ESPRIT & Le Mans Université
Institut du Risque et de l'Assurance
A. Matoussi

Année universitaire 19-20
5ème DS & Master 2 Actuariat
MAAF

# Fiche 5.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré complet et $(B_t)$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien réel issu de 0.

**Exercice 1.** *On se donne un actif sans risque $S_t^0 = e^{\int_0^t r(s)\,ds}$ avec $(r_t)_t$ est le taux d'intérêt court terme, par exemple le taux au jour le jour. Les actifs risqués $(B(t,T))_t$ sont les OZC de maturité $T$. On supose qu'il existe une proba. risk-neutre $\tilde{\mathbb{P}}$ sous laquelle pour $T > 0$, $(\frac{B(t,T)}{S_t^0})_t$ est une martingale. Montrer que*

$$B(t,T) = \tilde{\mathbb{E}}\Big( \exp\big( - \int_t^T r(s)\,ds \big) \,\big|\mathcal{F}_t \Big).$$

**Exercice 2.** *modèle de Vasiček*
*Dans le modèle des taux d'intérêts de Vasiček, le processus taux d'intérêt vérifie*

$$dr_t = a\,(b - r_t)\,dt + \sigma\,d\tilde{W}_t, \qquad \textit{sous } \tilde{\mathbb{P}}$$

*avec $a > 0,\ b \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$. On pose $Y_t = r_t - b$.*
*1. Montrer à l'aide de la formule d'Itô que*

$$e^{au} Y_u = e^{at} Y_t + \int_t^u e^{as} \sigma\,d\tilde{W}_s, \quad \forall u \geqslant t\,.$$

*En déduire que*

$$r_u = b + e^{-a(u-t)}(r_t - b) + e^{-au} \int_t^u e^{as} \sigma\,d\tilde{W}_s, \quad \forall u \geqslant t\,.$$

*2. Calculer $\tilde{\mathbb{E}}\Big( r_u \,\big|\mathcal{F}_t \Big)$ , $\tilde{\mathbb{E}}\Big( Cov(r_u,\, r_v) \,\big|\mathcal{F}_t \Big)$ pour $u,\ v \geqslant t$ et $B(t,T)$.*

**Exercice 3.** *Modèle de Hull and White*
*Dans le modèle des taux d'intérêts de Hull and White, le processus taux d'intérêt vérifie l'EDS suivante*

$$dr_t = \big(a(t) - b(t) r_t\big)\,dt + \sigma(t)\,d\widetilde{W}_t, \quad \mathbb{Q} - p.s.$$

*avec $(\widetilde{W}_t)$ est une mouvement brownien réel standard sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ (introduite dans la question 6. exercice 1), $a$, $b$, $\sigma$ sont des fonctions déterministes continues définies sur $[0,T]$ à valuers dans $\mathbb{R}^+$.*

1. *On pose* $K(t) = \int_0^t b(s)ds$. *Montrer en utilisant la formule d'intégration par parties, qu'on a*

$$r_t = e^{-K(t)} \Big[ r_0 + \int_0^t e^{K(u)} a(u)du + \int_0^t e^{K(u)} \sigma(u) d\widetilde{W}_u \Big].$$

2. *Montrer que* $(r_t)_{t \geqslant 0}$ *est processus gaussien de fonction moyenne*

$$m_r(t) = e^{-K(t)} \Big[ r_0 + \int_0^t e^{K(u)} a(u)du \Big], \quad \forall t \geqslant 0$$

*et de fonction de covariance*

$$\rho_r(s,t) = e^{-K(s)-K(t)} \int_0^{s\wedge t} e^{2K(u)} \sigma^2(u)du, \quad \forall s,\, t \geqslant 0.$$

3. *Soit* $T > 0$ *une date d'échéance donnée. Montrer que* $\displaystyle\int_0^T r_u du$ *est une variable aléatoire gaussienne de moyenne*

$$\mathbb{E}\Big( \int_0^T r_u du \Big) = \int_0^T e^{-K(t)} \Big[ r_0 + \int_0^t e^{K(u)} a(u)du \Big] dt,$$

*et de variance*

$$var\Big( \int_0^T r_u du \Big) = \int_0^T e^{2K(v)} \sigma^2(v) \Big( \int_v^T e^{-K(u)} du \Big)^2 dv.$$

4. *En utilisant l'exercice 1, montrer que le prix du zéro-coupon à* $t = 0$ *de maturité* $T$ *est donné par :*

$$B(0,T) = \exp\{-r(0)C(0,T) - A(0,T)\}$$

*avec*

$$C(0,T) = \int_0^T e^{-K(y)} dy,$$

*et*

$$A(0,T) = \int_0^T \int_0^t e^{-K(t)+K(u)} a(u)dudt - \frac{1}{2} \int_0^T e^{2K(v)} \sigma^2(v) \Big( \int_v^T e^{-K(y)} dy \Big)^2 dv.$$

*5) En utilisant le théorème de Fubini, montrer que*

$$A(0,T) = \int_0^T \Big[ e^{K(v)} a(v) \Big( \int_v^T e^{-K(y)} dy \Big) - \frac{1}{2} e^{2K(v)} \sigma^2(v) \Big( \int_v^T e^{-K(y)} dy \Big)^2 \Big] dv.$$

**Exercice 4.** *Modèle de CIR*
*Dans le modèle des taux d'intérêts de CIR i.e Cox-Ingersoll-Ross, le processus taux d'intérêt vérifie*

$$dr_t = (\alpha - \beta\, r_t)\, dt + \sigma\, \sqrt{r_t}\, d\tilde{W}_t, \qquad \textit{sous } \tilde{\mathbb{P}}$$

*avec* $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$. *le prix de OZC est donnée par* $B(t,T) = u(t, r_t)$ *avec* $u(t,x)$ *une fonction qui est solution de l'EDP*

$$u_t + (\alpha - \beta x)\, u_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x u_{xx} - x\, u = 0, \qquad u(T,.) = 1\,.$$

*Trouver explicitement* $u(t,x)$ *en supposant que* $u(t,x) := \exp\big(C(t)x + D(t)\,\big)$ *où* $C$ *et* $D$ *deux fonctions à déterminer.*