ESPRIT & Le Mans Université
Institut du Risque et de l'Assurance
A. Matoussi

Année universitaire 19-20
5ème DS & Master 2 Actuariat
MAAF

Fiche 6.

Exercice 1. *Dans le modèle de Cox-Ingersol-Ross, la dynamique du taux d'intérêt est modélisé par :*

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

avec a, b et σ sont des constantes strictement positives et $\{W_t, t \geqslant 0\}$ est un mouvement Brownien défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. *Montrer que le processus $X_t = e^{at}r_t$ suit la dynamique suivante*

$$dX_t = abe^{at}dt + \sigma e^{at/2}\sqrt{X_t}dW_t, \ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

2. *En admettant que $\mathbb{E}[\int_0^t e^{au/2}\sqrt{X_u}dW_u] = 0$ pour tout $t \geqslant 0$, montrer que*

$$\mathbb{E}[X_t] = X_0 + ab\int_0^t e^{au}du \text{ pour tout } t \geqslant 0.$$

3. *Montrer que $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[r_t] = b$.*
4. *Montrer que le processus $(r_t^2)_{t \geqslant 0}$ suit la dynamique suivante*

$$dr_t^2 = \left[(2ab + \sigma^2)r_t - 2ar_t^2\right]dt + 2\sigma r_t^{3/2}dW_t, \ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

5. *En admettant que $\mathbb{E}[\int_0^t 2\sigma r_u^{3/2}dW_u] = 0$ pour tout $t \geqslant 0$, en déduire que*

$$\mathbb{E}[r_t^2] = r_0^2 + (2ab + \sigma^2)\int_0^t \mathbb{E}[r_u]du - 2a\int_0^t \mathbb{E}[r_u^2]du.$$

6. *On introduit la fonction $F(t) := e^{2at}\int_0^t \mathbb{E}[r_u^2]du$. Montrer que*

$$F^{'}(t) = e^{2at}\big[r_0^2 + (2ab + \sigma^2)\int_0^t \mathbb{E}[r_u]du\big].$$

7. *Calculer $F^{'}(t)$ puis $F(t)$.*
8. *Montrer que*

$$\mathbb{E}[r_t^2] = e^{-2at}\big[-2aF(t) + F^{'}(t)\big],$$

et en déduire une expression de $\mathbb{E}[r_t^2]$ en fonction des paramètes du modèle.

Exercice 2. *Le modèle de Garman-Kohlhagen est le modèle le plus couramment utilisé pour l'évaluation et la couverture des options de change. Il est directement inspiré du modèle de Black-Scholes. Pour fixer les idées, nous nous intéresserons à des options "dollar contre euro". Par exemple, un call européen, d'échéance T, sur un dollar au cours d'exercice K, est le droit d'acheter, à la date T, un dollar pour K euros.*

I. *Nous noterons S_t le cours du dollar à l'instant t, c'est-à-dire le nombre de euros nécessaires à l'achat d'un dollar. L'évolution de S_t au cours du temps est modélisée par l'équation suivante :*

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$$

où $(W_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien standard sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, μ et σ des nombres réels, avec $\sigma > 0$. On notera $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ la filtration brownienne standard .

1. *Expliciter S_t en fonction S_0, t et W_t. Calculer l'espérance de S_t.*
2. *Montrer que si $\mu > 0$, le processus $(S_t)_{t\in[0,T]}$ est une sous-martingale.*
3. *Soit $U_t = 1/S_t$ le taux de conversion des euros en dollars. Montrer que U_t vérifie l'EDS suivante :*

$$dU_t = (\sigma^2 - \mu) U_t \, dt - \sigma U_t \, dW_t$$

En déduire que si $0 < \mu < \sigma^2$, les processus $(S_t)_{t\in[0,T]}$ et $(U_t)_{t\in[0,T]}$ sont, l'un et l'autre, des sous-martingales. En quoi cela peu-il sembler pardoxal ?

II. *On se propose d'évaluer et de couvrir un call européen, d'échéance T, sur un dollar, au cours d'exercice K, par une démarche analogue à celle du modèle de Black-Scholes. Le vendeur de l'option, à partir de la richesse initiale que représente la prime, va construire une stratégie, définissant à chaque instant t un portfeuille contenant H_t^0 euros et H_t dollars, de façon à produire, à la date T, une richesse égale en euros à $(S_T - K)^+$.*

A une date t, la valeur, en euros, d'un portefeuille contenant H_t^0 euros et H_t dollars est évidemment

$$V_t = H_t^0 + H_t S_t \tag{1}$$

Nous supposerons que les euros sont placés (ou empruntés) au taux r_0 (taux domestique) et les dollars au taux r_1 (taux étranger). Une stratégie autofinancé sera donc définie par un processus $\big((H_t^0, H_t)\big)_{t\in[0,T]}$ adapté, tel que

$$dV_t = r_0 H_t^0 dt + r_1 H_t S_t dt + H_t dS_t \tag{2}$$

*où V_t est défini par l'équation (1) et S_t par l'équation (**??**).*

1. *Soit $\widetilde{V}_t = e^{-r_0 t} V_t$ la valeur actualisée du portefeuille. Démontrer l'égalité :*

$$d\widetilde{V}_t = H_t e^{-r_0 t} S_t (\mu + r_1 - r_0) dt + H_t e^{-r_0 t} S_t \sigma dW_t.$$

2. *Montrer qu'il existe une probabilité* $\widetilde{\mathbb{P}}$*, équivalente à* $\mathbb{P}$*, sous laquelle le processus*

$$\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu + r_1 - r_0}{\sigma}\, t$$

est un mouvement brownien standard.

3. *Montrer que la valeur actualisée du portefeuille est une martingale sous* $\widetilde{\mathbb{P}}$*.*

4. *Montrer que si* V_t *est la valeur du portefeuille de couverture du call* $\xi = (S_T - K)^+$*, alors pour tout* $t \in [0,T]$*,* $V_t = F(t, S_t)$ *où*

$$F(t,x) = \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\left(xe^{-(r_1+(\sigma^2/2)\,)(T-t)+\sigma(\widetilde{W}_T-\widetilde{W}_t)} - Ke^{-r_0(T-t)}\right)^+\right]$$

4. Montrer que

$$F(t,x) = e^{-r_1(T-t)}xN(d_1) - Ke^{-r_0(T-t)}N(d_2)$$

où N *est la fonction de répartition de la loi normale centrée érduite, et :*

$$d_1 = \frac{\log(x/K) + (r_0 - r_1 + (\sigma^2/2)\,)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2 = \frac{\log(x/K) + (r_0 - r_1 - (\sigma^2/2)\,)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

5. *On demande maintenant de montrer que l'option est effectivement replicable :*

   (a) On pose $\widetilde{S}_t = e^{(r_1-r_0)t}S_t$*. Montrer l'égalité :*

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t d\widetilde{W}_t$$

   (b) Soit $\widetilde{F}(t,x) = e^{-r_0 t}F(t, xe^{(r_0-r_1)t})$ *où* F *est la fonction définie dans la question 4). On pose* $C_t = F(t, S_t)$ *et* $\widetilde{C}_t = e^{-r_0 t}C_t = \widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t)$*. Montrer l'égalité :*

$$d\widetilde{C}_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)\sigma e^{-r_0 t} S_t d\widetilde{W}_t$$

   (c) En déduire que le call est simulable et expliciter le portfeuille $\big((H_t^0, H_t)\big)_{t\in[0,T]}$ *simulant cette option.*

6. *Ecrire une relation de parité call-put, analogue à celle vue en cours pour les actions (on pourra expliciter la différence* $C_t - P_t$ *sous la probabilité risque neutre* $\mathbb{P}$ *où* C_t *(resp.* P_t*) désigne le prix du call (resp. put) sur "dollar contre euro").*