Actuariat 3 - Modélisations avancées en assurance vie

Chapitre 1 - Modèles de Survie

A. Matoussi

Année 2018-2019

Table des matières

1 Durée de survie : premières définitions

Le terme durée de survie désigne le temps aléatoire écoulé avant la survenance d'un événement. L'événement terminal peut être la mort d'un individu, l'apparition d'une maladie, la perte d'autonomie, mais également la panne d'une machine (en fiabilité) ou bien la survenance d'un sinistre en assurance non vie.
Dans cette section, nous considérerons un individu dont la durée de vie est modélisée par la variable aléatoire continue T., de fonction de répartition F :

$$F(a) = \mathbb{P}(T \leq a), \quad \forall\, a \geq 0.$$

Dans de nombreux problèmes en assurance vie, la loi de la variable aléatoire T est plutà´t caractérisée par la fonction de survie.

Définition 1 (Fonction de survie)**.** On appelle fonction de survie la fonction S définie par :

$$S(a) = 1 - F(a) = \mathbb{P}(T > a), \quad \forall a\ \geq 0. \tag{1}$$

S est une fonction décroissante, avec $S(0) = 1$ et $\lim_{a\to+\infty} S(a) = 0$ (on ne peut pas être immortel).

Définition 2 (Durée de vie résiduelle)**.** On appelle durée de vie résiduelle à l'âge x la variable aléatoire *positive* $T_x = T - x$. On peut interpréter T_x comme la durée de vie restante à un individu, *conditionnellement au fait qu'il ait atteint l'âge* x. Plus formellement,

$$\mathbb{P}(T_x \leq a) = \mathbb{P}(T \leq a + x \mid T > x), \quad \forall a \geq 0. \tag{2}$$

On note F_x et S_x les fonctions de répartition et de survie de T_x. En particulier, $T = T_0$, $F = F_0$ et $S = S_0$.

Le lemme suivant, qui est une conséquence directe de la Définition 2, est très utile.

Lemme 3. *Soit* $t, x \geq 0$*. Pour tout* $u \geq 0$ *:*

$$S_u(t + x) = S_u(x)S_{u+x}(t). \tag{3}$$

En particulier, $S_x(t) = \dfrac{S_0(t+x)}{S_0(x)}$ et l'égalité peut s'interpréter de la manière suivante : la probabilité de survivre jusqu'à l'âge $t+x$ est le produit de la probabilité de survivre jusqu'à l'âge x, et de la probabilité du survivre "t années" sachant que l'on a survécu jusqu'à l'âge x.

Démonstration. Par application de la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} S_u(t + x) &= \mathbb{P}(T_0 > t + x + u\ |T_0 > u) \\ &= \frac{S_0(t + x + u)}{S_0(u)} \\ &= \frac{S_0(u + x)}{S_0(u)} \frac{S_0(t + x + u)}{S_0(u + x)} \\ &= S_u(x)S_{u+x}(t). \end{aligned}$$

□

1.1 Notations actuarielles

— Probabilité de survie :

$$ {}_tp_x = P(T > x+t \mid T > x) = S_x(t), $$

— Probabilité de décès :

$$ {}_tq_x = P(T \leq x+t \mid T > x) = F_x(t). $$

— La probabilité de vie temporaire est définie par

$$ {}_{s|t}q_x = P(x+s < T \leq x+s+t \mid T > x) = P(T_x \in]s, s+t] \mid T_x > 0), \tag{4} $$

Nous utiliserons également les notations suivantes :

$$ {}_1p_x = p_x, \quad {}_1q_x = q_x. \quad {}_{0|t}q_x = {}_tq_x, \quad {}_{s|\infty}q_x = {}_sp_x. $$

1.2 Propriétés

Par les relations de conditionnement, on peut montrer

Lemme 4.

$$ {}_{s|t}q_x = {}_sp_x - {}_{s+t}p_x, \quad {}_{s+t}p_x = {}_sp_x \times {}_tp_{x+s}. \tag{5} $$

Démonstration. En effet, partons de (4)

$$ \begin{aligned} {}_{s|t}q_x &= P(s < T_x \leq s+t \mid T_x > 0) = P(T_x \in]s, +\infty[\backslash]s+t, +\infty[\mid T_x > 0) \\ &= P(T_x \in]s, +\infty[\mid T_x > 0) - P(T_x \in]s+t, +\infty[\mid T_x > 0) \end{aligned} $$

et

$$ \begin{aligned} {}_{s+t}p_x &= P(T_x > s+t \mid T_x > 0) = P(T_x > s+t \mid T_x > 0, T_x > s)P(T_x > s \mid T_x > 0) \\ &= P(T_x > s+t \mid T_x > s)P(T_x > s \mid T_x > 0) \end{aligned} $$

□

Exercice 1.

1. On considère la fonction de survie suivante $S(x) = 1 - \frac{x}{120}$. Calculez $p_{50}, {}_2p_{50}$ et ${}_{10}q_{75}$.
2. On considère les probabilités suivantes $p_{20} = 0.95$, ${}_2p_{20} = 0.9$ et ${}_2p_{22} = 0.8$. Calculez ${}_3p_{21}$.

1.3 Force de mortalité : caractérisation de la loi de survie

La loi de probabilité de la variable aléatoire T peut être caractérisée des façons suivantes :

— la fonction de répartition $F_x(t) = P(T_x \leq t \mid T_x > 0) = {}_tq_x$,
— la fonction de survie $S_x(t) = P(T_x > t \mid T_x > 0) = {}_tp_x$,

Le concept de force (ou intensité) de mortalité est central pour la modélisation de durées de survie. Cette fonction de l'âge permet de décrire les lois des variables aléatoires $\{T_x\}_{x \geq 0}$ introduites dans la section précédente de manière unifiée.

1.3.1 Définition : force de mortalité

La force (ou taux) de mortalité à l'âge x d'un individu est notée μ_x, qu'on note aussi $\mu_x(0)$. Intuitivement, la quantité $\mu_x(0)\mathrm{d}x$ correspond à la probabilité qu'un individu ayant atteint l'âge x meurt avant l'age $x + \mathrm{d}x$:

$$\mu_x(0)\mathrm{d}x \simeq \mathbb{P}(T_0 \leq x + \mathrm{d}x \,|T_0 > x).$$

Nous allons maintenant donner une définition plus formelle de la force de mortalité. Dans le reste de ce cours, nous supposerons que l'hypothèse suivant est vérifiée :

Définition 5 (Force de mortalité)**.** La force de mortalité à l'âge x est définie pour tout $x \geq 0$ par :

$$\mu_x(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\mathbb{P}(T_x \leq h) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}(1 - S_x(h)). \tag{6}$$

Hypothèse 1. la fonction de survie S_0 définie par (1) est dérivable. En particulier, $S' \leq 0$ et S_x est également dérivable, $\forall x \geq 0$.

On peut donc définir la densité de survie $f_x(t) = F_x'(t) = -S_x'(t)$. Alors on a :

Lemme 6. *1. Pour tout t, $x \geq 0$,*

$$\mu_x(0) = -\frac{S_x'(0)}{S_x(0)}, \tag{7}$$

$$\mu_x(t) = -\frac{S_x'(t)}{S_x(t)} = \frac{f_x(t)}{S_x(t)}, \tag{8}$$

$$S_x(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\mathrm{d}s\right) = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_0(s)\mathrm{d}s\right), \quad \forall\, t \geq 0. \tag{9}$$

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_x \leq h) &= \mathbb{P}(T_0 \leq x + h \,|T_0 > x) \\
&= \frac{\mathbb{P}(x < T_0 \leq x + h)}{\mathbb{P}(T_0 > x)} \\
&= \frac{1}{S_0(x)}(S_0(x) - S_0(x + h)).
\end{aligned}$$

En divisant, chaque terme par h et en passant à la limite, on obtient (7). (9) est obtenue en remarquant que $\mu = -\ln(S_0)'$. On peut relier la fonction de taux de mortalité pour tout age $x+t$ avec $t > 0$ a la distribution de T_x. On assume que x est fixe et t est variable, alors d'après (3)

$$\begin{aligned}
\mu_{x+t} &= -\frac{1}{S_0(x+t)}(S_0(x+t))', \\
&= -\frac{1}{S_0(x+t)}(S_0(x)S_x(t))', \\
&= -\frac{S_0(x)}{S_0(x+t)}(S_x(t))'. \\
&= \frac{-1}{S_x(t)}(S_x(t))', \\
&= \frac{f_x(t)}{S_x(t)}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 2. Soit $F_0(t) = 1 - (1 - \frac{t}{120})^{1/6}$, pour $0 \leq t \leq 120$ et $F_0(t) = 1$, pour $t > 120$.

1. Calculer la probabilité que :
   — un nouveau nee survit après l'age de 30 ans,
   — un individu age de 30 ans meut avant l'age de 50 ans,
   — un individu age de 40 ans survit après l'age de 65 ans.
2. Calculer la force de mortalité μ_x.

Exercice 3. Un assureur suppose que la force de mortalité de ses assurés fumeurs est deux fois plus grande que la force de mortalité des non fumeurs. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$S_x^f(t) = (S_x(t))^2,$$

où S_x^f est la fonction de survie à l'âge x des fumeurs et S_x celle des non-fumeurs.

2 Modèles de durées

2.1 Lois paramétriques usuelles

a) **Loi sans mémoire** : Lorsque $S_0(a+x) = S_0(a)S_0(a)$ ($\Leftrightarrow \mathbb{P}(T_x > a) = \mathbb{P}(T_0 > a)$), on peut montrer que la loi de T_0 est nécessairement une loi exponentielle, et il existe $\mu > 0$ tel que

$$S_0(a) = e^{-\mu a}.$$

La loi est dite sans mémoire, puisque la probabilité de vivre x année de plus ne dépend pas de l'âge de l'individu. La loi exponentielle n'est donc pas adaptée pour modéliser la longévité humaine, puisque la probabilité de vivre encore 10 ans si on a 20 ou 80 ans n'est évidemment pas la même.

b) **Loi de Moivre (1729)** : Pour un âge limite ω fixé, l'hypothèse est $T \sim \mathcal{U}(0, \omega)$. On peut alors montrer que pour tout $0 \leq x \leq x + a \leq \omega$:

$$S_x(a) = \frac{\omega - (x+a)}{\omega - x}, \quad \mu_a = \frac{1}{\omega - a}.$$

Nous avons vu que les lois exponentielles ou uniformes ne pouvaient refléter la mortalité humaine de manière réaliste. Nous introduisons dans cette section deux lois plus appropriées à la modélisation de la durée de vie humaine : les lois de Gompertz (1825) et Makeham (1860). Ces deux lois sont définies à partir de la force de mortalité. -

c) **Loi de Gompertz** : Au début du 19ème siècle, Gompertz (1779-1865), un actuaire anglais, cherche à améliorer l'estimation des probabilités de survie pour la vente de rentes viagères (life annuities). En 1825, il présente sont modèle devant la Société Royal de Londres, décrivant la force de mortalité comme une fonction de deux paramètres, augmentant exponentiellement avec l'âge :

$$\mu_a = \alpha e^{\beta a}, \quad \forall a \geq 0, \tag{10}$$

où le paramètre β peut-être interprété comme une "vitesse de viellissement".
La loi de Gompertz a été appliquée à de nombreuses espèces, notamment pour comparer

la vitesse de vieillissement de différentes espèces de mammifères, et est toujours considérée comme une "loi fondamentale du vieillissement".

Exercice 4. Donner l'expression de la fonction de survie de la loi de Gompertz.

L'équation (10) est souvent réécrite sous la forme

$$\ln(\mu(a)) = \alpha + \beta a,$$

qui décrit le logarithme de la force de mortalité comme une fonction linéaire de l'âge. Comme nous le verrons dans les chapitres suivants, on représente le plus souvent la fonction $\ln(\mu)$ plutà´t que la force de mortalité elle-même. -

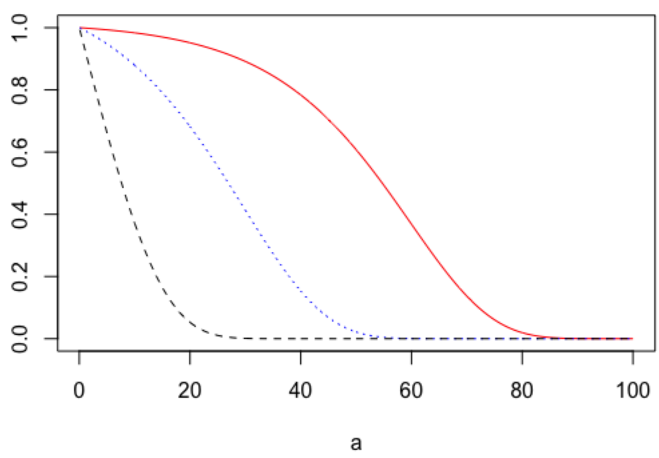

FIGURE 1 – Fonction de survie S_x pour une loi de Gompertz de paramètre $\alpha = 0.003$ et $\beta = 0.068$

Exercice 5. La figure ci-dessus représente la fonction de survie S_x de la loi de Gompertz pour $x = 20, 50$ et $x = 80$ ans. Trouvez quelles courbes correspondent au différentes valeur de x.

d) **Loi de Makeham** : Cependant, la loi de Gompertz ne permet de représenter fidèlement la mortalité humaine à tous les âges, et plus spécifiquement aux jeunes âges. Le modèle de Makeham est une extension simple de la loi de Gompertz permettant de mieux prendre en compte la mortalité accidentelle aux jeunes âge :

$$\mu(a) = \gamma + \alpha \exp(\beta a), \forall a \geq 0. \tag{11}$$

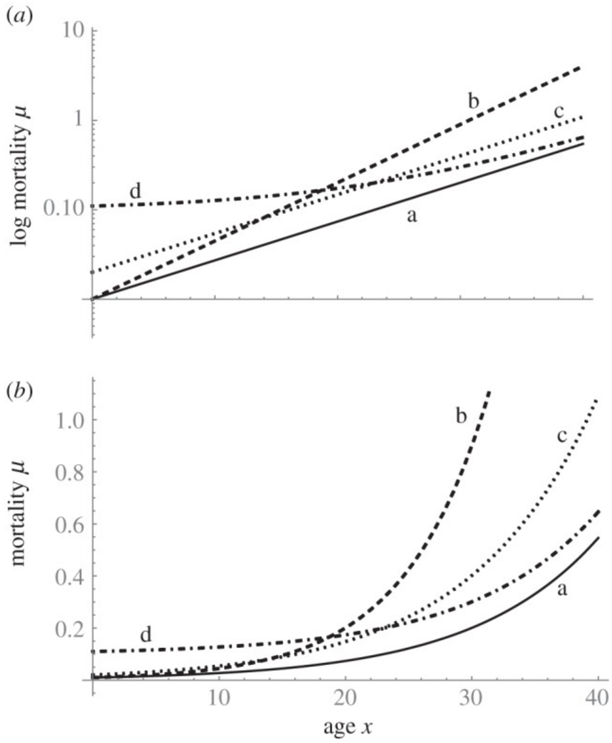

FIGURE 2 – Force de mortalité et log-mortalité dans le modèle de Gompertz-Makeham (Figure 1, Kirkwood (2015)). Paramètres : a : $\alpha = 0.01, \beta = 0.1, \gamma = 0$; b : $\alpha = 0.01, \beta = 0.15, \gamma = 0$; c :$\alpha = 0.02, \beta = 0.1, \gamma = 0$; d : $\alpha = 0.01, \beta = 0.1, \gamma = 0.1$.

Exercice 6. Modèle suivant Loi de Weibull (1939) : Soient $k > 0$ et $n > 0$. L'hypothèse est $\mu_x = kx^n$. Monter que

$$_tp_x = \exp[-k/(n+1)((x+t)^n - x^n)]$$

2.2 Les tables de mortalité : estimation non-paramérique

— Notation :

En pratique les paramètres sont calibrés des jeux de données de survie. Ces jeux de données sont appelés tables de mortalité et se présente sous la forme suivante

x	l_x	d_x
0	l_0	d_0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	0	d_n

avec x l'Ã¢ge, l_x le nombre de d'individus d'âge au moins x et $d_x = l_x - l_{x+1}$ le nombre de décès à l'âge x. Les tables de mortalité représente la survie de l_0 individus (typiquement l_0) pendant la durée d'observation. Pour les âges entiers, des estimateurs non-paramétriques simples des probabilités p_x et q_x sont donnés par

$$\hat{p}_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad \hat{q}_x = \frac{d_x}{l_x} = 1 - \hat{p}_x.$$

On en déduit pour t entier

$$\widehat{_tp_x} = \hat{p}_x \dots \hat{p}_{x+t-1} = \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

— Un exemple de table de mortalité TD8890 est donné dans le tableau 1 issue d'une étude entre 1988 et 1990 sur la population française masculine basées sur des données de l'INSEE. La table a été officiellement adopté par le décret du 27 avril 1993 en assurance vie. Une table équivalente TV8890 est disponible pour la population féminine.

x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x
0	100000	12	98793	24	97677	36	95676	48	91833	60	81884	72	61285	84	25962	96	1635
1	99129	13	98771	25	97524	37	95463	49	91332	61	80602	73	58911	85	22780	97	1115
2	99057	14	98745	26	97373	38	95237	50	90778	62	79243	74	56416	86	19725	98	740
3	99010	15	98712	27	97222	39	94997	51	90171	63	77807	75	53818	87	16843	99	453
4	98977	16	98667	28	97070	40	94746	52	89511	64	76295	76	51086	88	14133	100	263
5	98948	17	98606	29	96916	41	94476	53	88791	65	74720	77	48251	89	11625	101	145
6	98921	18	98520	30	96759	42	94182	54	88011	66	73075	78	45284	90	9389	102	76
7	98897	19	98406	31	96597	43	93868	55	87165	67	71366	79	42203	91	7438	103	37
8	98876	20	98277	32	96429	44	93515	56	86241	68	69559	80	39041	92	5763	104	17
9	98855	21	98137	33	96255	45	93133	57	85256	69	67655	81	35824	93	4350	105	7
10	98835	22	97987	34	96071	46	92727	58	84211	70	65649	82	32518	94	3211	106	2
11	98814	23	97830	35	95878	47	92295	59	83083	71	63543	83	29220	95	2315	107	0

Table 1 – Table TD8890

Sur la table TD8890, les estimateurs simples de p_x et q_x ont étés calculés et sont donnés dans le tableau 2.

x	l_x	d_x	p_x	q_x	x	l_x	d_x	p_x	q_x
0	100000	871	0.99129	0.00871	60	81884	1282	0.9843437	0.01565629
1	99129	72	0.9992737	0.0007263263	61	80602	1359	0.9831394	0.01686062
2	99057	47	0.9995255	0.0004744743	62	79243	1436	0.9818785	0.01812147
3	99010	33	0.9996667	0.0003332997	63	77807	1512	0.9805673	0.0194327
4	98977	29	0.999707	0.0002929974	64	76295	1575	0.9793564	0.02064355

Table 2 – Estimation de probabilités viagères sur TD8890

2.3 Répartition des décèes dans l'année

Par construction, les tables de mortalité ne présentent pas les âges non entier. Ainsi, si on le souhaite estimer les probabilités viagères pour des âges non-entiers, alors on doit faire des hypothèses de répartition des décès dans l'année. Il en existe 3 types.

2.3.1 Répartition uniforme dans l'année

La répartition uniforme dans l'année suppose $T_x = \lfloor T_x \rfloor + U$ où $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ indépendante de T_x. Ainsi pour $t \in]0,1[$

$$_tq_x = P(T_x \leq t | T_x > 0) = P(\lfloor T_x \rfloor + U \leq t | T_x > 0) = P(\lfloor T_x \rfloor = 0, U \leq t | T_x > 0) = P(\lfloor T_x \rfloor = 0 | T_x > 0) P(U \leq t)$$

donc c'est une interpolation linéaire puisque pour $t \in]0,1[$, $_tq_x = tq_x$ et $_tp_x = 1 - tq_x$. Le taux instantané de mortalitéobtenu par dérivation de $\log {}_tp_x$ est donc croissant

$$\mu_x(t) = -\frac{{}_tp_x'}{{}_tp_x} = \frac{q_x}{1 - tq_x}.$$

2.3.2 Hypothèse de Balducci

L'hypothèse de Balducci suppose pour $t \in]0,1[$, ${}_tq_x = \frac{tq_x}{1-(1-t)q_x}$ Ainsi

$$ {}_tp_x = 1 - {}_tq_x = 1 - \frac{tq_x}{1-(1-t)q_x} = 1 - \frac{tq_x}{1-q_x+tq_x} = 1 - \frac{tq_x}{p_x+tq_x} $$

donc ${}_tp_x = p_x/(p_x + tq_x)$, c'est une interpolation hyperbolique puisque

$$ \frac{1}{{}_tp_x} = \frac{p_x + t(1-p_x)}{p_x} = 1 + t\frac{1}{p_x} + t(-1) = t\frac{1}{p_x} + (1-t)\frac{1}{p_{x+1}}. $$

L'hypothèse de Balducci peut se réecrire

$$ {}_{1-t}q_{t+x} = (1-t)q_x $$

Le taux instantané de mortalité obtenu par dérivation de $\log {}_tp_x$ est donc décroissant

$$ \mu_x(t) = -\frac{{}_tp_x'}{{}_tp_x} = -\frac{-p_xq_x/(p_x+tq_x)^2}{p_x/(p_x+tq_x)} = \frac{q_x}{p_x+tq_x}. $$

2.3.3 Constance du taux de mortalité

L'hypothèse de constance du taux de mortalité suppose pour $t \in]0,1[$, $\mu_{t+x} = \mu_x$. Ainsi

$$ {}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) = \exp\left(-\int_0^t \mu_x ds\right) = \exp\left(-t\mu_x\right). $$

donc ${}_tp_x = (p_x)^t$. Le taux instantané de mortalité est constant par construction.

2.3.4 Choix usuel

Le choix se fait par des critèress qualitatifs. L'hypothèse de Balducci n'est pas raisonnable car les personnes rajeunissent entre deux ages entiers. Les deux autres hypothèses sont plus pertinentes mais il est possible d'ordonner les fonctions de survie. Posons $t = k + r > 0$ avec $k = \lfloor t \rfloor$ et $r = \mathrm{frac}(t)$.

$$ {}_tp_x = P(T_x \leq k | T_x > 0) P(T_x \leq k+r | T_x > 0, T_x > k) = {}_kp_x P(T_{x+k} \leq r | T_{x+k} > 0) = {}_kp_x \times {}_rp_{x+k} $$

Pour les deux hypothÃ¨ses restantes, on obtient

$$ {}_tp_x = {}_{\lfloor t \rfloor}p_x \times \begin{cases} 1 - r(1-p_{x+k}) & \text{si répart. unif.} \\ (p_{x+k})^r & \text{si const. taux mortalité} \end{cases} $$

En utilisant $(1+y)^r \leq 1 + ry$ pour $0 \leq r \leq 1$, on montre $1 - r(1-p_{x+k}) \geq (p_{x+k})^r$. Ainsi la fonction de survie sous hypothèse d'uniforme répartition est plus grande que la fonction de survie sous hypothèse de constance du taux de mortalité.

Dans le cadre de garantie décès, il est plus prudent d'utiliser l'hypothèse de constance du taux de mortalité, et dans le cadre de garantie rente, d'utiliser l'hypothèse d'uniforme répartition.

3 Espérance de vie

4 Espérance de vie et variance

Dans la suite de ce chapitre, nous supposerons que les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

Hypothèse 2. $\lim_{t\to+\infty} tS_0(t) = 0$.

Hypothèse 3. $\lim_{t\to+\infty} t^2S_0(t) = 0$.

Les Hypothèses 2 et 3 permettent d'assurer que la variable aléatoire T_0 soit d'espérance et de variance finie. Ces hypothèses ne sont pas particulièrement restrictives lorsque l'on souhaite modéliser la durée humaine. On appelle espérance de vie à l'âge x le nombre moyen d'années restant à vivre à un individu d'âge x,

$$\overset{\circ}{e}_x = \mathbb{E}[T_x] = \int_0^{+\infty} af_x(a)\mathrm{d}a. \tag{12}$$

Exercice 7.

1. Montrer l'égalité suivante :
$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{S_0(x)}\int_x^{+\infty} S_0(a)\mathrm{d}a. \tag{13}$$
2. En déduire que :
$$\overset{\circ}{e}_x \leq \overset{\circ}{e}_{x+1} + 1.$$
3. Peut-on donner une expression explicite de l'espérance de vie lorsque T_0 suit une loi de Gompertz ?

Sous l'hypothèse 3, les variables T_x possèdent une variance finie, $\sigma^2_{T_x} = \mathbb{E}[T_x^2] - (\overset{\circ}{e}_x)^2$. On peut également obtenir une expression pour $\mathbb{E}[T_x^2]$ par intégration par partie :

$$\mathbb{E}[T_x^2] = \frac{2}{S_0(x)}\int_x^{+\infty} aS_0(a)\mathrm{d}a.$$

x	$\overset{\circ}{e}_x$	σ_{T_x}	$x + \overset{\circ}{e}_x$
0	71.938	18.074	71.938
20	52.703	16.857	72.703
40	34.752	14.477	74.752
60	19.550	10.693	79.550
70	13.555	8.449	83.555
80	8.848	6.224	88.848
90	5.433	4.246	95.433
100	3.152	2.682	103.152

Table 3 – Valeur de l'espérance de vie résiduelle $\overset{\circ}{e}_x$, de l'écart-type $\sqrt{\mathrm{Var}(T_x)}$ et de la durée de vie moyenne $x + \overset{\circ}{e}_x$, pour différentes valeurs de x et pour le modèle de Gompertz de paramètre $\alpha = 0.0003$ et $\beta = 0.068$.

5 Loi des grands nombres et effet de mutualisation

Considérons un produit d'assurance, payant une quantité fixée c à la maturité t si l'individu est toujours en vie. On considère un portefeuille composé de N assurés de même âge x, dont les durées de vies résiduelles $T_x^1, ..., T_x^N$ sont supposées identiquement distribuées. Le flux à payer par l'assureur en t est donc :

$$F_t = c \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{T_x^i \geq t\}}$$

Par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{N} F_t \xrightarrow[N \to +\infty]{\text{p.s}} c\mathbb{P}(T_x \geq t) = c_t p_x.$$

On voit donc que quand le nombre d'assurés est "très grand", le flux à payer en t est "très proche" de la quantité déterministe cN_tp_x qui correspond à l'espérance de F_t (valeur probable non actualisé). On constate donc un effet de mutualisation qui permet à l'assureur de réduire les risques liés à l'incertitude de la durée de vie des assurés.
Cependant, il arrive fréquemment que le nombre d'assurés ne soit pas "assez grand", et il est alors très important d'évaluer le risque auquel fait face l'assureur, en particulier quand la variance de T_x est grande. Lorsque T_x suit une loi de Gompertz de paramètre $\alpha = 0.0003$ et $\beta = 0.068$, on peut représenter l'évolution de l'écart-type relatif de $\frac{1}{N}F_t$ [1] en fonction du nombre d'assurés dans le portefeuille :

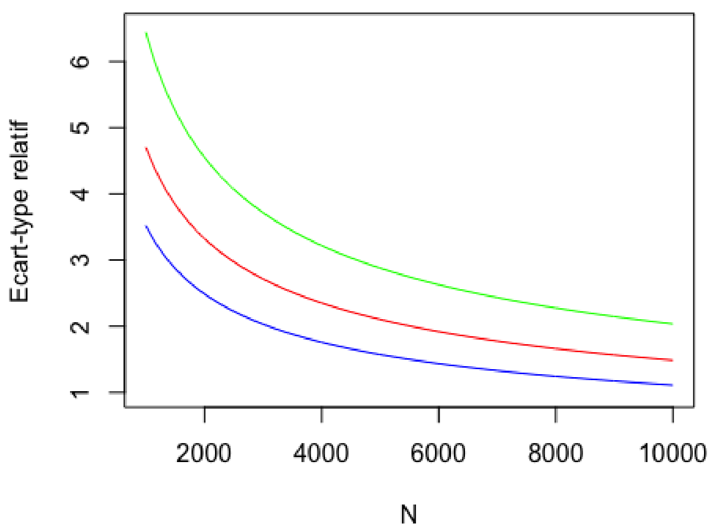

FIGURE 3 – Évolution de l'écart-type relatif de $\frac{1}{N}F_t$ en fonction de N, pour $t = 25$ et pour différentes valeurs de $x = 50$ (bleu), $x = 60$ (rouge), et $x = 65$ (vert).

De plus, faire l'hypothèse que les durées de vie des assurés sont indépendantes et identiquement

1. L'écart-type relatif (exprimé en pourcentage) d'une variable aléatoire X d'écart-type σ et moyenne μ est égal à $\frac{\sigma}{\mu}100$.

distribuées est souvent irréaliste.
D'une part, les durée de vie des assurés peuvent être affectées par des facteurs communs externes (épidémies, facteurs socio-économiques...), ou bien corrélées entre elles. Par exemple, si deux assurés sont mariés, il est bien connu que le décès de l'un des conjoints a un impact sur la durée de vie restante de l'autre conjoint. L'hypothèse d'homogénéité des assurés est également discutable. Pour reprendre l'exemple de l'exercice 3, il est évident que les durées de vie d'un assuré fumeur et d'un assuré non fumeur ne seront pas identiquement distribuées.
Enfin, la distribution même de T_x est bien souvent inconnue, et le problème de son estimation est à la source de tout un domaine de recherche, sur lequel nous reviendront en détail au chapitre 3.

Cet exemple simple permet d'illustrer la complexité du risque de longévité. De plus, nous nous sommes ici uniquement intéressés à la valeur F_t du flux en t. Dans la pratique, on cherche à évaluer le flux actualisé (ou valeur actualisée). La modélisation du taux d'intérêt, dans ce cadre ou les maturités sont longues, constitue également un problème difficile sur lequel nous reviendront au chapitre suivant.