

# 基于压缩感知和稀疏反演的地震数据低频补偿

韩立国 张莹 韩利 余青露

吉林大学地球探测科学与技术学院, 长春 130026

**摘要:** 目前波形反演是地下速度成像技术研究的热点,但地震采集数据低频能量的缺失制约着波形反演的效果。笔者基于压缩感知理论和稀疏约束反演技术,提出了一种地震数据低频补偿方法。第一步,利用反射系数的稀疏性,根据压缩感知概念,构造  $L_1$  范数约束的稀疏反演问题,在 Fourier 域通过有限带宽重构全带宽频谱,实现对地震数据全带宽拓频。这个过程借助快速迭代阈值法求解反问题。第二步,截取拓频后数据的低频能量和原数据的高频能量构成最终的低频补偿地震数据。模拟数据例子和实际数据例子证明了该方法能够有效地对 10 Hz 以下的频率进行补偿。

**关键词:** 稀疏反演;  $L_1$  范数约束; 压缩感知; 低频补偿; 快速迭代阈值法; 波形反演

**中图分类号:** P631.4

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1671-5888(2012) Sup. 3-259-06

## Compressed Sensing and Sparse Inversion Based Low-Frequency Information Compensation of Seismic Data

Han Liguang, Zhang Ying, Han Li, Yu Qinglu

College of GeoExploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China

**Abstract:** Full waveform inversion (FWI) is a hot topic in the subsurface velocity imaging. However, the lack of effective low frequency energy in seismic data restricts the performance of FWI. A method about low frequency information compensation of seismic based on compressed sensing theory and sparse inversion technique is proposed in this paper. A  $L_1$  norm constrained sparse inversion problem is first constructed according to the sparsity of reflectivity and the theory of compressed sensing. This inversion equation can be effectively solved by Fast Iterative Thresholding Algorithm (FISTA) and the full frequency components are then reconstructed in the Fourier domain with band-limited seismic data. The low frequency components form the reconstructed data and high frequency components of the original data are reasonably combined to obtain the final low frequency compensated data. Synthetic and real data examples are tested to demonstrate the performance of the proposed method.

**Key words:** sparse inversion;  $L_1$  norm constrain; compressed sensing; low-frequency compensation; fast iterative thresholding algorithm; full waveform inversion

### 0 引言

随着计算机性能的飞速提高,全波形反演<sup>[1-2]</sup> (full waveform inversion, FWI),即利用地震资料中多种波形信息,通过数据拟合和迭代优化来重构地下介质模型(速度、密度等),已成为地下介质参数

建模的一种重要手段。波形反演的效果很大程度上取决于初始模型的质量,在没有很好的初始速度模型情况下,初始迭代就直接依赖于数据中的低频分量才能准确地进行反演。目前在常规采集技术下,10 Hz 以下的地震数据信噪比较低,很难用于波形反演。因此,基于算法的地震数据低频能量补偿的

收稿日期: 2012-11-27

基金项目: 国家科技重大专项项目 (2011ZX05025-001-04); 国家科技专项 (SinoProbe-03)

作者简介: 韩立国 (1961—) 男,教授,博士生导师,主要从事地震数据处理和解释方面研究, E-mail: hanliguo@jlu.edu.cn。

研究就显得尤为重要。频带的能量补偿方法有很多种<sup>[3-5]</sup>,但主要应用于高频补偿继而来提高地震资料的分辨率,例如对薄层、地震层序<sup>[6]</sup>及小构造等的识别<sup>[7-8]</sup>;而对低频补偿的研究和应用很少。

压缩感知<sup>[8-10]</sup>是2007年以来兴起的一个新的采样和恢复理论,它利用信号的稀疏特性,可以把高维空间的信号通过测量矩阵投影到一个低维的空间中,通过非线性重构来完美重建信号。通常 $L_1$ 约束用于实现压缩感知理论,将两者完美结合。同时,压缩感知理论的发展也促进了求解 $L_1$ 约束反演问题算法的发展,例如迭代重加权最小平方算法(iteratively reweighted least squares, IRLS)<sup>[11]</sup>、同伦算法(homotopy algorithm)<sup>[12]</sup>、快速迭代阈值法(fast iterative shrinkage thresholding algorithm, FISTA)<sup>[13]</sup>、内拥挤算法(in-crowd algorithm)<sup>[14]</sup>等。笔者首先介绍基于压缩感知和稀疏约束反演的低频补偿方法原理及FISTA算法原理,然后分别用拟合例子和实际例子对文章提出的方法进行了测试。

## 1 方法原理

根据地震褶积模型, $s$ 为地震数据,可以描述为地震子波 $w$ 和地下反射系数 $r$ 的褶积与随机噪声 $n$ 的总和:

$$s = w * r + n. \quad (1)$$

式(1)在频率域可以表示为

$$S = WR + N = WFr + N. \quad (2)$$

其中: $S$ 、 $W$ 、 $R$ 及 $N$ 分别是地震记录、地震子波 $w$ 、地下反射系数 $r$ 及随机噪声 $n$ 的Fourier变换; $F$ 是Fourier变换矩阵。根据地震勘探基本假设,地下反射系数是随机序列,则其频谱 $R$ 应是全带宽的。但是由于地震子波的滤波作用使其成为有限带宽的频谱 $S$ ,从而损失了许多有用信息。为了恢复对波形反演初始迭代有用的低频信息,首先需要通过有限带宽的地震数据频谱 $S$ 来恢复整个带宽数据 $R$ ,如图1中的低频和高频部分。

压缩感知<sup>[9-10]</sup>利用信号的稀疏特性,通过非线性重构来完美重建信号。由于地震反射系数 $r$ 是稀疏的,所以求解式(2)的过程满足压缩感知理论。与传统常用的压缩感知方法不同的是,这里的采样矩阵 $W$ 不是完全随机函数。所以只能在一定程度上恢复全带宽能量 $S$ ,而不能达到完全恢复整个频带能量。

与压缩感知理论相辅相成的是 $L_1$ 范数最小化

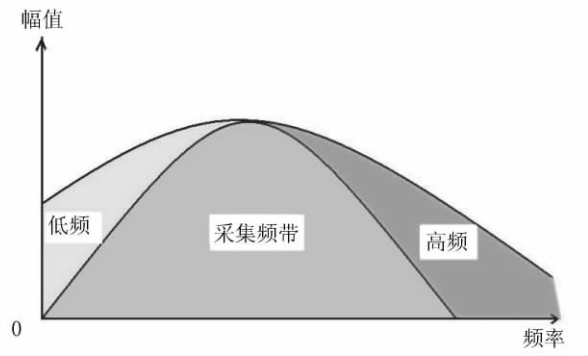


图1 原理示意图

Fig. 1 Principle sketch map

稀疏约束条件。求解稀疏反射系数的问题可以描述为一个由误差的 $L_2$ 范数和解 $r$ 的 $L_1$ 范数共同约束的成本函数:

$$J = \frac{1}{2} \|WFr - S\|_2^2 + \lambda \|r\|_1 = \frac{1}{2} \|WFr - S\|_2^2 + \lambda \|r\|_1. \quad (3)$$

其中: $\|\cdot\|_2^2$ 和 $\|\cdot\|_1$ 分别为 $L_2$ 范数和 $L_1$ 范数, $\lambda$ 是 $L_1$ 范数权重的调节因子,即 $\lambda$ 越大, $L_1$ 范数占的权重越大。成本函数式(3)的前半部分采用 $L_2$ 范数约束,是为了在最小平方意义下匹配地震记录频谱。但因为方程(2)是欠定的,最小平方意义下存在多解性;为了克服多解性,引入成本函数第二部分的 $L_1$ 范数约束条件,这也是利用压缩感知原理恢复信号的关键之一。

对式(3)推导得

$$J = \frac{1}{2} \|WFr - S\|_2^2 + \lambda \|r\|_1 = \frac{1}{2} (WFr - S)^H (WFr - S) + \lambda \|r\|_1 = \frac{1}{2} [r^H (WF)^H WFr - r^H (WF)^H S - S^H (WFr) + S^H S] + \lambda \|r\|_1. \quad (4)$$

其中, $H$ 对于实数运算为转置,对于复数运算为共轭转置。

为了使成本函数最小,对 $J$ 相对于 $r$ 求导,由(4)式得到目标函数:

$$\nabla J(r) = (WF)^H WFr - \frac{1}{2} (WF)^H S - \frac{1}{2} S^H (WF) + \lambda \text{sign}(r) = (WF)^H WFr - (WF)^H S + \lambda \text{sign}(r) = 0. \quad (5)$$

式(5)可以通过基追踪(basic pursuit, BP)<sup>[15]</sup>算法或基追踪去噪算法来解,例如 IRLS、Homotopy、FISTA、In-Crowd 等,本次采用速迭代阈值法(FISTA)算法来解。

## 2 快速迭代阈值法

FISTA 算法利用软阈值迭代求解目标函数,其基本算法流程如下。

第 1 步迭代:初始化  $y_1 = r_0$ ,  $t_1 = 1$ 。

第  $K$  步迭代:

$$1) r_k = \text{soft}\left(y_k + \frac{1}{\alpha}(WF)^H(S - WFy_k), \frac{\lambda}{\alpha}\right);$$

$$2) t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2};$$

$$3) y_{k+1} = r_k + \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}(r_k - r_{k-1})。$$

其中:算法中的  $y$  为算法的中间变量;soft 是软阈值; $\lambda$  和  $\alpha$  为算法的参数。 $\lambda$  调节反射系数稀疏度; $\alpha$  必须大于  $(WF)^H WF$  的最大特征值。这个算法适合于实数和复数情况。

## 3 低频重建

根据上面算法,通过压缩感知理论和稀疏约束反演技术求得稀疏反射系数  $\tilde{r}$  后,进而求取拓频后频谱  $\tilde{R}$ :

$$\tilde{R} = F\tilde{r}。 \quad (6)$$

在  $\tilde{R}$  中存在补偿的低频和补偿的高频,但对于波形反演初始迭代起重要作用的是低频部分,所以只保

留补偿的低频能量。具体作法是,在频率域选取得到补偿的低频部分与原地震数据频谱的交叉点,在该点之前使用补偿后的 Fourier 系数,在该点之后使用原地震记录的 Fourier 系数。反 Fourier 变换到时间域得到低频补偿后的地震记录:

$$\tilde{s} = F^{-1}(L(\tilde{R}) + H(S))。 \quad (7)$$

其中: $L$  为取低频部分算子, $H$  为取高频部分算子, $F^{-1}$  为反 Fourier 变换。

### 3.1 拟合数据例子

通过将主频为 30 Hz 的 Ricker 子波与 3 个地震系数褶积后得到合成的地震记录如图 2a 实线。将原始地震记录做傅里叶变换得到频谱如图 2b 实线。在频域进行稀疏反演对原始数据进行全带宽拓频,得到图 2b 中虚线频谱。由图 2b 可以直观看出模拟数据的频带得到有效展宽。对全频带拓频后的数据频谱反傅里叶变换后得到图 2a 中的虚线部分。从图 2a 中可清楚看到全频带拓宽的地震子波被压缩,时间分辨率明显提高。这就是通常提高薄层分辨率时所希望达到的效果,但对全波形反演反而益处不大。只有低频信息丰富才对日益盛行的波形反演有更多的帮助。为了达到目的,将全频带拓频后低频部分和原始数据高频部分组成得到新的频谱如图 3a 中虚线。图 3a 中频谱只有在低频部分得到补偿而高频部分同原始数据一样。图 3a 对应的地震记录如图 3b,地震记录在低频补偿前后变化不大。从这个拟合例子可以看出,文中方法很好地对数据低频进行了补偿。

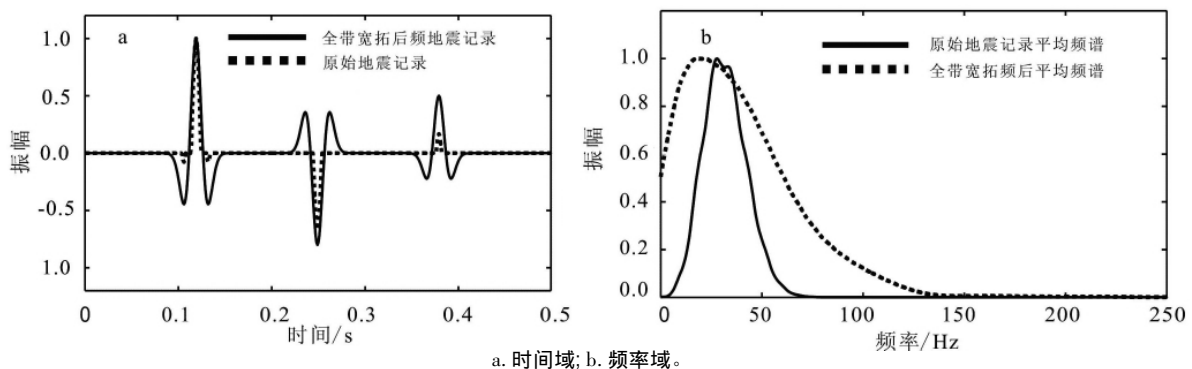


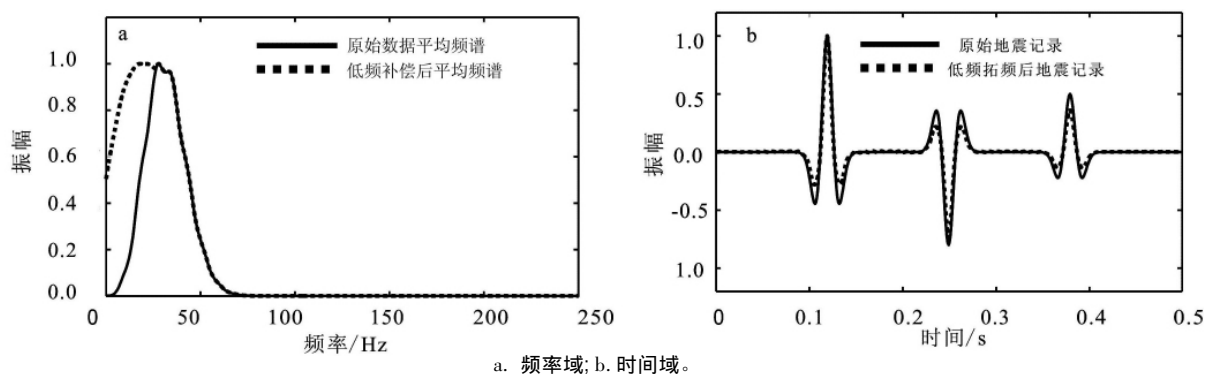
图 2 地震数据全带宽拓频对比

Fig. 2 Seismic data bandwidth extension frequency comparison

### 3.2 实际数据测试

提取某地区实际数据中的 10 道,如图 4a 所示:首先,提取地震数据的子波,子波接近零相位;其次,

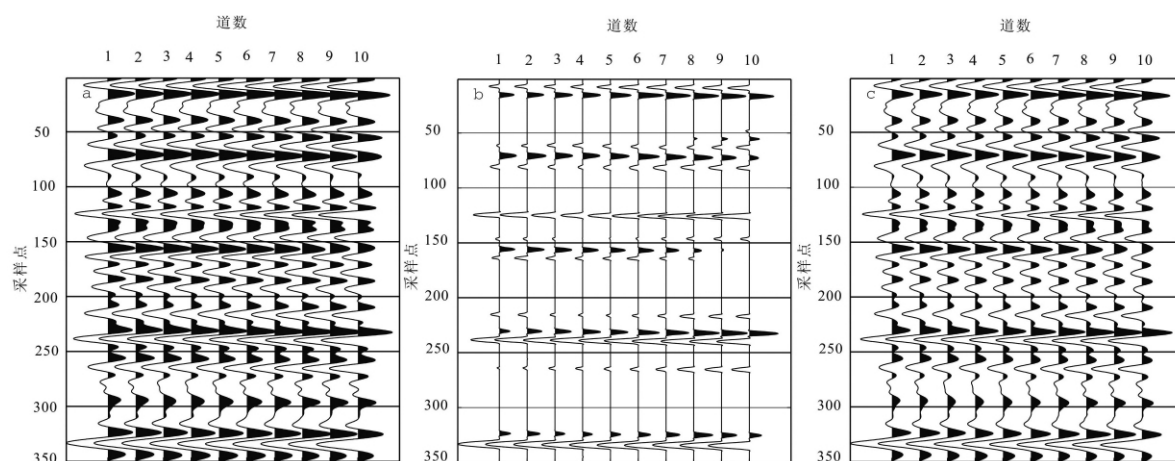
将实际数据变换到频率域通过稀疏反演进行全带宽频谱补偿得到如图 4b 中所示数据,主要层位得到保留,子波压缩,时间分辨率提高。在此算例中 FISTA



a. 频率域; b. 时间域。

图3 地震数据低频补偿对比

Fig. 3 Seismic data low frequency compensation comparison



a. 原始实际地震道数据; b. 全频带补偿地震道数据; c. 低频补偿地震道数据。

图4 实际地震道数据对比

Fig. 4 Real seismic record comparison

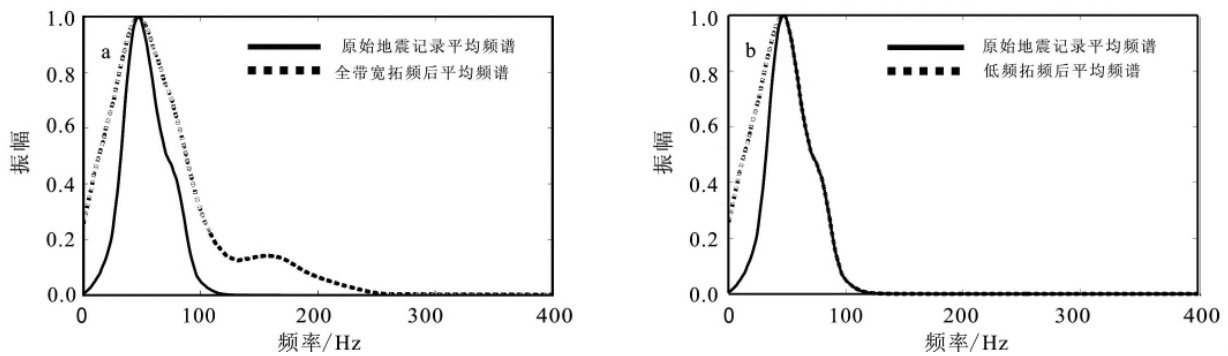
参数选取为  $\lambda = 0.9$ ,  $\alpha = 1$ , 选用 100 次迭代。将低频补偿后的频谱反 Fourier 变换后到时间域的低频补偿后数据如图 4c 所示, 图中层位没有任何丢失, 与原始数据相似, 虽然没有图 4b 分辨率高但低频已经得到丰富, 于全波形反演有利。

文章提出的方法是基于数据驱动的方法, 所拓频率能量来源于数据本身, 采用稀疏约束反演方法是为了更好地提升控制地震记录的主要能量的低频部分。由于文章中选用的是稳态子波, 即整个地震记录选用同一频率和相位的子波进行反演, 使得在稀疏约束下, 全拓频数据中会损失一些能量较小的高频同相轴。文章中的最后的拓低频数据中含能量提升后的低频部分和原数据的高频部分, 所以在形态上与全拓频数据不同。

对图 4a 做傅里叶变换得到图 5a 实线部分, 对实际数据的傅里叶谱进行稀疏反演得到低频和高频

都得到恢复的频谱(图 5a 虚线)。同模拟数据一样, 从频谱图中就可以看到数据频带明显拓宽。再截取拓频后数据低频部分与原始数据的高频部分合并就取得了低频补偿的频谱, 即图 5b 虚线部分。低频补偿后的数据低频得到明显丰富而高频并未受到影响。低频补偿数据中的低频信息来源于原数据有效信号, 因此是可靠的, 可进一步用于波形反演研究。

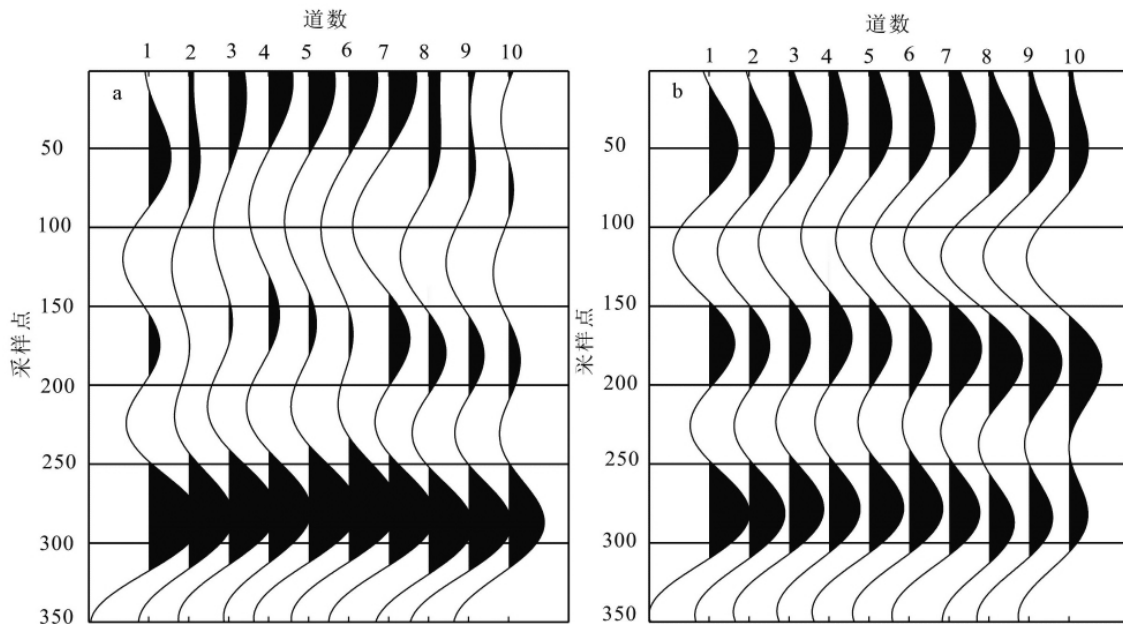
为进一步证实本方法的有效性, 取实际数据低频(2~10 Hz)地震道数据(图 6a)对比。对取得的低频数据实施本次的方法, 得到拓低频的地震记录图 6b, 其图中同相轴与图 6a 相比得到显著的增强, 即在时间域中地震数据经过低频补偿后, 低频地震数据能量得到有效提高。由图 6 展现了本方法对数据低频部分进行补偿后可以很好地达到预期效果。



a. 实际地震全带宽补偿频谱对比; b. 实际地震低频补偿频谱对比。

图5 实际地震道频谱对比

Fig. 5 Fourier spectrum of real seismic comparison



a. 实际低频地震道数据; b. 低频补偿后低频地震道数据。

图6 低频(2~10 Hz)地震道数据对比

Fig. 6 Compensation of low-frequency (2~10 Hz) real seismic records

#### 4 结语

本次利用地震反射系数稀疏特性,结合压缩感知理论和稀疏反演技术,在频率域通过有限带宽恢复全局带宽能量,提出了一种地震数据低频补偿方法。拟合数据例子和实际数据例子证明了此方法在低频能量补偿上的有效性。此项技术适合全波形反演初始迭代对地震数据的要求,为推进波形反演的发展打下基础。

#### 参考文献(References):

- [1] Pratt G R, Shin C, Hicks G J. Gauss-Newton and Full Newton Methods in Frequency-Space Seismic Waveform Inversion [J]. Geophys Journal International, 1998, 133 (2): 341-362.
- [2] Virieux J, Operto S. An Overview of Full-Waveform Inversion in Exploration Geophysics [J]. Geophysics, 2009, 74(6): 1-26.
- [3] 罗有春. 提高地震勘探分辨率方法理论与应用研究: 反褶积[D]. 成都: 成都理工大学, 2009. Luo Youchun. Improve the Method and Applied Research of Seismic Survey Resolution: Deconvolution [D]. Chengdu: Chengdu University of Technology, 2009.
- [4] 乐友喜,王经才,屠世杰. 约束  $L_1$  模反褶积[J]. 石油地球物理勘探, 1997, 32(2): 171-180.

- Yue Youxi , Wang Jingcai , Tu Shijie. Restrained  $L_1$  Modulo Deconvolution [J]. Oil Geophysical Prospecting , 1997 , 32( 2) : 171-180.
- [5] Economou N , Vafidis A. Spectral Balancing GPR Data Using Time-Variant Band-width in the  $t$ - $f$  Domain [J]. Geophysics , 2010 , 75( 3) : 19-27.
- [6] 陈学华 , 贺震华 , 黄德济. 时频域高分辨地震层序识别 [J]. 吉林大学学报: 地球科学版 , 2008 , 38( 1) : 152-155.
- Chen Xuehua , He Zhenhua , Huang Deji. Seismic Sequence Identifying with High Resolution in Time-Frequency Domain [J]. Journal of Jilin University: Earth Science Edition , 2008 , 38( 1) : 152-155.
- [7] 赵淑红 , 朱光明. 用小波变换谱均衡法提高地震资料的分辨率 [J]. 西安科技大学学报 , 2007 , 27( 2) : 255-259.
- Zhao Shuhong , Zhu Guangming. Using Combined Method of Wavelet Transform and Spectrum Equalization to Improve Seismic Data Resolution [J]. Journal of Xi'an University of Science Technology , 2007 , 27( 2) : 255-259.
- [8] 韩红平 , 陈如山. 压缩感知中信号重构算法的研究 [D]. 南京: 南京邮电大学 , 2012.
- Han Hongping , Chen Rushan. Research on Signal Reconstruction Algorithm of Compressive Sense [D]. Nanjing: Nanjing University of Posts and Telecommunications , 2012.
- [9] Baraniuk G R. Compressive Sensing [J]. IEEE Signal Processing Magazine , 2007 , 52( 4) : 118-124.
- [10] Candès E J , Wakin M B. An Introduction to Compressive Sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine , 2008 , 25( 2) : 21-30.
- [11] Scales J , Gersztenkorn A. Robust Methods in Inverse Theory [J]. Inverse Problems , 1998 , 4( 4) : 1071 - 1091.
- [12] Malioutov D , Cetin M , Willsky A. Homotopy Continuation for Sparse Signal Representation [J]. Acoustics , Speech , and Signal Processing , 2005 , 735( 5) : 733-736.
- [13] Beck A , Teboulle M. A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems [J]. SIAM Journal Imaging Sciences , 2009 , 2( 1) : 183-202.
- [14] Han L , Han L. Seismic Spectral Decomposition and Denoising with In-Crowd Algorithm [C]//SEG Technical Program Expanded Abstracts. Las Vegas: SEG , 2012.
- [15] Van den Berg E , Friedlander M P. Probing the Pareto Frontier for Basis Pursuit Solutions [J]. SIAM Journal on Scientific Computing , 2008 , 31( 2) : 890-912.