

龙桂华, 李小凡, 张美根. 基于 Shannon 奇异核理论的褶积微分算子在地震波场模拟中的应用. 地球物理学报, 2009, 52(4): 1014~1024, DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2009.04.018

Long G H, Li X F, Zhang M G. The application of convolutional differentiator in seismic modeling based on Shannon singular kernel theory. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2009, 52(4): 1014~1024, DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2009.04.018

基于 Shannon 奇异核理论的褶积微分算子 在地震波场模拟中的应用

龙桂华^{1,2}, 李小凡¹, 张美根¹

1 中国科学院地质与地球物理研究所, 北京 100029

2 中国科学院研究生院, 北京 100049

摘要 本文在前人工作的基础上, 建立了一种基于 Shannon 奇异核的交错网格褶积微分算子方法. 文中不仅详细讨论了影响算子精度的各种因素, 同时也着重分析了其在弹性波模拟中的频散关系和稳定性条件. 通过和交错网格有限差分算子比较, 发现该算子即使在高波数域也具有较高精度. 均匀介质中的数值试验也表明, 该方法 9 点格式就基本上达到了解析解精度. 而分层均匀介质和复杂介质中的地震波数值模拟也同时证实了该方法精度高, 稳定性好, 是一种研究复杂介质中地震波传播的有效数值方法.

关键词 离散奇异核, 褶积微分算子, 地震波模拟

DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2009.04.018

中图分类号 P315

收稿日期 2008-03-07, 2008-08-22 收修定稿

The application of convolutional differentiator in seismic modeling based on Shannon singular kernel theory

LONG Gui-Hua^{1,2}, LI Xiao-Fan¹, ZHANG Mei-Gen¹

1 Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China

2 Graduate University, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract This article provides a technique to model seismic wave propagation in complex media using convolutional differentiator method based on Shannon singular kernel theory. The high accuracy of the differentiator has been demonstrated through comparisons with numerical results computed by staggered-grid finite difference method. Numerical tests suggest that the differentiator allows sufficient accuracy even in high wave-number domain. Dispersion and stability condition of the method in velocity-stress equation are also thoroughly discussed. Experiment in homogeneous medium shows that the 9-point scheme of this differentiator can achieve analytical accuracy. The application of this differentiator to model seismic wave propagation in homogenous layered medium and complex medium also shows high accuracy and robust stability. These appealing characters of this improved method would make it effective to model seismic wave propagation in complex media.

Keywords Discrete singular kernel, Convolutional differentiator, Seismic modeling

基金项目 重点项目(40437018)、国家自然科学基金项目(40304004, 40874024)和国家重点基础研究发展计划 973 计划(2007CB209603)联合资助.

作者简介 龙桂华, 男, 汉族, 1981 年生, 现为中国科学院地质与地球物理研究所在读博士生, 主要从事地震波传播理论及其全局非线性最优反演方法的研究工作. E-mail: longgh@mail.iggcas.ac.cn

1 引言

地震波数值模拟的实质就是根据已知的地下结构和物性参数来模拟研究地震波在地下各种介质中的传播规律^[1]. 基于波动方程的地震波数值模拟方法包括有限差分法、有限元法和伪谱法等. 有限差分的理论基础为 Taylor 展开^[2], 其特点是计算速度快, 计算效率高, 但是对于非规则区域却很难处理. 和有限差分方法不同, 有限元法的理论基础为变分理论^[3]. 通过将单元上的分片插值函数和最小位能原理相结合来求解整个区域的波场信息. 有限元方法虽具有模拟精度高, 可处理任意形态的地质体和边界的特点, 但其计算过程复杂, 计算量大. 和有限差分、有限元一样, 伪谱方法^[4,5]也是地震波数值模拟中一种有效方法. 由于其在计算过程中采用了快速傅里叶变换, 使得其具有较快的速度. 理论分析也同时发现其具有谱方法的精度. 但是, 由于该方法在计算微分的过程中要利用全局信息, 对于非均匀的复杂介质的地震波的模拟, 该方法计算结果并不理想. 尽管有很多学者尝试将上述几种方法的优点综合起来, 虽然也确实取得了很大的成就, 如谱元法^[6], 但是却一直或多或少出现诸如边界和新方法难以适配的问题. 因此, 研究一种新的数值模拟方法, 使其同时具有计算速度快、计算精度高的特点, 就成为地球物理工作者目前需要开展的首要任务.

在 20 世纪 70 年代早期, 就有学者提出褶积微分算子的概念^[7], 但是却很少有人将其应用到地震波场的模拟中来. 直到 1986 年, Mora^[8]才将褶积微分算子应用于弹性波场模拟, 但是他的工作并未发表, 也没有给出微分算子的显式表达式. 后来, Holberg^[9]在前人的基础上, 运用最优化方法对褶积微分算子进行了设计, 并将其用于波动方程的求解. 随后, Mittet 和 Holberg^[10]将上面的微分算子成功用到了三维弹性波数值模拟中, 并取得了较好的结果. 1992 年, Zhou 等^[11]研究傅里叶谱方法的实质, 通过对空间求导的傅里叶谱进行分解, 推出了一种新的求解微分方程的方法, 并分析了其精度和应用于声波方程的稳定性条件. 紧跟其后, 张中杰等^[12]和戴志阳等^[13]将这一方法进行推广, 并着重研究了适合波场模拟的最优权系数. 2007 年, 程冰洁等^[14]发展了一种基于广义正交多项式的褶积微分算子, 并将该算子应用到复杂介质中的地震波模拟, 通过大量试验验证了该算子精度和稳定性. Zhou

等^[15, 16]于 2002 年和 2003 年在应用数学计算上发表了一系列有关双曲保守方程的 CFOR 方法成果. 这类方法是一种褶积微分算子方法, 其核心思想是离散奇异核理论, 通过自适应共轭滤波的思想来大大提高空间导数在高波数域的精度. 后来, Sun 和 Zhou 等^[17]在总结前面工作的基础上, 通过正则化的 Dirichlet 核函数发展了一种有限截断傅里叶伪谱方法. 该方法有更宽的有效波数范围, 能有效压制 Gibbs 效应, 具有谱精度.

褶积微分算子的实质, 是通过一组微分算子和原来波场进行褶积从而达到求波场关于空间微分. 本文正是基于 Zhou 等^[11]、Sun 等^[17]前期开展的工作, 通过将原来的褶积微分算子进行加窗和交错网格改造, 实现算子的高精度和快速度的目的. 加窗和交错网格有两个好处: 一方面可以避免由于直接截断而引起的 Gibbs 效应; 另一方面可以提高模拟的局部精度. 相对于交错网格有限差分方法来说, 本文算子的一个优势就是算子的精度可以通过高斯包络值、算子长度以及窗函数的参数进行有效控制, 这使得该算子无论在高波数域还是低波数域都具有较高的精度. 均匀介质中的数值实验表明该算子精度高, 其 9 点格式就能有效消除频散, 几乎达到了解析解的精度. 通过对均匀水平层状介质和复杂介质中波场的波前分析也表明, 该算子精度高、稳定性好, 可作为复杂介质中地震波场数值模拟的一种有效方法.

2 基于奇异核的褶积微分算子

2.1 奇异核褶积微分算子原理

根据函数分布理论, $f(x)$ 可被定义成核函数和元函数的褶积形式^[17]:

$$f(x) = (T * \eta)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x-t)\eta(t)dt, \quad (1)$$

其中, $T(x)$ 是奇异核函数, $\eta(x)$ 为测试函数空间的元函数.

人们通常研究的奇异核函数包含以下几种: Hilbert 函数、Abel 函数和 Delta 函数. 其中, Hilbert 函数和 Abel 函数主要用于解析函数理论, 而 Delta 函数作为函数逼近理论的核心, 常常被用于偏微分方程的数值求解方面. Delta 函数的奇异核形式可表示为:

$$T(x) = \delta^{(q)}(x), \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

式中, q 表示 Delta 函数关于 x 的 q 阶广义导数. 当 $q=0$ 时, 奇异核函数直接为 Delta 函数, 该函数是插

值的基础;当 $q=1$ 时,奇异核函数为 Delta 函数的一阶导数,此时,该函数是一阶微分的基础. 由于理论的 Delta 函数很难物理实现,只能从数值角度去逼近. 考虑用一个近似函数来逼近理论的 Delta 函数:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \delta_{\sigma,\Delta}^{(q)}(x) = \delta^{(q)}(x), \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

其中, α 为刻画逼近 Delta 函数的物理量.

在不同的逼近函数中,归一化的 Shannon 奇异核函数^[18]可以表示为:

$$\delta_{\sigma,\Delta}(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right)}{\frac{\pi x}{\Delta}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4)$$

其中, Δ 为空间步长, σ 为高斯函数包络线宽度. 对于任意给定 $\sigma \neq 0$, 在 $\Delta \rightarrow 0$ 时, 所得的函数便是 Delta 函数.

已知某函数的离散序列 $u(x_k)$, 通过上面的奇异核函数, 我们便可以得到该函数在全空间上的插值函数及其微分形式:

$$u^{(q)}(x) \approx \sum_{k=\lceil x \rceil - W}^{\lceil x \rceil + W} \delta_{\sigma,\Delta}^{(q)}(x - x_k) u(x_k), \quad (5)$$

其中, $\lceil x \rceil$ 表示最接近 x 的格点, W 为算子半带宽. 通过调节半带宽 W 的值以及高斯包络 σ 的大小, 可以提高褶积插值以及微分的精度. 当 $q=1$ 时, 其一阶微分算子可表示为:

$$d_1(k\Delta) = \begin{cases} \delta'_{\sigma,\Delta}(k\Delta), & k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, & k = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

这样构造的褶积微分算子具有两个重要的性质: (1) 算子具有反对称性; (2) 因子中的 k 能使算子 d_1 在远离 $k=0$ 的地方快速衰减, 从而可利用较短算子来计算空间微分.

但是, 在实际计算过程中, 我们并不直接用上述算子, 因为算子的长度有限, 只能保证微分计算的局部性质, 有些点的计算可能需要更长的算子. 这样直接截断势必引起 Gibbs 效应, 而不适当的旁瓣处理也可能引起“漏能”现象, 所以必须引入合适的窗函数对算子进行处理. 所用的窗函数必须具有以下特点: 一是主瓣比较集中; 二是旁瓣波动较小. 而本文中选用的 Hanning 窗函数就具有以上两个方面的特点. 于是, 通过窗函数进行截断处理后的微分算子可表示为:

$$\tilde{d}_1(k\Delta) = d_1(k\Delta)w(k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, W, \quad (7)$$

其中, 窗函数 $w(k)$ 可以表示为:

$$w(k) = \left[2\alpha - 1 + 2(1 - \alpha) \cos^2 \frac{k\pi}{2(W+2)} \right]^{\frac{\beta}{2}}, \quad (8)$$

上式中, α 和 β 为度量 Hanning 窗函数性质的常数. 在这里, 我们取 $\alpha=0.54$ 和 $\beta=8$. 经过窗函数处理的微分算子衰减更快, 而且有效抑制了由于截断而引入的 Gibbs 效应, 大大提高了计算精度.

2.2 奇异核褶积微分算子的交错网格形式

假定函数 $u(x)$ 充分光滑, 运用 Taylor 展开, 将函数 $u(x)$ 分别用网格点处的值 $u(x_k)$ 和半网格点处的值 $u(x_{k+1/2})$ 来逼近中心差分, 会发现用交错网格方法计算空间微分的首项截断误差只有常规网格计算误差的四分之一. 但是, 这样用并没有增加计算量, 也不需要更多的存储量, 却反而提高了计算精度. 本着这样一种思想, 我们构造了上述褶积微分算子的交错网格形式 (以下未做说明均简称褶积微分算子):

$$\begin{aligned} \tilde{d}_1(k\Delta) &= d_1(k\Delta)w(k), \\ k &= 0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots, \pm \frac{2W-1}{2}, \end{aligned} \quad (9)$$

从图 1 中可以看出, 该算子系数更加集中在最近的两个半格点上, 旁瓣衰减比常规网格算子速度更快, 这恰恰说明交错网格微分算子更具局部化的特点. 实验分析也证明, 这样的算子具有较高的精度, 能有效抑制弹性波数值模拟中的频散.

通过和交错网格有限差分算子的权系数进行比较, 从图 2 中可以看出, 只要交错网格褶积微分系数

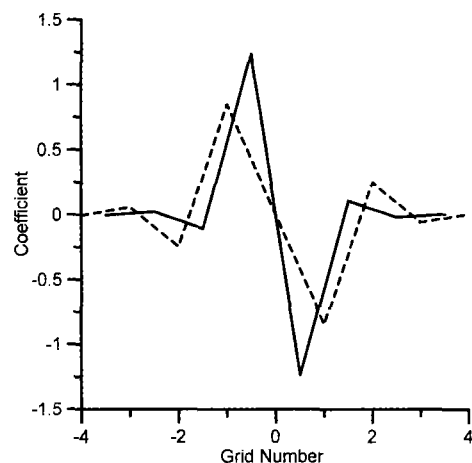


图 1 奇异核褶积微分算子权系数比较
实线表示交错网格褶积微分算子 \tilde{d}_1 ; 虚线表示普通褶积微分算子 d_1 .
Fig. 1 Coefficient comparison between staggered-grid singular kernel convolutional differentiator \tilde{d}_1 (solid line) and conventional singular kernel convolutional differentiator d_1 (dashed line).

计算过程中的参数选择合适,其精度可以达到同算子长度的交错网格有限差分。但是,相比于交错网格有限差分算子,本文的褶积微分算子更具灵活性,通过调节高斯包络和窗函数系数,可以调节算子精度。

2.3 奇异核褶积微分算子的精度分析

利用空间交错网格对函数 $u(x)$ 进行微分,可得到其离散的近似表达式:

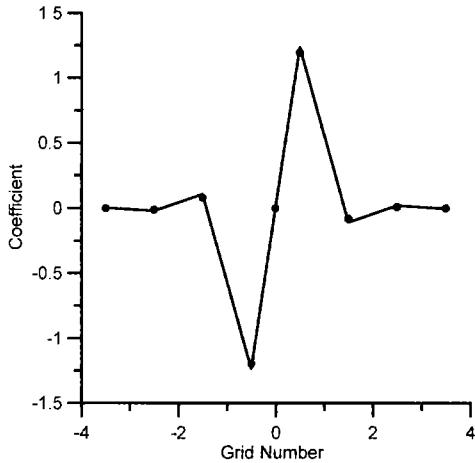


图2 交错网格褶积微分算子权系数(负值)和交错网格有限差分算子权系数的比较

实线为9点交错网格有限差分算子权系数;

圆点为同长度褶积微分算子权系数。

Fig. 2 Coefficient comparison between 9-point scheme staggered-grid singular kernel convolutional differentiator (solid line) and staggered-grid finite difference operator (dots) with the same operator length.

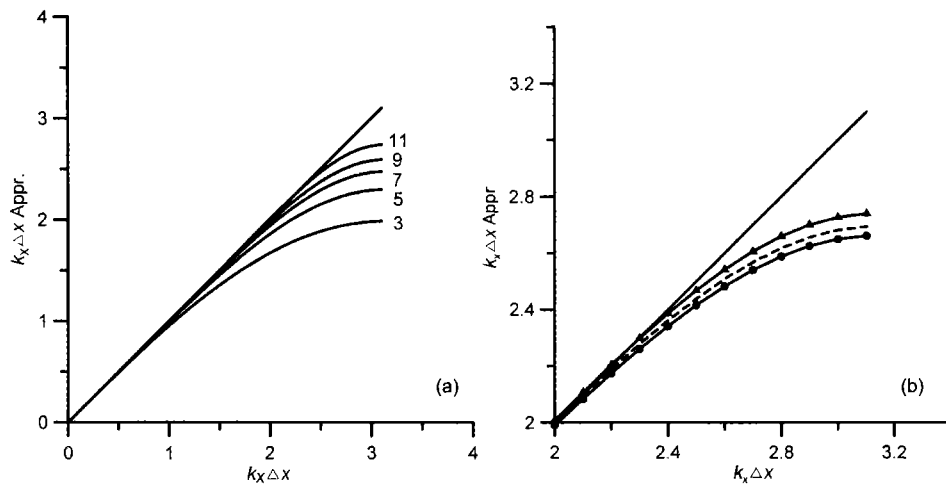


图3 不同 σ 值和算子长度时交错网格褶积微分算子的精度

(a)不同算子长度时交错网格褶积微分算子的精度;(b)不同 σ 值时交错网格褶积微分算子精度,其中,实线为理论值;虚线为 $\sigma=4.6$ 时的交错网格褶积微分算子;三角线为 $\sigma=2.6$ 时的交错网格褶积微分算子;圆点线为 $\sigma=7.6$ 时的交错网格褶积微分算子。

Fig. 3 Accuracy comparison between convolutional differentiators with different operator lengths (a) and Gauss envelopes (b).

The solid line in (b) denotes accurate wavenumber space-interval multiplication, where the dashed, triangle and dotted lines denotes their approximations to true value with $\sigma=4.6, 2.6$ and 7.6 separately.

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=[x]-W}^{[x]+W} C_n^{(W)} u \left[x - \frac{2n+1}{2} \Delta x \right], \quad (10)$$

其中, $C_n^{(W)}$ 为不同阶褶积微分算子的权系数,其大小可以表示为:

$$C_n^{(W)} = \tilde{d}_1(n\Delta x) \cdot \Delta x^2, \quad (11)$$

将(10)式两边进行傅里叶变换,则得到:

$$jk_x U(k_x) = -j \frac{2}{\Delta x} \sum_{n=1}^W C_n^{(W)} \sin\left(\frac{2n-1}{2} k_x \Delta x\right) U(k_x), \quad (12)$$

其中, $U(k_x)$ 为 $u(x)$ 的傅里叶谱。从(12)式可以看出,计算 $u(x)$ 的导数的精度可由该式中右端项逼近 k_x 的程度来描述。

奇异核褶积微分算子的精度受以下几个参数的影响:一是褶积微分算子的半长度 W ,从图 3a 可以看出,算子越长,精度越高,但算子增长势必增加波场模拟中的计算量,一般计算中褶积微分算子长度选为 9 就已经能够达到很高的精度;二是高斯包络 σ 的值,合理地选取 σ 的值能有效调节褶积微分算子的精度。从图 3b 可以看出,高斯包络既不能选得过大,也不能太小。 σ 值选取太大,微分算子会在波数域振荡, σ 值选取太小,则不能有效压制频散;三是 σ 的选择又受限于滤波器系数的选取,不同的 α 和 β 值可能导致 σ 的选取有很大差别。上述参数选取可以用非线性最优化问题来解决。

为了验证奇异核褶积微分算子的精度,我们将其与理论精度、同长度的有限差分算子精度进行了

比较. 通过比较, 在图 4 中可以看出, 在低波数域, 交错网格褶积微分算子和交错网格有限差分算子精度基本上都能达到理论精度, 但在高波数域, 交错网格褶积微分算子的精度却高于交错网格有限差分算子. 也就是说, 在波场模拟过程中, 我们能利用更短的算子获得比交错网格有限差分算子更高的精度. 这对我们精确模拟复杂介质中的地震波传播以及研究其规律很有裨益.

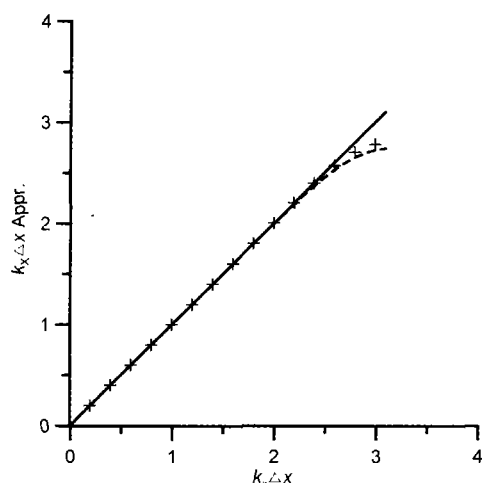


图 4 交错网格褶积微分算子和交错网格有限差分算子精度比较

实线为理论值; + 为褶积微分算子 ($\sigma=4.6$, $N=11$, $\beta=8$); 虚线为 11 点交错网格有限差分算子.

Fig. 4 Accuracy comparison between staggered-grid singular kernel convolutional differentiator calculated with parameters $\sigma=4.6$, $N=11$ and $\beta=8$ denoted by '+' and staggered-grid finite differentiator denoted by the dashed line

3 弹性波交错网格褶积微分格式模拟中的几个关键问题

用有限长度的褶积微分算子对弹性波方程进行空间上的离散化势必带来一些需要考虑和解决的问题. 首先得写出一阶速度应力方程正确的褶积形式, 这样才能对波场传播进行有效的计算. 由于在模拟过程中采用了 PML 边界^[19, 20], 在构造弹性波方程正确的褶积形式时同时必须考虑本文方法和边界条件的匹配性问题. 适度的格式和边界匹配不仅能计算得到精确的模拟结果, 而且还能较好地使模拟的结果表征无限空间或无限半空间内的波场的传播. 其次是数值稳定性条件, 就是必须保证所用褶积微分算子求导的误差在数值模拟弹性波传播的过程中

不会随着时间的积累而增加. 最后是数值频散问题, 它由波动方程数值离散近似所造成, 主要表现为地震波各谐波分量的相速度不一致, 高频成分的相速度相对变低, 使得合成地震记录的分辨率严重下降.

3.1 构造带最佳匹配层的弹性波褶积微分算子形式

受制于计算机计算和存储能力的限制, 为了正确模拟地震波在无限空间或无限半空间内的传播, 需要在计算过程中对所处理的模型加入合适的边界条件以减少人为边界所引起的反射. 本文中引入的最佳匹配层最先作为一种电磁波的吸收边界条件由 Béranger^[19] 于 1994 年提出, 其基本思想是在模型边界的吸收带内将波动方程进行改造, 使模型边界和吸收层之间的反射系数最小, 从而达到最佳物理耦合. 相对于海绵吸收边界条件和傍轴近似边界条件, 该边界条件具有吸收效果好、对入射方向要求低等特点.

在速度应力方程中加入 PML 边界条件的具体过程是: 首先将一阶速度应力方程在时间上进行 Fourier 变换, 并引入某一特定的复数扩展坐标系将原直角坐标系进行改造, 然后将速度应力方程中的梯度算子在沿边界上法线和平行方向进行分裂, 并将其拆分变回到时间域就可得到带最佳匹配层的速度应力方程, 详细推导参见文献[19]. 在对模型离散化过程中, 取 $x=(i\pm 1/2)\Delta x$, $z=(j\pm 1/2)\Delta z$ 以及 $t=(k\pm 1/2)\Delta t$, 其中 Δx , Δz 和 Δt 分别为空间网格间距和时间步长, i, j, k 为整数, 表示空间和时间网格点. 用 (U, V) 和 (Σ, T, Ξ) 分别代表速度分量 (u_x, u_z) 和应力分量 $(\sigma_{xx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zx})$ 的离散值, 将本文中构造的褶积微分算子代入到含最佳匹配层的速度应力方程, 就得到了该方程基于奇异核微分算子的交错网格褶积形式:

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{k+1/2} &= (U^x)_{i,j}^{k+1/2} + (U^z)_{i,j}^{k+1/2}, \\ \frac{(U^x)_{i,j}^{k+1/2} - (U^x)_{i,j}^{k-1/2}}{\Delta t} + d_i^x \frac{(U^x)_{i,j}^{k+1/2} + (U^x)_{i,j}^{k-1/2}}{2} \\ &= b_{i,j} D_{i,j}^x \Sigma^k, \\ \frac{(U^z)_{i,j}^{k+1/2} - (U^z)_{i,j}^{k-1/2}}{\Delta t} + d_j^z \frac{(U^z)_{i,j}^{k+1/2} + (U^z)_{i,j}^{k-1/2}}{2} \\ &= b_{i,j} D_{i,j}^z \Xi^k, \\ V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} &= (V^x)_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} + (V^z)_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2}, \\ \frac{(V^x)_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} - (V^x)_{i+1/2,j+1/2}^{k-1/2}}{\Delta t} + d_{i+1/2}^x \frac{(V^x)_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} + (V^x)_{i+1/2,j+1/2}^{k-1/2}}{2} \\ &= b_{i+1/2,j+1/2} D_{i+1/2,j+1/2}^x \Xi^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(V^z)^{k+1/2}_{i+1/2,j+1/2} - (V^z)^{k-1/2}_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta t} \\
& + d^z_{i+1/2} \frac{(V^z)^{k+1/2}_{i+1/2,j+1/2} + (V^z)^{k-1/2}_{i+1/2,j+1/2}}{2} \\
& = b_{i+1/2,j+1/2} D^z_{i+1/2,j+1/2} E^k, \\
& \Sigma^{k+1}_{i+1/2,j} = (\Sigma^x)^{k+1}_{i+1/2,j} + (\Sigma^z)^{k+1}_{i+1/2,j}, \\
& \frac{(\Sigma^x)^{k+1}_{i+1/2,j} - (\Sigma^x)^k_{i+1/2,j}}{\Delta t} + d^x_{i+1/2} \frac{(\Sigma^x)^{k+1}_{i+1/2,j} + (\Sigma^x)^k_{i+1/2,j}}{2} \\
& = (L + 2M)_{i+1/2,j} D^x_{i+1/2,j} U^{k+1/2}, \\
& \frac{(\Sigma^z)^{k+1}_{i+1/2,j} - (\Sigma^z)^k_{i+1/2,j}}{\Delta t} + d^z_j \frac{(\Sigma^z)^{k+1}_{i+1/2,j} + (\Sigma^z)^k_{i+1/2,j}}{2} \\
& = L_{i+1/2,j} D^z_{i+1/2,j} V^{k+1/2}, \\
& T^{k+1}_{i+1/2,j} = (T^x)^{k+1}_{i+1/2,j} + (T^z)^{k+1}_{i+1/2,j}, \\
& \frac{(T^x)^{k+1}_{i+1/2,j} - (T^x)^k_{i+1/2,j}}{\Delta t} + d^x_{i+1/2} \frac{(T^x)^{k+1}_{i+1/2,j} + (T^x)^k_{i+1/2,j}}{2} \\
& = L_{i+1/2,j} D^x_{i+1/2,j} U^{k+1/2}, \\
& \frac{(T^z)^{k+1}_{i+1/2,j} - (T^z)^k_{i+1/2,j}}{\Delta t} + d^z_j \frac{(T^z)^{k+1}_{i+1/2,j} + (T^z)^k_{i+1/2,j}}{2} \\
& = (L + 2M)_{i+1/2,j} D^z_{i+1/2,j} V^{k+1/2}, \\
& E^{k+1}_{i,j+1/2} = (E^x)^{k+1}_{i,j+1/2} + (E^z)^{k+1}_{i,j+1/2}, \\
& \frac{(E^x)^{k+1}_{i,j+1/2} - (E^x)^k_{i,j+1/2}}{\Delta t} + d^x_i \frac{(E^x)^{k+1}_{i,j+1/2} + (E^x)^k_{i,j+1/2}}{2} \\
& = M_{i,j+1/2} D^x_{i,j+1/2} V^{k+1/2}, \\
& \frac{(E^z)^{k+1}_{i,j+1/2} - (E^z)^k_{i,j+1/2}}{\Delta t} + d^z_{j+1/2} \frac{(E^z)^{k+1}_{i,j+1/2} + (E^z)^k_{i,j+1/2}}{2} \\
& = M_{i,j+1/2} D^z_{i,j+1/2} U^{k+1/2}, \quad (13)
\end{aligned}$$

其中,上标中的 x, z 分别表示速度和应力分别沿 x 和 z 轴的分裂方向, d 为衰减因子, (L, M, b) 分别为介质的弹性参数 λ 和 μ , 以及密度 ρ 的倒数在空间网格点上的离散值. $D^x_{i,j}, D^z_{i,j}, D^x_{i+1/2,j}$ 和 $D^z_{i,j+1/2}$ 分别为半长度为 N 的空间褶积微分算子,可表示为:

$$\begin{aligned}
D^x_{i,j} f_{i+1/2,j} &= \sum_{n=-N}^{N-1} \tilde{C}_n^{(N)} f_{i+(2n+1)/2,j}, \\
D^z_{i,j} f_{i,j+1/2} &= \sum_{n=-N}^{N-1} \tilde{C}_n^{(N)} f_{i,j+(2n+1)/2}, \\
D^x_{i+1/2,j} f_{i,j} &= \sum_{n=-N}^{N-1} \tilde{C}_n^{(N)} f_{i+n+1,j}, \\
D^z_{i,j+1/2} f_{i,j} &= \sum_{n=-N}^{N-1} \tilde{C}_n^{(N)} f_{i,j+n+1}, \quad (14)
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{C}_n^{(N)}$ 为 $C_n^{(N)}$ 去掉中间零项后的微分序列.

对于非均匀介质,为了得到更精确的数值模拟结果,特别是在多层介质模型的界面附近,需要对(13)式中的密度和弹性常数进行平均,即:

$$b_{i+1/2,j+1/2} = 4/(\rho_{i,j} + \rho_{i+1,j} + \rho_{i,j+1} + \rho_{i+1,j+1}),$$

$$\begin{aligned}
L_{i+1/2,j} &= 2/(1/\lambda_{i,j} + 1/\lambda_{i+1,j}), \\
M_{i+1/2,j} &= 2/(1/\mu_{i,j} + 1/\mu_{i+1,j}), \\
M_{i,j+1/2} &= 2/(1/\mu_{i,j} + 1/\mu_{i,j+1}), \quad (15)
\end{aligned}$$

3.2 交错网格褶积微分算子下弹性波数值模拟的频散分析

频散是数值模拟中主要考虑的问题之一,模拟结果的好坏很大程度上取决于数值频散的程度.数值频散能够发生,主要是因为计算过程中用离散的数据代替连续的数据所引起的误差,使得不同频率的地震波表现为不同的相速度.早在 1974 年,Alford 等^[21]就对声波方程的二阶空间差分的频散关系进行了分析,指出网格大小和地震波传播方向是影响频散的两个重要因素.后来董良国等^[22]对高阶声波以及弹性波交错网格的高阶差分的数值频散也进行了研究,发现除了地震波传播方向外,数值频散主要来源于空间差分精度和一个波长内离散点数.也就是,随着差分精度的提高或一个波长内离散点数的增多,数值频散会逐渐减小.这为我们在实际模拟过程中合理选择子波频率以及网格大小提供了理论依据.

通过高阶交错网格的有限差分,能够有效提高弹性波模拟精度、降低数值频散^[21, 22].交错网格褶积微分算子作用于波场的计算过程和交错网格有限差分相似,不同之处在于褶积微分的权系数是基于奇异核理论推导而得,而交错网格有限差分的理论基础为有限差分.根据董良国等^[23]关于推导的高阶交错网格有限差分公式,一阶弹性波方程交错网格褶积微分算子方法的纵波频散关系可表示为:

$$\frac{v_p}{v_0} = \sqrt{\frac{-1}{\pi \cos \theta} \frac{\Delta x}{\lambda} \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} [p + q]}, \quad (16)$$

式中,

$$\begin{aligned}
p &= \left[1 - 2 \sin^2 \theta \frac{0.5 - \nu}{1 - \nu} \right] \sin \left[(2n - 1) \pi \cos \theta \frac{\Delta x}{\lambda} \right], \\
q &= \frac{0.5 - \nu}{1 - \nu} \sin(2\theta) \sin \left[(2n - 1) \pi \cos \theta \frac{\Delta x}{\lambda} \right], \quad (17)
\end{aligned}$$

其中, θ 为 P 波的传播方向, ν 为介质的泊松比, v_p 为相速度, v_0 为没有频散时地震波速度, λ 为地震波波长,并假定 $\Delta x = \Delta z$.

从(16)式可以看出,除了上述的三个方面外,纵波的频散关系还受泊松比 ν 的影响,但这里不作讨论.本文只讨论不同褶积算子长度、网格波长比 $\Delta x/\lambda$ 与纵波频散的关系.从图 5 中可以看出,算子越长,即使对于 $\Delta x/\lambda$ 较大,相速度和真速度越接近,这说

明褶积微分算子的精度强烈依赖于算子长度;另一方面,网格波长比越小,相速度和真速度比越接近,即使对于半长度为 3 的算子来说,取 $\Delta x \leq \lambda/4$,频散关系依然能够保证足够小.这就说明在满足 $\Delta x \leq \lambda/4$ 的情况下,增加算子长度并不必然改善纵波的频散关系,但是却额外地增加了计算量.这一关系对我们合理选择算子长度具有指导性的作用.

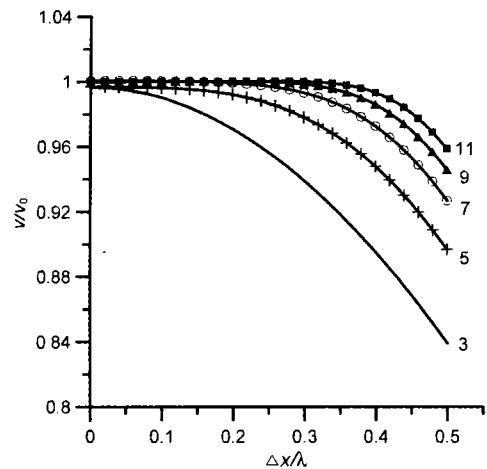


图 5 不同算子长度频散关系曲线

实线为褶积微分算子长度为 3;+ 线为褶积微分算子长度为 5; 圈线为褶积微分算子长度为 7;三角线为褶积微分算子长度为 9;实方形线为褶积算子长度为 11. 以上都基于交错网格形式.

Fig. 5 Dispersive curves with different convolutional differentiator lengths
The solid line is for differentiator with operator length 3; other lines marked with crosses, circles, triangles and solid boxes are for operator length 5, 7, 9 and 11, separately. All differentiators above are based on staggered grid.

3.3 交错网格褶积微分算子在弹性波模拟中的稳定性条件

在地震波数值模拟中,为了提高计算效率且不增加内存的需求,有两种思路可以遵循:一是减小算子长度;二是加大网格间隔. 尽管这两种方法都可以有效降低计算需求,但是减小算子长度可能使算子精度减低;加大网格间距虽然不降低算子的精度,但是一个波长内,采用点数过少,势必引起数值频散,或者计算溢出而难以得到正确的结果. 因此,为了提高计算效率,同时又不减少计算精度,对算法本身的稳定性条件进行研究十分必要.

对于声波方程,Lines 等^[24]在 Mufti^[25]和 Wu 等^[26]工作的基础上,提出了一种可以用于任意维数声波方程任意阶精度近似有限差分格式数值稳定性

评判标准. 在 Lines 等的基础上,王红落^[2]进一步分析了不同稳定性条件下相速度和传播方向的关系,发现相速度随一个波长内采样点数下降而迅速减小,且稳定性条件越接近 0.707,频散越小,在二维情况下,传播方向与 x 轴夹角为 45° 时,频散最小,越接近于 0° ,频散越严重. 2000 年,董良国等^[27]推导了 TI 介质高阶交错网格有限差分的稳定性条件,把稳定性条件表示为弹性波传播方向上的 Courant 数,并给出了最佳稳定性条件.

参照董良国等^[22]研究的结果,根据褶积微分算子和有限差分算子的相似性,同理,可写出本文中交错网格褶积微分算子在二维弹性介质中传播的稳定性条件:

$$0 \leq \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} L_x^{2m} d^{2m} \leq 1,$$
$$0 \leq \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} L_z^{2m} d^{2m} \leq 1, \quad (18)$$

其中, $2M$ 为时间阶数, d 可以表示为:

$$d = \sum_{n=1}^N C_n^{(N)} (-1)^n, \quad (19)$$

L_x 和 L_z 分别为弹性波沿 x 和 z 方向上传播的 Courant 数,可以表示成如下形式:

$$L_x = \sqrt{\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} + \frac{\Delta t^2}{\Delta z^2} \frac{\mu}{\rho}},$$
$$L_z = \sqrt{\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\mu}{\rho} + \frac{\Delta t^2}{\Delta z^2} \frac{\mu}{\rho}}, \quad (20)$$

由上式可以看出,在 $M=1$ 时,就是时间二阶(空间阶数由算子决定)的稳定性条件. 根据(18)式,可以写出几种交错网格褶积微分算子的稳定性条件见表 1.

表 1 褶积微分算子的稳定性条件($\sigma=4.6$)

Table 1 The stability condition of convolutional differentiator with different lengths ($\sigma=4.6$)

算子长度	d	L_x, L_z
3	0.9929	≤ 1.0071
5	1.0715	≤ 0.9333
7	1.1000	≤ 0.9091
9	1.1289	≤ 0.8858
11	1.1401	≤ 0.8771

4 数值实验

4.1 均匀介质中交错网格褶积微分算子的精度
为了验证交错网格褶积微分算子的精度,我们

首先研究一个简单的模型,即均匀弹性介质模型.将本文方法计算的结果和交错网格微谱微分算子计算的结果以及弹性波的解析解进行比较,以此来验证数值模拟的正确性.

模型的物性参数为:密度 2.0 g/cm^3 ,纵波速度 3.0 km/s ,横波速度 2.0 km/s .且震源位于地下 300 m 处模型的正中心,由主频为 25 Hz 的 Ricker 子波激发产生,时间采样步长为 1 ms .将模型沿水平和纵向各剖分 255 个网格,各自采样步长均为 10 m .三接收器的位置分别为 A(1280 m , 800 m)、B(1600 m , 800 m)和 C(310 m , 960 m).在计算过程中,模型四周均用 PML 吸收边界进行了处理.

从图 6 中可以看出,交错网格伪谱微分算子计算的结果与理论值基本相同,而交错网格褶积微分

算子模拟的结果除幅度和到时在波峰和波谷和理论值有一定的偏差外,其余地方都吻合得比较好.偏差可能主要来源于以下两个方面:(1)褶积微分算子的系数为试算结果,且只和同长度的交错网格有限差分算子系数作了比较,未作最优化求解;(2)算子长度较短.在求速度或应力对空间的微分时,算子长度较短只能保证所求波场的局部特性,但是在计算中,有些点并不要求这种性质,过短的算子可能导致计算误差.因此,本文中 9 点交错网格褶积微分算子所求得波场和伪谱微分算子求得的波场以及解析解之间存在一定的偏差是可以理解的.由此可见,基于 Shannon 奇异核的交错网格褶积微分算子具有较高的精度,这一点从 2.3 节中的精度分析也可以看出来.

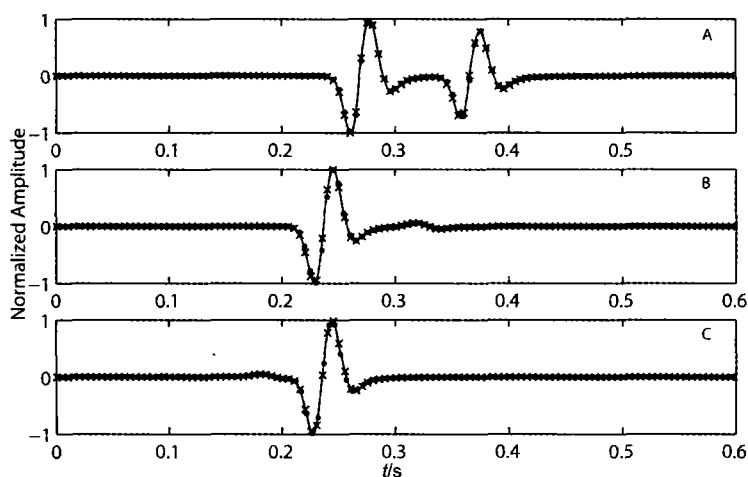


图 6 不同方法波形比较

实线为解析值;圆点“·”为伪谱微分算子计算的值;叉号“×”为 9 点交错网格褶积微分算子计算值;横坐标为弹性波传播时间,纵坐标为归一化幅度.

Fig. 6 Waveform comparison for different methods

The solid line are the waveforms at points A, B and C using analytic formula, the dots are results calculated by pseudospectral differentiator and the crosses denote results calculated using 9-point scheme staggered-grid convolutional differentiator.

4.2 交错网格奇异核褶积微分算子的应用

为了研究复杂介质中地震波的传播规律,我们首先建立了图 7 所示的水平分层均匀的地质模型.其中 a 和 b 表示两层介质之间的分界面,分别位于地下 1000 m 和 1800 m 处.三层介质的纵、横波速度以及密度如图 7 所示,介质参数变化不太剧烈,主要是为了研究波阻抗相差不大时地震波在介质分界面上反射和透射以及 PS 波相互转换的情况,以此来证明本文方法的精度.

在计算过程中,介质沿水平和纵向剖分成 255×255 的网格,相邻格点之间的间距为 10 m .震源在地表下 300 m 处,且位于模型水平方向正中央,为主

频为 25 Hz 的 Ricker 子波,其中子波的时间采样间隔为 1 ms ,总传播时间为 0.6 s .模型四周均采用 PML 边界条件进行了处理,以保证不会有边界反射.

图 8 为波场在分层均匀介质中传播 0.6 s 时的波场快照,其中图 8a 为 5 点交错网格褶积微分算子计算的结果,图 8b 为 9 点褶积微分算子计算的结果.两次计算的结果比较,我们会发现,算子较短时,P 波及其反射和透射波前发生频散不太明显,而 SV 波,尤其是在速度较低的介质层,其直达波频散严重.但是在 9 点褶积微分算子的计算结果中,却看不到这种现象,说明计算频散受制于算子长度,通过增加算子长度能有效减小计算频散.

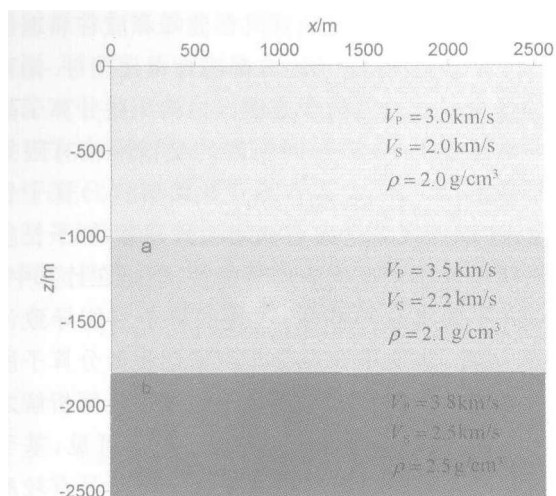


图 7 分层均匀介质模型

V_P 和 V_S 分别为各层介质的纵波和横波速度;
 ρ 为各层介质的密度. a 和 b 分别为层界面.

Fig. 7 Homogeneous layered model

V_P and V_S are P- and S-wave velocities, ρ is density of the media.
 'a' and 'b' are interfaces between two adjacent layers.

为了更好地研究褶积微分算子方法的精度和正确性,我们在图 8b 中标出了直达 P 波、S 波,反射透射 P 波、S 波,以及转换 P 波、S 波. 其中, P 和 S 为直达 P 波和直达 SV 波; PS 和 SP 分别为 P 波和 S 波在 a 界面处的转换透射波; PaP 和 SaS 分别为 P 波和 S 波在 a 界面处的反射波; PaS 和 SaP 分别为 P 波和 S 波在 a 界面处的转换反射波; PbP 为 P 波在 b 界面处的反射波. 从图 8b 中可以看到,无论是直达波,反射透射波还是转换波波前清晰可辨,而且在算子较短时未发生频散效应. 这就证明,本文方法所推出的交错网格褶积微分算子不仅计算速度快,而且精度高,可作为分层均匀介质中地震波场模拟研究又一可选方法.

其次,我们设计了如图 9 所示的复杂地质模型. 其模型参数和分层均匀介质中一样,不同之处在于第一层介质从左约 400 m 深度下倾到 1500 m 深度,该界面呈倾斜直线状. 第二层界面高低起伏,在

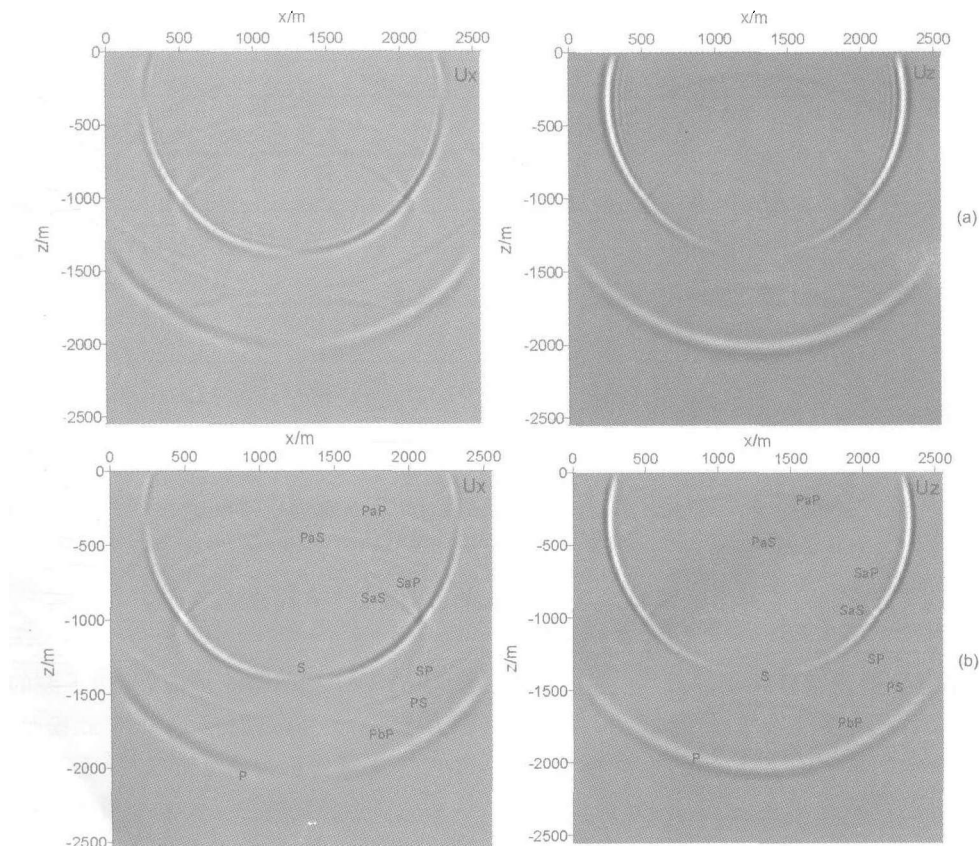


图 8 分层均匀介质中波场快照

(a) 5 点褶积微分算子模拟的 0.6 s 时刻波场; (b) 9 点褶积微分算子模拟的 0.6 s 时刻波场. U_x 为水平波场快照; U_z 为垂直波场快照

Fig. 8 Snapshots of wavefields in homogenous layered media with (a) operator length 5 and (b) operator length 9. The total time for wave propagation is 0.6 s. U_x and U_z denote wavefields in horizontal and vertical directions separately.

地下 1600 m 处的地方呈“M”状. 震源参数也和分层均匀介质中的震源参数一致,但位于模型正中心. 这样做的目的有两个方面:一是可以参照分层均匀介

质中模拟的结果来检验本文方法对复杂介质的适应性;二是可以分析复杂介质中地震波在界面上的反射、透射和转换,从而确定该方法的普适性. 从图 10

所示模拟的结果来看,界面处 P 波和 S 波透射、反射以及转换明显,界面的倾斜和起伏基本上未给方法带来频散,这就说明该方法在各向同性复杂介质中是适用的,而且很容易推广到各向异性、黏弹性介质和双相介质中去。

4 结论与讨论

本文推出了基于 Shannon 核的交错网格褶积微分算子,并对其精度进行了分析,分析发现该算子的精度强烈依赖于算子长度、高斯包络的大小以及滤波窗函数的系数,最优求取系数是最大提高算子精度的关键。同时也研究了交错网格褶积微分算

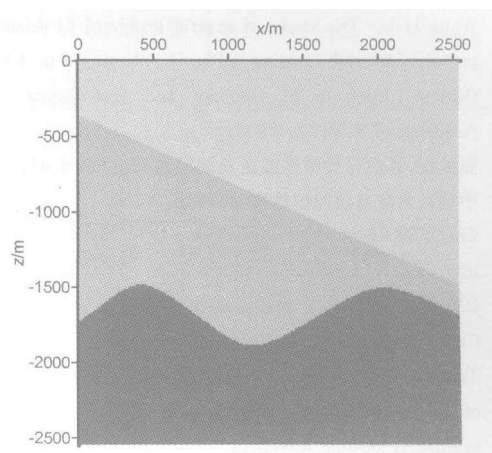


图 9 非均匀介质模型

Fig. 9 Inhomogeneous model

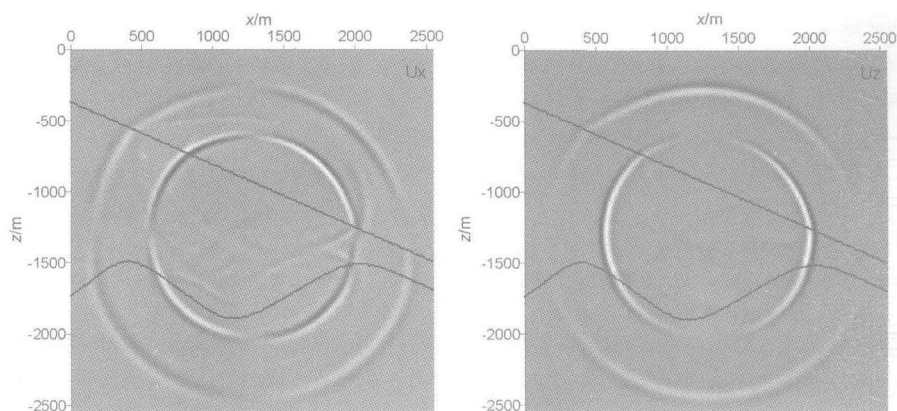


图 10 非均匀介质中波场快照

U_x 为水平波场快照; U_z 为垂直波场快照

Fig. 10 Snapshots of wavefields in inhomogeneous media

U_x and U_z denote wavefields in horizontal and vertical directions separately.

子在弹性波速度应力方程中的稳定性条件和频散关系,研究表明算子的频散关系与算子长度和单个波长内的采样点数有关,当算子长度一定时,采样点数越多,精度越高。一般来说,对于固定的采样点数,可以依据频散关系图来寻找合适的算子长度,算子过短,计算过程中可能发生频散,算子太长,虽然能减小频散,但波场模拟的精度没有实质的提高,而且需要更多的计算量。在数值试验中,将本文方法和均匀介质中的交错网格傅里叶伪谱方法数值解和解析解与本文方法进行了比较,比较发现交错网格傅里叶伪谱方法凭借其算子为空间采样长度的优势基本达到了解析解的精度,而本文方法只在幅度和到时方面和上两种方法有细微的差别。对于 9 点格式的交错网格褶积微分算子来说,计算精度令人满意。同时,分层均匀介质和复杂介质中的波场模拟也证实了本文算子的精度和稳定性,可作为一种研究复杂介质中地震波传播的有效方法。

虽然本文方法精度比较高,但作为方法研究,里面还存在一些问题,即本文计算过程中的有关算子构造过程中的所有参数都是试算结果,其精度只和同长度的交错网格有限差分算子作了比较。为了更加精确地构造该算子,不得不从最优化的角度来计算最优算子,以及从计算实例本身的性质来选择算子长度。另外,有关算子的结论都未做理论方面的研究,这也是后期将要开展的工作。

参考文献 (References)

- [1] 殷文,印兴耀,吴国忱等. 高精度频率域弹性波方程有限差分方法及波场模拟. 地球物理学报, 2006, 49(2): 561~568
Yin W, Yin X Y, Wu G C, et al. The method of finite difference of high precision elastic equations in the frequency domain and wave field simulation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2006, 49(2): 561~568
- [2] 王红落. 地震波传播与成像若干问题的研究[博士论文]. 北京: 中国科学院地质与地球物理研究所, 2005

- Wang H L. The study of several problems in seismic wave propagation and imaging [Ph. D. thesis] (in Chinese). Beijing: Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, 2005
- [3] 张美根. 各向异性弹性波正反演问题研究[博士论文]. 北京: 中国科学院地质与地球物理研究所, 2000
Zhang M G. The researches of forward modeling and inversion of anisotropic elastic wave [Ph. D. thesis] (in Chinese). Beijing: Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, 2000
- [4] Takenaka H, Wang Y B, Furumura T. An efficient approach of the pseudospectral method for modeling of geometrically symmetric seismic wavefield. *Earth Planets Space*, 1999, **51** (2): 73~79
- [5] Fornberg B. The pseudospectral method: Accurate representation of interfaces in elastic wave calculations. *Geophysics*, 1988, **53**(5): 625~637
- [6] Komatitsch D. Spectral and spectral-element methods for the 2D and 3D electrodynamics equations in heterogeneous media. [Ph. D. thesis]. Paris: Institute de Physique du Globe, 1997
- [7] Roberts R A, Mullis C T. Digital Signal Processing. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1987
- [8] Mora P. Elastic finite difference with convolutional operators. *Stanford Exploration Project Report*, 1986, **48**: 277~289
- [9] Holberg O. Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena. *Geophys. Prosp.*, 2006, **35**(6): 629~655
- [10] Mittet R, Holberg O. Fast finite-difference modeling of 3-D elastic wave propagation. 58th Ann. Int. Mtg., Soc. Explor. Geophys., Expanded Abstracts, 1988. 1308~1311
- [11] Zhou B, Greenhalgh S. Seismic scalar wave equation modeling by a convolutional differentiator. *Bull. Seism. Am.*, 1992, **82**(1): 289~303
- [12] 张中杰, 滕吉文, 杨顶辉. 声波与弹性波场数值模拟中的褶积微分算子法. *地震学报*, 1996, **18**(1): 63~69
Zhang Z J, Teng J W, Yang D H. The convolutional differentiator method for numerical modeling of acoustic and elastic wave-field. *Acta Seismologica Sinica* (in Chinese), 1996, **18**(1): 63~69
- [13] 戴志阳, 孙建国, 查显杰. 地震波场模拟中的褶积微分算子法. *吉林大学学报*, 2005, **35**(4): 520~524
Dai Z Y, Sun J G, Cha X J. Seismic wave field modeling with convolutional differentiator algorithm. *Journal of Jilin University* (in Chinese), 2005, **35**(4): 520~524
- [14] 程冰洁. 基于广义正交多项式迭积微分算子的地震波场数值模拟研究[博士论文]. 北京: 中国科学院地质与地球物理研究所, 2007
- Cheng B J. Study on seismic waves modeling by convolutional differentiator based on Forsyte polynomial [Ph. D. thesis] (in Chinese). Beijing: Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, 2007
- [15] Zhou Y C, Gu Y, Wei G W. Conjugated filter approach for solving Burgers' equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 2002, **149**(2): 439~456
- [16] Zhou Y C, Wei G W. High resolution conjugate filters for the simulation of flows. *J. Comput. Appl. Math.*, 2003, **189** (1): 159~179
- [17] Sun Y H, Zhou Y C, Li S G, et al. A windowed Fourier pseudospectral method for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, **214**(2): 466~490
- [18] Wei G W. Discrete singular convolution for the solution of the Fokker-Planck equations. *J. Chem. Phys.*, 1999, **110** (18): 8930~8942
- [19] Bérenger J. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 1994, **114**(2): 185~200
- [20] Komatitsch D, Tromp J. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. *Geophys. J. Int.*, 2003, **154**(1): 146~153
- [21] Alford R M, Kelly K R, Boore D M. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, 1974, **39**(6): 834~842
- [22] 董良国, 李培明. 地震波传播数值模拟中的频散问题. *天然气工业*, 2004, **24**(6): 53~56
Dong L G, Li P M. Dispersive problem in seismic wave propagation numerical modeling. *Natur. Gas Ind.* (in Chinese), 2004, **24**(6): 53~56
- [23] 董良国, 马在田, 曹景忠. 一阶弹性波方程交错网格高阶有限差分法. *地球物理学报*, 2000, **43**(3): 411~419
Dong L G, Ma Z T, Cao J Z. The staggered-grid high-order difference method of one-order elastic equation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2000, **43**(3): 411~419
- [24] Lines L R, Slawinski R, Bording R P. A recipe for stability of finite-difference wave-equation computations. *Geophysics*, 1999, **64**(3): 967~969
- [25] Mufti I R. Large scale three dimensional seismic models and their interpretive significance. *Geophysics*, 1990, **55**(9): 1166~1182
- [26] Wu W, Lines L R, Lu H. Analysis of high order finite difference schemes in 3D reverse time migration. *Geophysics*, 1996, **61**(3): 845~856
- [27] 董良国, 马在田, 曹景忠等. 一阶弹性波方程交错网格高阶差分法稳定性研究. *地球物理学报*, 2000, **43**(6): 856~864
Dong L G, Ma Z T, Cao J Z, et al. A study on stability of the staggered-grid high-order difference method of first-order elastic wave equation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2000, **43**(6): 856~864

(本文编辑 胡素芳)