

# 二维各向同性介质地震波全波场的有限差分模拟

王海燕, 王有学, 薛霆虬, 杨强

(桂林理工大学 a. 广西隐伏金属矿产勘查重点实验室; b. 地球科学学院, 广西 桂林 541004)

**摘要:** 对地震波场的有限差分方程进行了详细的推导, 采用改进的中心线算法对有限差分方程中的大型稀疏线性方程组进行求解, 并对算法的稳定性进行了分析。通过对二维双层弹性介质中的地震波全波场的模拟, 获得了清晰的地震波波场特征, 包括面波及体波波场特征。

**关键词:** 地震波全波场; 各向同性; 有限差分; 数值模拟

**中图分类号:** P315.31

**文献标志码:** A

地震波波场数值模拟是研究弹性介质中地震波传播规律的重要手段, 有限差分法是最常用的一种, 它将波动方程中波场函数的空间导数和时间导数用相应空间和时间的差分来代替<sup>[1]</sup>。通过网格差分近似求解波动方程, 得到完整的弹性波场信息<sup>[2-7]</sup>。

对于大型稀疏线性方程组的解法通常有直接法和迭代法<sup>[8-12]</sup>。直接法通常不考虑舍入误差, 但在实际计算时, 由于计算机用有限小数作运算, 只能算出方程组的近似值, 对于系统矩阵绝大多数为零元素的方程组, 需要较多的存储空间和算术运算量。迭代法是用逐次逼近的方法求解线性方程, 其过程是一个多次迭代的极限过程, 该方法与直接法相比, 其优点是计算公式简单, 可以不必存储系数矩阵的零元素, 占用内存较少。

本文将利用有限差分法, 并采用改进的中心线算法对各向同性介质中地震波场进行数值模拟。

## 1 波动方程的有限差分

### 1.1 各向同性介质中波动方程的有限差分

假设在二维  $x-z$  空间中, 弹性介质是均匀和各向同性的, 则弹性波的波动方程可以表示为

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2, \quad (1)$$

当外力  $\mathbf{F} = 0$  时, 将式 (1) 写成分量形式

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $u_x$ 、 $u_z$  分别表示  $x$ 、 $z$  方向上的位移;  $\rho$  为介质的密度;  $\lambda$  为弹性介质拉梅系数;  $\mu$  为介质的剪切模量。

利用空间步长  $\Delta x$ 、 $\Delta z$  将介质网格化为  $(N+1) \times (M+1)$  个网格节点, 其网格剖分如图 1。根据中心差分格式, 将波动方程

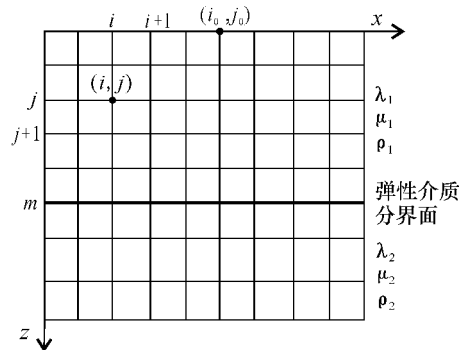


图 1 介质网格剖分示意图  
Fig. 1 Diagram of medium mesh

收稿日期: 2012-04-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(41174077); 广西自然科学基金项目(2010GXNSFA013016); 广西研究生教育创新计划项目(2011105960818M03)

作者简介: 王海燕(1986—), 女, 硕士研究生, 研究方向: 地震波理论传播与成像, wanghaiyan.why@163.com。

通讯作者: 王有学, 博士, 教授, uxue.wang@gmail.com。

引文格式: 王海燕, 王有学, 薛霆虬, 等. 二维各向同性介质地震波全波场的有限差分模拟 [J]. 桂林理工大学学报, 2012, 32(4): 482-489.

式(2)进行离散化,则得到下式

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{u_x(ij, k+1) + u_x(ij, k-1) - 2u_x(ij, k)}{(\Delta t)^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{u_x(i+1j, k) + u_x(i-1j, k) - 2u_x(ij, k)}{(\Delta x)^2} + \\ &(\lambda + \mu) \frac{(u_z(i+1j+1, k) - u_z(i-1j+1, k)) - (u_z(i+1j-1, k) - u_z(i-1j-1, k))}{4\Delta x\Delta z} + \\ &\mu \frac{u_x(ij+1, k) + u_x(ij-1, k) - 2u_x(ij, k)}{(\Delta z)^2}, \\ \rho \frac{u_z(ij, k+1) + u_z(ij, k-1) - 2u_z(ij, k)}{(\Delta t)^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{u_z(ij+1, k) + u_z(ij-1, k) - 2u_z(ij, k)}{(\Delta z)^2} + \\ &(\lambda + \mu) \frac{(u_x(i+1j+1, k) - u_x(i-1j+1, k)) - (u_x(i+1j-1, k) - u_x(i-1j-1, k))}{4\Delta x\Delta z} + \\ &\mu \frac{u_z(i+1j, k) + u_z(i-1j, k) - 2u_z(ij, k)}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

其中:  $u_x(ij, k)$  表示在  $k \times \Delta t$  时间  $x$  方向位移分量在网格点  $(ij)$  处的值。由上式可以看出, 在时刻  $t = (k+1)\Delta t$  的波场位移值可以用时刻  $t = k\Delta t$  及时刻  $t = (k-1)\Delta t$  的波场位移值表示( $k$  为整数)。

将方程(3)进行整理, 则可以得到各向同性弹性介质中波动方程的有限差分计算公式

$$\left\{ \begin{aligned} u_x(ij, k+1) &= -u_x(ij, k-1) + 2u_x(ij, k) + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right) \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (u_x(i+1j, k) + u_x(i-1j, k) - 2u_x(ij, k)) + \\ &\left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right) \frac{(\Delta t)^2}{4\Delta x\Delta z} [(u_z(i+1j+1, k) - u_z(i-1j+1, k)) - (u_z(i+1j-1, k) - u_z(i-1j-1, k))] + \\ &\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta z)^2} (u_x(ij+1, k) + u_x(ij-1, k) - 2u_x(ij, k)), \\ u_z(ij, k+1) &= -u_z(ij, k-1) + 2u_z(ij, k) + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right) \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta z)^2} (u_z(ij+1, k) + u_z(ij-1, k) - 2u_z(ij, k)) + \\ &\left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right) \frac{(\Delta t)^2}{4\Delta x\Delta z} [(u_x(i+1j+1, k) - u_x(i-1j+1, k)) - (u_x(i+1j-1, k) - u_x(i-1j-1, k))] + \\ &\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (u_z(i+1j, k) + u_z(i-1j, k) - 2u_z(ij, k)). \end{aligned} \right. \quad (4)$$

## 1.2 定解条件

在根据方程(4)对波动方程(2)进行有限差分求解时, 还必须考虑震源处的激发条件(初始条件)、自由边界条件(地表边界条件)、人工边界条件(吸收边界条件)、介质分界面边界条件等因素对弹性波场的影响。

1.2.1 初始条件 当  $t < 0$  时, 介质处于静止状态, 弹性波的初始条件为

$$\begin{cases} u_x(ij, 0) = 0, u_z(ij, 0) = 0; \\ g_x(ij) = 0, g_z(ij) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

当  $t = 0$  ( $k = 1$ ) 时, 根据波动方程的初始条件, 震源处  $(i_0, j_0)$  的地动位移和地动速度分别为

$$\begin{cases} u_x(i_0, j_0, 1) = f_x(i_0, j_0), u_z(i_0, j_0, 1) = f_z(i_0, j_0); \\ \frac{u_x(i_0, j_0, 1) - u_x(i_0, j_0, 0)}{\Delta t} = g_x(i_0, j_0), \frac{u_z(i_0, j_0, 1) - u_z(i_0, j_0, 0)}{\Delta t} = g_z(i_0, j_0). \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $f, g$  分别为震源处的地动位移及地动速度函数。

1.2.2 自由边界条件 地表为自由边界, 其边界条件是法向和切向应力都为零, 即

$$\begin{cases} \left. \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_{z=0} + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=0} + \left. \frac{\partial u_z}{\partial x} \right|_{z=0} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

如果用单边差分来逼近法向导数, 而用中心差分来逼近切向导数, 则自由表面的差分边界条件可写为

$$\begin{cases} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right) \left[ \frac{u_x(i+1, k) - u_x(i-1, k)}{2\Delta x} \right] + \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \left[ \frac{u_z(i, k) - u_z(i, k)}{\Delta z} \right] = 0, \\ \frac{u_x(i, k) - u_x(i, k)}{\Delta z} + \frac{u_z(i+1, k) - u_z(i-1, k)}{2\Delta x} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

1.2.3 弹性介质分界面的边界条件 在两种不同弹性介质的分界面上, 法向应力与切向应力连续, 法向位移和切向位移连续, 即

$$\begin{cases} \rho_1 \left( \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1} \frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + \frac{\lambda_1}{\rho_1} \frac{\partial u_{x1}}{\partial x} \right) \Big|_{z=h} = \rho_2 \left( \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_2} \frac{\partial u_{z2}}{\partial z} + \frac{\lambda_2}{\rho_2} \frac{\partial u_{x2}}{\partial x} \right) \Big|_{z=h}, \\ \mu_1 \left( \frac{\partial u_{x1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial x} \right) \Big|_{z=h} = \mu_2 \left( \frac{\partial u_{x2}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z2}}{\partial x} \right) \Big|_{z=h}, \\ u_{x1} \Big|_{z=h} = u_{x2} \Big|_{z=h}, \\ u_{z1} \Big|_{z=h} = u_{z2} \Big|_{z=h}. \end{cases} \quad (9)$$

对于弹性介质分界面(水平界面, 位于第  $m$  个横向网格处, 图 1), 同样采用单边差分来逼近法向导数, 而用中心差分来逼近切向导数, 则得到

$$\begin{cases} \rho_1 \left\{ \left( \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1} \right) \left[ \frac{u_{z1}(i, m+1, k) - u_{z1}(i, m, k)}{\Delta z} \right] + \left( \frac{\lambda_1}{\rho_1} \right) \left[ \frac{u_{x1}(i+1, m, k) - u_{x1}(i-1, m, k)}{2\Delta x} \right] \right\} \\ = \rho_2 \left\{ \left( \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_2} \right) \left[ \frac{u_{z2}(i, m+1, k) - u_{z2}(i, m, k)}{\Delta z} \right] + \left( \frac{\lambda_2}{\rho_2} \right) \left[ \frac{u_{x2}(i+1, m, k) - u_{x2}(i-1, m, k)}{2\Delta x} \right] \right\}, \\ \mu_1 \left[ \frac{u_{x1}(i, m+1, k) - u_{x1}(i, m, k)}{\Delta z} + \frac{u_{z1}(i+1, m, k) - u_{z1}(i-1, m, k)}{2\Delta x} \right] \\ = \mu_2 \left[ \frac{u_{x2}(i, m+1, k) - u_{x2}(i, m, k)}{\Delta z} + \frac{u_{z2}(i+1, m+1, k) - u_{z2}(i-1, m+1, k)}{2\Delta x} \right], \\ u_{x1}(i, m, k) = u_{x2}(i, m, k), \\ u_{z1}(i, m, k) = u_{z2}(i, m, k). \end{cases} \quad (10)$$

1.2.4 吸收边界条件 对地震波的传播进行数值模拟是在有限空间中实现的, 所以在介质的两侧及底部(人工边界)会产生边界反射, 干扰有效波场, 影响模拟结果。因而, 就必须考虑边界的吸收问题<sup>[13-15]</sup>。

在二维区域  $\{(x, z) | -a \leq x \leq a, 0 \leq z \leq b\}$  内求解波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11)$$

$$\text{的定解问题时, 其边界条件为} \quad \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=b} = 0. \quad (12)$$

根据傅氏变换的微分变换定理

$$F\{f^{(m,n)}(x, y)\} = (i \cdot 2\pi f_x)^m (i \cdot 2\pi f_y)^n F(f_x, f_y)$$

对式(11) 分别进行  $x, t$  和  $z, t$  的二维傅氏变换后再进行反傅氏变换, 则有

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{V} \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} + \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0, \\ \left( \frac{1}{V} \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0, \\ \left( \frac{1}{V} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = 0, \\ \left( \frac{1}{V} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = 0. \end{cases} \quad (13)$$

此方程即为人工边界吸收问题的位移解。

在二维空间中,人工边界吸收问题的位移解为

$$\frac{1}{V} \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial t} + \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \quad (14)$$

其中:  $n$  为边界的外法线方向;  $\tau$  为边界的切向方向。

同时,由式(11)可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \quad (15)$$

则由式(14)、(15)可得

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2}{V} \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0, \quad (16)$$

令  $A = V \times \Delta t / \Delta x$  则介质的左、右及底部的边界条件可以写成差分格式

$$\begin{cases} u(0, j, k+1) = (2 - 2A - A^2) u(0, j, k) + (2A + 2A^2) u(1, j, k) - A^2 u(2, j, k) + \\ \quad (2A - 1) u(0, j, k-1) - 2Au(1, j, k-1), \\ u(M, j, k+1) = (2 - 2A - A^2) u(M, j, k) + (2A + 2A^2) u(M-1, j, k) - A^2 u(M-2, j, k) + \\ \quad (2A - 1) u(M, j, k-1) - 2Au(M-1, j, k-1), \\ u(i, M, k+1) = (2 - 2A - A^2) u(i, M, k) + (2A + 2A^2) u(i, M-1, k) - A^2 u(i, M-2, k) + \\ \quad (2A - 1) u(i, M, k-1) - 2Au(i, M-1, k-1). \end{cases} \quad (17)$$

吸收边界处理的本质就是当地震波传播到因人工边界(非反射界面)造成的波阻抗时,不会产生反射波,即将人工边界变成无反射的、透明的吸收边界。

### 1.3 震源函数

震源函数有多种取法,如德黑兰大学地球物理研究所 Abdolrahim Javaherian 提出的有限差分合成地震图的最佳震源函数<sup>[16]</sup>、雷克子波、高斯子波等。在地震波场数值模拟的过程中,震源问题的处理对模拟的结果有着很重要的影响,子波是描述震源特征的时间函数,子波延续的时间越短、频带越宽,子波的垂直分辨率也就越高<sup>[17]</sup>。但是在利用有限差分模拟计算时会出现数值频散,尤其在自由界面,当空间采样不足时,子波的高频成分频散就会更严重。所以,子波主频要根据模型的速度及网格间距进行合理选择。本文采用了雷克子波作为震源函数。

## 2 大型稀疏矩阵线性方程组的求解

设线性方程组

$$Ax = b,$$

其中:  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为实非奇异方阵;  $b \in \mathbf{R}^n$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  分别是方程组的右端向量和初始迭代向量。若记

$$A^T = [a_1, a_2, \dots, a_n],$$

其中:  $a_k^T$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 是  $A$  的第  $k$  个行向量。当  $\|a_k\| = 1$  时,

$$d_k(x_0) = a_k^T x_0 - b_k, \quad (18)$$

将是点  $x_0$  到平面  $\Pi_k a_k^T x - b_k = 0$  的距离。这里  $\|\cdot\|$  为向量的 2-范数。

任取初始向量  $x_0$ , 记

$$d_k(x) = a_k^T x - b_k, \quad s(x) = \sum_{k=1}^n d_k^2(x), \quad (19)$$

设  $x = x_0 + t\tau$  为中心线向量,于是

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{k=1}^n d_k^2(x) = \sum_{k=1}^n (a_k^T x - b_k)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k^T x_0 + t a_k^T \tau - b_k)^2 = \sum_{k=1}^n [(a_k^T x_0 - b_k)^2 + (t a_k^T \tau)^2 + \\ &\quad 2t(a_k^T x_0 - b_k) a_k^T \tau] = s(x_0) + 2t \sum_{k=1}^n (a_k^T x_0 - b_k) a_k^T \tau + t^2 \sum_{k=1}^n (a_k^T \tau)^2, \end{aligned} \quad (20)$$

取  $s(x)$  在点  $x_0$  处的最速下降方向  $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0}$ , 得到

$$\tau_0 = \sum_{k=1}^n (a_k^T x_0 - b_k) a_k, \quad (21)$$

使得  $s(x)$  达到最小。令

$$ds(x)/dt = 2 \sum_{k=1}^n (a_k^T x_0 - b_k) a_k^T \tau_0 + 2t \sum_{k=1}^n (a_k^T \tau_0)^2 = 2 \|\tau_0\|^2 + 2t \sum_{k=1}^n (a_k^T \tau_0)^2 = 0, \quad (22)$$

解得

$$t_0 = -\frac{\|\tau_0\|^2}{\sum_{k=1}^n (a_k^T \tau_0)^2}, \quad (23)$$

记  $x_1 = x_0 + t_0 \tau_0$ , 这样, 重复上面的过程就可以得到迭代序列

$$x_i = x_{i-1} + t_{i-1} \tau_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

该方法是一种大范围收敛的迭代算法, 即迭代法与初始向量的选取无关, 同时, 本算法克服了一般迭代算法的运算量大、收敛速度缓慢等缺点, 具有循环次数少、计算量小、精度高的优点。

### 3 地震波场的数值模拟

根据以上推导, 对水平层状弹性介质模型和倾斜界面弹性介质模型进行地震波场的有限差分数值模拟计算。

#### 3.1 水平层状弹性介质中的地震波场

对于  $400 \text{ m} \times 200 \text{ m}$  的水平层状弹性介质, 水平分界面埋深为  $100 \text{ m}$ , 上覆介质纵波速度  $V_p = 2000 \text{ m/s}$ , 横波速度  $V_s = 1157 \text{ m/s}$ , 密度  $\rho = 2.50 \text{ g/cm}^3$ ; 下伏介质的纵波速度  $V_p = 3400 \text{ m/s}$ , 横波速度  $V_s = 1963 \text{ m/s}$ , 密度  $\rho = 2.85 \text{ g/cm}^3$ 。利用  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  的网格将介质剖分为  $401 \times 201$  个节点, 震源位于水平方向  $200 \text{ m}$ , 深度为  $4 \text{ m}$  处, 震源函数的频率为  $30 \text{ Hz}$ , 时间步长  $0.0002 \text{ s}$ 。

地震波在震源处激发后, 迅速向周围传播。在  $t = 0.04 \text{ s}$  时刻, P 波波前传播到  $4 \text{ m} + 0.04 \text{ s} \times 2000 \text{ m/s} = 84.0 \text{ m}$  处, S 波波前传播到  $4 \text{ m} + 0.04 \text{ s} \times 1157 \text{ m/s} = 50.28 \text{ m}$  处,  $u_z$  的波场快照如图 2 所示; 在  $t = 0.05 \text{ s}$  时刻, P 波波前传播了  $106.8 \text{ m}$  到达了介质分界面, 并且在分界面发生了 P 波的反射及透射, 而且由于下伏介质的速度较大, 在相同的时间内 P 波传播的距离比在上覆介质中大, S 波波前传播到  $4 \text{ m} + 0.05 \text{ s} \times 1157 \text{ m/s} = 61.85 \text{ m}$  处, 依然在上覆介质中传播,  $u_z$  的波场快照如图 3 所示。在  $0.075 \text{ s}$  时刻, P 波在下伏介质中迅速传播, 到达  $191.8 \text{ m}$  处, 并且分界面产生的反射波传播了  $54 \text{ m}$ , 其波场快照如图 4 所示。

图 5 为水平层状弹性介质中  $u_z$  分量的合成地震记录, 图中可以明显地分辨出 P 波、S 波及 R 波, 以及介质分界面的反射 P 波。

#### 3.2 倾斜界面弹性介质中的地震波场

对于一个  $400 \text{ m} \times 200 \text{ m}$  的双层弹性介质, 其倾斜分界面的埋深从左边界的  $50 \text{ m}$  向右边界线性加深到  $150 \text{ m}$ , 界面上覆介质的纵波速度  $V_p = 2000 \text{ m/s}$ , 横波速度  $V_s = 1157 \text{ m/s}$ , 密度  $\rho = 2.50 \text{ g/cm}^3$ ; 界面下伏介质的纵波速度  $V_p = 3400 \text{ m/s}$ , 横波速度  $V_s = 1963 \text{ m/s}$ , 密度  $\rho = 2.85 \text{ g/cm}^3$ 。其余参数与水平层状弹性介质中的参数设置保持一致。

在  $t = 0.04 \text{ s}$  时刻, P 波波前传播到  $84.0 \text{ m}$  处, S 波波前传播到  $50.28 \text{ m}$  处,  $u_z$  的波场快照如图 6 所示。在  $t = 0.05 \text{ s}$  时刻, P 波波前到达了介质分界面, 并且沿着介质分界面发生了透射, S 波波前传播到  $61.85 \text{ m}$  处, 未到达介质分界面,  $u_z$  的波场快照如图 7 所示; 在  $0.075 \text{ s}$  时刻, P 波在倾斜界面发生明显反射, 其  $u_z$  波场快照如图 8 所示。

图 9 为倾斜界面弹性介质中  $u_z$  分量合成的地震记录, 从中可以明显地分辨出介质分界面反射的 P 波。

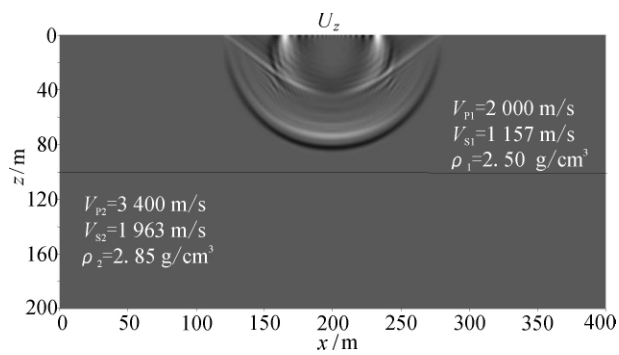


图 2 水平层状弹性介质中 0.04 s 时刻的波场快照  
Fig. 2 Wave field snapshots at 0.04 s in homogenous isotropic elastic medium with one horizontal interface

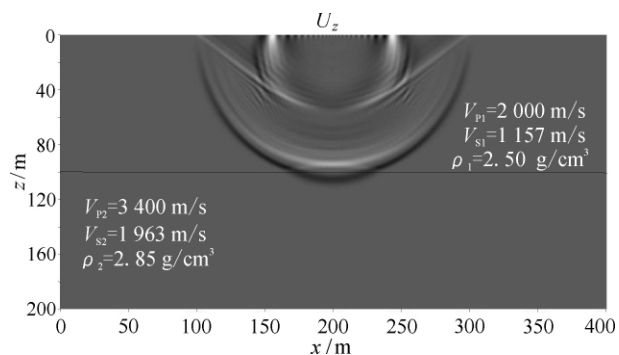


图 3 水平层状弹性介质中 0.05 s 时刻的波场快照  
Fig. 3 Wave field snapshots at 0.05 s in homogenous isotropic elastic medium with one horizontal interface

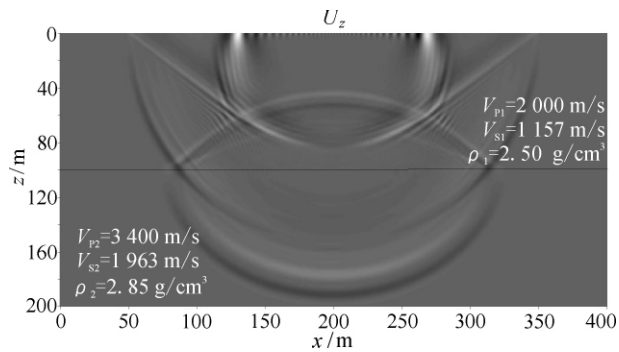


图 4 水平层状弹性介质中 0.075 s 时刻的波场快照  
Fig. 4 Wave field snapshots at 0.075 s in homogenous isotropic elastic medium with one horizontal interface

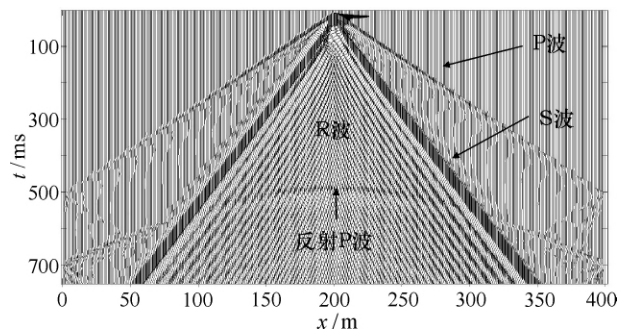


图 5 水平层状弹性介质中合成的地震记录  
Fig. 5 Synthetic seismograms in homogenous isotropic elastic medium with one horizontal interface

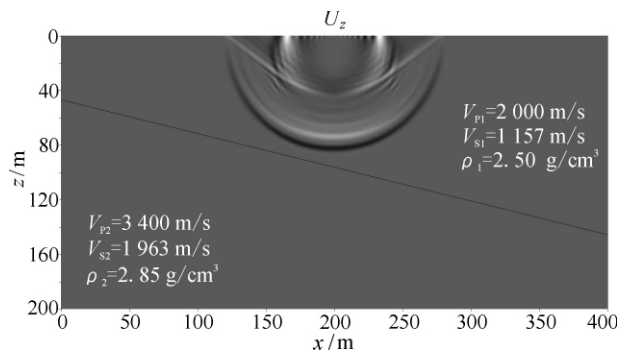


图 6 倾斜界面弹性介质中 0.04 s 时刻的波场快照  
Fig. 6 Wave field snapshots at 0.04 s in homogenous isotropic elastic medium with one dip interface

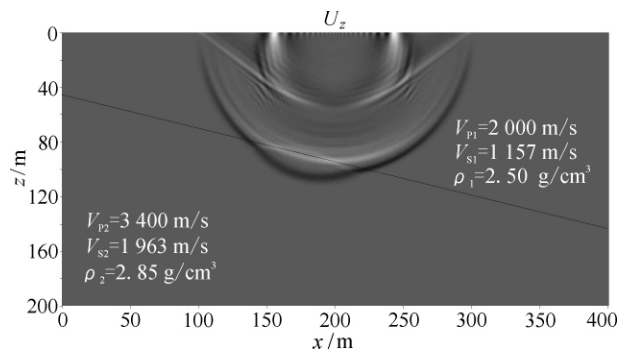


图 7 倾斜界面弹性介质中 0.05 s 时刻的波场快照  
Fig. 7 Wave field snapshots at 0.05 s in homogenous isotropic elastic medium with one dip interface

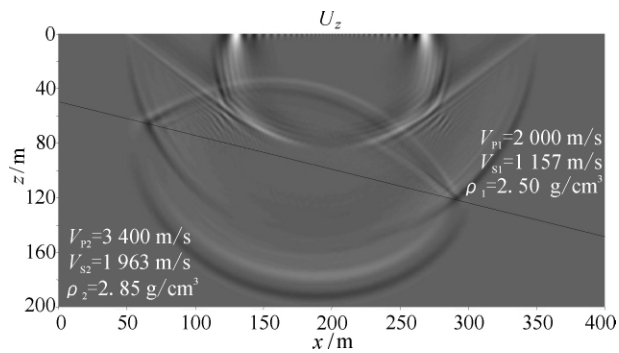


图 8 倾斜界面弹性介质中 0.075 s 时刻的波场快照  
Fig. 8 Wave field snapshots at 0.075 s in homogenous isotropic elastic medium with one dip interface

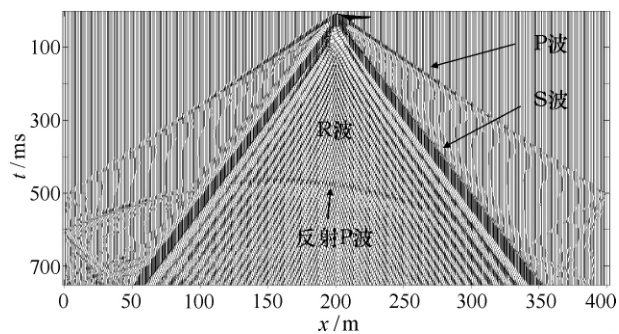


图 9 倾斜界面弹性介质中合成的地震记录  
Fig. 9 Synthetic seismogram in homogenous isotropic elastic medium with one dip interface

在双层弹性介质中,由于介质分界面的存在,在地表接收到的信息不仅有直达 P 波和 S 波,还有反射波。同时,由地震记录图可以看出,在一定时间后,地震记录在主要震相之后有很长的“拖尾”,这是由于在自由界面附近采用差分离散时,差分网格尺度不够小所造成的数值频散。

#### 4 算法的稳定性分析

在数值模拟时,算法必须是稳定的,也就是说对算法的数值解与解析解的差值应该是有限定的。对于有限差分法,一般来说如果差分方程解的误差不随时间的推进而增加,那么该差分方程的解是稳定的。

根据波动方程解的傅里叶级数

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_z \end{bmatrix} = \mathbf{u}_0 e^{i(w\Delta t - k_x \Delta x - k_z \Delta z)} = \begin{bmatrix} u_{0x} \\ u_{0z} \end{bmatrix} e^{i(w\Delta t - k_x \Delta x - k_z \Delta z)}, \quad (25)$$

其中:  $k_x, k_z$  是  $x, z$  方向的波数。

将式(25)以及三角欧拉公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  代入各向同性弹性介质中波动方程的有限差分计算式(4)中并移项,则有

$$\begin{cases} \left[ \frac{4}{(\Delta t)^2} \left[ \sin^2 \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) \right] \right] u_{0x} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{4}{(\Delta x)^2} \left[ \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right] u_{0x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{4}{(\Delta z)^2} \left[ \sin^2 \left( \frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right] u_{0x} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\sin(k_x \Delta x) \sin(k_z \Delta z)}{\Delta x \Delta z} u_{0z}, \\ \left[ \frac{4}{(\Delta t)^2} \left[ \sin^2 \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) \right] \right] u_{0z} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{4}{(\Delta x)^2} \left[ \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right] u_{0z} + \frac{\mu}{\rho} \frac{4}{(\Delta z)^2} \left[ \sin^2 \left( \frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right] u_{0z} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\sin(k_x \Delta x) \sin(k_z \Delta z)}{\Delta x \Delta z} u_{0x}. \end{cases} \quad (26)$$

将上式写成矩阵形式有

$$\left[ \frac{4}{(\Delta t)^2} \left[ \sin^2 \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) \right] \right] \mathbf{u}_0 = \mathbf{B} \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \mathbf{u}_0, \quad (27)$$

其中:

$$\begin{cases} b_{11} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{4}{(\Delta x)^2} [\sin^2(k_x \Delta x / 2)] + \frac{\mu}{\rho} \frac{4}{(\Delta z)^2} [\sin^2(k_z \Delta z / 2)], \\ b_{22} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{4}{(\Delta z)^2} [\sin^2(k_z \Delta z / 2)] + \frac{\mu}{\rho} \frac{4}{(\Delta x)^2} [\sin^2(k_x \Delta x / 2)], \\ b_{12} = b_{21} = \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\sin(k_x \Delta x) \sin(k_z \Delta z)}{\Delta x \Delta z}. \end{cases}$$

由式(27)可知,  $\left[ \frac{4}{(\Delta t)^2} \left[ \sin^2 \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) \right] \right]$  是矩阵  $\mathbf{B}$  的特征值,  $\mathbf{u}_0$  是  $\mathbf{B}$  的特征向量。设矩阵  $\mathbf{B}$  的特征值为  $x$ , 则

$$|\mathbf{B} - x\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} b_{11} - x & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - x \end{vmatrix} = 0,$$

可得矩阵的特征方程为

$$x^2 - (b_{11} + b_{22})x + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = 0. \quad (28)$$

通过矩阵特征方程的求解可以得到

$$\frac{\Delta t^2}{(\Delta x)^2} \frac{(\lambda + 3\mu)}{\rho} \leq 1,$$

所以差分格式的稳定性条件为

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{\frac{(\lambda + 3\mu)}{\rho}} \leq 1, \quad (29)$$

由于在均匀各向同性弹性介质中纵波和横波的速度分别为

$$V_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad V_s = \sqrt{\mu/\rho},$$

则差分格式的稳定性条件亦可以表示为

$$(\Delta t / \Delta x) \sqrt{V_p^2 + V_s^2} \leq 1. \quad (30)$$

在本文地震波场数值模拟的有限差分计算中,取双层弹性介质上覆介质的纵波速度  $V_p = 2\,000$  m/s,横波速度  $V_s = 1\,157$  m/s,下伏介质的纵波速度  $V_p = 3\,400$  m/s,横波速度  $V_s = 1\,963$  m/s。综合考虑上下两层的速度取值,采用时间步长  $\Delta t = 0.000\,2$  s,空间步长  $\Delta x = 1$  m。若  $\Delta t / \Delta x$  取值过大,则有限差分的差分格式稳定性比较差。

## 5 结 论

1) 利用有限差分求解波动方程是地震波波场模拟计算的一种近似方法,对于一定空间分布的弹性波场,网格步长愈小,截断误差就愈小;但是减小步长,就会增加模型的总节点数,从而导致线性方程组阶数增大,使得计算量急剧增大。

2) 用有限差分模拟地震波场是在有限空间中实现的,所以在介质的边界上会产生反射,干扰有效波场,影响模拟结果的分析。因而,在计算时必须考虑边界的吸收问题。

3) 波动方程有限差分数值解是在离散化的网格上进行的,这种离散计算直接导致各个频率成分的传播速度不同,当网格大小不合适时,会表现出数值频散现象,在合成记录上表现为主要震相之后有很长的拖尾。

4) 改进的中心线算法是一种大范围收敛的迭代算法,不仅与初始向量的选取无关,而且具有迭代次数少、计算量小、精度高的优点。

### 参考文献:

- [1] 冯英杰,杨长春,吴萍. 地震波有限差分模拟综述 [J]. 地球物理学进展,2007,22(2): 487-491.
- [2] Alterman Z, Karal F C. Propagation of seismic wave in layered media by finite difference methods [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1968, 58(1): 367-398.
- [3] Aford R M, Kelly K R, Ward R W, et al. Accuracy of finite-difference modeling of acoustic wave equation [J]. Geophysics, 1974, 39(6): 834-842.
- [4] Kelly K R, Ward R W, Treitel S, et al. Synthetic seismograms: a finite-difference approach [J]. Geophysics, 1976, 41: 2-27.
- [5] Boore D M. Finite-difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials [M] // Methods in Computational Physics. Bolt B A. New York: Academic Press, 1972, 11: 1-37.
- [6] 王秀明,张海澜,王东. 利用高阶交错网格有限差分法模拟地震波在非均匀孔隙介质中的传播 [J]. 地球物理学报, 2003, 46(6): 842-849.
- [7] 王德利,何樵登,韩立国. 裂隙型单斜介质中多方位地面三分量记录模拟 [J]. 地球物理学报, 2005, 48(2): 386-393.
- [8] 谢靖. 物探数据处理的数学方法 [M]. 北京: 地质出版社, 1981.
- [8] 何倡礼. 解病态线性方程组的奇异值分解法及其应用 [M]. 武汉: 中国地质大学出版社, 1990.
- [10] 吕玉增,熊彬,薛霆琥. 地球物理数据处理基础 [M]. 北京: 地质出版社, 2011.
- [11] 张志海,杨建辉. 求解线性方程组的一种迭代方法算法的一种改进 [J]. CT理论与应用研究, 1994, 3(4): 20-23.
- [12] 高望东,姜家辉,张勇. 求解大型线性稀疏方程组的中心线法 [J]. 工程数学学报, 1997, 14(1): 92-98.
- [13] Renolds A. Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems [J]. Geophysics, 1978, 43(6): 1099-1110.
- [14] Clayton R, Engquist B. Absorbing boundary conditions for wave equation migration [J]. Geophysics, 1980, 45(5): 895-904.
- [15] Stacey R. Improved transparent boundary formulations for the elastic wave equation [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1988, 78(6): 2089-2097.
- [16] Javaherian A. 产生有限差分合成地震图的最佳震源时间函数 [J]. 地震学报, 1994, 16(1): 18-23.
- [17] 董清华. 震源数值模拟 [J]. 世界地震工程, 2000, 16(3): 27-32.

## Full Seismic Field Modeling by Finite Difference Method in Elastic Isotropic Media

WANG Hai-yan, WANG You-xue, XUE Ting-xiao, YANG Qiang

(a. Guangxi Key Laboratory of Hidden Metallic Ore Deposits Exploration; b. College of Earth Sciences, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

**Abstract:** The finite difference equations of the seismic wave field are derived detailedly, used improved center-line method to solve the FD equations with large-spare array, and the stability of the method is analyzed. Through the full wave field modeling in 2D elastic media with horizontal and dip interfaces, the characteristics of the full seismic wave field, including surface wave and body wave, can be modeled clearly.

**Key words:** full seismic wave field; elastic isotropic media; Finite Difference (FD); numerical modeling