

# 地震射线辛几何算法初探

高 亮 李幼铭

陈旭荣 杨孔庆

(中国科学院地质与地球物理研究所, 北京 100101)

(兰州大学物理系, 兰州 730000)

**[摘 要]** 走时计算已广泛用于地震建模、成像及速度分析等诸方面。基于地震波场的 Hamilton 力学性质, 本文探索应用适于 Hamilton 力学的计算方法——辛几何算法对地震射线进行走时及路径的计算。利用辛几何算法和属于耗散算法的四阶 Runge-Kutta 算法进行射线路径和走时的计算对比, 结果表明这两类算法数值精度相当, 但辛几何算法的速度却快了 3 倍。本文还利用二阶 Euler 型辛差分格式对 Marmousi 模型进行了射线追踪计算, 结果显示所得射线具有良好的光滑性和较强的阴影区穿透能力。

**[关键词]** 辛算法, Runge-Kutta 算法, 射线, 走时, 路径。

## 1 引 言

地震波场在高频渐近条件下, 其 0 级近似的射线解刻画了地震波场的射线走向和波阵面形态, 因而可用于进行地震波走时计算。这在地震波场传播的渐近解研究、模型研究及波场成像的运用中具有广泛的实用价值。然而, 地震射线方程是遵从 Hamilton 正则方程的, 所以只有适于 Hamilton 力学性质的射线算法才是适当的算法。目前常用的射线追踪方法主要分两大类, 一类属于全局算法, 如程函方程的差分解法<sup>[1-3]</sup>、波前法<sup>[4]</sup>和最短路径法<sup>[5]</sup>等等; 另一类属于局部算法, 如程函方程的积分解法<sup>[7,8]</sup>, 但它们是否都能真实或在多大程度能真实地反映地震波场的性质? 从应用成功的实例来看, 上述算法都不失为有效的算法。但是面对复杂地质条件下的油气储层, 若要精细刻画其空间位置和几何形态, 那么现行技术对地震波传播及成像的适应能力, 仍然是学术界十分关切的。其焦点在于尽管已有了一些成功的应用实例, 但也确实存在一些不良的成像效果。从射线方程遵从 Hamilton 系统的保守性来看, 目前广泛应用的诸多算法都存在人为耗散性, 从而有可能歪曲体系的一些特征。问题在于, 这些射线追踪算法的适用程度究竟如何, 也就是说在多大范围内既不违背系统的内在物理性质, 又能达到所需求的精度, 这是人们所关注的。G. Nolet<sup>[9]</sup>曾指出“若在数值射线追踪的每一步上将  $p_i, p_i$  都规一化到  $1/v^2$  ( $p_i, p_i$  为各方向慢度

**[收稿日期]** 1999-01-28收到, 1999-12-15收到修定稿。

**[基金项目]** 国家自然科学基金委员会、大庆石油管理局联合资助项目 (49894190)。

**[作者简介]** 高 亮, 男, 1973 年生, 1998 年毕业于兰州大学物理系, 获理学硕士。现主要从事复杂介质地震波传播理论研究。

的平方和,  $v$  为地层声速), 射线精度将会增加,”其实这本质上是在对算法自身耗散性所伴随的缺陷进行必要的矫正。

Hamilton 力学的数学框架是辛几何。辛几何算法是专门针对于 Hamilton 系统的计算方法, 它使离散化的方程保持系统的辛结构。在地震波场振幅计算中, 射线的走时和路径计算十分重要。本文仅就数学上通用的且性能良好的 Runge-Kutta 算法为例, 进行计算性能的比较研究, 以期探索辛几何算法在地震射线理论应用的必要性和前景。

## 2 基本理论

### 2.1 辛几何方法

当代计算方法研究中十分关注的问题是, 系统的基本特征在进行数值离散后应该尽可能地得到保持, 为此要求尽可能地在问题原形的同一形式框架中进行离散化。例如有有限元法正是把离散纳入原体型的解所组成的 Sobolev 函数空间的同一框架中进行, 这使得对称性、正定性、守恒性等基本特征得到保持, 从而从根本上保证了应用上的有效性与可靠性, 同时使得理论的建立也变得相当容易。辛几何算法是为了保持 Hamilton 体系特征的算法。冯康先生的研究表明, Hamilton 系统应使用辛算法<sup>[10-12]</sup>。

首先用 Euclid 几何作为类比<sup>[13]</sup>, 欧氏空间  $R_n$  的 Euclid 结构取决于双线性系统对称的、非退化内积

$$\langle x, y \rangle = \langle x, Iy \rangle, \quad I = I_n, \quad (1)$$

这里  $x$  属于  $n$  维欧氏空间  $R^n$ ,  $y$  属于  $n$  维欧氏空间  $R^n$ ,  $I_n$  为  $n \times n$  单位矩阵。由于非退化, 当  $x \neq 0$  时  $\langle x, x \rangle$  恒正, 从而可定义长度  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} > 0$ 。保持内积长度不变即满足  $A' A = I$  的线性算子组成一个正交群  $O(n)$ , 这是一个典型 Lie 群, 它的 Lie 代数  $o(n)$  由满足  $A' + A = A' I + I A = 0$  条件即反对称变换组成, 也就是由无穷小正交变换所组成。

辛几何则是相空间的几何学, 辛空间即相空间具有特定的辛结构, 取决于一个双线性、反对称的非退化的内积——辛内积,

$$[x, y] = \langle x, Jy \rangle, \quad J = J_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & +I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

当  $n = 1$  时,

$$[x, y] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

这就是以向量  $x, y$  为长的平行四边形面积, 一般地辛内积是面积度量。由于内积的反对称性, 对于任意向量有  $[x, x] = 0$ , 因此不能由辛结构导出长度的概念, 这是辛几何与 Euclid 几何的根本差别。保持辛内积不变的线性变换满足  $A' J A = J$ , 它们组成一个群  $Sp(2n)$ , 叫做辛群, 也是一个典型的 Lie 群。它的 Lie 代数则由无穷小辛变换  $B$  即满足  $B' J + J B = 0$  组成, 用  $sp(2n)$  来表示。由于奇数维中不存在非退化的反对称阵。因此辛空间必定是偶数维的, 相空间正是如此。

辛几何中一对一的非线性变换称为辛变换, 如果它的 Jacobi 阵处处是辛阵. 这类变换自然在辛几何中起引导作用. 如果把一对  $N$  维向量表示为  $2n$  向量  $z = (p, q)$ , 则 Hamilton 正则方程可写为

$$\frac{dz}{dt} = J^{-1} \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (4)$$

这里  $p \in R^n$ ,  $q \in R^n$ ,  $H$  为 Hamilton 量. 在辛变换下, Hamilton 方程的正则形式不变. Hamilton 动力学的基本原理认为: 对于任意 Hamilton 体系必定存在依赖  $H$  及时刻  $t_0, t_1$  的辛变换族 (即相流)  $G_H^{t_1, t_0}$ , 使得

$$z(t_1) = G_H^{t_1, t_0} z(t_0), \quad (5)$$

$G_H^{t_1, t_0}$  把  $t_0$  时刻的状态变为  $t_1$  时刻的状态. 由辛几何出发而发展的辛几何算法保证了每次迭代过程都是辛变换, 即体积不变, 从而避免了人为耗散性等缺点.

## 2.2 地震射线方程的辛差分格式

射线追踪方程的一般形式为<sup>[9]</sup>

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dw} = v^{2-N} p_i, \\ \frac{dp_i}{dw} = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x_i} (v^{-N}), \\ \frac{dT}{dw} = v^{-N}, \end{cases} \quad (6)$$

其中  $w$  为独立变量,  $T$  为走时,  $p$  为慢度,  $x$  为位置. 引入弧长参数  $\sigma$ , 取  $N=2$  时的射线方程为

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{d\sigma} = p_i, \\ \frac{dp_i}{d\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (v^{-2}), \end{cases} \quad (7)$$

可证明它们是以 Hamilton 量恒为 0 的, 即取  $H(\sigma, q, p) = 1/2(p^2 - 1/v^2)$  的一组正则方程. 在此意义上, 射线追踪系统对  $\sigma$  是一个保守的 Hamilton 系统. 所以选用辛几何算法可尽可能地保持该系统的 Hamilton 力学信息. 辛差分格式有多种构造方式和形式, 针对地震射线的 Hamilton 量是可分离的, 所以在本文中采用了形式简单的二阶 Euler 型辛差分格式<sup>[10]</sup>:

对于形式为  $H(p, q, \tau) = \phi(p, \tau) + \varphi(q, \tau)$  的 Hamilton 量, 它的二阶 Euler 型辛差分格式为

$$\begin{cases} q^1 = q + \frac{\tau}{2} \phi_p(p), \\ \hat{p} = p - \tau \varphi_q(q^1), \\ \hat{q} = q^1 + \frac{\tau}{2} \phi_p(\hat{p}), \end{cases} \quad (8)$$

用  $H(\sigma, q, p) = 1/2(p^2 - 1/v^2)$  代入 (8) 式可得

$$\begin{cases} q^1 = q + \frac{\tau}{2}p, \\ \hat{p} = p - \tau \frac{\partial}{\partial q^1} (1/v^2(q^1)), \\ \hat{q} = q^1 + \frac{\hat{\tau}}{2}p, \end{cases} \quad (9)$$

化为迭代形式可得

$$\begin{cases} q_t = q_n + \frac{\tau}{2}p_n, \\ p_{n+1} = p_n - \tau(1/v^2)_q|_{q_t}, \\ q_{n+1} = q_t + \frac{\tau}{2}p_{n+1}. \end{cases} \quad (10)$$

其中  $q_t$  表示中间变量,  $q_n$  为当前广义位移,  $p_n$  为当前广义动量. 若选择二维介质模型, 该差分格式的运算仅需进行 4 次乘法运算.

### 2.3 渐近射线的 Maslov 理论

利用几何射线理论可以有效追踪波前和振幅, 但把它应用非均匀介质时, 在焦散处出现奇点, 这使渐近射线理论失效<sup>[14-17]</sup>. Maslov 理论<sup>[18]</sup>根据 Lagrange 流形和 Fourier 积分算子理论, 在焦散处把位形空间变换到相空间上. 根据 Liouville 定律和几何射线理论, 相空间中的射线轨迹在焦散区不会同时发生. 因此总可以找到一个相空间的子空间, 利用两者的联合得到稳定的地震波传播描述, 这样可以解决标准射线理论方法所遇到的一些问题, 如焦散, 阴影区等. 本文仅给出二维情况的波场

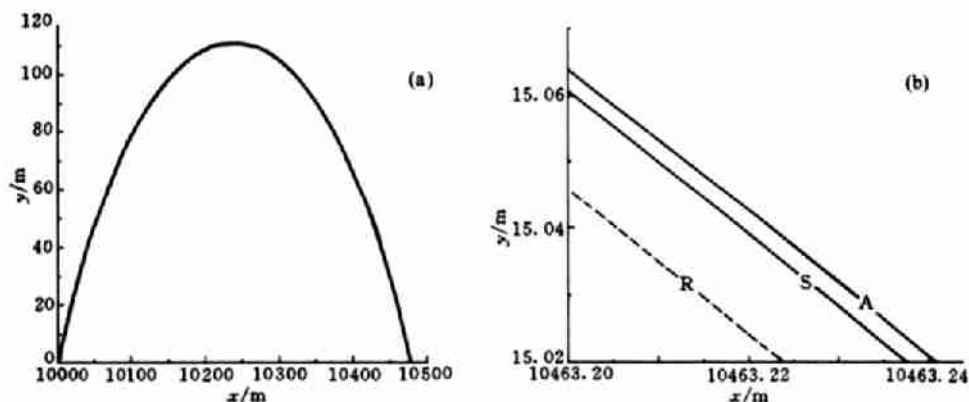
$$\phi(x, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{p_0' - \Delta p_0}^{p_0' + \Delta p_0} \left( \left( \frac{\partial p}{\partial p_0} \right)^{1/2} / |qq_0|^{1/2} \right) e^{-i\pi\varepsilon(x, x_0)/2 + i\pi[1 + \text{sgn}(\lambda p \dot{x}(y))]/4} \cdot e^{i\omega\theta(y)} dp_0, \quad (11)$$

式中  $x = (x, y, z)$ ,  $y = (p, y, z)$ ,  $\omega$  为圆频率,  $p_0$  为射线初始水平慢度,  $p_0'$  为射线由震源  $x_s$  出发正好射中  $x$  时的  $x$  方向慢度,  $\theta = T(x, (y), y, z) - p(x - x(y))$ ,  $\Delta p_0$  为  $p_0'$  的一个增量,  $[p_0' - \Delta p_0, p_0' + \Delta p_0]$  表示  $\phi(x, \omega)$  由以费马射线为中心的一束射线的  $x$  慢度区间,  $\varepsilon(x, x_0)$  是射线从  $x_0$  到  $x$  处所经过的焦散处, 为整数, 称为 KMAH 指数.

## 3 数值结果

在地震波场波幅的计算中, 射线的路径和走时起着重要作用. 所以本文用针对于 Hamilton 系统的辛几何算法和四阶 Runge-Kutta 算法在以下具体实例中对射线的走时和路径进行算法数值性能的比较研究.

**3.1** 首先以常速度梯度分布的介质模型  $v(z) = 2 + 10z$  为例, 进行了辛算法和 Runge-Kutta 算法及解析解的射线路径和走时的比较计算. 图 1 是由 3 种计算方法所得射线路径重叠而成, 在图 1(a) 中几乎不能分辨出由这 3 种方法所得路径差异. 将图 1(a) 放

图 1 介质速度模型  $v(z)=2+10z$  的射线追踪

(a) 全局结果; (b) 局部放大结果.

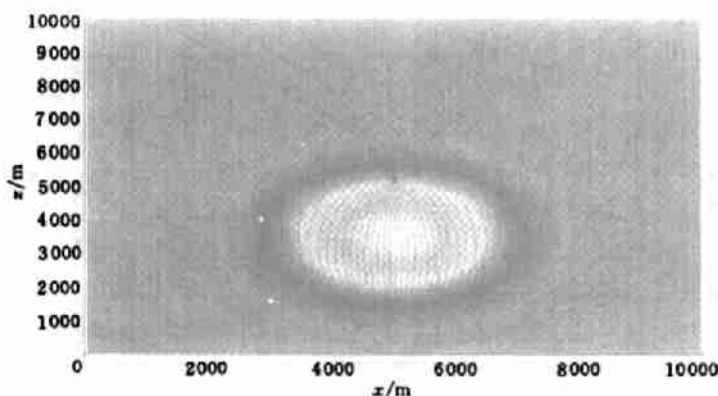
Fig.1 Ray tracing of velocity model  $v(z)=2+10z$ 

图 2 高斯速度模型射线追踪

Fig.2 Ray tracing of Gauss velocity model

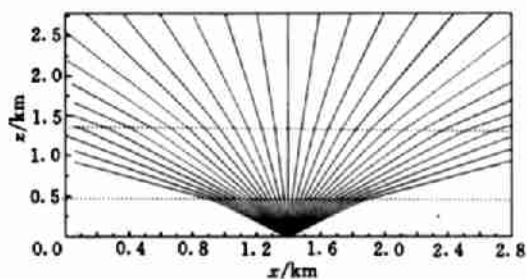


图 3 层状介质射线追踪

Fig.3 Raying tracing of layer medium

4 - 2  $\exp(-(x-5)^2 - (y-3.5)^2)/5$ , 其中速度  $v$  及位置  $q$  分别以 km/s 和 km 为基本单位.

大后结果如图 1(b) 所示, 其中 S 代表辛算法结果, R 和 A 分别表示 Runge-Kutta 和解析结果. 可见辛算法结果稍好于四阶 Runge-Kutta 算法, 但在地震射线追踪中如此小差异是可以忽略不计的.

3.2 对高斯速度分布的理想化介质模型进行四阶 Runge-Kutta 算法和辛算法在射线路径和走时计算的比较, 这个介质模型也意味着介质层内含有低速介质分布块的情况. 本文所取的速度模型方程为  $v(q) =$

3.3 介质速度以(5km, 3.5km)为中心点向四周逐渐增加,震源放于(5km, 0)位置上. 两

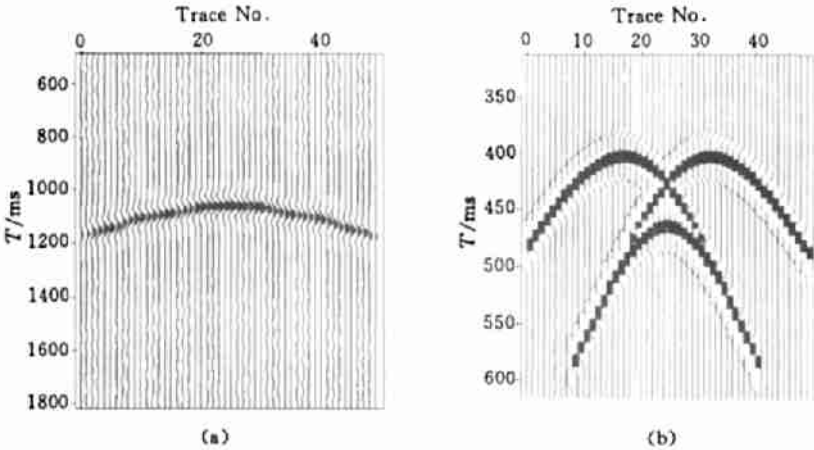


图 4 辛几何+Maslov方法的不同介质模型的波幅计算结果  
(a)层状介质; (b)高斯模型

Fig.4 The amplitudes of different medium cacluated by the Symplectic algorithm+Maslov method

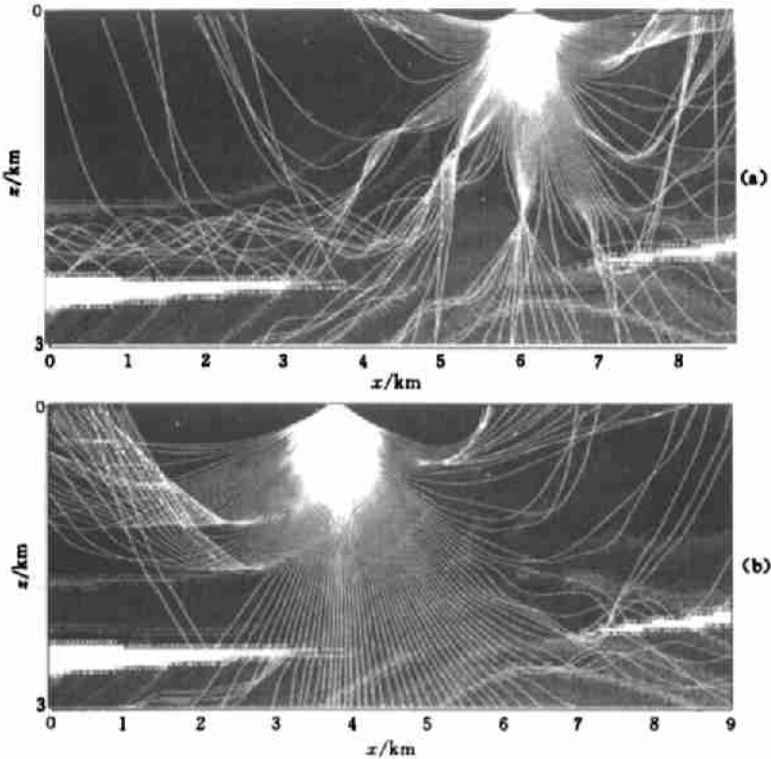


图 5 不同炮点坐标的Marmousi模型射线追踪  
(a)炮点坐标(6km, 0km); (b)炮点坐标(3.75km, 0km).

Fig.5 Ray tracing of Marmousi model with different shot position

种算法所得的射线路径结果被重合绘制在图 3 中。可见两种算法在射线路径上的差异难以区别。经考察,在射线纵向传播 10km 时两种算法的走时计算差别仅为  $1 \times 10^{-3}$ s 左右,显然这也是可以忽略不计的。

**3.4** 利用辛算法对一级间断面的地质结构进行射线路径和振幅的计算。该间断面设计为各层速度相差为 500m/s,在图 3 介质层以虚线表示,本模型分为 3 层,层与层之间是均匀介质,震源放在 (1396m, 0) 处。同样地,该图也是由解析解、Runge-Kutta 和利用光学中的 Snell 定律<sup>[19]</sup>所得的解析结果重叠而成。图 3 表明,无论用辛算法还是采用 Runge-Kutta 算法,所得的射线路径以及走时的计算都与解析解符合甚好。

**3.5** 利用 3.2 和 3.3 计算所得的走时和路径,再结合 Maslov 方法对这两种情况分别进行了波幅的计算。见图 4,其中接收点位置分别放在各自竖直方向底部,道数各为 50 道,在水平方向上均匀排列。

**3.6** 本文还运用二阶辛差分格式对代表复杂介质结构的 Marmousi 模型<sup>[20]</sup>进行了射线路径计算。计算结果如图 5 所示,震源分别放在 (6km, 0) 和 (3.75km, 0) 位置处。由图中可见射线具有较好的光滑性,阴影区也较小。

## 4 结 论

**4.1** 在反射地震研究中,若仅单纯考虑射线路径、走时,辛算法并不能更优于四阶 Runge-Kutta 算法。原因在于,在地震射线追踪中由于积分时间步长一般在 10ms 左右,所以射线积分步数最多只需几千步,在几千步内,四阶 Runge-Kutta 的耗散性尚未有效地反映出来,因而 Runge-Kutta 算法在地震射线追踪计算中也是适用的。

**4.2** 对地震勘探尺度上的射线追踪,二阶辛差分格式在精度上和四阶 Runge-Kutta 算法大体相当,但在计算速度上,辛算法却快得多。在计算高斯模型时,二阶辛格式的运算速度是四阶 Runge-Kutta 的 3 倍。对二维介质模型而言,二阶 Euler 型辛差分格式仅有 4 次乘法运算。

**4.3** 在对 Marmousi 模型的射线追踪结果表明,辛算法具有良好的实用价值。

**4.4** 本文仅进行了辛算法和四阶 Runge-Kutta 算法在射线路径、走时计算的数值性能比较。其他类型的射线算法如何,有待验证。但是,由于地震射线满足 Hamilton 力学的事实和当前 Hamilton 理论的成熟性及辛算法的优越性都应使我们慎重考虑,在地震波场的计算和应用中都应当充分利用它们内在保守性这一优越条件。

## 参 考 文 献

- [1] Reshef M, Kosloff D. Migration of common shot gather. *Geophysics*, 1986, **51**:324—331.
- [2] Vidale J. Finite difference calculation of traveltimes. *Bull. Seis. Soc. Am.*, 1988, **78**:2062—2076.
- [3] Vidale J. Finite difference calculation of traveltimes in three Dimensions. *Geophysics*, 1990, **55**:521—526.
- [4] 黄联捷, 李幼铭, 吴如山. 用于图像重建的波前法射线追踪. 地球物理学报, 1992, **35**(2):223—233.  
HUANG Lian-Jie, LI You-Ming, WU Ru-Shan. The wave-front ray tracing method for image reconstruction. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1992, **35**(2):223—233.
- [5] Satio H. Traveltimes and raypaths of first arrival seismic waves, computation method based upon Huygens' s

principle. Expanded Abstracts Society of Exploration Geophysicists (SEG) 59th Annual International Meeting, 1989, 244—247.

[6] Moser T., Shortest path calculation of seismic rays. *Geophysics*, 1991, **56**:59—67.

[7] 刘洪, 孟繁林, 李幼铭. 计算最小走时和射线路径的界面网全局方法. 地球物理学报, 1995, **38**(1):823—831.

LIU Hong, MENG Fan-Lin, LI You-Ming. The interface grid method for seeking global minimum travel-time and the correspondent raypath. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1995, **38**(1):23—831.

[8] Langan R T, Lerche I, Cutler R T. Tracing of rays through heterogeneous media: an accurate and efficient procedure. *Geophysics* **50**:1456—1465.

[9] G Nolet. Seismic Tomography with applications in Global Seismology and Exploration Geophysics. D. Reidel, Publishing Company, 1987, 77—78.

[10] 冯 康. 冯康文集(II). 北京, 国防工业出版社, 1995.

FENG Kang, Collected works of Feng Kang (II) (in Chinese). Beijing: National Defence Industry Press, 1995, 269.

[11] 冯 康, 秦孟兆. Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法. 自然科学进展-国家重点实验室通讯, 1991, **2**:104—112.

FENG Kang, QIN Meng-Zhao, The Hamiltonian method for Hamiltonian dynamic systems. *Progress of Natural Science-Letters of National Laboratory* (in Chinese), 1991, **2**:104—112.

[12] FENG Kang. Differential schemes for hamiltonian formalism and symplectic geometry. *J. Comput. Math*, 1986, **4**(3):279—289.

[13] V. I. Arnold. Mathematical methods of classical mechanics. Springer-Verlag, 1978, 201—229.

[14] 尹 峰, 李幼铭. 反演二维非均匀介质背景中速度扰动的波动方程层析成像方法. 见: 杨文采等主编. 应用地震层析成像. 北京: 地质出版社, 1993, 124—131.

YING Feng, LI You-Ming. Wave equation tomography with the 2-D inversion of velocity perturbation in complex media. In: YANG Wei-Cai et al. ed. Applied Seismic Tomography (in Chinese). Beijing: Geological Publishing House, 1993, 124—131.

[15] George A, Mcmenchan, Walter D. Mooney Asymptotic ray theory and synthetic seismograms for laterally varying structures: theory and application to the imperial valley. *California. Bull. Seism. Soc. Am.* **70**: 2021—2035.

[16] Chapman C. H. R. Drummond Body-Wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory. *Bull. Seism. Soc. Am.* 1982, **72**(6):277—317.

[17] Chapman C.H. Ray theory and its extensions: WKB and Maslov seismograms. *J. Geophys.*, 1985, **58**:27—43.

[18] Chapman C.H. The computation of body wave synthetic seismograms in laterally homogeneous media. *Rev. Geophys. Res.*, 1985, **92**:2697—2712.

[19] Richard P Feynman. The Feynman lectures on physics. Addison-wesley publishing company, 1975, 26.

[20] Versteeg R, Grau G. Practical aspects of seismic data inversion. The Marmousi experience EAEG Workshop, 52 nd EAEG Meeting. Eur. Assoc. Expl. Geophys., Proceedings of 1990 EAEG Workshop, 1990, 52 nd EAEG Meeting, 1—194.



# AN ATTEMPT TO SEISMIC RAY TRACING WITH SYMPLECTIC ALGORITHM

GAO LIANG    LI YOU-MING

*(Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China)*

CHEN XU-RONG    YANG KONG-QING

*(Department of physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)*

**[Abstract]** Traveltime-computation is widely used in seismic modeling, imaging and velocity analysis, etc. The technology of ray tracing is one of the common methods to acquire traveltime. With the development of the research in complex geology and considering Hamilton mechanics quality of seismic wave field, the symplectic algorithm which is based on Hamilton mechanics is used to obtain traveltime and path of Seismic ray in this paper. The traveltime and path obtained by both Symplectic algorithm and Runge-Kutta algorithm belonging to dissipative algorithm are compared. The result indicates the precision of both is very adjacent, however the Symplectic algorithm is far more faster. In addition, the ray tracing have been carried on complex Marmousi Model. The result has proved that Symplectic algorithm is a preferable robust and has a better ability to penetrate shadow zones.

**[Key words]** Symplectic, Runge-Kutta, Ray, Traveltime, Path.