ESPRIT & Le Mans Université
Institut du Risque et de l'Assurance
A. Matoussi

Année universitaire 19-20
5ème DS & Master 2 Actuariat
MAAF

---

# Fiche 2

**Exercice 1.** *(Examen Master 1 Actuariat 09-10)*
*On se place dans un modèle binômial, comme celui décrit dans le cours, et dont les paramètres sont* $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = 0.5$ *et* $r = 25\%$. *On suppose qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage, qu'on notera par* ***(AOA)****.*
*On considère une option Lookback d'échéance* $N = 3$ *dont le payoff est donné par*

$$\xi = \max_{0 \leqslant n \leqslant 3} S_n - S_3.$$

1. *Dessiner l'arbre de l'évolution du prix de l'action, puis séparement celui de l'option.*
2. *Montrer que l'hypothèse* ***(AOA)*** *implique la condition* $d < 1 + r < u$.
3. *Expliciter l'unique probabilité risque neutre* $\mathbb{Q}$.
4. *Calculer le prix et la stratégie de couverture de l'option Lookback de payoff* $\xi$ *donné ci-dessus.*

**Exercice 2.** *(Examen Master 1 Actuariat 10-11)*
*On se place dans un modèle dit binomial d'horizon* $N$. *L'espace des états de la nature est* $\Omega = \{u, d\}^N$. *Le premier actif est appelé actif sans risque, et son processus de prix,* $S^0$, *est donné par :*

$$S_n^0 = (1 + r)^n, \quad \forall\, n \in \{0, \cdots, N\}$$

*avec* $r > -1$.
*Le second est appelé actif risqué, et son processus de prix,* $S$, *est donné par :*

$$S_{n+1} = S_n A_{n+1}, \quad \forall\, n \in \{0, \cdots, N-1\} \quad et \quad S_0 = s \in \mathbb{R}_+^*.$$

*Les v.a.* $A_n$ *sont toutes définies sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *à valeurs dans* $\{d, u\}$ *avec* $0 < d < u$. *On pose* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n \mid n \geqslant 0\}$ *avec* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ *et* $\mathcal{F}_n = \sigma(A_1, \cdots, A_n) = \sigma(S_1, \cdots, S_n)$. *On suppose que* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *et pour tout* $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$. $\mathbb{Q}$ *désignera une mesure de probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$. *On notera par* $\widetilde{S_n} := \dfrac{S_n}{S_n^0}$, *pour tout* $n \in \{0, \cdots, N\}$ *le processus de prix actualisé de l'actif risqué.*

1. *Rappeler (sans démontrer) à quelle condition ce modèle est complet et vérifiant l'hypothèse* ***(AOA)*** *et expliciter l'unique probabilité risque neutre* $\mathbb{Q}$.

2. *On introduit le processus* $(M_n)$ *le maximum courant de* $(S_n)$ *pour* $n \in \{0, \cdots, N\}$, *défini par*
$$M_n = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} S_j.$$
*Soit* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction borélienne positive quelconque. Montrer que, pour tout* $n = 0, \cdots, N$,
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[h\big(S_{n+1}, M_{n+1}\big)\,\Big|\mathcal{F}_n\right] = \pi h\big(uS_n,\, M_n \vee (uS_n)\big) + \big(1-\pi\big)h\big(dS_n,\, M_n \vee (dS_n)\big)$$
*où* $\pi := \frac{1+r-d}{u-d}$ *et* $x \vee y = \max(x, y)$.

3. *On s'intéresse maintenant à l'évaluation et la couverture d'options Exotiques dont le payoff (paiement terminal) est de la forme* $f\big(S_N, M_N\big)$ :
   — *Option Lookback de maturité* $N$ : *si* $f(x, y) = \big(y - K\big)^+$,
   — *Option Knock-in barrier option de maturité* $N$ : *si* $f(x, y) = \big(x - K\big)^+ \mathbb{1}_{\{y \geqslant L\}}$ *avec* $L$ *une constante donnée.*

   *On notera par* $E_n$ *la valeur à la date* $n$ *de l'option exotique ayant le Payoff* $f\big(S_N, M_N\big)$ *à la date* $N$.
   *Montrer, en utilisant la méthode basée sur les martingales vue en cours et la question précedente, que le prix de l' option* $E_n$ *est donné pour tout* $n = 0, \cdots, N$ *par une fonction réelle* $e_n$ *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant :*
$$\begin{cases} E_n = e_n\big(S_n, M_n\big), \; n = 0, \cdots, N-1 \\ E_N = f\big(S_N, M_N\big) \\ e_n(x, y) = \dfrac{1}{1+r}\Big[\pi e_{n+1}\big(ux, y \vee (ux)\big) + (1-\pi)e_{n+1}\big(dx, y \vee (dx)\big)\Big]. \end{cases}$$

4. *On considére le modèle suivant :* $S_0 = 20$, $N = 3$, $u = 1,2$, $d = 0,8$ *et* $r = 5\%$.

   *(a) Dessiner l'arbre de l'évolution du prix de l'action,*

   *(b) Dessiner l'arbre de l'évolution l'option Lookbackde maturité* $N$ *de prix d'exercice* $K = 22$.

   *(c) Dessiner l'arbre de l'évolution Knock-in barrier option de maturité* $N$ *avec* $K = 22$ *et* $L = 23$.

   *(d) Calculer le prix ainsi que la stratégie de couverture du l'option Lookback.*

   *(e) Calculer le prix ainsi que la stratégie de couverture du l'option Knock-in barrier option.*