E}\,(X Z(t))$.
3) X une v.a. $\mathcal{F}_t$-mesurable et $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, montrer que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(X \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right) = \frac{1}{Z_s}\, \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(X\, Z_t \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right) \qquad (\textit{formule de Bayes})\,.$$

4) Montrer que $(\tilde{B}_t Z_t)_{t \geqslant 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}$. En déduire (par la formule de Bayes) que $(\tilde{B}_t)_{t \geqslant 0}$ est une martingale sous $\tilde{\mathbb{P}}$.

Exercice 3. *(prix de couverture d'une option européenne)*

On se place dans le même cadre que l'exo. précedent et on suppose qu'un agent posséde dans un portefeuille :

Un Actif sans risque :

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt$$

avec (r_t) est un processus adapte, continu et borné i.e. *taux intéret à court terme.*

Un Actif risqué :

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t\, dB_t,$$

avec (μ_t) et $(\sigma_t) > 0$ sont des processus adaptés, continus et bornés.
On note par (V_t) *le processus richesse du portefeuille*, avec un investissement initial

$V_0 > 0$ et (δ_t) le *processus stratégie, ou la quantité d'actif risqué dans le portefeuille.*
1) Montrer que l'équation du *portefeuille autofinancé* est donnée par :

$$dV_t = r_t V_t dt + \delta_t \sigma_t S_t \big(\theta_t \, dt + \, dB_t\big)$$

où $\theta_t := (\mu_t - r_t)/\sigma_t$ i.e. le prix du risque du marché.
2) Trouver les EDS vérifiés par le prix de l'actif actualisé respec. par le processus richesse actualisé.
3) Montrer que sous la probabilité $\mathbb{Q}$, le prix de l'actif actualisé et le processus richesse actualisé sont des martingales.
4) Soit $\xi \in L^2(\mathbb{F}_T, \mathbb{P})$ un contingent (un call européenne par exemple) telle que $V_T = \xi$. Donner la formule de V_0.

Exercice 4. *(modèle de Black and Scholes)*

On se place dans le même cadre que l'exo.3 avec $r_t \equiv r$, $\sigma_t \equiv \sigma$ et l'actif contingent $\xi := f(S_T)$. on propose de donner *une formule explicite de la valeur V_t de l'option à l'instant t comme une fonctionnelle de t et le prix de l'actif S_t dans le cas d'un call européen (resp. un put européen).*
1. Montrer que $V_t = u(t, S_t)$ avec u une fonction donnée par

$$u(t,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big(e^{-r(T-t)} \, f\big(x \, e^{r(T-t)} \exp \, \big(\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) \, - \, \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\,\big)\,\big)\Big)\,.$$

2. Dans le Cas d'un call européen, $f(x) := (x-K)_+$ où K est le prix de l'exercice du call à la maturité T. Montrer que dans ce cas, le prix de l'option est donnée par

$$u(t,x) = x \, N(d_1) - K e^{-r(T-t)} \, N(d_2)$$

avec

$$d_1 := \frac{\ln(x/K) + (r + \sigma^2/2)\,(T-t)}{\sigma\,\sqrt{T-t}}, \qquad d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

et N est la fonction de répartition d'une loi normal centrée réduite.
En déduire que dans le cas d'un put européen , on a

$$u(t,x) = K e^{-r(T-t)} \, N(-d_2) - x \, N(-d_1)\,.$$

3. On se replace dans le cadre de la question 1. On introduit la fonction $\tilde{u}(t,x) := e^{-rt} u(t, x e^{rt})$. Appliquer la formule d'Itô à $\tilde{u}(t, \tilde{S}_t)$ et la question Exo.3.3. pour montrer que le processus (δ_t) (i.e *stratégie de couverture de l'option*) est donnée par

$$\delta_t = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, \tilde{S}_t) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, S_t)\,.$$

En déduire sa forme explicite dans le cas d'un call (resp. put) européen.
4. Déduire de la formule d'Itô appliquée dans la question 3. que le prix de l'option $u(t,x)$ vérifie l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(t,x) + r x \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) - r\,u(t,x) = 0, & \forall\,(t,x)\, \in [0,T]\times]0,\infty[\\ \\ u(T,x) = f(x), \qquad \forall\, x\, \in]0,\infty[& \end{cases}$$