积分不等式习题初探

武汉工程大学, 信息与计算科学系,
毛煜苏.

September 3, 2012

Abstract
关于一些积分不等式习题的研究、总结和推广

1 几个基本不等式

1.1 Schwarz不等式

若$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$可积，则:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

证法略.

1.2 Kantorovich不等式

若$f(x)$、$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上可积，且$0 < m \le f(x) \le M$则:

$$(b-a)^2 \le \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}(b-a)^2$$

证明*:*

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b [f(x)-(m+M)+\frac{mM}{f(x)}]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(m+M)(b-a) \\ &\quad + mM\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \le 0\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{\sqrt{mM}}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\sqrt{mM}\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \\ &\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{mM}}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\sqrt{mM}\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\le \frac{1}{4}\left(\frac{(m+M)(b-a)}{\sqrt{mM}}\right)^2 = \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2\end{aligned}$$

又由$Schwarz$不等式有

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\geq \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \left(\int_a^b \mathrm{d}x\right)^2 = (b-a)^2
\end{aligned}
$$

□

1.3 Iyengar不等式

若$f(x)$在(a,b)可微，且$|f'(x)| \leq M$，则:

$$
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]\right| \leq \frac{(b-a)^2 M}{4} - \frac{[f(a)-f(b)]^2}{4M} \tag{1}
$$

在证明这个不等式前，先证明其较弱形式：

1.3.1

若$f(x)$在(a,b)可微，且$|f'(x)| \leq M$，则:

$$
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]\right| \leq \frac{(b-a)^2 M}{4} \tag{2}
$$

证法*1(*分部积分法*)*.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)d(x-\frac{a+b}{2}) \\
&= f(x)(x-\frac{a+b}{2})\Big|_a^b - \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f'(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right| &= \left|\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x \\
&\leq M\int_a^b |x-\frac{a+b}{2}|\,\mathrm{d}x \\
&= 2M\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{M(b-a)^2}{4}
\end{aligned}
$$

□

证法2（中值定理）．据$Lagrange$中值定理知：

$$
\begin{cases} f(x)=f(a)+f'(\xi_1)(x-a) \quad (a<\xi_1<x) \\ f(x)=f(b)+f'(\xi_2)(x-b) \quad (x<\xi_2<b) \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} f(a)-M(x-a)\le f(x)\le f(a)+M(x-a) \\ f(b)+M(x-b)\le f(x)\le f(b)-M(x-b) \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} \frac{b-a}{2}f(a)-M\frac{(b-a)^2}{8}\le \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2}f(a)+M\frac{(b-a)^2}{8} \\ \frac{b-a}{2}f(b)-M\frac{(b-a)^2}{8}\le \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2}f(b)+M\frac{(b-a)^2}{8} \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \right| \le \frac{M(b-a)^2}{4}
$$

□

注释1:将区间分为两个部分分别积分，这里不一定要取中点为分段点,我们有：

$$
\begin{cases} f(a)(c-a)-\frac{M(c-a)^2}{2}\le \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \le f(a)(c-a)+\frac{M(c-a)^2}{2} \\ f(b)(b-c)-\frac{M(b-c)^2}{2}\le \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \le f(b)(b-c)+\frac{M(b-c)^2}{2} \end{cases}
$$

其中$c\in(a,b)$

$$
\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + c\big[f(b)-f(a)\big]+af(a)-bf(b) \right| \le \frac{M}{2}\Big[(c-a)^2+(b-c)^2\Big] \quad (3)
$$

若$f(a)=f(b)=\lambda$，则：

$$
\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)\lambda \right| &\le \frac{M}{2}\Big[(c-a)^2+(b-c)^2\Big] \\ &= \frac{M}{2}\left[2\left(c-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{(b-a)^2}{2}\right] \quad \Big(\forall c\in(a,b)\Big) \end{aligned}
$$

特别地，当$c=\dfrac{a+b}{2}$时，有：

$$
\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)\lambda \right| \le \frac{M}{4}(b-a)^2 \quad (4)
$$

此时M的系数$\dfrac{(b-a)^2}{4}$是最好的[1],若不加限制条件$f(a)=f(b)$,直接对(3)取$c=\dfrac{a+b}{2}$所得的不等式(2)，右边的$\dfrac{(b-a)^2M}{4}$不一定是满足左边形式的最好上界.至于**为什么**要分为两个区间分别积分，我们在后面说明.

注释2:事实上，不等式(2)不能取等.

[1]或说不等式是可以取等的

法一中，不等式

$$\left|\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\left|f'(x)\right|\,\mathrm{d}x$$

无法取等号，因为$(x-\dfrac{a+b}{2})$在(a,b)上变换号.
法二中，

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) \pm M(x-a), x \in (a,c) \\ f(x) &= f(b) \mp M(x-b), x \in (c,b) \end{aligned}$$

二式不可能同时取等，否则$f(x)$ 在(a,b) 不可微，与条件矛盾，因此分别取积分后相加所得不等式不能取等.
注释3:从法一和法二可以看到，沟通$f(x)$和$f'(x)$，可以用分部积分或中值定理.

1.3.2 (对(4)的推广)

若函数$f(x)$不恒等于0，在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，当$x \in (a,b)$时，有$m \le f'(x) \le M$, 而且$f(a)=f(b)=\lambda$, 则必有:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)\lambda\right| \le \frac{-mM(b-a)^2}{2(M-m)}$$

证明*:* 据拉格朗日中值定理有：

$$\begin{cases} f(x)=\lambda+f'(\xi_1)(x-a) & (a<\xi_1<x) \\ f(x)=\lambda+f'(\xi_2)(x-b) & (x<\xi_2<b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(x-a) \le (f(x)-\lambda) \le M(x-a) \\ M(x-b) \le (f(x)-\lambda) \le m(x-b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\displaystyle\int_a^c (x-a)\,\mathrm{d}x \le \int_a^c (f(x)-\lambda)\,\mathrm{d}x \le M\int_a^c (x-a)\,\mathrm{d}x \\ M\displaystyle\int_a^c (x-b)\,\mathrm{d}x \le \int_c^b (f(x)-\lambda)\,\mathrm{d}x \le m\int_a^c (x-b)\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

两式相加得

$$-\frac{M(c-b)^2}{2}+\frac{m(c-a)^2}{2} \le \int_a^b \big(f(x)-\lambda\big)\,\mathrm{d}x \le \frac{M(c-a)^2}{2}-\frac{m(b-c)^2}{2}$$

整理得:

$$\begin{aligned} &\int_a^b \big(f(x)-\lambda\big)\,\mathrm{d}x \ge \frac{Mm(b-a)^2}{2(M-m)}-\frac{M-m}{2}\left(c-\frac{Mb-ma}{M-m}\right)^2, \\ &\int_a^b \big(f(x)-\lambda\big)\,\mathrm{d}x \le \frac{-Mm(b-a)^2}{2(M-m)}+\frac{M-m}{2}\left(c-\frac{Ma-mb}{M-m}\right)^2. \\ &\Big(\forall c \in (a,b)\Big) \end{aligned}$$

故

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)\lambda\right| \le \frac{-Mm(b-a)^2}{2(M-m)}$$

□

注释1:注意到，将题干中的

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)\lambda\right|$$

改写为

$$\left|\int_a^b \big(f(x)-\lambda\big)\,\mathrm{d}x\right|$$

令

$$g(x)=f(x)-\lambda$$

则原题化为：若函数$g(x)$不恒等于0，在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，当$x\in(a,b)$时，有$m\le g'(x)\le M$，而且$g(a)=g(b)=0$，则必有:

$$\left|\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{-mM(b-a)^2}{2(M-m)}$$

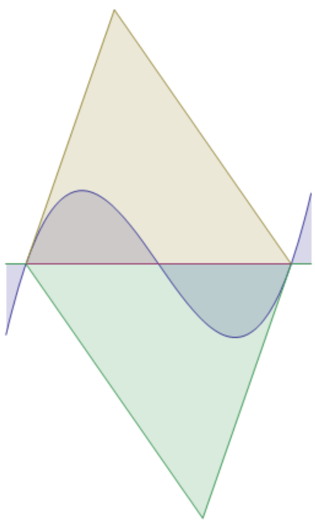
事实上在证明中已经自然的将问题化为上述形式，几何意义是将原被积函数的端点平移到x轴上,对问题进行了**必要**的转化.

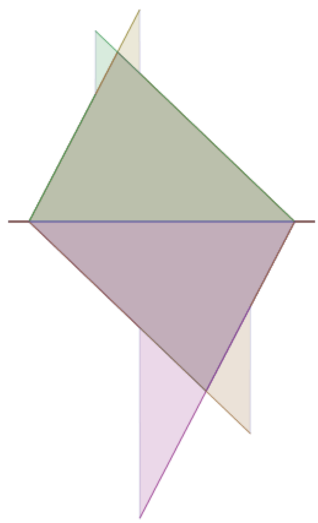
注释2:通过对1.3.1和1.3.2的证明，我们可以看到，通过中值定理所达到的目的是将被积函数放缩为(分段的)线性函数，通过线性函数在区间的积分值来**夹逼**[2]原被积函数的积分值，从而得到不等式(见图1). 分段点c 的选取具有任意性，但是满足不等式的最好的c值的选取，是通过对一般表达式配方或运用不等式得到的，但只要认清这一方法的本质关注其几何意义，则可以免去求c 的繁琐过程，**最好的c，一定是直线的交点**,如若不然，所得到的积分值与原被积表达式的积分值的误差必将增大!(见图2)这也是要分为两个区间来积分的原因，不然误差将会达到最大.(见图3、4)

比如考察:

$$\int_a^b \big(f(x)-\lambda\big)\,\mathrm{d}x\le\frac{M(c-a)^2}{2}-\frac{m(b-c)^2}{2}$$

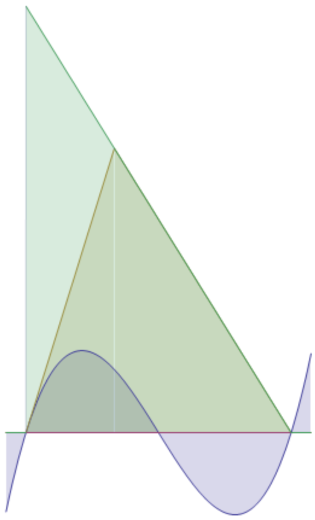
直接令$M(x-a)=m(x-b)$，解得$x=\dfrac{Ma-mb}{M-m}$,则c的值就得出了.





[2]可以看到，这种夹逼只能对将区间端点平移到x轴之后的形式运用

图1 图2



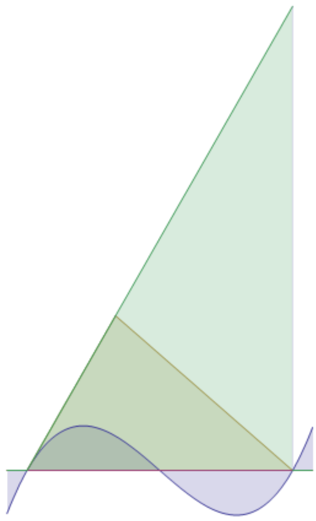


图3 图4

注释3:从1.3.1可以看到，只有添加了条件$f(a)=f(b)$后，所采用的方法才能够得到不等式的不可改进的上界，但是，1.3的$Iyengar$不等式拥有一个比1.3.1小的上界，并且没有条件$f(a)=f(b)$,而我们又不能够从(3)式中得到任何进展[3],于是要解决这个问题，就得寻求新的方法!

1.3.3 Iyengar不等式的证明

若$f(x)$在(a,b)可微，且$|f'(x)|\le M$，则:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]\right|\le\frac{(b-a)^2M}{4}-\frac{[f(a)-f(b)]^2}{4M}$$

证明*:* 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-(x-a)k-f(a)$$

其中$k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,则有

$$F(a)=F(b),\text{且}-M-k\le F'(x)=f'(x)-k\le M-k$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right|&\le\frac{-(-M-k)(M-k)(b-a)^2}{2[(M-k)-(-M-k)]}\\&=\frac{(M^2-k^2)(b-a)^2}{4M}\\&=\frac{M(b-a)^2}{4}-\frac{\big[k(b-a)\big]^2}{4M}\\&=\frac{M(b-a)^2}{4}-\frac{\big[f(a)-f(b)\big]^2}{4M}\end{aligned}$$

[3]这种代数上的没有进展性，从几何上也可以直观反映，因为在$f(a)\ne f(b)$时,通过平移，只能使其中一个端点落在x 轴上,而另外一个端点不在x 轴上,这样就无法通过导函数的有界性简单构造线性函数去夹逼

□

注释1:原题条件改为$m \le f'(x) \le M$,则$Iyengar$不等式可推广为

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]\right| \le \frac{-(m-k)(M-k)(b-a)^2}{2(M-m)}$$

注释2:这个方法是怎么想到的呢？辅助函数式如何构造的呢？其实是**辅助多项式**在起作用.

构造多项式

$$P(x) = kx + t$$

使

$$\begin{cases} P(a) &= f(a) \\ P(b) &= f(b) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} k &= \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \\ t &= ak - f(a) \quad \big(\text{或}bk - f(b)\big) \end{cases}$$

作辅助函数

$$F(x) = f(x) - P(x)$$

则显然有

$$F(a) = F(b) = 0, F'(x) \in (-M-k, M+k)$$

这样，$F(x)$就满足了**1.3.2**的所有条件,带入结论即得证.

注释3:这种手法在由$Rolle$定理证明$Lagrange$中值定理的时候就采用过.可以说，辅助多项式的方法在解题中运用十分广泛.

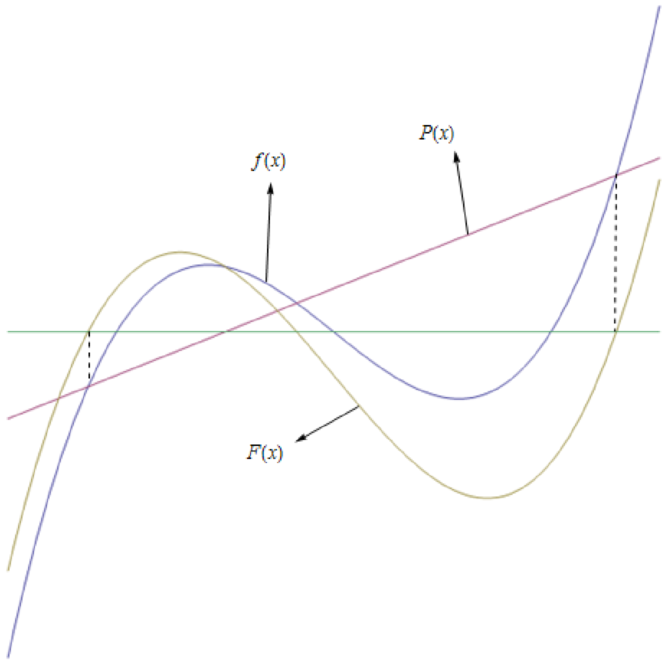


图5