Chapitre 3: Optimisation avec contrainte

Dans cette partie on s'intéresse au cas où le problème de minimisation comporte des contraintes. Plus précisément on se donne un sous ensemble $\mathcal{C}$ non vide, fermé de $\mathbb{R}^n$ et on étudie le problème:

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{x \in \mathcal{C}} J(x).$$

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des contraintes.

Remarque 1 *Nous traiterons plus particulièrement le cas où $\mathcal{C}$ est défini par des égalités et des inégalités:*

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \quad \textit{tel que} \quad h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$$

- $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *représente la contrainte en égalité; h est supposée continue.*
- $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *représente la contrainte en inégalité; g est supposée continue.*
- *dans ce cas $\mathcal{C}$ est un ensemble fermé.*

Exemple
On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivantes:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad x + y \leq 1\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 < 1\}$.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x \geq 0 \quad \text{ou} \quad y \geq 0\}$.

Représenter graphiquement chacun de ces ensembles et dire s'il est convexe, fermé et borné.

1 Contraintes en égalité

Le problème $(\mathcal{P})$ se réduit à:

$$\min_{x \in \mathcal{C}} J(x).$$

avec $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \quad \text{tel que} \quad h_1(x) = 0, ..., h_p(x) = 0\}$ Les fonctions h_1,...,h_p sont continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
Condition nécessaire du premier ordre-contraintes en égalité

Théorème 1 *On suppose que:*

- J, h_1,.... et h_p *sont de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^n$.
- *Le problème* $(\mathcal{P})$ *a une solution* x^*.
- *Les* p *vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*:* $(\nabla h_1(x^*), ..., \nabla h_p(x^*)$ *sont linéairement indépendants.*

Alors il existe p *réels* $(\lambda_1^*, ..., \lambda_p^*)$ *tels que:*

$$\nabla J(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Remarque 2 *Les réels* λ_j^* *obtenus par le théorème précédent sont appelés multiplicateurs de Lagrange.*

Exemple
Soit le problème $(\mathcal{P})$:

$$\min_{(x,y)\in\mathcal{C}} J(x, y).$$

avec:

- $J(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 3x - 3y - 1000$
- $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x + y - 20 = 0\}$

Le problème est un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité avec $h(x, y) = x + y - 20$.
J et h sont de classe C^1 On a J est strictement convexe et l'ensemble $\mathcal{C}$ est un fermé. Le problème $(\mathcal{P})$ a une solution.
En utilisant la condition nécessaire du premier ordre-contraintes en égalité, résoudre le problème $(\mathcal{P})$:
On a $\nabla h(x, y) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\nabla J(x, y) + \lambda \nabla h(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

ainsi on obtient:

$$\begin{cases} 10x - 2y - 3 + \lambda = 0 \\ 10y - 2x - 3 + \lambda = 0 \\ x + y = 20 \end{cases} \tag{1.1}$$

2 Contraintes en égalité et en inégalité

Le problème $(\mathcal{P})$ se réduit à:

$$\min_{x \in \mathcal{C}} J(x).$$

avec $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \quad \text{tel que} \quad h_1(x) = 0, ..., h_p(x) = 0, g_1(x) \leq 0, ..., g_q(x) \leq 0\}$
Les fonctions h_1,...,h_p sont continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
Les fonctions g_1,...,g_q sont continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
La condition de Karush-Kuhn-Tucker (CKKT) est donner par le théorème suivant:

Théorème 2 *On suppose que J,h_1,...,h_p,g_1,...,g_q sont de classe C^1. Soit x^* une solution du problème $(\mathcal{P})$. Alors il existe $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_p^*) \in \mathbb{R}^p$ et $\mu^* = (\mu_1^*, ..., \mu_q^*) \in \mathbb{R}^q$ tels que:*

1. $\forall j \in \{1, ..., q\} \qquad \mu_j \geq 0.$
2. $h_1(x^*) = ...h_p(x^*) = 0.$
3. $g_1(x^*) \leq 0, ..., g_q(x^*) \leq 0.$
4. $\forall j \in \{1, ..., q\} \qquad \mu_j^* g_j(x^*) = 0.$
5. $\nabla J(x^*) + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n}.$

L'ensemble des équations de 1 à 5 sont appelées les condtion de Karush-Kuhn-Tucker (CKKT).

Remarque 3 *On appelle Lagrangien du problème $(\mathcal{P})$ la fonction définie par:*

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = J(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j(x).$$

La relation 5 s'écrit alors:

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0.$$

Où ∇_x désigne le gradient par rapport à la première variable.

Exemple:
On considère le problème suivant:

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} 2x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y \\ \text{sous les contraintes} \\ x^2 + y^2 \leq 53x + y \leq 6 \end{cases} \tag{2.1}$$

Dans ce cas il n'y a pas de contraintes en égalité et on a:

$$\begin{aligned} J(x,y) &= 2x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y \\ g_1(x,y) &= x^2 + y^2 - 5 \\ g_2(x,y) &= 3x + y - 6. \end{aligned}$$

1. L'ensemble $\mathcal{C}$ des contraintes est définie par:

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x^2 + y^2 \leq 5, 3x + y \leq 6\}.$$

   $\mathcal{C}$ est un ensemble fermé borné.

2. Les fonctions J, g_1 et g_2 sont de classe C^1. De plus ces fonctions sont convexes.

Ecrivons les contitions de CKKT, on obtient:

$$(\text{CKKT}) = \begin{cases} \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0, \\ x^2 + y^2 - 5 \leq 0, \quad 3x + y - 6 \leq 0, \\ \mu_1(x^2 + y^2 - 5) = 0, \quad \mu_2(3x + y - 6) = 0, \\ 4x + 2y - 10 + 2\mu_1 x + 3m_2 = 0, \\ 2x + 2y - 10 + 2\mu_1 y + \mu_2 = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Comme il y a deux contraintes en inégalité il y a quatre cas possible:

1. cas 1: $x^2 + y^2 < 5$, $3x + y < 6$ ce qui donne $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

2. cas 2: $x^2 + y^2 = 5$ et $\mu_2 = 0$.

3. cas3: $\mu_1 = 0$ et $3x + y = 6$.

4. cas 4: $x^2 + y^2 = 5$ et $3x + y = 6$.

$\Rightarrow$ Pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$ il faut donc tester chacun de ces cas et résoudre les équations de (CKKT) à chaque fois.

3 Application:

Exercice 1:

Soient $A \in \mathcal{M}_3$ et $b \in \mathbb{R}^3$ définie par:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$J(X) = \frac{1}{2} < AX, X > - < b, X >, \forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que J est strictement convexe sur $\mathbb{R}^3$ et $\lim\limits_{||X|| \to +\infty} J(X) = +\infty$

2. On considère le problème d'optimisation

$$(\mathcal{P}_1) \qquad \min_{X \in \mathbb{K}_1} J(X), \text{ où } \mathbb{K}_1 = \mathbb{R}^3$$

   (a) Expliquer pourquoi le problème $(\mathcal{P}_1)$ admet une unique solution.

   (b) Résoudre $(\mathcal{P}_1)$.

3. Soit le problème d'optimisation suivant:

$$(\mathcal{P}_2) \qquad \min_{X \in \mathbb{K}_2} J(X),$$
$$\text{où } \mathbb{K}_2 = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} x^2 + y^2 + z^2 \leq 12, x + 2y \geq 0\}.$$

   Résoudre le problème $(\mathcal{P}_2)$.

4. Soit le problème d'optimisation suivant:

$$(\mathcal{P}_3) \qquad \min_{X \in \mathbb{K}_3} J(X),$$
$$\text{où } \mathbb{K}_3 = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} x + y + z = 2\}.$$

   Résoudre le problème $(\mathcal{P}_3)$.

Exercice 2:
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy.$$

On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad x + y \geq 1\}$

1. Représenter graphiquement le domaine D.
2. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et que le problème:

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{(x,y)\in D} f(x,y)$$

   posséde une unique solution.

3. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où f atteint son minimum sur D.

Exercice 3: On considère le problème d'optimisation suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{(x,y)\in \mathbb{D}} J(x,y),$$
$$\text{où } J(x,y) = x + y,$$
$$\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad g_1(x,y) \leq 0, g_2(x,y) \leq 0\},$$
$$g_1(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1,$$
$$g_2(x,y) = (x+4)^2 + (y+3)^2 - 25.$$

1. (a) Représenter graphiquement l'ensemble $\mathbb{D}$.
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ est un ensemble compact.
   (c) Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ est convexe du plan.
2. Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution.
3. Ecrire les équations de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour le problème $(\mathcal{P})$.
4. Résoudre le problème $(\mathcal{P})$.