THÉORIE DE LA CRÉDIBILITÉ

Septembre 2018

Sommaire

INTRODUCTION

Théorie de la crédibilité ? Késako ?

Introduction

❖ Vous avez vu (ou allez voir) qu'il peut être facile d'estimer une prime pure pour un assuré à partir de données regroupant tous les assurés.

❖ Que se passe t il si un assuré arrive avec ses statistiques ? Ses données sinistres ?
  - Doit on tarifer sur nos données ?
  - Utiliser l'information qu'il nous apporte ?
    - ➢ Si oui comment utiliser l'information?

❖ Connaissez vous un produit d'assurance qui utiliserait les données sinistres du client ?

❖ Et comment cette information est elle utilisée ?

Échauffement … un petit exercice

- Soit un portefeuille de 10 contrats.
  Hypothèses :
  - Le montant des sinistres est de 1.
  - La prime collective est de 0.20

(On s'attend donc a ce que 2 assurés sur 10 aient un sinistre)

	Contrat									
Année	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1						1		1		
2	1									1
3			1		1	1		1		
4		1				1				
5	1							1	1	
6						1				
7								1	1	
8					1	1				
9		1				1				
10						1				

- Calculez la prime pure par assurée et pour les 10 contrats.

Échauffement … avec quelques réponses

	Contrat									
Année	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1						1		1		
2	1									1
3			1		1	1		1		
4		1				1				
5	1							1	1	
6						1				
7								1	1	
8					1	1				
9		1								
10						1				
S_i	0,2	0,2	0,1	0	0,2	0,6	0	0,4	0,2	0,1
S	0,20									

❖ L’application de la prime collective fait des heureux et des malheureux …

- *Si les assurés 4 & 7 partent … quel est la nouvelle prime pure collective ?*
- *Quelle est l’évolution de la prime pure ?*

Introduction (fin)

- On vient de voir qu'il pourrait utile dans certains cas de personnaliser la prime d'assurance en fonction de la sinistralité historique du client.
- Quelques produits fonctionnent ainsi :
  - L'assurance automobile via le bonus-malus
  - L'assurance des grosses flottes automobiles
  - L'assurance santé/accident du travail pour les sociétés ayant beaucoup d'employés

- L'intérêt étant de compléter l'information utilisée pour la tarification en fonction du **crédit** que l'on donne à l'information apportée par le client.
- Pour cela, il existe plusieurs utilisations possible de la théorie de la crédibilité.

Introduction (bonus)

❖ L’origine historique de la théorie de la crédibilité :

Il y a un siècle, aux États-Unis, General Motors et Tucker (un petit constructeur indépendant) étaient assurés chez Allstate contre les accidents du travail (avec d'autres fabricants automobiles).

Un taux moyen était calculé par Allstate, sur l'expérience de l'ensemble du portefeuille, et appliqué à chacun. General Motors calcula son taux de sinistralité sur son propre portefeuille et nota qu'il était plus faible que celui qui lui était imposé. La direction demanda alors à Allstate de lui faire payer son propre taux sous prétexte que son nombre d'employés était suffisamment important pour assurer la stabilité d'année en année.

Si les actuaires d'Allstate ont été intuitivement d'accord avec ce principe plein de bon sens, où doit-on fixer la limite ? Peut-on appliquer la même règle à Tucker ?

Arthur Mowbray a été le premier à proposer une réponse en 1914 en utilisant le théorème central limite. Mais la réponse proposée était alors simplement à deux niveaux, 0 ou 1 : oui, la taille de l'entreprise suffit pour faire une tarification individuelle ou non. C'est Albert Whitney en 1918 qui mentionna la « *nécessité, par souci d'équité pour l'assuré, de pondérer d'un côté l'expérience collective, et de l'autre l'expérience individuelle* ».

Source : Vincent Goulet / Arthur Charpentier

Notations utiles et indispensables

❖ Quelques définitions :

- Z sera le facteur de crédibilité :
  - Il correspond au pourcentage de crédit que l'on accorde à l'information du client
- correspond à la moyenne de la sinistralité du client

$$P = z \times \bar{X} + (1 - z) \times \mu$$

- **z** : facteur de crédibilité ($0 \leq z \leq 1$).
- $\bar{X}$: montant moyen des sinistres observés.
- **µ** : montant moyen estimé des sinistres.

Notations utiles et indispensables

❖ Quelques remarques utiles sur le facteur de crédibilité Z :

- Naturellement il est compris entre 0 & 1($z \in [0;1]$)
  - Si z=0 : on ne tient pas compte de l'expérience acquise. On s'appuiera donc sur la prime pure collective.
  - Si z=1 : l'expérience acquise suffit à elle seule pour la tarification.
    On s'appuiera ici uniquement sur la prime pure du client et on ne tiendra pas compte de la prime collective.
  - Logiquement, la crédibilité augmente avec l'expérience acquise (dans le temps par exemple). C'est-à-dire, plus il y a de volume de données plus la crédibilité doit être importante.

CRÉDIBILITÉ DITE DE STABILITÉ

Ou :

- Crédibilité américaine
- Crédibilité à fluctuations limitées

Illustration du sujet

- ❖ Prenons une compétition de tir à l'arc :
  - En moyenne les archets de la compétitions ont gagné 8pts par flèche
  - On observe 2 tireurs :

- <u>Tireur A :</u>
  - Il a mis ses dix premières flèches dans le 10 de la cible

- <u>Tireur B :</u>
  - Il a tiré ses dix premières flèches mais vous ne connaissez pas le résultat de ses tirs

❖ Pronostiquez le prochain tir des 2 tireurs !

Crédibilité de stabilité

❖ Appelée aussi crédibilité américaine ou théorie de la crédibilité à variation limitée.

❖ L'expérience est jugée « crédible » si elle fluctue peu d'une année à l'autre.

❖ On cherche donc à mesurer la stabilité au fil du temps :

- Cette stabilité augmente généralement avec les volumes (expositions, nombres de sinistres, …)
- Si l'expérience n'est pas jugée complètement crédible, on utilisera totalement ou partiellement les données d'un groupe englobant le risque étudié.

Crédibilité de stabilité (modèle général)

- **S**: v.a. du montant total des sinistres d'un risque donné sur une période fixée
- **X** : v.a. du montant d'un sinistre.
- **N** : v.a. du nombre de sinistres du risque au cours de la période fixée.

Alors $S = X_1 + X_2 + ...+X_N$

avec $X_1, X_2, ...,X_N$ i.i.d. et mutuellement indépendantes de N

Si:

- **X** est une v.a. réelle dégénérée à x=1
- **N** v.a. binomiale de paramètre p connu et n inconnu

Alors **S** est la v.a. du nombre de sinistres : on retrouve le modèle de MOWBRAY

Problème fondamental de la crédibilité de la stabilité

❖ Paramètres :

- **k** : facteur de dispersion autour de la moyenne
- **p** : une probabilité que le montant total des sinistres soit à ±**k**% de la moyenne

❖ Quels sont les paramètres de la distribution de **S** pour que:

$$P((1-k) \times E[S] \leq S \leq (1+k) \times E[S]) \geq p$$

$$\Phi_s((1+k) \times E[S]) - \Phi_s((1-k) \times E[S]) \geq p$$

soit vérifiée

Notation: $\Phi_{s:}$ Fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite

Problème fondamental de la crédibilité de la stabilité

- Si le risque satisfait la condition énoncée précédemment,
  - la crédibilité est **pleine**. La tarification reposera uniquement sur
  - l'expérience propre du risque à savoir $\overline{S}$
- On parle alors de crédibilité complète d'ordre (k, p)
- On considérera que la distribution de S est symétrique

(ce qui exige un nombre suffisamment grand de sinistres)

- Le TCL : On peut estimer $\dfrac{S-\mu}{\sigma_S}$ par la distribution d'une loi

normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Modèle général

❖ On peut écrire :

$$P\left[\frac{-k\times E[S]}{\sqrt{V[S]}}\leq\frac{S-E[S]}{\sqrt{V[S]}}\leq\frac{+k\times E[S]}{\sqrt{V[S]}}\right]\cong\Phi\left(\frac{k\times E[S]}{\sqrt{V[S]}}\right)-\Phi\left(\frac{-k\times E[S]}{\sqrt{V[S]}}\right)$$

$$\cong 2\times\Phi\left(\frac{k\times E[S]}{\sqrt{V[S]}}\right)-1$$

❖ On obtient :

$$p\leq 2\times\Phi\left(\frac{k\times E[S]}{\sqrt{V[S]}}\right)-1 \qquad \Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)\leq\frac{k\times E[S]}{\sqrt{V[S]}}$$

$$\left(\frac{\Phi\left(\frac{p+1}{2}\right)}{k}\right)^2\leq\frac{E[S]^2}{V[S]}$$

Rappels:

- ➢**E[S]=E[N].E[X]**
- ➢**V[S]=V[N].E[X]² + V [X].E[N]**

Modèle général: cas binomial

- On suppose que S suit une loi binomiale de paramètres (n,π)

$$P(S=i)=C_n^i\pi^i\times(1-\pi)^{n-i}$$

- Avec :
  - E[S]=nπ et V[S]=nπ(1-π)
  - On remplace E[S] et V[S] et on obtient une condition sur n

$$n\geq\left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)}{k}\right)^2\times\frac{1-\pi}{\pi}$$

- On a alors la condition pour avoir une pleine crédibilité d'ordre (k,p)

- Notation: z 1+p/2: (1+p/2)e centile d'une loi normale centrée réduite

$$\boxed{n\geq\left(\frac{z_{1+\frac{p}{2}}}{k}\right)^2\times\frac{1-\pi}{\pi}}$$

Modèle général: cas binomial négatif

❖ On suppose que N(nombre de sinistres) suit une loi binomiale négative de paramètres r inconnu et p connu

$$P(N=i) = C_{r+i-1}^{i} \times \pi^{r} \times (1-\pi)^{i}$$

❖ Avec :

- Donc E[N]= r(1-π)/ π et V[N]=r(1- π)/ π²
- On remplace E[S] et V[S] et on obtient une condition sur n

$$\frac{V[S]}{E[S]^2} = \frac{E[X]^2 \times V[N] + V[X] \times E[N]}{E[N]^2 \times E[X]^2} = \frac{1}{r(1-\pi)} + \frac{1}{\frac{r(1-\pi)}{\pi}} \times \frac{V[X]}{E[X]^2}$$

❖ On a alors la condition pour avoir une pleine crédibilité d’ordre (k,p)

$$\boxed{r \geq \left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)}{k} \right)^2 \times \left(\frac{1}{1-\pi} + \frac{\pi}{1-\pi} \times \frac{V[X]}{E[x]^2} \right)}$$

Modèle général: cas poissonien

- On suppose que N(nombre de sinistres) suit une loi de poisson de paramètres λ inconnu
  - Donc E[S]= $\lambda \times$ E[X] et V[S]= $\lambda \times$ E[X²]

$$P(N=i)=e^{-\lambda}\times\frac{\lambda^{i}}{i!}$$

- On remplace E[S] et V[S] par leur valeur (fonction de λ, E[X] et V[X]). On peut obtenir la condition sur λ :

$$\lambda \geq \left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)}{k}\right)^{2}\times\frac{E\left[X^{2}\right]}{V[X]^{2}} \qquad \lambda \geq \left(\frac{\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)}{k}\right)^{2}\times\frac{V[X]+E[X]^{2}}{E[X]^{2}}$$

- On a alors la condition pour avoir une pleine crédibilité d'ordre (k,p)

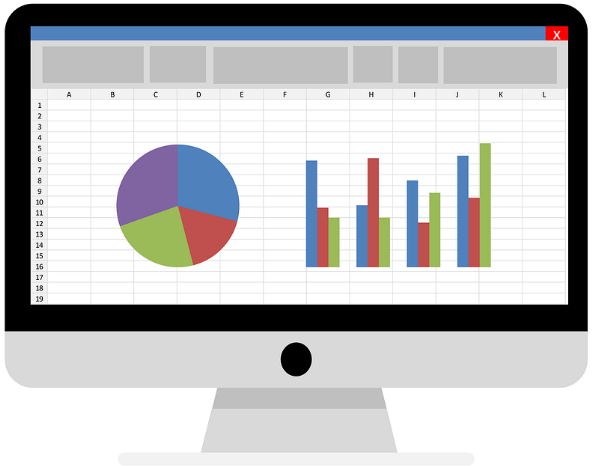
$$\boxed{\lambda \geq \left(\frac{z_{\frac{p+1}{2}}}{k}\right)^{2}\times\left[1+\frac{V[X]}{E[X]^{2}}\right]}$$

Modèle général: cas poissonien … exercice !

❖ Calculs de la table dans le cas d'une variable X v.a. dégénérée à x=1 :

k \ p	99,90%	99%	95%	90%	80%
1%	95 496	54 119	27 056	16 424	7 084
2,50%	15 280	8 660	4 329	2 628	1 134
5%	3 820	2 165	**1 083**	657	284
10%	955	542	271	165	71
20%	239	136	68	42	18

❖ Travaux Excel !



Crédibilité partielle

❖ On a vu précédemment que l'on pouvait trouver un seuil de pleine crédibilité. Dans ce cas z=1.

- Que faire quand le seuil n'est pas atteint ?

❖ Whitney a répondu au problème en introduisant une formule de calcul de crédibilité partielle. Par la suite d'autres formules furent introduites.

- n_0 correspond au seuil de pleine crédibilité
- n le nombre de sinistre observé

$$z = \min\left(\sqrt{\frac{n}{n_0}}, 1\right)$$

❖ Autres formules possibles :

$$z = \min\left(\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{2}{3}}, 1\right)$$

$$z = \frac{n}{n+K}$$

K constante fixée de façon à ce que les variations de primes soient limitées sur les années concernées

Crédibilité partielle : exercice

❖ Prenons la formule suivante de crédibilité partielle (formule classique)

$$z = \min\left(\sqrt{\frac{n}{n_0}}, 1\right)$$

❖ Si n_0 = 1000 (il s'agit ici du nombre de sinistres observés)

- Si n = 0, z = …
- Si n = 500, z = ….
- Si n = 1000, z = ….
- Si n > 1000, z = …

Conclusions

❖ Synthèse sur la crédibilité de stabilité :

1. **AVANTAGES**
   - Simplicité
   - Limite efficacement les variations dans la prime d'un risque
   - Reconnaît la non-homogénéité d'un groupe
2. **INCONVENIENTS**
   - La prise en compte de l'expérience individuelle ne constitue pas nécessairement une redistribution équitable de la charge à payer entre les risques.
   - La formule de crédibilité partielle ($(n/n_0)^{0,5}$) ne tient que pour une distribution normale de la distribution.

CRÉDIBILITÉ BAYESIENNE

Ou :

- Crédibilité exacte
- Crédibilité européenne

Notations et hypothèses

1. **HYPOTHESES :**
   - Tarification: Similitude nécessaire dans les données
   - En crédibilité: Niveau de risque représenté
     - Pour l'assuré i (i=1, 2, … ,m)
     - À la période j (j=1, …, n)
     - par le paramètre de risque θ_{ij} réalisation d'une v.a. Θ_{ij}
   - Homogénéité temporelle (le risque ne varie pas dans le temps)→ θ_i
   - Distribution de Θ est identique pour toutes les données du modèle
2. **NOTATIONS :**
   - $U(\theta)$ la fonction de répartition de Θ (fonction de structure)
   - $F(s/\theta)$ la fonction de répartition de $S/\Theta = \theta$ et $f(s/\theta)$ la densité associée.

Montant de sinistre: Il faut déterminer au préalable θ et simuler un montant de sinistre selon $F(./\theta)$

Problème

❖ **<u>Problème pratique :</u>**

La prime bayésienne est la prime idéale(au sens des moindres carrés) mais…

- Elle bute sur l'écueil de la connaissance des distributions de S/Θ et de Θ
$\rightarrow$ *cela est équivalent a connaître les lois (et les paramètres) correspondant à la sinistralité de vos assurés !!! Bon courage !*

- Elle est complexe à calculer. Seuls quelques combinaisons de distribution apportent des résultats intéressants et utilisables

- La prime n'est pas toujours une fonction linéaire des observations

❖ **<u>Par conséquent :</u>**

- Prime non utilisée car très complexe à mettre en place sans garantie de résultats !

- La crédibilité de Bülman évite tous ces écueils

CRÉDIBILITÉ SELON BUHLMAN

Introduction

❖Standard en théorie de la crédibilité de précision

- On force la prime bayésienne à être linéaire
- On arrive à un nouveau facteur de crédibilité dans un cadre non-paramétrique:

$$\boxed{z = \frac{n}{n + K}}$$

avec une expression simple pour K

❖ Pourtant ce modèle reste surtout utilisé en Europe et peu aux Etats-Unis (qui utilisent plutôt la crédibilité de stabilité)

Hypothèses et notations

❖ <u>Hypothèses</u>:

✓On suppose l'existence d'une fonction de structure $U(\theta)$

✓Les montants de sinistres S_{ij} sont i.i.d. conditionnellement à θ s'il est connu, et dépendants s'il est inconnu.

❖ <u>Notations</u>:

✓ $s^2 = E[\sigma^2(\Theta)] = E[V[S/\Theta]]$

Dispersion totale des sinistres d'un portefeuille

✓ $a = V[\mu(\Theta)] = V[E[S/\Theta]]$

Dispersion entre les moyennes des assurés (hétérogénéité du portefeuille)

Modèle original de Bühlman

- Modélisation non-paramétrique
  - ✓ On suppose l'existence des v.a. Θ et S/Θ
  - ✓ On n'utilise pas leur loi
  - ✓ Mais on utilise la moyenne et la variance de ces distributions

- On force la linéarité de la prime en approchant

  $E[\mu\ (\Theta)/\ S_1,\ S_2,..,\ S_n]$ par une expression $C_0 + S\ c_jS_j$

- Il faut alors déterminer les c_j pour que $C_0 + \Sigma\ c_jS_j$ soit la meilleure approximation de $E[\mu\ (\Theta)/\ S_1,\ S_2,..,\ S_n]$ au sens des moindres carrés

Modèle classique de Bühlman

❖A partir d'un portefeuille d'assurés, on peut estimer les paramètres de structure inconnus grâce aux différentes réalisations de Θ

❖U représente maintenant la distribution du niveau de risques entre les assurés du portefeuille

❖Soit un portefeuille de **m** assurés observés sur **n** années

❖Chaque assuré i caractérisé par un paramètre de risque Θ_i et des montants de sinistres $S_{i1}, \ldots, S_{in}$.

❖On pose : $(\theta_i, S_{i1}, \ldots S_{in}) \equiv (\Theta_i, \underline{S_i})$

		Années						
Assurés	Risques	1	2	..	..	j	..	n
1	Θ_1	S_{11}	S_{12}	..	..	S_{1j}	..	S_{1n}
2	Θ_2	S_{21}	S_{22}	..	..	S_{2j}	..	S_{2n}
..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..
7	Θi	S_{i1}	S_{i2}	..	..	S_{i5}	..	S_{in}
..	..	..	..	..	..	..	..	..
m	Θ_m	S_{m1}	S_{m2}	..	..	S_{m5}	..	S_{mn}

Prime de crédibilité selon Bühlman

- La meilleure approximation de la prime bayesienne est :

$$\boxed{P_{i,n+1} = z\overline{S_i} + (1-z)E[\mu(\Theta_i)]}$$

$$\overline{S_i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij} \qquad z = \frac{n}{n+K} \qquad K = \frac{s^2}{a} = \frac{E[\sigma^2(\Theta_i)]}{V[\mu(\Theta_i)]}$$

- <u>Remarques :</u>

1. $E[P_{i,n+1}]=E[\mu(\Theta_i)]=E[S_{ij}]$ → la prime est non biaisée.
   En moyenne : Σ recettes = Σ dépenses
2. Quand n ↗, $P_{i,n+1}$ → S_i car z → 1

Prime de crédibilité selon Bühlman

- Les données des autres assurés n'entrent pas dans le calcul de la prime d'un assuré (assurés indépendants par hypothèse).
- Mais les informations des autres assurés servent à estimer les paramètres, à savoir:
  - ✓ $E[\mu(\Theta_i)]$ la moyenne collective
  - ✓ $s^2=E[\sigma^2(\Theta_i)]$ la moyenne des variances individuelles
  - ✓ $a= V[\mu(\Theta_i)]$ la variance entre les moyennes individuelles
- Les estimateurs sans biais des paramètres ci-dessus sont:

$$\overline{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overline{S_i} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\overline{S_i} - \overline{S})^2 - \frac{1}{n}\hat{s}^2$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{m(n-1)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(S_{ij} - \overline{S_i})^2$$

Prime de crédibilité selon Bühlman

❖En remplaçant les valeurs théoriques par leurs estimateurs, la prime de crédibilité devient:

$$\hat{P}_{i,n+1} = \hat{z}\,\overline{S_i} + (1-\hat{z})\,\overline{S}$$

$$\hat{z} = \frac{n}{n + \frac{\hat{s}^2}{\hat{a}}}$$

Modèle non-paramétrique

car $P_{i,n+1}$ construite uniquement à partir des observations du portefeuille et non des lois de u et F(s/θ)

Remarques:

- si s_2=0 alors z=1 pour tous les assurés , quel que soit a
- $P_{i,n+1}$ est un estimateur convergent.
- Si K=0 alors z=1→ Prime=moyenne empirique
- Si K tend vers l'infini → Prime collective
- K augmente quand n augmente

Exemple/Exercice : calcul de la prime crédibilisé

❖ On supposer que l'on a observé 2 contrats (A & B) sur 3 années :

	2011	2012	2013
A	5	8	11
B	4	13	10

❖ Questions :

a) Calculer la prime pure non crédibilisée du portefeuille

b) Calculer le facteur de crédibilité

c) Calculer la prime crédibilisée de chaque contrat

d) Que constate-t-on à propos de la moyenne des 2 primes crédibilisées ?

CRÉDIBILITÉ SELON BUHLMAN-STRAUB

Introduction

❖Généralisation du modèle de BUHLMAN

- Rappel mod. de Bühlman: chaque assuré (Θ_i, S_i) était considéré comme indépendant mais ayant un niveau de risque différent

❖Bühlman-Straub: On suppose l'existence de sous-groupes d'assurés qui ont un paramètre de risque identique.
→ On peut alors profiter d'un volume d'expérience plus grand et obtenir une meilleure estimation de la prime

- Soit w_i le volume total du sous-groupe i ayant un même paramètre de risque

- Soit X_{ij} l'expérience moyenne du sous-groupe i (i=1,..,m) à l'année j (j=1,…,n). Le sous-groupe i est composé des assurés K_i

$$X_{ij} = \frac{1}{w_i} \sum_{k \in K_i} S_{kj}$$

Le portefeuille dans le modèle de Bühlman-Straub

❖Représentation du portefeuille :

		Observations sur années							Poids-années						
Assurés	Risques	1	2	..	..	j	..		1	2	..	..	j	..	
1	Θ_1	X_{11}	X_{12}	..	..	X_{1j}	..	X_{1n1}	w_{11}	w_{12}	..	..	w_{1j}	..	w_{1n1}
2	Θ_2	X_{21}	X_{22}	..	..	X_{2j}	..	X_{2n}	w_{21}	w_{22}	..	..	w_{2j}	..	w_{2n2}
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
7	Θi	X_{i1}	X_{i2}	..	..	X_{ij}	..	X_{ini}	w_{i1}	w_{i2}	..	..	w_{ij}	..	w_{ini}
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
m	Θ_m	X_{m1}	X_{m2}	..	..	X_{mj}	..	X_{mnm}	w_{m1}	w_{m2}	..	..	w_{mj}	..	w_{mnm}

- Principal changement par rapport à BUHLMAN: Pour une même valeur du paramètre de risque la variabilité n'est plus constante mais inversement proportionnelle au volume du sous-groupe.

- Les variables S_{ij} sont remplacées par X_{ij} (moyenne pour un assuré du sous-groupe) auxquels on attribue un poids w_{ij}

- Le nombre total d'observations peut s'écrire comme :

$$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

Les hypothèses

1. Les assurés (Θ_i, X_i) sont indépendants., les variables $\Theta_i,.., \Theta_m$ sont identiquement distribuées et les variables X_{ij} ont une variance finie

2. $E[X_{ij}/\Theta_i] = \mu(\Theta_i)$ et $COV(X_{ij}, X_{it}/ \Theta_i) = \delta_{it} \dfrac{\sigma^2(\theta_i)}{w_{ij}}$

<u>Remarques</u>:

▪$\sigma^2(\Theta_i)$ représente donc maintenant la variance d'une unité de poids

▪Les X_{ij} sont définis comme des ratios ou des moyennes

▪Plus le poids d'un assuré est grand, moins son ratio d'expérience est variable

⇨ Les poids sont attribués en fonction de la stabilité des risques

⇨ Le plus grand poids va à l'assuré le plus stable du portefeuille

Les notations

X_{ij}: Généralement on utilise $X_{ij} = \dfrac{S_{ij}}{w_{ij}}$

NB: On peut s'attendre à une stabilité comparable de deux assurés ayant des poids égaux.

$$w_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}$$ = poids de l'assuré i

$$w_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{m} w_{i\cdot} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}$$ = poids total du portefeuille

$$z_{\cdot} = \sum_{i=1}^{m} z_{i\cdot}$$ = somme des crédibilités du portefeuille

$$X_{iw} = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{w_{ij}}{w_{i\cdot}} X_{ij}$$ = moyenne pondérée de l'assuré i

$$X_{ww} = \sum_{i=1}^{m} \frac{w_{i\cdot}}{w_{\cdot\cdot}} X_{iw}$$ = moyenne du portefeuille pondérée par les poids

$$X_{zw} = \sum_{i=1}^{m} \frac{z_i}{z_{\cdot}} X_{iw}$$ = moyenne du portefeuille pondérée par les crédibilités

Approximation de la prime bayesienne linéaire

❖Pour un portefeuille respectant les 2 hypothèses exposées précédemment(cf slide n-2), la meilleure approximation bayesienne linéaire de la prime $\mu(\Theta_i)$ du risque i est :

$$P_{i,n+1} = z_i X_{iw} + (1 - z_i) E\left[\mu(\Theta_i)\right]$$

Avec :

$$z_i = \frac{w_i}{w_i + K} \quad \text{et} \quad K = \frac{s^2}{a} = \frac{E\left[\sigma^2(\Theta_i)\right]}{V\left[\mu(\Theta_i)\right]}$$

❖Note : on retrouve les expressions du modèle de Bühlman si l'on a w_i=n

Les estimateurs

E[μ(Θi)] sera estimé par X_{zw}

s^2 sera estimé par $\hat{s}^2 = \frac{1}{2(N-m)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j,t=1}^{n_i} \frac{w_{ij} w_{it}}{w_{i.}} (X_{ij} - X_{it})^2$ avec $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$

→Simple à calculer

a sera estimé par $\hat{a} = \frac{1}{z_{.}(m-1)} \sum_{i,r=1}^{m} z_i z_r (X_{iw} - X_{rw})^2$

→Nécessite une récurrence car on a besoin des z_i

et pour calculer les z_i on a besoin de $K = \frac{\hat{S}^2}{\hat{a}}$

Comment calculer l'estimateur de a ?

❖ Récurrence:

1. On pose $a=s^2$ ➔ K=1
2. Calcul des z_i
3. Recalcul de a
4. Et ainsi de suite jusqu'à la convergence (rapide)

❖ Influence des paramètres:

1. Taille de l'historique (↘ variations dans chaque classe)
   ↗ crédibilité
2. Ajout de classes (ajout classe homogène avec un poids suffisant)
   ↗ crédibilité

Illustration 1 : tarification flottes automobiles

❖ Illustration de l'utilisation possible de la théorie de la crédibilité selon Bühlman-Straub :

- Tarification des contrats de flottes automobiles :

	Observations nb sinistres sur 5 années					Véhicules-années				
Assurés	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Flotte 1	20	50	55	60	58	200	280	250	190	150
Flotte 2	8	10	18	35	7	50	50	50	50	50
Flotte 3	50	20	30	40	35	1000	800	700	600	500
Flotte 4	40	39	31	29	25	130	150	160	180	200

		Observations sur années							Poids-années						
Assurés	Risques	1	2	..	..	j	..		1	2	..	..	j	..	
1	Θ_1	X_{11}	X_{12}	..	..	X_{1j}	..	X_{1n1}	w_{11}	w_{12}	..	..	w_{1j}	..	w_{1n1}
2	Θ_2	X_{21}	X_{22}	..	..	X_{2j}	..	X_{2n}	w_{21}	w_{22}	..	..	w_{2j}	..	w_{2n2}
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
7	Θi	X_{i1}	X_{i2}	..	..	X_{ij}	..	X_{ini}	w_{i1}	w_{i2}	..	..	w_{ij}	..	w_{ini}
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
m	Θ_m	X_{m1}	X_{m2}	..	..	X_{mj}	..	X_{mnm}	w_{m1}	w_{m2}	..	..	w_{mj}	..	w_{mnm}

Illustration 2 : modèle BS par unité

- Le modèle de Bühlmann-Straub par unité.
  - Principe on a pas assez d'observations dans le sous-groupe pour utiliser la prime collective.
  - On cherche alors a reprendre le maximum de crédit du plus petit groupe au plus important
- Illustration : calculs de fréquences et S/P crédibilisés
  - Déterminer les crédibilités agences.
  - Déterminer les crédibilités du territoire de l'agence.
  - Déterminer les crédibilités de la zone RC associée.
  - Calculer les fréquences et les S/P crédibilisées.

$$F_c = z_a F_a + (1 - z_a)\left[z_t F_t + (1 - z_t)(z_z F_z + (1 - z_z) F_f)\right]$$

CRÉDIBILITÉ HIÉRARCHIQUE : MODÈLE DE JEWELL

Le modèle hiérarchique

- **<u>Contexte</u>** :

  Dans les autres modèles de crédibilités on suppose que le paramètre θ était identiquement distribué pour tous les assurés.

  - Même si on exige que l'ensemble soit constitué « d'éléments similaires », cette hypothèse devient très contraignante lorsque le portefeuille atteint une taille importante.

  - Dans ce cas, on peut identifier des sous ensembles afin d'obtenir une plus grande homogénéité → structure en arbre

Introduction

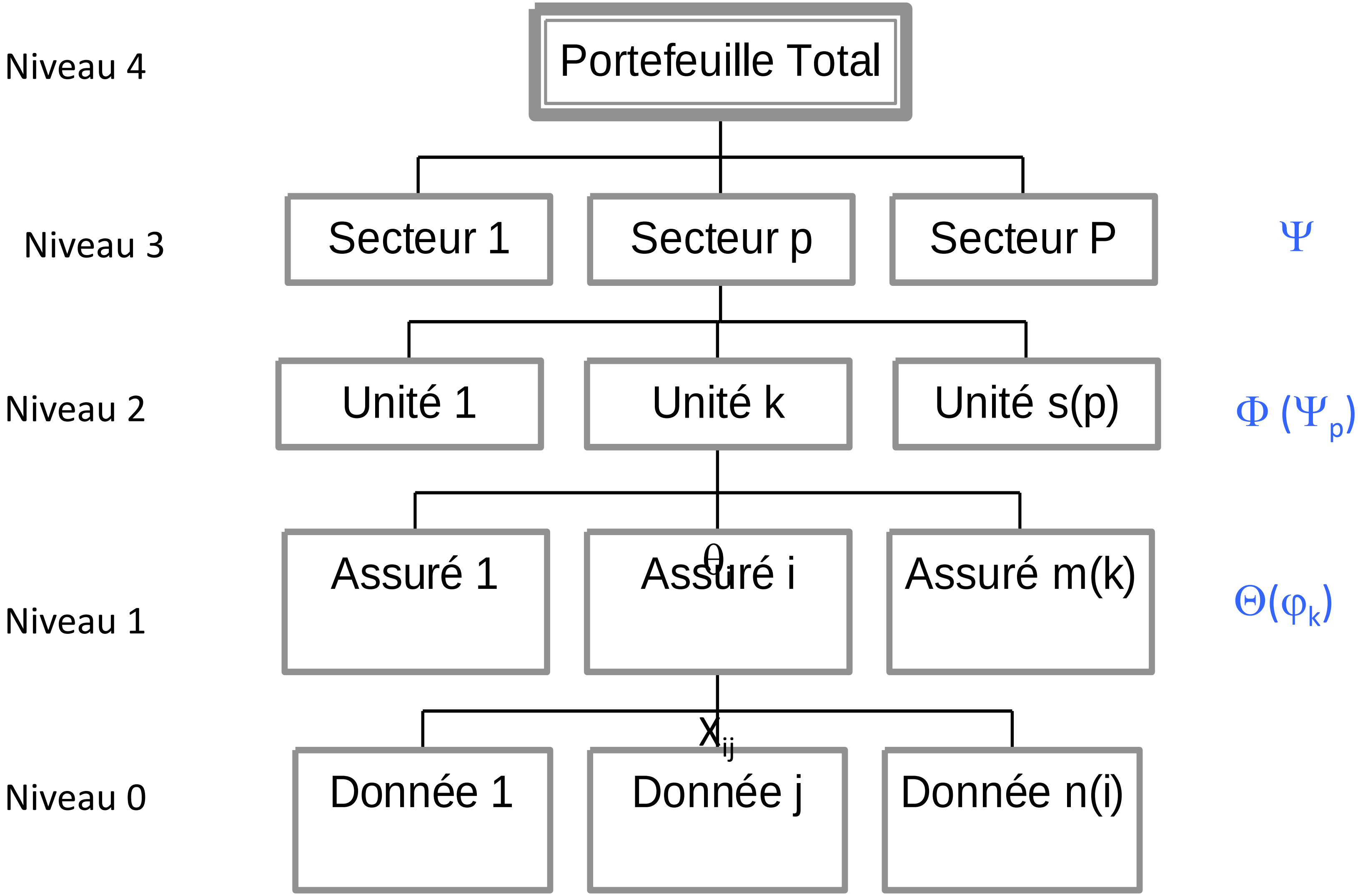
❖ **<u>Le modèle hiérarchique :</u>**

- Nouveau concept introduit par Jewell en 1975.
- Applications : risques industriels, assurance de personnes, accidents du travail

❖ **<u>Nouveau concept</u>**

- Ne plus rejeter l'information apportée par les autres portefeuilles lors du calcul de la prime de crédibilité d'un portefeuille.
- Il s'agit de trouver une solution acceptable au rejet des données.

Représentation du modèle hiérarchique



Représentation du modèle hiérarchique

NIV 4	Portefeuille total	250 000 employeurs
NIV 3	•Les secteurs (ensembles d'unités) •Paramètres de risque (v.a. non-observable) ψk= i=1,….,P	5 secteurs (industrie, tertiaire, agricole, …)
NIV 2	•Les unités (groupes d'assurés) •Paramètres de risque(v.a. non-observable) φk= i=1,….,s_p	320 unités
NIV 1	•Assurés •Paramètres de risque θi = i=1,….,m_k •Une v.a. non-observable	Les employeurs
NIV 0	• Données sous forme de ratios (fréquences, S/P) comme BUHLMAN-STRAUB •X_{ij} i=1,2,3,…,m_k j=1,…,n_i •Poids associés aux données: w_{ij}	Données : nombre d'accidents

Hypothèses du modèle

On souhaite estimer f_0(Xi,n+1) à partir des données transformées $f(X_{ij})$

- Les variables ψ_p , avec p=1,…,P sont i.i.d. selon la densité $h_3(\psi_p)$
- Les variables φ_k , avec k=1,…,s_p sont conditionnellement i.i.d. selon la densité $h_2(\varphi_k / \psi_p)$
- Les variables θ_i , avec i=1,…,m_k sont conditionnellement i.i.d. selon la densité $h_1(\theta_i / \varphi_k)$
- Les variables X_{ij} , avec i=1,…,n_i sont indépendantes conditionnellement à θ_i
- Il existe des fonctions connues $g(X_{ij})$ telles que:
  - $E(g(X_{ij})/Oi]=\mu_g(\Theta_i)$ est indépendant de j $\quad \int g^2 < \infty$
  - $Cov(f(X_{ij}), g(X_{it})/ \Theta_i)=$ $$\partial_{jt} \frac{\sigma^2_{fg}(\theta_i)}{w_{ij}}$$

Exemple

❖Explications :

Ici on ne suppose pas que le paramètre de risque soit identiquement distribué pour tous les assurés.

On identifie des tendances au sein du portefeuille.

D'abord un regroupement général puis on subdivise afin de réduire l'hétérogénéité $\Rightarrow$ arbre

❖Exemple : « santé et sécurité au travail » (Québec)

On répartie les 250.000 employeurs suivant leur activité économique (5 secteurs), eux-mêmes divisés en 320 unités constituées des employeurs.

Les définitions

❖Définitions :

- **Niveau 2**
  - $M_f(\phi_k) = E[\mu_f(\Theta_i)/\phi_k]$
  - $F_{fg}(\phi_k) = E[\sigma^2_{fg}(\Theta_i)/\phi_k]$
  - $G_{fg}(\phi_k) = Cov(\mu_f(\Theta_i), \mu_g(\Theta_i)/\phi_k)$
- **Niveau 3**
  - $M_f(\Psi_p) = E[M_f(\phi_k)/\Psi_p]$
  - $F_{fg}(\Psi_p) = E[F_{fg}(\phi_k)/\Psi_p]$
  - $G_{fg}(\Psi_p) = E[G_{fg}(\phi_k)/\Psi_p]$
  - $G_{fg}(\Psi_p) = Cov(M_f(\phi_k), M_g(\phi_k)/\Psi_p)$
- **Niveau 4 (constantes)**
  - $M_f = E[M_f(\Psi_p)]$
  - $F_{fg} = E[F_{fg}(\Psi_p)]$
  - $G_{fg} = E[G_{fg}(\Psi_p)]$
  - $H_{fg} = E[H_{fg}(\Psi_p)]$
  - $I_{fg} = Cov(M_f(\Psi_p), M_g(\Psi_p))$

Par exemple:

$$Mf=E\Big[E\Big[E[E[f(X_{ij})/\Theta_i]]\Big]\Big]$$

Les définitions

❖ Définitions : niveau 1

$$\mathcal{Z}_i^{(1)} = \frac{V_i^{(1)} G_{0f}}{F_{ff} + V_i^{(1)} G_{ff}} = \text{crédibilité semi-linéaire de l'assuré i au niveau 1.}$$

$$V_i^{(1)} = w_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} = \text{volume de l'assuré i au niveau 1.}$$

$$z_i^{(1)} = \frac{V_i^{(1)} G_{ff}}{F_{ff} + V_i^{(1)} G_{ff}}.$$

Les définitions

❖Définitions : niveau 2

$$\mathcal{Z}_k^{(2)} = \frac{V_k^{(2)} H_{0f}}{G_{ff} + V_k^{(2)} H_{ff}} = \text{crédibilité semi-linéaire de l'unité k au niveau 2.}$$

$$z_k^{(2)} = \frac{V_k^{(2)} H_{ff}}{F_{ff} + V_k^{(2)} H_{ff}} = \text{crédibilité linéaire de l'unité k au niveau 2.}$$

$$V_k^{(2)} = z_\cdot^{(1)} = \sum_{i=1}^{m_k} z_i^{(1)} = \text{volume de l'unité k au niveau 2.}$$

$$B_f(\phi_k) = \frac{1}{z_\cdot^{(1)}} \sum_{i=1}^{m_k} z_i^{(1)} B_f(\theta_i) = \text{statistique linéaire exhaustive de l'unité k}$$

Les définitions

❖Définitions : niveau 3

$$\mathcal{Z}_p^{(3)} = \frac{V_p^{(3)} I_{0f}}{H_{ff} + V_p^{(3)} I_{ff}} = \text{crédibilité semi-linéaire du secteur p au niveau 3.}$$

$$z_p^{(3)} = \frac{V_p^{(3)} I_{ff}}{H_{ff} + V_p^{(3)} I_{ff}} = \text{crédibilité linéaire du secteur p au niveau 3.}$$

$$V_p^{(3)} = z_{\cdot}^{(2)} = \sum_{k=1}^{s_p} z_k^{(2)} = \text{volume du secteur p au niveau 3.}$$

$$B_f(\phi_p) = \frac{1}{z_{\cdot}^{(2)}} B_f(\varphi_k) = \text{statistique linéaire exhaustive du secteur p.}$$

Les estimateurs

❖Définitions : niveau 3

$$
\begin{aligned}
\hat{M}_f &= B_f = \frac{1}{z_.^{(3)}} \sum_{p=1}^{P} z_p^{(3)} B_f(\Psi_p) = \sum_{p=1}^{P} \frac{z_p^{(3)}}{z_.^{(3)}} \sum_{k=1}^{s_p} \frac{z_k^{(2)}}{z_.^{(2)}} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{z_i^{(1)}}{z_.^{(1)}} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{w_{ij}}{w_{i.}} f \\
\hat{M}_0 &= \sum_{p=1}^{P} \frac{V_p^{(3)}}{V_.^{(3)}} \sum_{k=1}^{s_p} \frac{V_k^{(2)}}{V_.^{(2)}} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{V_i^{(1)}}{V_.^{(1)}} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{w_{ij}}{w_{i.}} f_0(X_{ij}) \\
\hat{F}_{ff} &= \frac{1}{d_1} \sum_{p,k,i,j} w_{ij} \Big(f(X_{ij}) - B_f(\theta_i) \Big)^2 \\
\hat{G}_{ff} &= \frac{1}{d_2} \sum_{p,k,i} z_i^{(1)} \Big(B_f(\theta_i) - B_f(\varphi_k) \Big)^2 \\
\hat{H}_{ff} &= \frac{1}{d_3} \sum_{p,k} z_k^{(2)} \Big(B_f(\varphi_k) - B_f(\psi_p) \Big)^2 \\
\hat{I}_{ff} &= \frac{1}{d_4} \sum_{p} z_k^{(2)} \Big(B_f(\psi_p) - B_f \Big)^2
\end{aligned}
$$

d1,…,d4 :
Nombre total d'éléments dans la somme moins le nombre de moyennes $B_f(.)$ estimées

Les estimateurs

❖On pose $f_0(x) = f(x) = x$

$$Z_i^{(1)} = \frac{V_i^{(1)}}{V_i^{(1)} + F/G}$$

$$Z_i^{(2)} = \frac{V_i^{(2)}}{V_i^{(2)} + G/H}$$

$$Z_i^{(3)} = \frac{V_i^{(3)}}{V_i^{(3)} + H/I}$$

Les constantes F/G, G/H sont les mêmes pour toutes les unités et tous les secteurs

Si on avait appliqué un modèle de BUHLMAN-STRAUB sur chacune des unités, un aurait autant de coef. K que d'unités:
➔ Modèle de BUHLMAN-STRAUB <u>par unité</u>

Jewell vs Bühlman-Straub

- **Bühlmann-Straub par unité :**
  - Facile a mettre en place
  - Problèmes :
    - autant de coefficient K que d'unités
    - non-utilisation de la totalité de l'information du portefeuille total (rejets)
    - supposition de l'indépendance des unités (entre elles)
- **Jewell :**
  - Modèle plus complexe que BS.
  - Prise en compte de l'ensemble de l'information disponible (modèle « plus juste »)
  - Problèmes :
    - L'information d'un assuré à un impact indirect sur la prime d'un autre assuré d'un autre secteur.
    - Supposition d'une interaction entre les membres d'un même niveau

CONCLUSIONS & BIBLIOGRAPHIE

Conclusion

 Rappels :

1. Fluctuations limités : modèle simple initié par Mowbray en 1914.
2. Crédibilités exactes : approche bayesienne théorique efficace mais peu pratique.
3. Bühlmann-Straub : le standard actuellement, modèle non paramétrique et généralisable.
4. Le modèle hiérarchique : généralisation du modèle défini par Bühlmann & Straub.

Conclusion

- <u>Quelques Rappels :</u>

1. **<u>Fluctuations limités</u>** : modèle simple initié par Mowbray en 1914.
2. **<u>Crédibilités exactes</u>** : approche bayesienne théorique efficace mais peu pratique.
3. **<u>Bühlmann-Straub</u>** : le standard actuellement, modèle non paramétrique et généralisable.
4. **<u>Le modèle hiérarchique</u>** : généralisation du modèle défini par Bühlmann & Straub.

Conclusion

❖<u>Quelle crédibilité retenir ?</u>

En fonction du contexte :

- Crédibilité américaine : plus simple à appliquer mais non utilisable pour capter les informations à différents « étages ».
Ne capte que le crédit du groupe

- Modèle de Bühlman : pratique pour mesurer la crédibilité de chaque individu mais ne permet pas une crédibilité « complète »

- Modèle de Bühlman-Straub : généralise le Bühlman.

- Modèle hiérarchique : plus difficile à mettre en place. Nécessite un « arbre complet » avec un bon volume d'informations à crédibiliser.

Pour aller plus loin

❖ Un peu de lecture !

- H. Longley-Cook, *An introduction to credibility theory*
- V. Goulet, *Théorie de la crédibilité : histoire, principes et applications*, Août 1994
- *O. Barthelemy, Étude et tarification des flottes automobiles du portefeuille UAP*, Septembre 1995
- A. H. Mowbray, *How extensive a payroll exposure is necessary to give a dependable pure premium ?*, P.C.A.S. 1914
- H. Bühlmann, A. Gisler et W. S. Jewell, *Excess claims and data triming in the context of credibility rating procedures*

❖ Pour aller plus loin, avec R :

- https://cran.r-project.org/web/packages/actuar/vignettes/credibility.pdf (package actuar)