

I. Les marchés financiers

Le Marché Financier est le marché sur lequel s'échangent les valeurs mobilières : actions, obligations et titres dérivés (certificats d'investissement, titres participatifs, warrants...etc.).

A. Vocabulaire des marchés financiers

- ♦ Un **titre financier** est un contrat où les parties s'échangent des flux d'argent.
- ♦ Un **marché financier** est un lieu où l'on achète et vend des titres financiers. Les opérateurs de marché sont le plus souvent autorisés à vendre à découvert (« short selling ») des titres qu'ils ne possèdent pas !

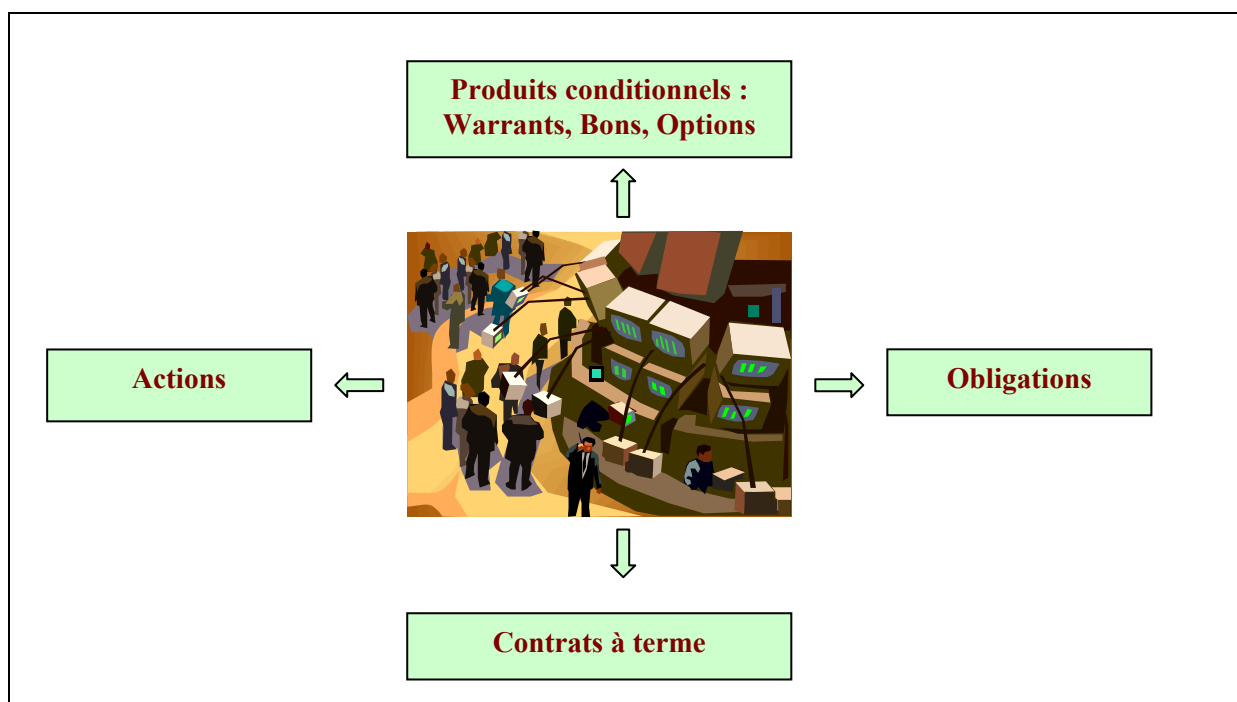


Attention ! Vendre un titre à découvert signifie s'engager à en verser les revenus à l'acquéreur. Vous n'espérez tout de même pas avoir le beurre et l'argent du beurre ? Si ? Dommage...

- ♦ La **valeur** d'un titre financier est un montant positif ou négatif, qui représente l'enrichissement ou l'appauvrissement des flux futurs. **Attention !** Rien ne garantit *a priori* que la valeur d'un titre soit unique : il existe souvent plusieurs méthodes de valorisation.
- ♦ Le **prix** d'un titre est un montant convenu entre deux parties en échange du titre. Le plus souvent c'est l'acheteur qui verse le montant, mais il arrive que le vendeur doive payer l'acheteur pour que celui-ci accepte un titre qui lui causera des pertes. **Attention !** le prix n'est pas forcément égal à la valeur : tout le monde n'a pas la même anticipation de l'avenir.

B. Les produits financiers

Quatre grands types de produits financiers sont échangés à la bourse :



1. Les actions

Définition : Une action est un Titre de propriété représentant une fraction du capital d'une entreprise et donnant à son porteur le droit de vote aux assemblées, le droit à l'information et aux bénéfices (nommé dividende).

Il existe en réalité une très grande diversité d'actions dont nous présentons ici quelques exemples.

a) L'action classique

C'est la forme la plus répandue. Ce titre de propriété s'acquière contre de l'argent soit au moment de la création de l'entreprise ou d'augmentations de capital soit directement sur le marché boursier. Elle est source de trois droits :

- ♦ un droit au pouvoir -via un droit de vote lors des assemblées générales- ;
- ♦ un droit à l'information ;
- ♦ un droit au résultat -sous forme de dividendes-. En effet, si la société réalise des bénéfices, l'actionnaire en recevra une partie au prorata du nombre d'actions qu'il possède. Le revenu de l'actionnaire s'appelle donc le dividende. Il dépend des résultats financiers de l'entreprise.

Depuis novembre 1984, les actions sont dématérialisées. Le papier a laissé place au code Sicovam stocké dans un énorme ordinateur. Un des grands avantages de cette dématérialisation est le renforcement de la sécurité. Impossible en effet pour un actionnaire de se faire voler ses titres.

b) L'action privilégiée

Elle offre un privilège qui peut être une priorité lors des votes dans les assemblées générales ou une priorité lors de la distribution du dividende.

c) L'action à dividende prioritaire - ADP

Les ADP ont été créées en 1978. Elles confèrent à leur détenteur un **accès privilégié aux dividendes**. Mais elles ne bénéficient pas de droit de vote. Elles présentent un rendement plus élevé que l'action ordinaire sans offrir le droit de vote.

Dès lors que le profit est positif, le dividende versé doit égaliser au moins 7.5% de la valeur nominale de l'action. Sinon, lorsque le profit est négatif ou insuffisant, le versement du dividende doit être reporté sur les deux exercices suivants.

d) Les certificats d'investissement

Les certificats d'investissement sont des titres **sans droit de vote** qui sont apparus après les nationalisations de 1981. L'objectif était de permettre des prises de participation par le public dans les entreprises nationalisées sans pour autant modifier l'actionnariat et faire perdre des voix à l'actionnaire principal, à savoir l'Etat. Ces titres, de moins en moins répandus sur le marché français, peuvent aussi bien être émis par des entreprises publiques que privées. On a donc :

$$\text{Certificat d'Investissement} + \text{Droit de vote} = \text{Action}$$

e) Les ABSA ou Actions à Bons de souscription d'actions

Ce sont des actions qui donnent droit à leur détenteur de souscrire à de nouvelles actions à une date donnée. Elles sont en général, plus chères qu'une action classique.

Résumé

Action	Titre de propriété
	Droit de l'actionnaire
	<ul style="list-style-type: none"> ♦ Droit à l'information ♦ Droit de vote ♦ Droit à la rémunération
	Rémunération de l'action
	<ul style="list-style-type: none"> ♦ Sous forme de dividende ♦ Sous forme d'augmentation du prix de l'action plus value
Risque maximum de l'actionnaire :	
♦ limité à la valeur de ses actions	

SÉANCE DU VENDREDI 21 NOVEMBRE 2003				
17:31	€ 21.34	€ +0.74	+3.59%	Capitalisation
Plus haut	Plus bas	Ouverture	Clôture (20/11)	€ 51 265 Millions
€ 21.34	€ 20.60	€ 20.60	€ 20.60	
Nombre de titres échangés :			10 728 915 titres	
Montant des titres échangés :			€ 226 046 896	
(%) de titres échangés / nombre de titres inscrits (2 402 315 600) :			0.45 %	
Volume moyen sur les 30 dernières séances à 17:30 :			7 055 326 titres	

FRANCE TELECOM

6, place d'Alleray
75505 Paris Cedex 15
France
www.francetelecom.com



Carte d'identité		Chiffres clés				
ISIN	FR0000133308	Chiffre d'affaires 2002 *	46 630.00			
Code local	13330	Chiffre d'affaires 2001 *	43 026.00			
Places de cotation	Francfort Londres Paris Amsterdam New York Mrt-x Buenos Aires	Chiffre d'affaires 2000 *	33 674.00			
Indices de cotation	CAC 40 SBF 120 SBF 250 Euronext 100 ITCAC EURO STOXX 50 Premier Marché FTSEurofirst 100 FTSEurofirst 80	Chiffre d'affaires 1999 *	27 233.00			
		Chiffre d'affaires 1998 *	24 648.00			
Nombre d'actions	2402315600	Résultat net 2002 *	-20 736.00			
		Résultat net 2001 *	-8 280.00			
Capitalisation	51 265 414 904	Résultat net 2000 *	3 660.00			
		Résultat net 1999 *	2 768.00			
Secteur	Télécommunications	Résultat net 1998 *	2 300.00			
Industrie	Opérateur de Télécommunications	Bénéfice net par action 2002	-19.11			
Sous-Industrie	Divers (Opérateurs de Télécommunication)	Bénéfice net par action 2001	-7.18			
		Bénéfice net par action 2000	3.38			
		Bénéfice net par action 1999	2.66			
		Bénéfice net par action 1998	2.29			
		Euro / * en million(s)				
		1 semaine	1 mois	3 mois	1 an	
Performance		3.09 %	-1.39 %	-8.65 %	75.17 %	
Volume moyen		8 803 110	8 267 040	8 783 970	9 328 370	
Volatilité		33.31	25.90	26.99	52.72	
Beta		0.00	0.76	0.85	1.07	

Exemple d'information sur l'action France Télécom

2. Les Obligations

Définition : les obligations sont **des titres de créances** représentatifs de dettes. Une obligation donne droit au paiement d'un intérêt en général annuel et au remboursement du capital. Le détenteur d'une obligation perçoit un revenu connu à l'avance ou dont la révision se réalise dans les conditions prévues au moment de l'émission. En cas de faillite de l'émetteur, le détenteur d'une créance est prioritaire sur l'actionnaire. Les obligations peuvent être émises par les entreprises privées ou publiques, ainsi que par l'Etat, les administrations publiques et les collectivités locales.

a) Vocabulaire

La valeur nominale d'une obligation est celle qui sert de base au calcul de l'intérêt en général annuel versé (le coupon). Le coupon est alors égal au taux facial (fixé à l'émission) multiplié par le nominal. Le prix d'émission est le montant du versement demandé au souscripteur lors de l'émission de l'obligation. Lorsque le prix d'émission est égal à la valeur nominale de l'obligation, l'émission est dite *au pair*. Mais l'obligation peut être émise soit en dessous (cas le plus fréquent), soit au-dessus de la valeur nominale. La différence entre la valeur nominale et le prix d'émission constitue alors la *prime d'émission*.

La valeur de remboursement est le montant perçu par l'obligataire en remboursement de son prêt. Lorsque la valeur de remboursement est égale à la valeur nominale, le remboursement est dit *au pair*. Mais la valeur de remboursement peut différer de la valeur nominale. La différence constitue alors la *prime de remboursement*.

La possibilité de verser des primes d'émission et/ou de remboursement permet notamment à l'émetteur de prendre en compte une évolution des taux du marché entre le montage du placement et l'émission effective.

L'annuité est le flux total versé chaque année par l'émetteur à l'ensemble des obligataires, c'est-à-dire la somme des intérêts et des flux éventuels de remboursement du principal.

Le remboursement de l'obligation peut être réalisé selon trois modalités principales différentes.

Le remboursement *in fine* : le remboursement est réalisé en une seule fois, le dernier jour de la durée de vie de l'obligation. A l'exception de la dernière année de vie de l'obligation, l'annuité n'est donc composée que des seuls intérêts versés chaque année par l'émetteur.

Le remboursement par séries ou par tranches annuelles égales : chaque année, une partie de l'emprunt est remboursée. Un même nombre de titres, tirés au sort, est remboursé chaque année. Le montant de l'annuité diminue avec le temps, puisque l'intérêt sur le capital restant dû diminue.

- ♦ Le remboursement par *annuités constantes* : l'annuité est constante. Aussi, puisque le montant de l'intérêt sur le capital restant dû diminue, l'émetteur rembourse chaque année (par tirage au sort), une part croissante du principal.

On distingue plusieurs catégories d'obligations qui répondent à des attentes différentes.

- ♦ **Les obligations ordinaires** sont des obligations à taux fixe dont le coupon versé en général une fois par an est identique sur toute la durée de vie du titre. Il est important de noter que ces titres sont particulièrement vulnérables au risque d'inflation en cas de variation des taux d'intérêt.

Prenons un exemple. Une obligation à 10 ans d'une valeur nominale de 1000 euros, remboursée au pair *in fine*, et ayant un taux facial de 10% rapporte chaque année 100 euros auxquels il faut rajouter le remboursement du principal (1000 euros) à l'issue de la 10^{ème} année. Imaginons que le détenteur de cette obligation souhaite la revendre sur le marché avant l'échéance, à un moment où le taux facial pratiqué sur les nouvelles émissions d'obligations est de 15%. Au taux du marché, une obligation de valeur nominale égale à 1000 euros rapporte chaque année 150 euros ; par conséquent, personne n'acceptera d'acheter 1000 euros un titre ne rapportant que 100 euros d'intérêt annuels. Pour revendre son titre, le détenteur de l'obligation doit consentir une baisse du prix de façon à ce que, pour

l'acheteur, la rémunération soit identique à celle du marché, ici 15%. Le vendeur devra vendre son obligation au prix d'une obligation de nominal 667€.

Nous avons ainsi mis en évidence une relation décroissante entre le prix d'une obligation et le niveau des taux d'intérêt. Il en résulte pour l'acquéreur d'une obligation un risque de taux d'intérêt, c'est-à-dire une risque de moins-value à la revente en cas de hausse des taux. Ce risque est particulièrement sensible aux tensions inflationnistes, lesquelles peuvent être à l'origine d'une hausse des taux par les autorités monétaires. Pour pallier les défauts des obligations à taux fixe, plusieurs innovations ont vu le jour.

- ◆ Les obligations à taux flottant sont composées des obligations à taux variable et à taux révisable. Leur particularité est d'offrir une rémunération (taux d'intérêt) qui varie dans le temps en référence à une moyenne de taux constatés sur le marché. Les titres à taux révisable versent un intérêt périodique qui est calqué sur l'évolution récente des marchés alors que ceux à taux variables procurent une rémunération calculée comme une moyenne des conditions offertes par le marché jusqu'au jour de détachement du coupon.
- ◆ Les obligations indexées sont des titres dont la valeur de remboursement et/ou les intérêts sont liés à l'évolution d'un indice de référence. En particulier, le rendement de certains emprunts est calqué sur l'inflation. Ainsi, le Trésor français a procédé, pour la première fois en septembre 1998, à l'émission d'une OAT (Obligation Assimilable du Trésor) indexée sur l'inflation : l'OATi. Ce titre est une obligation à taux fixe dont tous les flux sont payés en appliquant un coefficient d'indexation égal à l'évolution de l'inflation entre la date initiale et la date de paiement du flux. L'OATi n'est dès lors sensible qu'à l'évolution des taux d'intérêt réels (taux d'intérêt nominaux moins taux d'inflation), historiquement plus stables que les taux d'intérêt nominaux. Ce produit financier offre donc une protection contre les risques d'inflation non anticipée et représente, de ce fait, l'actif actuellement le moins risqué sur le marché.

Comme pour les actions, existent dans la catégorie des obligations des **titres hybrides**, se situant en réalité à mi-chemin entre les obligations et les actions. Il s'agit par exemple des **obligations à bon de souscription d'obligation** (OBSO), des **obligations convertibles en actions** (OCA) ou des **titres participatifs**. Ces derniers sont assimilés à des quasi-fonds propres ; ils sont en principe non remboursables et procurent à leurs détenteurs une rémunération qui est pour partie fixe et pour partie variable indexée à un indicateur de performance de la société (chiffre d'affaires, résultat net...).

3. Autres produits échangés

Il existe d'autres produits échangés sur les marchés. Tout d'abord les matières premières comme l'or, le pétrole, les produits agro-alimentaires, etc.... D'autre part, il y les devises : euro, dollar, yen, etc.

Deux grands types de produits dont nous parlerons ultérieurement :

- ◆ Les produits de taux
- ◆ Les produits dérivés

C. Le marché Boursier

Nous l'avons vu dans la fiche sur le rôle de la bourse, ce sont les sociétés de bourse qui sont le passage obligé de l'investissement en bourse car elles détiennent le monopole des transactions boursières. Jusqu'en 1988 c'étaient des officiers ministériels (les agents de change) qui détenaient ce monopole, cependant le crack de 1987 est venu modifier cette organisation et les agents de change se sont transformés en sociétés de bourse.

1. Les sociétés de Bourse

a) Euronext

Cette société a pour mission de veiller au bon déroulement de la cotation des valeurs, elle peut intervenir pour interrompre la cotation, notamment dans le cas d'irrégularités ou d'événements propres à engendrer une spéculation injustifiée (OPA, OPE,...). Une autre de ses missions est d'assurer le calcul et la cotation des indices (ex: CAC 40) ainsi que d'assurer la promotion de la place parisienne en France et à l'étranger.

Le 22/09/2000, les bourses d'Amsterdam, de Bruxelles et de Paris ont fusionné, créant une place financière transnationale baptisée Euronext. Le 06/02/2002, la bourse portugaise BVLP est pour sa part devenue Euronext Lisbonne, au même titre que « Euronext Paris, Euronext Amsterdam et Euronext Bruxelles ». Euronext constitue donc désormais un marché transfrontalier d'actions, d'obligations, de produits dérivés et de marchandises totalement intégré.

Euronext s'occupe des opérations de compensation du marché à terme et du marché des options négociables depuis la fusion avec MONEP et MATIF.

b) Le Conseil des Bourses de Valeurs (CBV)

Le CBV tient un rôle d'organisation et de réglementation du marché par le biais de règlements tels que: les conditions d'agrément des sociétés de bourses, les dispositions déontologiques, les modes d'admission ou de radiation à la côte...

c) La Commission des Opérations de Bourse (COB)

La COB a été créée en 1967 pour surveiller le marché, on entend d'ailleurs couramment dire qu'il s'agit du "gendarme de la bourse", c'est une autorité administrative indépendante dirigée par six membres. Ses trois principaux rôles sont la protection de l'épargne, l'information des investisseurs et la garantie du bon fonctionnement des négociations.

La COB dispose en outre d'un droit d'opposition à l'admission d'un titre ou d'un instrument financier sur un marché réglementé. Enfin elle dispose d'un pouvoir de sanction en cas d'infraction à ses règles.

d) L'autorité des marchés financiers (AMF)

Créée en 2003, l'AMF est issue de la fusion de plusieurs organismes :

- ◆ la Commission des opérations de bourse (COB) ;
- ◆ le Conseil des marchés financiers (CMF) ;
- ◆ le Conseil de discipline de la gestion financière (CDGF).

L'Autorité des marchés financiers est un organisme public indépendant qui a pour missions de veiller :

- ◆ à la protection de l'épargne investie dans les instruments financiers et tout autre placement donnant lieu à appel public à l'épargne ;
- ◆ à l'information des investisseurs ;
- ◆ au bon fonctionnement des marchés d'instruments financiers.

Ses principales compétences portent sur :

- ◆ Les opérations et l'information financières : l'AMF réglemente et contrôle l'ensemble des opérations financières portant sur des sociétés cotées : introductions en bourse,

augmentations de capital, offres publiques, fusions... et veille au bon déroulement des offres publiques boursières. Elle vérifie que les sociétés publient, en temps et en heure, une information complète et de qualité, délivrée de manière équitable à l'ensemble des acteurs.

- ♦ Les produits d'épargne collective: elle autorise la création de SICAV et de FCP. Elle vérifie notamment l'information figurant dans le prospectus simplifié de chaque produit qui doit être remis au client avant d'investir.
- ♦ Les marchés et leurs infrastructures : l'Autorité des marchés financiers définit les principes d'organisation et de fonctionnement des entreprises de marchés (comme Euronext Paris) et surveille les marchés et les transactions qui s'y déroulent.
- ♦ Les professionnels (établissements de crédit autorisés à fournir des services d'investissement, entreprises d'investissement, sociétés de gestion, conseillers en investissement financier, démarcheurs, etc.). L'AMF détermine les règles de bonne conduite et les obligations que doivent respecter les professionnels autorisés à fournir des services d'investissement ou des conseils en investissement.

Le marché boursier est composé de deux compartiments : le compartiment action -ou marché des actions- et le compartiment obligations -ou marché des obligations.

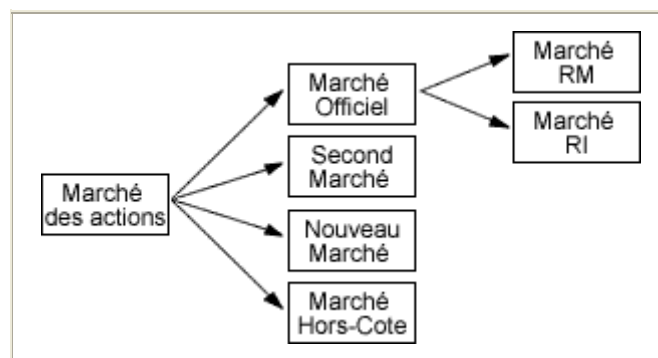
2. Le marché des Obligations

Sur ce marché, on va distinguer le marché primaire et le marché secondaire. Le marché primaire est celui qui concerne les nouveaux emprunts émis par l'État, les collectivités locales et les entreprises, auxquels peuvent souscrire les particuliers. Le marché secondaire est le marché de l'occasion. C'est le marché sur lequel s'échangent les valeurs déjà émises. Il est tout autant accessible aux particuliers.

3. Le marché des Actions

Le marché Français des actions peut lui-même être subdivisé en plusieurs en sous éléments. On distingue :

- ♦ le marché officiel -ou cote officielle- comprenant le marché à Règlement mensuel -ou RM- et le marché au comptant ou à règlement immédiat -ou RI ;
- ♦ le second marché ;
- ♦ le nouveau marché ;
- ♦ le marché hors cote.



a) Le marché officiel

Les entreprises souhaitant s'introduire sur le marché officiel doivent satisfaire à diverses conditions. Elles doivent entre autres :

- ♦ mettre à la disposition du public 25% au moins de leur capital;
- ♦ avoir versé un dividende au cours des trois derniers exercices, lesquels doivent avoir été bénéficiaires;

- ♦ avoir un chiffre d'affaires supérieur à 500 millions de francs;
- ♦ s'engager à publier régulièrement des informations.

b) Le marché à règlement mensuel

C'est sur ce marché que sont cotées les actions des entreprises les plus importantes. Il s'agit d'un marché à terme. Il existe donc un délai entre la conclusion du contrat (achat et vente) et son exécution (livraison des titres et paiement). En effet, toutes les opérations effectuées au cours du mois sont dénouées le jour de liquidation (6ème jour de bourse). Le planning est le suivant :

- ♦ 1^{er} jour de liquidation : liquidation générale de toutes les opérations réalisées pendant le mois boursier. Il marque la fin du mois boursier.
- ♦ 2^{ème} jour de liquidation : il est procédé aux opérations de report. Il marque le début du mois boursier suivant.
- ♦ 3^{ème} au 6^{ème} jour de liquidation : livraisons des titres et règlements selon un calendrier fixé par la SBF.

Vous pouvez ainsi acheter une action de la société Alpha 100 Euros le 10 Mars et la revendre 110 € le 15 Mars sans constater de sortie d'argent sur votre compte en banque. Vous encaissez les 10 € de plus-value à la liquidation boursière. En d'autres termes, il n'y a pas de concordance entre le mois boursier et le mois calendaire et il est possible de vendre des actions que l'on ne possède pas.

Les opérations peuvent être dénouées de trois manières différentes:

- ♦ attendre la liquidation et procéder au règlement, en titres et en capitaux;
- ♦ effectuer, avant la date de liquidation, une opération en sens inverse (les spéculateurs à la hausse achète pour revendre).
- ♦ se faire reporter, c'est à dire demander à ce que le règlement et la livraison des titres s'effectue à la liquidation suivante (estimant que nos prévisions se réaliseront le mois suivant).

c) Le marché au comptant (RI)

Sur ce marché, toutes les opérations sont réalisées au comptant.

d) Le second marché

Ouvert en 1983, il est destiné à recevoir des entreprises de taille modeste mais dont les perspectives sont attrayantes. Les conditions d'admission sont moins restrictives que sur le Marché Officiel. Les entreprises souhaitant s'introduire au second Marché doivent satisfaire les critères suivants:

- ♦ mettre à la disposition du public 10% au moins du capital;
- ♦ présenter 2 années de comptes certifiés.

Les obligations d'information sont en revanche réduites.

e) Le Nouveau Marché

Le Nouveau Marché, ouvert en février 1996, est un marché autonome, régie par une société propre : la société du Nouveau Marché (filiale de la SBF). Il s'adresse à des sociétés européennes, jeunes, innovatrices, à fort potentiel de croissance, qui ont un besoin de capitaux important pour se développer.

Les conditions d'admissions sont peu contraignantes, mais les sociétés candidates doivent respecter des règles strictes d'information. Le fonctionnement du Nouveau Marché est assuré par des intermédiaires financiers agréés par la société du Nouveau Marché :

- ◆ les introducteurs teneurs de marché assurent l'introduction des sociétés et la tenue du marché de leurs titres (cotation permanente des divers titres)
- ◆ les négociateurs courtiers : ils exécutent les ordres de leurs clients ou les leurs propres.
- ◆ les compensateurs : dénouent les opérations effectués.

f) Le Marché Hors Cote

C'est un marché de moindre importance, réservé aux petites entreprises, ou à celles qui ont été rétrogradées du comptant ou du RM...

Il s'agit d'un marché étroit, c'est à dire que le volume des transactions y est faible. Les conditions d'admission sur ce marché y sont simples puisque n'importe quelle société peut y être admise à condition de présenter les trois derniers bilans.

g) Les Marchés Dérivés

Il s'agit des marchés de produits dérivés dont font partie entre autre les contrat à terme et les options. De plus amples explications sont disponibles dans la description des produits traités sur les marchés.

II. Notions de taux d'intérêt

A. Introduction

Pour nous guider dans notre choix d'allocation, nous allons utiliser des modèles théoriques, reposant sur les principes de l'actualisation.

Définition : l'intérêt est le loyer de l'argent. Pour un consommateur, l'intérêt est le prix à payer pour la jouissance immédiate d'un bien de consommation (ex : automobile, appartement). Pour un épargnant, l'intérêt est la récompense pour la remise à plus tard de cette jouissance.

Définition : Le taux d'intérêt est la mesure du loyer. Son montant est le résultat d'offres et de demandes.

Ce taux est une fonction

- ♦ du temps (croissante)
- ♦ du risque (il y a un risque de contrepartie : l'emprunteur peut faire défaut. Le taux d'intérêt sera une fonction croissante du risque ; plus l'emprunteur fait prendre de risque, plus le taux est élevé)
- ♦ des conditions économiques en général (si le prêteur a possibilité de placer son argent à 4.5%, il n'acceptera pas de prêter à moins).

La demande : les demandeurs sont soit les particuliers pour des biens de consommation, soit des entreprises pour de l'investissement.

L'offre : les acteurs de l'offre sont les banques (et donc les individus !), les fonds de pension, etc.

B. Intérêts simples et composés

L'intérêt simple est essentiellement utilisé pour des opérations à court terme (moins d'un an).

1. Intérêts simples

a) Définition

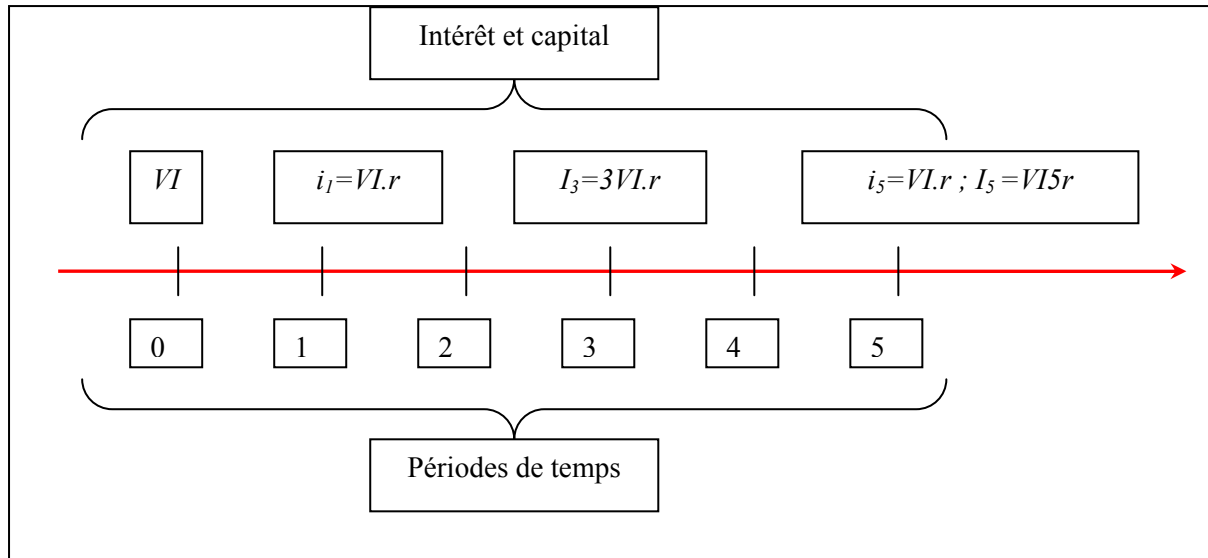
Notations :

- ♦ VI : le capital initial (somme prêtée ou empruntée),
- ♦ Vf : le capital final
- ♦ r : taux d'intérêt simple pour une période
- ♦ n : nombre de périodes (horizon du placement)
- ♦ I_t : montant d'intérêt accumulé sur t périodes
- ♦ i_t : montant d'intérêt pour la période t.

Définition : l'intérêt est dit simple lorsqu'il est calculé à chaque période seulement sur la base de la somme prêtée ou empruntée à l'origine.

Si les intérêts sont payés à la fin, le capital est $Vf = VI(1 + nr)$

De plus $I_t = t \times r \times VI$; $i_t = r \times VI$



Exercice : on réalise un investissement de 350€. Le taux d'intérêt est fixé à 7%. La rémunération doit se faire sur 14 ans. Quel est l'intérêt versé sur la période 1 ? Quel est l'intérêt total à la période 12 ? Quel est le capital final ?

Solution : l'intérêt versé sur la période 1 est celui versé sur n'importe quelle période :

$$i_1 = rVI$$

donc $i_1 = 0,07 * 350 = 24,5€$

L'intérêt total à la période 12 :

$$I_{12} = 12 \times i_1 = 294€$$

Le capital final : $Vf = (1 + nr)VI = (1 + 14 \times 0,07) \times 350 = 693€$

A vous : Investissement = 12'435 ; taux d'intérêt = 4,5% ; horizon = 29 ans

Exercice : A quel taux annuel a été placé un capital de 20000€ ayant généré un intérêt de 2500€ après deux ans ?

Solution : le placement a rapporté 2500€ sur deux périodes donc, 1250€ sur une période. Ainsi, $20000 \times r = 1250 \Leftrightarrow r = 6,25\%$

D'une manière générale, lorsque l'on connaît trois des variables VF, VI, n, r, on peut déterminer la dernière.



n et r doivent être exprimés dans la même unité de temps. Généralement on parle de taux *annuel*. Pour les opérations à court terme, l'année est divisée en 360 jours, 24 quinzaines ou 12 mois.

Exemple :

Taux annuel	Taux semestriel	Taux mensuel	Taux journalier
r	r/2	r/12	r/360
12%	6%	1%	1/30%

A vous : Quel est le montant de l'intérêt relatif à un placement d'un montant de 11000€ sur 162 jours ?

b) Versement des intérêts à la fin ou au début

Quand les intérêts sont versés en début de période on parle de taux précomptés ou terme à échoir. Quand ils sont versés en fin de période, on parle de taux post-comptés ou terme échu. Le prêteur préfère recevoir les intérêts en début de période et inversement pour l'emprunteur. Emprunter une somme VI pendant n périodes au taux **précompté** r implique le versement immédiat d'un intérêt qui vaut $n VI r$. La somme réellement à disposition de l'emprunteur est donc égale au capital emprunté VI moins les intérêts exigibles immédiatement. Les flux financiers en début et en fin de période sont

	Début de période	Fin de période
Capital	$+VI$	$-VI$
Intérêt	$-n VI r$	
Total	$VI(1 - n r)$	$-VI$

Considérons un autre emprunteur qui souhaite réaliser une opération à un taux d'intérêt **post-compté** r' , taux lui permettant d'encaisser et de décaisser les mêmes flux que le premier client. La somme empruntée est notée VI' et les intérêts versés en fin de la période n se montent à $n VI' r'$.

	Début de période	Fin de période
Capital	$+VI'$	$-VI'$
Intérêt		$-n VI' r'$
Total	VI'	$-VI'(1+n r')$

L'égalité des deux séquences de flux donne :

$$\begin{cases} VI' = VI(1 - nr) \\ -VI = -VI'(1 + nr') \end{cases} \Leftrightarrow (1 - nr)(1 + nr') = 1 \Leftrightarrow nr' = \frac{1}{1 - nr} - 1 = \frac{nr}{1 - nr} \Leftrightarrow r' = \frac{r}{1 - nr}$$

2. Opérations à court terme

a) L'escompte commercial

On s'intéresse ici aux crédits à court terme banques - entreprises basés sur des créances clients (billets à ordre, traites, lettres de change, ...). Un exemple de négociation d'un effet de commerce :

Exemple : Alpha vend le 8 février à son client Oméga pour 10 000 € (valeur nominale de l'effet) de marchandises. Date de règlement : 30 avril (échéance de l'effet). Le 10 mars, Alpha a besoin des 10 000 € qu'il emprunte à sa banque. En échange de ce prêt, il remet l'escompte (ou il négocie l'effet) à son banquier qui escompte l'effet. C'est-à-dire que Alpha donne à son banquier la créance qu'elle détient sur Oméga.

Mais le banquier ne consent à cette opération commerciale d'escompte que s'il bénéficie d'une rémunération appelée escompte commercial. Cet escompte commercial E est calculé avec les formules de l'intérêt simple (intérêt commercial).

$$E = V \times i_e \times \frac{n}{360}$$

Où

- ♦ V est la valeur nominale de l'effet
- ♦ i_e est le taux d'intérêt annuel du prêt
- ♦ n est le nombre de jours séparant la date de remise à l'escompte de l'effet de la date d'échéance de ce même effet (il s'agit de la durée du prêt consenti par la banque).

Il s'agit d'une opération à **intérêt précompté**.

Définition : On définit la **valeur actuelle commercial** :

$$a = V - E = V \times \left(1 - i_e \times \frac{n}{360} \right)$$

Il s'agit de la somme effectivement prêtée.

Définition : On appelle date d'équivalence de deux effets de commerce la date à laquelle les valeurs actuelles commerciales sont égales. A E, s'ajoutent différentes commissions proportionnelles ou non à la durée de l'effet (voire fixes pour toute opération de remise à l'escompte). Soit

- ♦ i le taux de commission dépendant de la durée de l'effet ;
- ♦ k le taux de commission indépendant de la durée de l'effet.

On définit l'agio hors taxe par :

$$AgioHT = V \left[i_e \frac{n}{360} + i \frac{n}{360} + k \right]$$

Le montant net de la négociation est donc : $V - AgioHT$

Remarque : on écrit $AgioHT = V \times \frac{n}{360} \left(i_e + i + k \frac{360}{n} \right)$ ce qui fait apparaître le taux réel

d'escompte $i_e + i + k \frac{360}{n}$. Le taux effectif est donc $r = \frac{I}{1 - \frac{n}{360} I}$ où $I = i_e + i + \frac{360}{n} \times k$

puisque'il s'agit d'une opération à intérêts précomptés.

Une autre technique de calcul est appelée escompte rationnel : l'intérêt s'applique dans ce cas non plus à la valeur nominale de l'effet mais à sa valeur actuelle, après déduction des intérêts **post-comptés** d'escompte.

L'escompte rationnel est : $E_r = (V - E_r) \times i_e \times \frac{n}{360}$, donc $E_r = \frac{V i_e}{1 + \frac{n}{360} i_e} \frac{n}{360}$. Cet escompte est

beaucoup moins utilisé.

Exemple : Un effet de 20000€ est escompté sur une durée de 60 jours au taux de 7% avec un taux de commission fixe à 0,2%. Quelle est la valeur de l'escompte commercial? Quel est le taux d'intérêt effectif ?

L'escompte commercial est $20000 \times \left(0,07 \times \frac{60}{360} + 0,002 \right) = 273,33€$. La valeur actuelle nette est donc $20000 - 273,33 = 19726,7€$. Le taux effectif de l'escompte commercial est

$$I = 0,07 + 0,002 \times \frac{360}{60} = 8,2\% \text{ donc } r = \frac{I}{1 - nI} = 8,31\%$$

b) Le découvert

Le recours au découvert ou avance en compte courant se traduit par un compte débiteur. La banque accorde un plafond de découvert, négocié habituellement avec l'entreprise ou le particulier. Le grand avantage du découvert est sa souplesse d'utilisation. Le coût du découvert est affecté par :

- ♦ La commission de plus fort découvert, au taux de 0,05% par exemple, qui s'applique au plus fort solde débiteur mensuel

- ♦ Une commission de confirmation, parfois appliquée lorsque le découvert est confirmé par écrit par la banque. Dans ce cas, cette commission est de l'ordre de 1% du plafond autorisé.
- ♦ Les intérêts résultant de l'application du taux de découvert. Ils calculent sur la base des **nombres débiteurs** : il s'agit du produit du solde débiteur avec le nombre de jours pendant lesquels ce solde a été maintenu à un même niveau.

Exemple : Un particulier souffre d'un découvert de 100€ pendant 10 jours et de 30 € pendant 20 jours. Le taux de découvert est de 12% annuel. La commission de confirmation est de 1% du plafond (ici 200€) et la commission de plus fort découvert de 0,07%. Calculer les agios payés par ce particulier et le taux effectif.

- ♦ La commission de plus fort découvert sera de $0,07\% \times 100 = 0,07\text{€}$
- ♦ La commission de confirmation est de $0,01 \times 200 = 2\text{€}$
- ♦ Les intérêts $100 \times \frac{10}{360} \times 0,12 + 30 \times \frac{20}{360} \times 0,12 = 0,533\text{€}$

Le taux effectif sur un mois sera donc de $\frac{2,6033}{\left(\frac{100 \times 10 + 30 \times 20}{30}\right)} = 4,88\%$ contre $\frac{12\%}{12} = 1\%$

annoncé.

On voit que la commission de confirmation alourdit considérablement la charge.

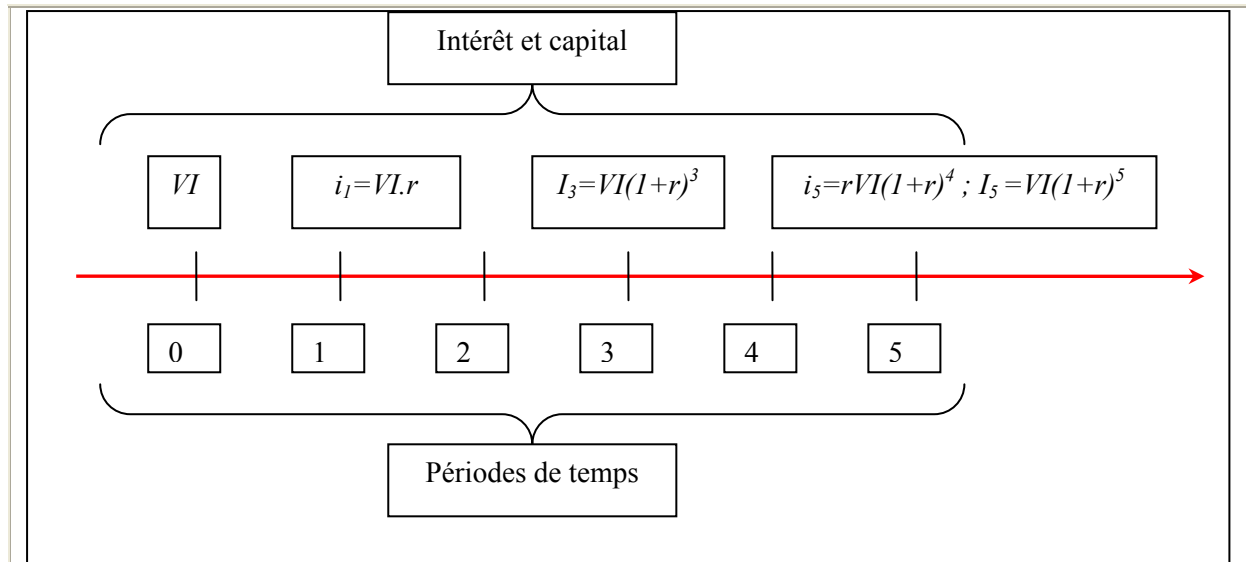
3. Intérêts composés

Définition : le taux d'intérêt est dit composé lorsqu'à la fin de chaque période l'intérêt s'ajoute au capital de début de période pour former la base de calcul de l'intérêt pour la période suivante. Le montant d'intérêt et le capital changent à chaque période

Une somme d'argent VI placée sur n périodes au taux d'intérêt composé r , génère la première année un intérêt égale à $VI \times r$ qui, s'il n'est pas immédiatement retiré, sera ajouté au capital investi la seconde période. Ainsi, au début de la deuxième période, le capital investi est de

$$V_1 = VI + VI \times r = VI(1 + r)$$

A l'issu de cette période les intérêts se monteront donc à $VI(1 + r)r$. Plus généralement :



La valeur finale du capital est donc $Vf = (1+r)^n VI$. Contrairement à l'intérêt simple ou l'accroissement des montants est **linéaire**, l'intérêt composé a un accroissement **exponentiel**.

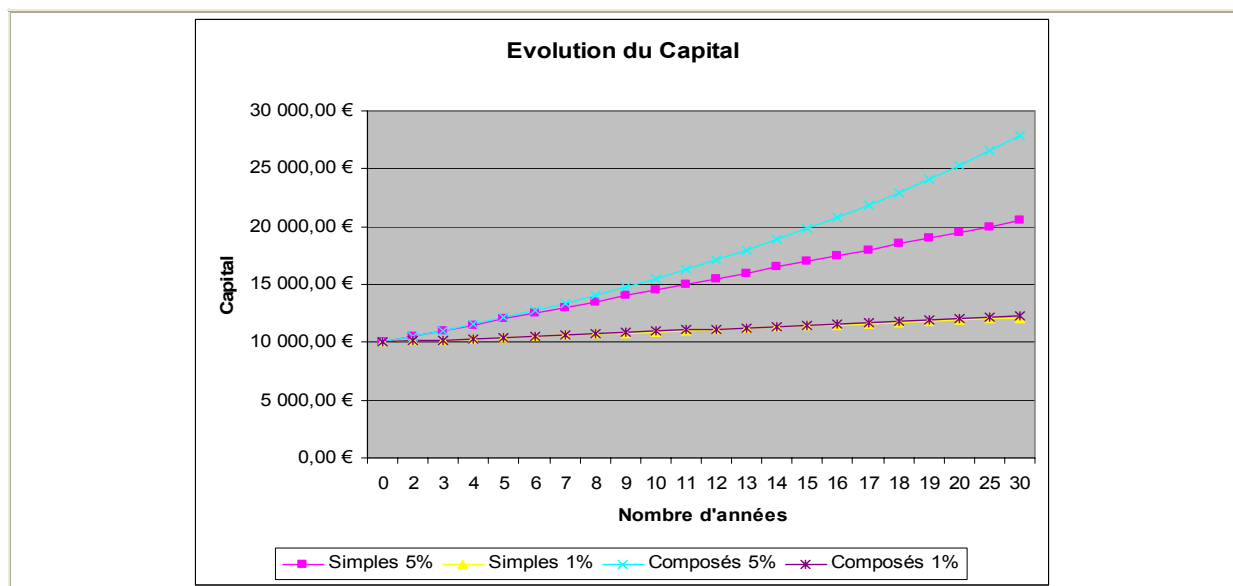
Exercice : quel est le capital au bout de 4 ans si on place 10000€ aujourd'hui au taux composé de 3.6% ?

Solution : On sait que $Vf = VI(1+r)^n$, donc ici $Vf = 10000 \times (1+0.036)^4 = 11934€$

Exercice : quel est le taux d'intérêt composé d'un placement ayant porté 10000€ à 18041.44€ en trois ans ?

Solution : On sait que $Vf = VI(1+r)^n$,

$$1+r = \sqrt[n]{Vf/VI} = \sqrt[3]{18044/10000} = 1,217 \text{ et donc } r = 21.7\%$$



Exemple de simulation d'épargne : taux simple contre taux composé.

4. La notion de capitalisation

L'intérêt composé est la règle :

Définition : la capitalisation indique la fréquence avec laquelle l'intérêt s'ajoute au capital en cas d'intérêts composés.

Question : avec quelle fréquence l'intérêt va s'ajouter au capital ?

- ♦ tous les ans : capitalisation annuelle
- ♦ tous les mois : capitalisation mensuelle
- ♦ tous les trimestres : capitalisation trimestrielle
- ♦ à chaque instant : capitalisation continue

5. Les types de taux :

a) Taux périodique : r_p

Définition : le taux périodique est le taux correspondant à la période de capitalisation.

Par exemple vous placez 2000€ et dans 6 mois, vous avez accumulé 2200€, sachant que la capitalisation est semestrielle. Votre taux de rendement périodique est de :

$$\frac{2200 - 2000}{2000} = 10\%$$

Exercice : vous placez 3600€ au taux périodique de 2,3% par trimestre durant 6 ans, combien allez vous accumuler ?

Solution : dans 6 ans il y a 24 trimestres, donc $Vf = VI(1 + r)^n = 3600(1 + 0.023)^{24} = 6213.23$

b) Taux nominal annuel : r_i

Définition : le taux nominal est le taux périodique multiplié par le nombre de capitalisations par année : $r_i = r_p * k$ (k nombre de capitalisations).

Exercice : votre conseiller en placement vous recommande un investissement qui rapporterait un rendement annuel de 4% capitalisé par mois. Quel est le taux périodique ? Si vous placez 1000€ à ces conditions, combien aurez vous accumulé en 3 ans?

Solution : le taux périodique est le taux nominal annuel divisé par le nombre de capitalisations.

Ici, $r_p = 0.04 / 12 = 0.0033333$.

Ainsi, le capital final sera $Vf = VI(1 + r_p)^{3k} = 1000(1 + 0.0033333)^{36} = 1127.14$

c) Taux effectif annuel : r

Définition : il s'agit du taux de rendement effectivement réalisé sur une année. Il est égal au taux périodique si la capitalisation est annuelle

Ne pas confondre taux effectif, qui correspond à la rentabilité effectivement réalisée, et taux réel, qui correspond au taux d'intérêt en termes réels, ce qui exclut les effets de l'inflation.

Les valeurs finales ne peuvent être calculées que sur la base de taux **effectifs**. Les taux nominaux ne sont qu'une convention.

6. Principe d'équivalence des taux

Les caractéristiques des produits financiers étant souvent très différentes, il est impossible de comparer des taux nominaux et effectifs.

Base commune

Equivalence des taux : l'objectif est de les ramener à une même base.

Enoncé : deux taux sont équivalents si, pour un placement initial identique, ils permettent d'obtenir la même valeur finale.

Exemple : quel est le taux annuel effectif correspondant à 2% périodique trimestriel ?

	Taux annuel effectif	Taux périodique, capitalisation trimestrielle
Taux	r	r_p
Capital initial	VI	VI
Capital final au bout d'un an	$VI(1+r)$	$VI(1+r_p)^4$

On voit donc que la relation entre les deux taux est

$$r = (1 + r_p)^k - 1, \text{ où } k \text{ est le nombre de capitalisations par an.}$$

Plus généralement, les relations entre r_p , r_i , et r sont

$$r = (1 + r_p)^k - 1 ; r = \left(1 + \frac{r_i}{k}\right)^k - 1 ; r_i = kr_p$$

C. Les taux sur les marchés

1. Les différents taux

		3 novembre 2005
TAUX COURTS	EONIA (Euro Overnight Index Average = taux moyen pondéré en euros (TEMPÉ)). C'est un taux calculé par la BCE (banque centrale européenne) qui résulte de la moyenne pondérée de toutes les transactions, au jour le jour des prêts non garantis réalisés par les banques commerciales, retenues pour le calcul de toutes les transactions de l'Euribor. C'est donc le taux effectif moyen auquel les banques du panel Euribor effectuent leurs transactions.	2,07%
	EURIBOR (European interbank offered rate) : taux	1 semaine : 2,095%

	d'intérêt moyen offert entre banques du système bancaire européen.	1 mois : 2,125%
		1 an : 2,605%
TAUX LONGS	TME (taux moyen des emprunts d'État)	3,17%
	TMO (taux du marché obligataire) est le taux moyen de rendement des emprunts obligataires à taux fixe garantis par l'État.	???
	TAM (Taux annuel monétaire) : Pour un mois donné le TAM est le taux de rendement d'un placement mensuel à intérêts composés, renouvelé chaque fin de mois, pendant les douze mois écoulés, à chacun des TMM	???

Taux directeurs : ce sont les taux d'intérêt pratiqués par les banques centrales pour leurs opérations sur le marché monétaire. En Europe, ils sont au nombre de deux :

- ♦ Le taux des appels d'offres (bihebdomadaire), la banque centrale lance un appel d'offre auprès des banques commerciales et accorde les liquidités à l'établissement qui a fait l'offre la plus intéressante, c'est-à-dire le taux le plus élevé.
- ♦ Le taux des prises en pension de 5 à 10 jours qui permet aux banques centrales de se refinancer auprès de l'institut d'émission en logeant du papier commercial à court terme.

Taux de base bancaire (TBB) ou prime rate : Il est défini par chaque banque commerciale en fonction du coût moyen de ses ressources. Il faut toutefois remarquer que les principales banques s'alignent sur le même taux en raison de la concurrence. Théoriquement, c'est le taux que les banques commerciales appliquent à leurs meilleurs clients, c'est donc le tarif minimum proposé aux meilleurs clients. Il sert de référence pour le calcul des crédits accordés aux PME et, dans une moindre mesure, de certains prêts à la consommation. Il dépend donc du taux auquel les banques commerciales peuvent se refinancer sur le marché monétaire, taux auquel elles doivent ajouter une marge représentative de leurs coûts de gestion. Ainsi, la banque centrale européenne, la « Federal reserve board » ou encore la « bank of Japan », accordent des prêts aux banques en appliquant leurs taux directeurs.

Taux réel : il s'obtient en déduisant du taux nominal (celui qui est affiché) le taux d'inflation.

TEG (taux effectif global) : c'est le coût total d'un crédit pour l'emprunteur (taux d'intérêt plus frais de dossier, frais divers et assurance. Depuis 1966, ce taux doit obligatoirement figurer sur les contrats de crédit.

Taux de l'usure : il est déterminé chaque trimestre, à partir d'enquêtes statistiques effectuées par la banque de France. Le TEG est usuraire s'il dépasse 133 % du taux effectif moyen pratiqué au cours du trimestre précédent pour une catégorie de prêt donnée. Il existe un taux de l'usure à compter du 01 juillet 2002 pour les prêts aux particuliers

Prêts immobiliers		Prêts à la consommation	
Taux fixe	5,30 %	Montant <1524	20,9%
Taux variable	5 %	Découvert, prêt permanent, achat ou vente à tempérament >	18 %
Prêts relais	6,30 %	Prêts personnels ou assimilés > 1524€	9,55%

Taux bonifié : Ce taux est inférieur à celui du marché grâce à une subvention accordée par les pouvoirs publics. Cette pratique était très répandue pendant les années 70, elle bénéficiait à

l'agriculture, au logement et à certains secteurs industriels. Elle a été en très grande partie abandonnée à la fin des années 80. On peut cependant ranger dans cette catégorie le prêt à taux zéro qui bénéficie à certaines familles, sous conditions de ressources, pour favoriser leur accession à la propriété.

2. Comment se forment les taux ?

Il importe de distinguer les taux d'intérêt à long terme (a) et les taux d'intérêt à court terme (b). Partant de là, il faudra définir puis comprendre le rôle du taux de base bancaire (TBB) (c).

a) Les taux longs

Ils expriment l'offre et la demande de capitaux en tenant compte des perspectives d'inflation. Quelqu'un qui prête de l'argent sur 5, 10 voire 30 ans veut voir son capital garanti contre l'érosion monétaire. La rémunération (le taux d'intérêt) doit rester positive. On dit que les taux longs sont "le juge de paix". D'une part, ils reflètent la santé économique d'un pays et d'autre part, ils sont influencés par les anticipations des agents économiques, anticipations sur l'inflation certes, mais aussi sur la politique économique, voire sur la politique ; en bref, sur tout ce qui peut modifier les données de l'économie.

Évidemment, la nature de l'emprunteur influence aussi les taux. L'État, les entreprises publiques font courir moins de risques aux prêteurs qu'une entreprise ou qu'un particulier. C'est la raison pour laquelle les taux à long terme qui servent de référence sont, pour chaque pays, les taux des emprunts d'État (OAT). Normalement tous les autres taux sont plus élevés. C'est sur ce constat que se base l'"effet d'éviction", l'État emprunte à taux plus faibles, d'une part, et il draine l'épargne disponible, d'autre part, asséchant le marché financier et privant les entreprises du recours à ce type d'emprunt.

Les taux d'intérêt à long terme sont déterminés par le marché financier

b) Les taux courts

Ils se forment de manière différente. Certes, sur le marché monétaire, l'offre et la demande de capitaux se confrontent, mais les acteurs ne sont pas les mêmes. Ce sont essentiellement des banques commerciales, des investisseurs institutionnels (assurances ou fonds de pension) et des grandes entreprises sous le contrôle de la banque centrale.

La banque centrale intervient sur le marché monétaire en injectant plus ou moins de monnaie centrale pour refinancer les banques commerciales qui, en fonction de leur activité de crédit bancaire, peuvent, temporairement manquer de monnaie centrale pour faire face aux retraits en liquide de leurs clients ou aux fuites de son propre réseau.

Logiquement, les taux courts doivent être inférieurs aux taux longs (de l'ordre de 2 à 3 points) puisque l'argent est engagé pour moins longtemps. Mais quand les banques centrales interviennent beaucoup, il peut se produire une "inversion des taux" (États-Unis d'Amérique en 2000), phénomène pervers qui consiste à mieux rémunérer l'argent placé à court terme que l'argent investi à long terme.

Il faut cependant noter que les placements à long terme prennent de plus en plus souvent la forme d'instruments financiers négociables, à court terme. Il s'agit de parts d'OPCVM (organismes de placement collectif de valeurs mobilières), c'est-à-dire de parts de sicav ou de fonds communs de placement.

Les taux d'intérêt à court terme sont déterminés par la banque centrale (en Europe, la BCE).

Celle-ci agit dans le cadre de sa politique monétaire, en fonction de considérations internes et externes.

Au niveau interne, elle doit :	Au niveau externe, elle cherche à
en priorité (cf. ses statuts) : veiller à lutter contre l'inflation	maintenir un taux de change acceptable vis-à-vis du \$ et du yen.
optimiser la croissance économique	

favoriser l'emploi	
--------------------	--

3. Le taux de base bancaire (TBB) ou prime rate

Comme nous l'avons vu ci-dessus, les particuliers n'ont pas accès aux marchés financiers. Pour placer leur argent ou pour emprunter, ils passent, généralement, par l'intermédiaire d'une banque. Le taux de base bancaire correspond alors au meilleur taux que chaque banque peut accorder à ses meilleurs clients. Les taux pratiqués vers les TPE, voire les PME-PMI et les particuliers sans garantie réelle ou personnelle sont plus élevés que le TBB. Les crédits les moins chers sont les crédits immobiliers à long terme parce que la banque peut prendre une sûreté réelle en hypothéquant le bien acheté. Les crédits les plus coûteux sont ceux ayant trait aux découverts bancaires et à certains crédits à la consommation, notamment les crédits renouvelables. Le taux de base bancaire s'applique à 4 % des crédits aux particuliers et à 15 % des prêts aux entreprises, principalement les crédits de trésorerie et d'équipement.

Mais comment la banque calcule-t-elle le taux d'intérêt ? Cela dépend avant tout du coût de revient de ses propres ressources. Jusqu'au milieu des années 80, la plus grande part de ces ressources était constituée par les dépôts à vue des clients (comptes-chèques). Aux frais de gestion près, il s'agissait d'une ressource bon marché. Mais les entreprises et les particuliers laissent de moins en moins d'argent "dormir sur leurs comptes-chèques", ils préfèrent les transférer sur des comptes qui rapportent des intérêts (livrets, PEL, PEA, sicav, FCP, etc.). Près des deux tiers des ressources des banques sont aujourd'hui rémunérées. Pour le reste, elles se refinancent sur le marché monétaire. Au coût de ce financement, la banque doit ajouter ses frais de fonctionnement et de gestion pour déterminer son taux de base.

III. Actualisation et actuariat

A l'inverse de la capitalisation, notion qui permet de calculer des valeurs futurs à partir de valeurs présentes, on peut vouloir déterminer quelle somme doit être prêtée aujourd'hui pour obtenir un montant fixé à l'avance : c'est le principe de l'actualisation.

A. Principe d'actualisation

1. Définitions

Définition : Une suite d'annuité est une suite de règlements réalisés à intervalles de temps égaux. Le terme d'annuités bien que parfois utilisé quelle que soit la périodicité des versements, est habituellement réservé à des périodicités annuelles. On parle sinon de semestrialités, mensualités, etc.

Cette suite d'annuité correspond à une rente pour celui qui la reçoit. On dit que la rente est *temporaire*, lorsqu'elle se compose d'un nombre fini d'annuités, *perpétuelle* sinon.

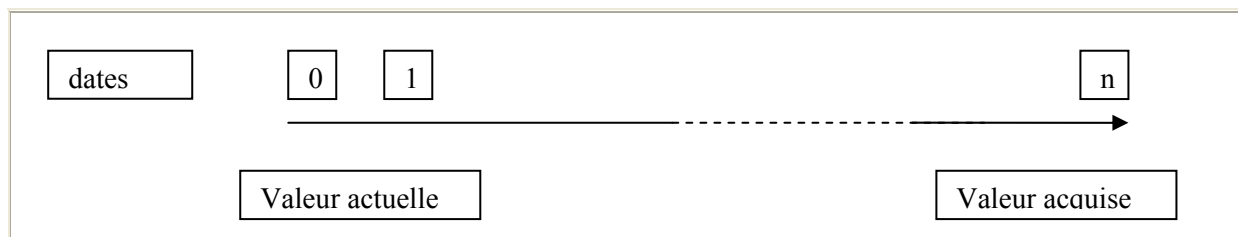
La rente est *à terme échu* si le premier versement intervient une période après l'origine. C'est le cas habituel. Elle est *immédiate* sinon.

Exemples :

- ♦ Un emprunt remboursé sur 10 ans par des mensualités constantes
- ♦ La constitution d'un capital par des versements réguliers
- ♦ L'acquisition d'une obligation d'une durée de vie de 6 ans qui verse des coupons annuels.

2. Valeurs acquises et valeurs actuelles d'une suite de flux financier.

Les mécanismes de calcul des valeurs acquises et des valeurs actuelles ne sont guère différentes : dans un cas c'est la valeur de la suite d'annuités à la fin des versements dans l'autre c'est sa valeur à l'origine.



a) Valeur actuelle d'une suite de flux financiers

(1) Cas général

Définition : la valeur actuelle d'un flux F_p (flux dans p périodes) est F_0 , où

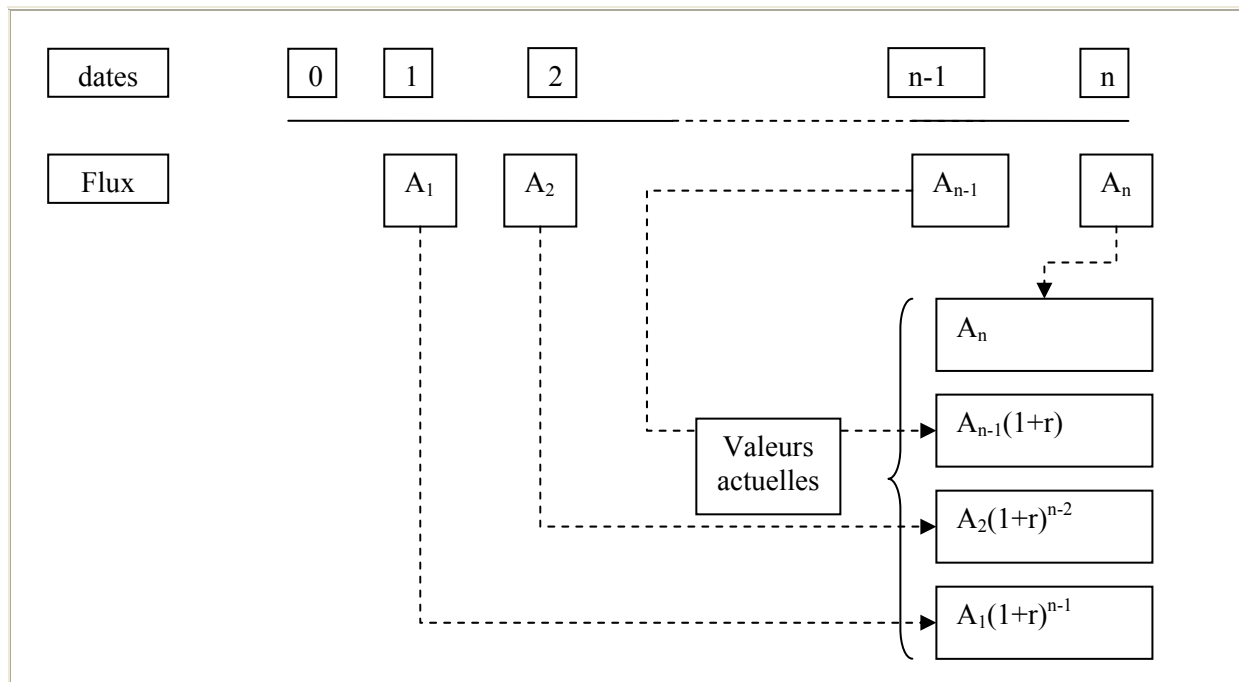
$$F_0 = \frac{F_n}{(1+r)^n}$$

Définition : la valeur actuelle d'une suite de n versements (flux de trésorerie) est la somme des valeurs actuelles par chacun des termes à l'origine de la suite

Définition : la valeur acquise par une suite de n versements (flux de trésorerie) est la somme des valeurs acquises par chacun des termes à la fin de la dernière période

Soient

- ♦ V_n : la valeur acquise
- ♦ V_0 : la valeur actuelle
- ♦ A_p : l'annuité (ou le flux de trésorerie) à la date p
- ♦ n : le nombre total de flux
- ♦ r : le taux d'intérêt (intérêt composé)



La valeur actuelle de cette suite est :

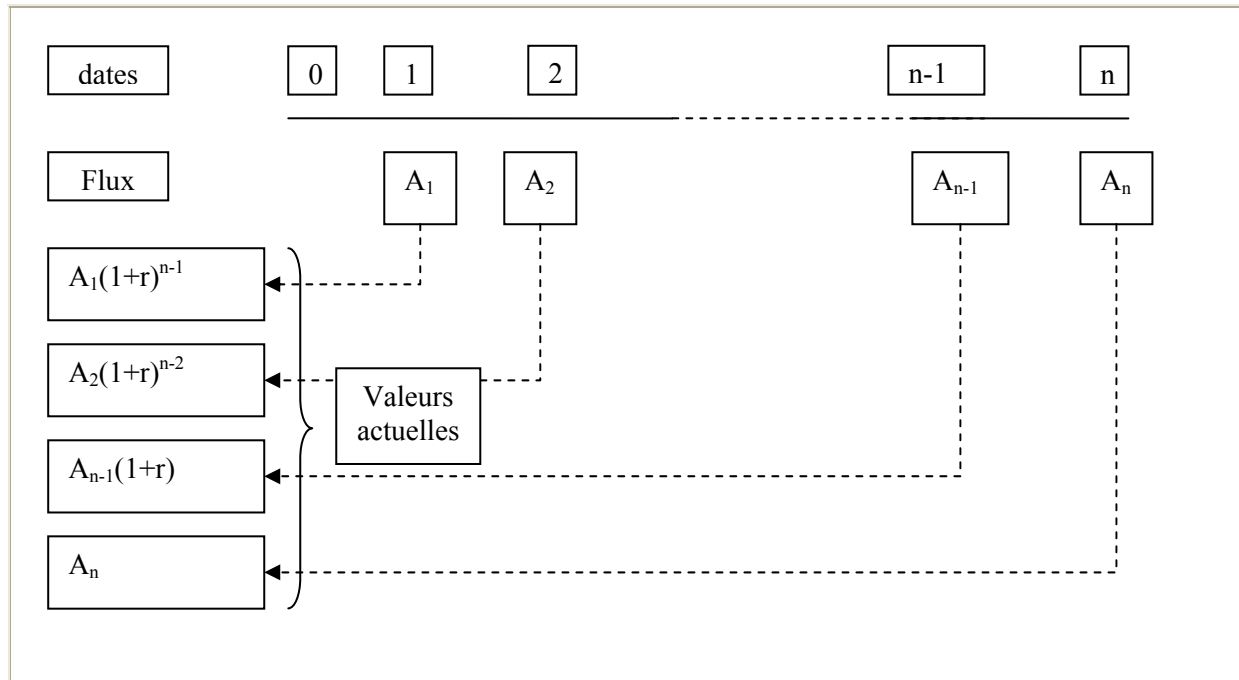
$$V_0 = A_1 \times (1+r)^{-1} + A_2 \times (1+r)^{-2} + \dots + A_{n-1} \times (1+r)^{-n+1} + A_n \times (1+r)^{-n}$$

De même, sa valeur acquise est

$$V_n = A_1 \times (1+r)^{n-1} + A_2 \times (1+r)^{n-2} + \dots + A_{n-1} \times (1+r)^1 + A_n$$

Propriété : Les valeurs actuelles et acquises d'une suite de n flux de trésorerie A_p au taux d'intérêt r sont

$$(1) \quad V_n = \sum_{p=1}^n A_p (1+r)^{n-p} \quad \text{et} \quad V_0 = \sum_{p=1}^n A_p (1+r)^{-p}$$



On parlera de Valeur Actuelle Nette en présence d'un flux négatif à l'origine de la suite, en date 0 :

$$V_n = A_0 + \sum_{p=1}^n A_p (1+r)^{-p} \quad \text{où } A_0 < 0$$

Conséquence : il existe une relation entre les valeurs acquises et actuelles :

$$(2) \quad V_0 = \frac{V_n}{(1+r)^n}$$

(2) Cas d'annuités constantes

Lorsque les flux sont tous égaux, l'expression (1) se simplifie facilement.

Propriété : Les valeurs actuelles et acquises d'une suite de n flux de trésorerie constants A au taux d'intérêt r sont

$$(3) \quad V_n = A \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \text{et} \quad V_0 = A \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$

Exercice : quelle somme doit-on placer aujourd'hui au taux de 12% pour obtenir dans trois ans 100000€ ?

Solution :

$$V_0 = \frac{100000}{(1.12)^3} = 71178,02\text{€}$$

Exercice : une banque accorde à une entreprise un prêt de 1000000€ au taux de 10% remboursable en 8 ans. Le remboursement se fait par annuités constantes. Calculer le montant de cette annuité.

Solution : la relation de base est fondée sur une égalité entre ce que la banque prête à la fin de l'année 0 et ce qu'elle reçoit en remboursement de la fin de la première année à la fin de la dernière année. Si on appelle A l'annuité constante, on a :

$$1000000 = V_0 \Leftrightarrow 1000000 = A \left(\sum_{p=1}^8 \frac{1}{1.10^p} \right) \Leftrightarrow A = \frac{1000000}{\frac{1-1.10^{-8}}{0.10}} = 187444\text{€}$$

B. Les choix d'investissement

1. Taux actuariel

Définition : on appelle taux d'actualisation, le taux d'intérêt utilisé pour calculer une valeur actuelle.

Telle qu'on l'a définie, la valeur actuelle ou présente d'une séquence de flux dépend du taux r . Il y a autant de valeurs actuelles que de taux d'actualisation.

Définition : le taux actuariel est le taux d'actualisation qui annule la valeur actuelle de l'ensemble des flux présents et futurs.

Mathématiquement,

$$r^* / V_0(r^*) = A_0 + \dots + \frac{A_n}{(1+r^*)^n} = 0$$

Dans le cas où A_0 est de signe opposé à celui de $\{A_1, \dots, A_n\}$, l'équation a une unique solution. Dans le cas où les flux financiers sont relatifs à une opération de prêt ou d'emprunt, ce taux est appelé taux de rendement actuariel ou (taux effectif global – TEG).

2. Comparaison VAN/TRI

L'investissement est un engagement durable de capital réalisé par une entreprise. D'un point de vue financier, l'investissement se traduit par une suite de flux :

- ♦ la dépense initiale
- ♦ les flux nets de trésorerie, différences entre les recettes et les dépenses générées durant chaque période par le projet
- ♦ éventuellement en fin de période une valeur résiduelle qui pourra être ajoutée au flux de la trésorerie de la dernière période.

Comment évaluer un investissement ? La réponse à cette question peut se faire en utilisant les techniques d'actualisation. Une méthode d'évaluation doit répondre à deux questions fondamentales :

- ♦ le projet d'investissement peut-il être accepté ?
- ♦ si deux projets sont en concurrence, lequel choisir ?

On note $\{A_0, \dots, A_n\}$ les flux liés à l'investissement et r le taux d'actualisation et on suppose que $A_0 < 0$ et $A_p \geq 0$, pour tous p .

a) La VAN : valeur nette actualisée

Rappel : la VAN(r) s'écrit

$$VAN(r) = A_0 + \sum_{p=1}^n \frac{A_p}{(1+r)^p}$$

La VAN représente la valeur aujourd'hui des flux du projet donc

- ♦ si $VAN > 0$ le projet est retenu car il permet d'augmenter la richesse initiale
- ♦ si $VAN^1(r) < VAN^2(r)$, on retient le projet 2.

Toutefois, l'inconvénient est qu'il faut connaître le taux d'actualisation.

b) Le TRI : taux de rentabilité interne

Le TRI est le taux pour lequel la VAN (r) est nulle. En fait, il correspond au taux actuariel. La décision de retenir ou non un projet va dépendre de la position du taux d'actualisation retenu et du taux de rentabilité interne. :

- ♦ $TRI < \text{Taux d'actualisation}$: projet rejeté.
- ♦ $TRI > \text{Taux d'actualisation}$: projet accepté car il permet de couvrir le coût des ressources.

Vu notre hypothèse sur les signes des A , la VAN est une fonction strictement décroissante du taux. On voit donc que les deux critères conduiront au même résultat dans le cas de projet unique (voir ci-dessous).

Dans le cas de deux projets, on choisit celui qui a le taux le plus élevé (plus il sera élevé, plus le taux d'actualisation a des chances d'être inférieur).

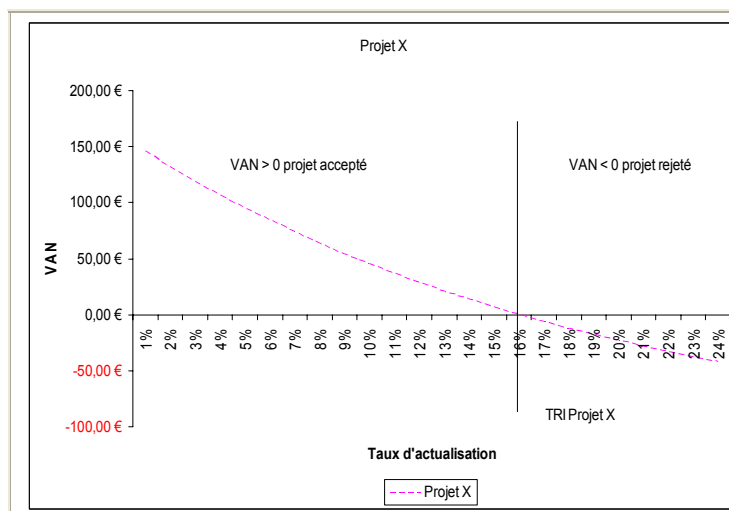
c) Un exemple

Un investissement initial est de 400K€. Les flux de trésoreries sont donnés ci-dessous. Le taux d'actualisation retenu est de 10%.

Années	0	1	2	3	4
Flux	-400	170	140	130	120
Facteur d'actualisation : 1.1^{-p} où p est le rang de l'année		0.909	0.826	0.751	0.683
Flux actualisés		154,54	115,70	97,67	81,96

La VAN est alors

$$VAN = 154.54 + 115.7 + 97.67 + 81.96 - 400 = 49.88$$



Graphique montrant l'évolution de la VAN en fonction du taux. Le TRI est l'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses.

Pour ce projet, les zones de rejet sont identiques.

La VAN est positive, donc le projet est accepté. Mais, si le taux augmente, la VAN peut devenir négative. Par exemple, si on considère un taux de 20% la VAN tombe à -28, ce qui entraîne un rejet du projet. Par ailleurs, le TRI est de 16,02%

d) Conflits entre les critères

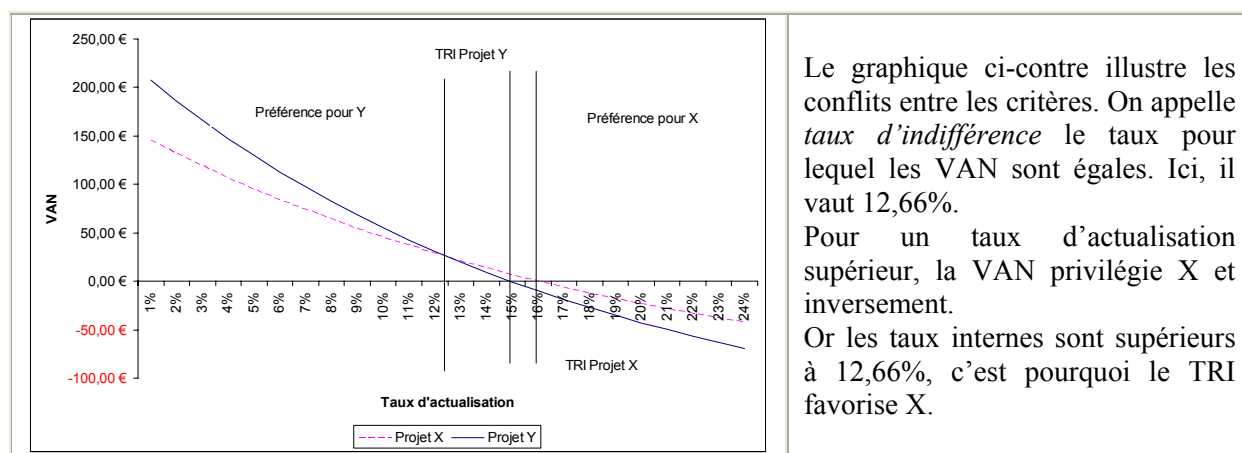
Les cas de conflits entre les critères interviennent deux projets et que l'on cherche à choisir le meilleur. Pour le critère VAN, celui qui aura la VAN la plus élevée sera privilégié. Pour le critère du TRI, c'est celui qui aura le taux de rentabilité interne qui sera choisit. Reprenons l'exemple ci-dessus :

Années	0	1	2	3	4
Flux projet X	-400	170	140	130	120
Flux projet Y	-400	30	80	180	340

Si on calcule les deux paramètres, on s'aperçoit que

	Projet X	Projet Y
VAN	49,8	60,8
TRI	16%	14,94%

Ainsi, le critère VAN tend à privilégier Y et le TRI favorise X. En fait on est dans une situation de ce type :



C. Les emprunts indivis

Ce sont des emprunts non divisibles et contractés auprès d'un seul créancier. Ils s'opposent donc aux obligations où le nombre de créanciers est grand. En général, il s'agit d'emprunt effectué par des particuliers auprès des banques (bien de consommation, appartement, automobile) ou par des entreprises à la recherche de financement pour des investissements.

Pour chacun de ces emprunts, les clauses du contrat entre prêteur (créancier) et emprunteur (débiteur) précisent, entre autres, la durée de mise à disposition des fonds, le taux d'intérêt, les conditions de remboursement du capital emprunté.

Il existe différents modes de remboursement :

- ◆ In fine : l'emprunteur rembourse les intérêts à la fin de chaque annuité, et le capital à la fin de la dernière annuité.
- ◆ Amortissement constant : l'emprunteur rembourse une part constante du capital à chaque annuité plus les intérêts. Ceux-ci diminuent donc d'une annuité à l'autre.
- ◆ Annuité constante : le capital et les intérêts sont remboursés de façon à ce que les annuités (ou autre périodicité : mensualités, trimestrialités, ...) soient constantes.

a) Notations et conventions

On note

- ♦ V_0 : le capital emprunté
- ♦ n : la durée de l'emprunt
- ♦ r : le taux d'intérêt périodique (= taux nominal annuel si les périodes sont des annuités)
- ♦ I_k : le montant des intérêts remboursé à la fin de la période k
- ♦ D_k : la part de capital (on parle d'amortissement) remboursé durant la période k
- ♦ $A_k = D_k + I_k$: le montant des versements périodiques (annuités si la période est l'année)
- ♦ V_k : le capital dû en fin de période k

On connaît certaines relations entre ces différentes variables :

- ♦ les intérêts pour la période k sont dus par rapport au reste de capital à rembourser

$$(4) \quad I_k = rV_{k-1}$$

- ♦ le capital du en fin de période k est celui du en fin de période $k-1$ moins l'amortissement en période k

$$(5) \quad V_k = V_{k-1} - D_k$$

- ♦ le capital est complètement remboursé à la fin du prêt

$$(6) \quad V_n = 0$$

- ♦ le montant du prêt est la somme des amortissements

$$(7) \quad V_0 = D_1 + D_2 + \dots + D_n$$

- ♦ le montant du capital restant est la valeur actualisée des traites restant dues après la fin de la période k

$$(8) \quad V_k = \frac{A_{k+1}}{1+r} + \dots + \frac{A_n}{(1+r)^{n-k}}$$

Définition : on appelle coût global du crédit, la somme des intérêts :

$$(9) \quad \text{Cout} = \sum_{k=1}^n I_k$$

b) Illustration des trois méthodes de remboursement

(1) Remboursement In fine

L'emprunteur ne paie, à la fin de chaque période, que l'intérêt du capital emprunté. Il rembourse en une seule fois, à l'échéance de l'emprunt, l'intégralité du capital emprunté.

Le tableau d'amortissement va alors ressembler à ceci :

k	V _k	I _k	D _k	A _k
1	V_0	rV_0	0	rV_0

...
n-1	V_0	rV_0	0	rV_0
n	0	rV_0	V_0	$V_0(1+r)$
Total		nrV_0	V_0	$V_0(1+nr)$

Cette méthode est essentiellement utilisée par les entreprises. En effet, elle a pour intérêt de laisser le capital disponible avec des charges constantes rV_0 de la période 1 à la période n-1.

Le coût d'un tel crédit est nrV_0 .

Exemple : Une entreprise a un besoin de financement de 100000€ sur 4 ans. Le taux d'intérêt est de 4%. Dresser le tableau d'amortissement

k	Vk	Ik	Dk	Ak
1	100000	4000	0	4000
2	100000	4000	0	4000
3	100000	4000	0	4000
4	100000	4000	100000	104000
Total		16000	100000	116000

c) Amortissement constant

Le capital emprunté V_0 est remboursé en n périodes par amortissements égaux chacun à $\frac{V_0}{n}$ (voir relation(7)). Décomposons deux périodes consécutives quelconques A_{k-1} et A_k :

- ♦ Comme l'amortissement est constant, on sait que

$$V_k = V_0 - \sum_{p=1}^k D_p = V_0 - \sum_{p=1}^k \frac{V_0}{n} = V_0 \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

L'intérêt I_k porte sur le capital du, donc

$$I_k = rV_{k-1} = rV_0 \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

- ♦ La traite est donc (on peut remarquer qu'elle diminue)

$$A_k = I_k + D_k = rV_0 \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \frac{V_0}{n} = \frac{V_0}{n} (1 + r(n - k + 1))$$

- ♦ Le coût total du crédit est

$$Cout = \sum_{k=1}^n I_k = rV_0 \left(n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k\right) = rV_0 \left(n - \frac{n-1}{2}\right) = rV_0 \frac{n+1}{2}$$

Si on compare le coût d'un crédit de ce type avec celui d'un crédit In fine, on doit comparer $rV_0 \frac{n+1}{2}$ et nrV_0 . Or $n > \frac{n+1}{2}$ dès que $n > 1$. Donc un crédit in fine est plus cher.

Le tableau d'amortissement est alors

k	V_k	I_k	D_k	A_k
1	$V_0 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$	rV_0	$\frac{V_0}{n}$	$\frac{V_0}{n}(1 + nr)$
2	$V_0 \left(1 - \frac{2}{n}\right)$	$rV_0 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$	$\frac{V_0}{n}$	$\frac{V_0}{n}(1 + (n-1)r)$
...
n-1	$V_0 \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$	$rV_0 \left(1 - \frac{n-2}{n}\right)$	$\frac{V_0}{n}$	$\frac{V_0}{n}(1 + 2r)$
n	0	$rV_0 \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$	$\frac{V_0}{n}$	$\frac{V_0}{n}(1 + r)$
Total		$rV_0 \frac{n+1}{2}$	V_0	$V_0 \left(1 + r \frac{n+1}{2}\right)$

d) Annuités constantes

Ici, on connaît A_k et il faut trouver les intérêts et l'amortissement. L'emprunteur paie, à la fin de chaque période, une annuité constante ($A_k = A$). Ce système, pratiqué par les établissements de crédit pour les prêts aux particuliers, présente l'avantage, pour l'emprunteur, d'un remboursement par sommes égales à un rythme régulier (la période pouvant être l'année, le semestre, le trimestre ou le plus souvent le mois).

La relation générale $V_0 = \frac{A_1}{1+r} + \dots + \frac{A_n}{(1+r)^n}$ permet avec A constant de trouver

$$(10) \quad A = V_0 \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+r)^k}} = V_0 \frac{1 - \frac{1}{1+r}}{\frac{1}{1+r} - \frac{1}{(1+r)^{n+1}}} = V_0 \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = V_0 \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}}$$

Ainsi, on peut trouver les valeurs restantes :

- ♦ On sait que le capital restant s'exprime en fonction des annuités par la relation (8) :

$$V_k = \frac{A}{1+r} + \dots + \frac{A}{(1+r)^{n-k}} = \frac{A}{1+r} \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^{n-k}}}{1 - \frac{1}{1+r}} = A \frac{1 - (1+r)^{-(n-k)}}{r}$$

En remplaçant A par sa valeur on obtient

$$V_k = V_0 \frac{1 - (1+r)^{-(n-k)}}{1 - (1+r)^{-n}}$$

- ♦ L'amortissement se calcule comme la différence de capital du (voir (5))

$$\begin{aligned} D_k &= V_{k-1} - V_k = \frac{A}{1+r} + \dots + \frac{A}{(1+r)^{n-k+1}} - \left(\frac{A}{1+r} + \dots + \frac{A}{(1+r)^{n-k}} \right) \\ &= \frac{A}{(1+r)^{n-k+1}} = \frac{rV_0}{(1+r)^{n-k+1} (1 - (1+r)^{-n})} \end{aligned}$$

- ♦ Les intérêts s'obtiennent à partir du capital restant

$$I_k = rV_{k-1} = rV_0 \frac{1 - (1+r)^{-(n-k+1)}}{1 - (1+r)^{-n}}$$

Le tableau d'amortissement est donc

k	V_k	I_k	D_k	A_k
1	$V_0 \frac{1 - (1+r)^{-(n-1)}}{1 - (1+r)^{-n}}$	rV_0	$\frac{rV_0}{(1+r)^n - 1}$	$V_0 \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}}$
...
k	$V_k = V_0 \frac{1 - (1+r)^{-(n-k)}}{1 - (1+r)^{-n}}$	$rV_0 \frac{1 - (1+r)^{-(n-k+1)}}{1 - (1+r)^{-n}}$	$\frac{rV_0}{(1+r)^{n-k+1} (1 - (1+r)^{-n})}$	$V_0 \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}}$
...
n	0	$\frac{V_0}{1+r} \times \frac{r^2}{1 - (1+r)^{-n}}$	$\frac{rV_0}{(1+r)(1 - (1+r)^{-n})}$	$V_0 \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}}$
Total		$V_0 \left(\frac{nr}{1 - (1+r)^{-n}} - 1 \right)$	V_0	$V_0 \frac{nr}{1 - (1+r)^{-n}}$

Le coût total du crédit est donc

$$\begin{aligned} \text{Cout} &= \sum_{k=1}^n I_k = \frac{rV_0}{1 - (1+r)^{-n}} \sum_{k=1}^n 1 - (1+r)^{-(n-k+1)} = \frac{rV_0}{1 - (1+r)^{-n}} \left(n - \sum_{k=1}^n (1+r)^{-(n-k+1)} \right) \\ &= \frac{rV_0}{1 - (1+r)^{-n}} \left(n - \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} \right) = V_0 \left(\frac{nr}{1 - (1+r)^{-n}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Pour comparer au crédit à amortissement constant, il faut comparer cela à $rV_0 \frac{n+1}{2}$.

Si on reprend l'exemple de crédit In fine, on a le tableau

k	Vk	Ik	Dk	Ak
1	100000	4000	23549	27549
2	76451	3058	24491	27549
3	51960	2078	25471	27549
4	26489	1060	26489	27549
Total		10196	100000	110196

D. Les emprunts obligataires

Un emprunt obligataire se différencie d'un emprunt indivis par la **présence de plusieurs prêteurs**. Tout au long de cette partie, nous détaillerons en italique les caractéristiques d'un emprunt obligataire de BNP Paribas à titre d'exemple.

1. Caractéristiques d'un emprunt obligataire

a) Définition

L'emprunt obligataire est un emprunt qui fait appel à de **nombreux prêteurs** (appelés obligataires ou souscripteurs), qui reçoivent, en échange des sommes prêtées, des titres (appelés obligations). Chaque titre est donc représentatif d'une quote-part d'emprunt et **fait l'objet d'une cotation en bourse**. L'émission de tels emprunts est évidemment réservé aux plus grandes des sociétés et permet de **réunir des fonds importants**.

Une obligation est un titre de créance négociable représentant une fraction d'un emprunt à long terme émis par une collectivité (état, organisme public ou privé) et donnant à son possesseur le **droit de percevoir un intérêt le plus souvent annuel et d'être remboursé de son titre à l'échéance**.

Toute émission d'un emprunt obligataire fait l'objet d'une **note d'information** portant le visa de la Commission des Opérations de Bourse (COB) et publiée au Bulletin des Annonces Légales Obligatoires. Y sont mentionnés, entre autres :

- ◆ le nombre d'obligations émises
- ◆ la valeur nominale des obligations
- ◆ le taux nominal d'intérêt
- ◆ le prix d'émission
- ◆ la date de règlement des souscriptions
- ◆ la durée de l'emprunt
- ◆ la date de jouissance
- ◆ le prix de remboursement des obligations
- ◆ le système d'amortissement
- ◆ le taux de rendement actuariel brut au jour du règlement.

(1) Valeur nominale (N)

C'est la valeur qui sert de base au calcul des intérêts.

$N=1000 \text{ €}$

(2) Taux nominal d'intérêt (z)

Inscrit dans le contrat d'émission, il sert à désigner l'emprunt et à calculer le montant du coupon. Il peut être fixe ou variable (le taux est alors déterminé à partir d'un taux de référence monétaire : TME -taux moyen mensuel des emprunts à long terme de l'état-, TMM -taux du marché monétaire-, TAM -taux annuel monétaire-, TIOP -taux interbancaire offert à Paris).

Dans le cas de BNP $z=4,25\%$.

(3) Le coupon (c)

Le coupon (intérêt) est calculé en appliquant le taux d'intérêt nominal à la valeur nominale : $c=N \cdot z$.
 Dans le cas de BNP, $c=N \cdot z=1000 \cdot 0,0425=42,5 \text{ €}$.

Définition : une obligation qui ne verse pas de coupon est appelée **zéro-coupon**. Seul le nominal est reversé à échéance. Typiquement, les obligations à court terme (moins d'un an) sont des zéro-coupon.

Ces trois paramètres sont les plus importants. Mais, il existe d'autres caractéristiques d'une obligation qui permettent de les moduler :

- ◆ Prix d'émission (E) : c'est la somme effectivement prêtée par l'obligataire. L'obligation peut-être émise au pair ($E=N$), au-dessous ($E<N$), ou au-dessus du pair ($E>N$).

Pour chaque exemple, indiquez :		si l'obligation est émise au pair, au-dessus ou au-dessous du pair :
1	Valeur nominale $N=1\ 000 \text{ €}$ Prix d'émission : 99,5% $E=995 \text{ €}$	Obligation émise au dessous du pair ($E<N$).
2	Valeur nominale $N=1\ 000 \text{ €}$ Prix d'émission / 100% $E=1\ 000 \text{ €}$	Obligation émise au pair ($E=N$).
3	Valeur nominale $N=1\ 000 \text{ €}$ Prix d'émission : 101% $E=1\ 010 \text{ €}$	Obligation émise au dessus du pair ($E>N$).

Remarque :

Pourquoi le prix d'émission n'est-il pas toujours égal à la valeur nominale ?

Pour que le lancement d'un emprunt obligataire soit un succès, il faut réussir à concilier 2 objectifs opposés. En effet, l'emprunteur souhaite emprunter au taux le plus bas et le prêteur attend le rendement le plus élevé possible.

L'équilibre entre ces 2 attitudes définit le niveau du marché, mesuré par un taux de rendement qui dépend de 2 variables : le taux d'intérêt et le prix d'émission.

Pour obtenir le taux de rendement le plus proche du marché, il faut :

- ◆ Soit offrir un taux d'intérêt nominal légèrement supérieur à celui du marché et augmenter le prix d'émission (qui est alors au-dessus du pair) ;
- ◆ Soit offrir un taux d'intérêt nominal plus faible à celui du marché et baisser le prix d'émission (qui est alors au-dessous du pair). Cette solution décourage l'investisseur et est peu adoptée.

Dans le cas de BNP, le prix d'émission est de 101,291% soit $1000 \cdot 101,291\%=1012,91 \text{ €}$

- ◆ La date de règlement est le moment de départ de l'obligation.
- ◆ La durée de l'emprunt (n) correspond au délai entre la date d'émission et la date de remboursement. Pour BNP la date d'émission est le 27 juin 2003 et la date de remboursement le 27 juin 2015. La durée est donc de 12 ans.
- ◆ La date de jouissance est la date à partir de laquelle le titre porte intérêt. Dans la plupart des cas elle identique à la date de règlement. Dans l'exemple BNP la date de jouissance est le 27 juin 2003, soit la date de règlement ou d'émission.
- ◆ Prix de remboursement (R) est la somme payée versée par l'emprunteur lors du remboursement de l'obligation. Les obligations sont amorties par remboursement : soit au pair ($R=N$), soit au-dessus du pair ($R>N$). Dans ce dernier cas on parle de prime de remboursement. Cette prime est rare pour les obligations simples mais très fréquentes pour les obligations convertibles. Dans le cas de BNP, le remboursement est effectué au pair donc $R=1000 \text{ €}$.
- ◆ Maturité ou durée de vie résiduelle est la moyenne pondérée des différentes durées de vie possibles.

b) Modalité de remboursement

Le système d'amortissement est semblable à celui des emprunts indivis :

- ♦ (R1): Le montant de l'emprunt est égal à la somme des amortissements.
- ♦ (R2) : La dernière annuité est égale au dernier amortissement augmenté de son propre intérêt.
- ♦ (R3) : Le capital emprunté est égal à la somme des valeurs actuelles des annuités assurant le service de l'emprunt.
- ♦ (R4) : Le capital restant dû à la fin d'une période quelconque est égal à la valeur actuelle des annuités non échues.

Il existe deux modalités d'amortissement des emprunts obligataires.

- ♦ Remboursement par amortissement global "in fine" : *c'est le cas le plus courant. Réduction des frais de gestion.* Toutes les obligations sont amorties en bloc à la fin de l'emprunt. Chaque année, seuls les coupons sont payés pendant toute la durée de l'emprunt.
- ♦ Remboursement par annuités constantes : *Ancien système classique français, en désuétude.* La société émettrice verse à chaque période une somme constante (composée des coupons des obligations encore vivantes et du remboursement d'un certain nombre d'obligations tirées au sort). Au fur et à mesure du remboursement des obligations, les coupons à payer diminuent et le nombre d'obligations amorties est donc croissant

2. Valeur d'une obligation

a) Arbitrage

L'arbitrage est une notion essentielle en finance. On donne ici un aperçu afin de valoriser les obligations mais nous développerons cette notion ultérieurement.

Définition : on dit qu'un marché présente une **opportunité d'arbitrage** (*arbitrage opportunity* ou *free lunch*) lorsque l'on peut mettre en œuvre une stratégie d'achat et de vente de différents titres qui ne coûte rien et rapporte des gains strictement positifs (aujourd'hui ou à une date future).

Exemple : Si sur un marché coexistaient au même prix de 99€ un zéro-coupon CHER à 6 mois de nominal 100€ et un autre zéro-coupon PASCHER de nominal 110€ il est clair que l'on pourrait s'enrichir facilement en mettant en œuvre la **stratégie d'arbitrage** suivante :

Opération	aujourd'hui	6 mois
vente de CHER	99 €	-100 €
achat de PASCHER	-99 €	110 €
Total	0 (ne coûte rien)	+10 (gain >0)

Malheureusement (ou heureusement), en finance les arbres ne montent pas au ciel, de sorte que les opportunités d'arbitrage se comptent sur les doigts d'une main d'un mutilé de guerre. La plupart du temps, on fera l'hypothèse **d'absence d'opportunité d'arbitrage** (en abrégé **AOA**) sur les marchés financiers. En tout état de cause, une opportunité d'arbitrage ne peut se présenter que sur un laps de temps extrêmement court : si nous supposons que PASCHER et CHER coexistent au même prix, tous les acteurs achèteraient PASCHER de sorte que son prix monterait et vendraient CHER de sorte que son prix baisserait.

Cette hypothèse va nous permettre d'entreprendre des raisonnements par arbitrage équivalents des raisonnements par l'absurde en mathématiques.

b) Valorisation des obligations : une première approche

Considérons deux obligations émises par l'état français, de maturité 2 ans, et de même nominal 1000€ ; l'obligation A verse un coupon de 100€ chaque année tandis que l'obligation B verse un seul coupon de 1000€ au bout de la première année. Le tableau des cash flow de ces obligations est :

Temps	1	2
Cash Flow A	100	1100
Cash Flow B	1000	1000

Supposons que ces deux obligations aient un prix aujourd'hui ($t=0$) de 1000€ et 1735€ respectivement. Laquelle doit-on conseiller d'acheter ?

Les cash flow de ces obligations étant certains, nous pouvons recourir aux critères multi périodiques à savoir la VAN et le TRI.

♦ *La valeur actuelle nette*

En notant r le taux d'actualisation retenu (correspondant par exemple à l'exigence de rentabilité de l'acheteur) :

$$VAN_A = -1000 + \frac{100}{1+r} + \frac{1100}{(1+r)^2}$$

$$VAN_B = -1735 + \frac{1000}{1+r} + \frac{1000}{(1+r)^2}$$

On devrait donc conseiller d'acheter A si $VAN_A > 0$ et B si $VAN_B > 0$, en préférant A à B si et seulement si $VAN_A > VAN_B$. Mais ce critère simple, très utilisé en banque d'affaire pour évaluer *ponctuellement* un projet d'investissement, est en fait inadapté à la valorisation *continue* des obligations échangées sur un marché financier. En effet, à l'équilibre, les investisseurs ajustent tous leur exigence de rentabilité pour que la VAN soit nulle (car si il en était autrement, les investisseurs pour qui $VAN_A > 0$ achèteraient A, ceux pour qui $VAN_A < 0$ vendraient, et ce jusqu'à ce que les uns et les autres se soient mis d'accord sur le juste prix, c'est-à-dire le prix qui les rend indifférents à acheter ou vendre A, c'est-à-dire le prix tel que $VAN_A = 0$).

Ainsi, le taux r doit être tel que $VAN_A = VAN_B = 0$, ce qui rend le critère de la VAN quelque peu inefficace.

♦ *Le taux de rentabilité interne*

Il a le grand avantage de rendre la VAN nulle :

$$-1000 + \frac{100}{1+r_A} + \frac{1100}{(1+r_A)^2} = 0$$

$$-1735 + \frac{1000}{1+r_B} + \frac{1000}{(1+r_B)^2} = 0$$

On devrait conseiller d'acheter A plutôt que B si et seulement si $r_A > r_B$. Là encore, ce critère est rarement satisfaisant car si l'écart entre les deux rentabilités était conséquent, le mécanisme du marché l'estomperait rapidement ; dans cet exemple, on a même $r_A = r_B = 10\%$.

En fait ces deux critères supposent que le taux annuel r est constant dans le temps, autrement dit que l'on pourra réinvestir la deuxième année les intérêts de la première année au même taux r . Cette anticipation sur les taux futurs est loin d'être évidente, et c'est en tout cas faire pari risqué sur l'avenir, puisque rien n'empêche la Banque Centrale de modifier ses taux sans crier garde. Ce risque est appelé **risque de taux**, et induit le plus souvent une préférence des investisseurs pour les taux courts (à moins d'un an qui leur permettent de réagir plus vite aux variations de taux).

c) Courbe des taux par terme. Prix de non arbitrage

(1) Exemple introductif

Supposons que sur le marché obligataire américain existent deux obligations A et B de maturité ans, ainsi que deux zéro-coupons C et D de maturité un et deux ans respectivement. Le tableau suivant résume leurs caractéristiques :

	Prix	t=1	t=2
A	1 000 €	100 €	1 100 €
B	1 735 €	1 000 €	1 000 €
C	95 €	100 €	-
D	80 €	-	100 €

Dans cette situation, on peut **répliquer** l'obligation A en constituant un portefeuille A' contenant un zéro-coupon C et onze zéro-coupons D. Le prix à payer pour se constituer ce portefeuille est de : $1 \times 95 + 11 \times 80 = 975€$, soit 25€ de moins que l'obligation alors que les cash flows sont identiques.

	Quantité	Prix unitaire	t=1	t=2
C	1	95 €	100 €	-
D	11	80 €	-	1 100 €
A		975 €	100 €	1 100 €

De même on montre que l'obligation B peut être répliquée par dix zéro-coupons C et dix zéro-coupons D. Le prix de ce portefeuille est de 1750€. Cette obligation est sous cotée de 15€. Dans ce marché il existe donc des opportunités d'arbitrage !

La présence des zéro-coupons sur le marché fournit donc un moyen simple de savoir si les obligations sont sous ou sur cotée, et ce indépendamment de la personnalité des investisseurs. Si l'on fait le raisonnement inverse, on dispose d'un moyen de valoriser les emprunts obligataires.

(2) La courbe des taux par terme

Considérons un zéro-coupon d'échéance T et de nominal N , de prix p_r sur le marché. Par définition, le taux de rentabilité à échéance T de ce titre est :

$$r_T = \frac{N - p_T}{p_T}$$

Deux taux de rentabilité ne sont comparables que s'ils portent sur la même période. Il est donc naturel de définir le taux annuel de rentabilité du zéro-coupon :

$$z(T) = (1 + r_T)^{\frac{1}{T}} - 1 = \left(\frac{N}{p_R} \right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Si l'on dispose de suffisamment de zéro-coupons sur le marché, on peut alors construire la courbe de z , qui est appelée **courbe des zéro-coupons par terme**, ou encore *courbe des taux purs*, ou plus simplement **courbe des taux zéros** (« **zéro-rate curve** »).

On distingue trois grands cas de figure :

- ♦ La courbe est plate, i.e. $z \equiv z_0$ (où z_0 est une constante). Il s'agit en fait d'un cas d'école, qui revient à supposer qu'il existe un taux d'intérêt constant dans le temps, et qui ne se rencontre pas dans la pratique ;
- ♦ La courbe est croissante. C'est le cas le plus courant : plus l'échéance est éloignée, plus le risque de taux est important, donc plus le marché exige une rentabilité élevée ;
- ♦ La courbe est décroissante. On observe ce phénomène lorsque le marché anticipe une baisse des taux.

(3) Prix de non arbitrage

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le prix de marché P_{AOA} de tout titre financier versant une suite de n cash flows certains (F_i) aux échéances futures t_1, t_2, \dots, t_n doit être égal à la valeur actuelle du titre, en choisissant pour taux d'actualisation les taux zéro-coupons à échéances t_1, t_2, \dots, t_n :

$$P_{AOA} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+z(t_i))^{t_i}}$$

La preuve de cette formule est à retenir car elle met en œuvre un raisonnement par arbitrage. Pour simplifier, on suppose que $n=3$, et que les flux sont annuels. On désigne par X, Y, Z les zéro-coupons à un, deux et trois ans respectivement, et par A le titre en question. On peut également supposer sans perte de généralité que X, Y et Z ont tous un nominal de 1. Le prix de Y , par exemple, est alors de :

$\frac{1}{(1+z(2))^2}$. Supposons que $P_{AOA} > \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+z(t_i))^{t_i}}$. On peut alors mettre en œuvre la stratégie suivante :

Opération	T=0	T=1	T=2	T=3
Acheter F_1 titres X	$-F_1 \times \frac{1}{1+z(1)}$	$+F_1$		
Acheter F_2 titres Y	$-F_2 \times \frac{1}{1+z(2)}$		$+F_2$	
Acheter F_3 titres Z	$-F_3 \times \frac{1}{1+z(3)}$			$+F_3$
Vendre A	$+P_A$	$-F_1$	$-F_2$	$-F_3$
Total	>0 par hypothèse	0	0	0

Supposons que $P_{AOA} < \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+z(t_i))^{t_i}}$. En renversant les opérations et signes du tableau précédent, on

montre également que cette supposition entraîne une opportunité d'arbitrage.

En conclusion, par absence d'opportunités d'arbitrage, les deux suppositions précédentes sont fausses,

ce qui prouve la formule : $P_{AOA} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1+z(t_i))^{t_i}}$.

d) Cotation en bourse

Les obligations sont cotées en pourcentage de leur valeur nominale *au pied du coupon* (c'est à dire coupon couru non compris). Le coupon couru (montant des intérêts courus de la dernière échéance au jour de la cotation) est également exprimé en pourcentage de la valeur nominale et varie chaque jour de $1/365^{\text{ème}}$ du coupon annuel.

Pour déterminer le prix que paie l'acheteur d'une obligation en bourse, il faut ajouter au cours de l'obligation le montant du coupon couru.

Exemple:

Combien doit payer l'acheteur d'une obligation SNCF 8% ?

Séance du 28 septembre 1995

Libellé	Valeur nominale	Coupon couru en %	Cours du jour en %
SNCF 8% 95-07	5 000 F	2,798	101,50

L'acheteur devra payer (prix de l'obligation + coupon couru) :

$$(5\,000 \times 1,015) + (5\,000 \times 0,02798) = 5\,214,90\text{F}$$