

普通高等教育地震类专业规划教材

高等地震学

北京大学地球物理系 编著
傅淑芳 朱仁益



地震出版社

普通高等教育地震类专业规划教材

高等地震学

北京大学地球物理系
傅淑芳 朱仁益

编著

地震出版社

1997

内 容 提 要

本书是固体地球物理专业的硕士研究生专业基础课教材。内容主要是讲述近代地震学的研究理论与方法。从弹性动力学方程出发,较详细地介绍了震源的表象、地震体波、面波及自由振荡波在均匀与非均匀的弹性介质、粘滞弹性及各向异性介质中传播的运动学与动力学特征。以地震观测的实际资料为依据,论述了高频体波各类近似解法、面波及自由振荡波简正振型描述与射线描述的二重性、粘弹性介质中的因果性频散、地震波某些反演问题与方法等。

本书共分十一章。其中第一、二、八、九、十章为朱仁益编写,第三、四、五、六、七、十一章为傅淑芳编写。本书可为相关的地学专业的本科生、研究生进入专业科研工作提供地震学的理论知识,也可供中、高级专业人员参考。

高 等 地 震 学

北京大学地球物理系 编著
傅淑芳 朱仁益

责任编辑:张崇山

责任校对:李 珏

地 震 学 版 社 出 版

北京民族学院南路9号
中国地质大学轻印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
全国各地新华书店经售

850×1168 1/32 17.75印张 477千字

1997年3月第一版 1997年3月第一次印刷

印数 001-800

ISBN 7-5028-1297-0/P·822

(1738) 定价:30.00元

§ 1	球对称介质中的剪切位错源的远场辐射	(102)
	习题与思考题	(104)
第五章	成层半空间的地震波	(106)
§ 1	平面波的反射与折射	(106)
§ 2	自由表面的反射	(111)
§ 3	固体-固体界面上的反射与折射	(117)
§ 4	面波的形成及频散特征	(121)
§ 5	矩阵法及其推广	(133)
§ 6	球面波在平界面的反射与首波	(144)
§ 7	球面波在弹性半空间的效应——瑞利面波	(160)
	习题与思考题	(165)
第六章	非均匀介质中的面波振幅理论与简正振型	(167)
§ 1	面波的变分原理 (瑞利原理)	(167)
§ 2	瑞利面波的垂直位移分量与勒夫面波的 方位位移分量	(175)
§ 3	垂直非均匀介质中的面波振幅谱传输函数	(181)
§ 4	有限移动源产生的面波辐射	(190)
§ 5	球地球模型的简正振型	(194)
§ 6	球形地球上的面波	(199)
	习题与思考题	(204)
第七章	地球的自由振荡与广义射线	(205)
§ 1	径向非均匀自重力球地球介质中的剪切位错 点源激发的自由振荡	(205)
§ 2	能量积分与偏微商值	(218)
§ 3	震源时间函数的影响	(222)
§ 4	简正振型——射线二重性	(222)
§ 5	谱位移场的 Watson 变换积分式与二阶常微分 方程的 WKBJ 渐近解	(230)
§ 6	径向非均匀球地球介质中的广义射线	(240)

习题与思考题	(248)
第八章 非均匀介质中的体波理论	(251)
§ 1 地震体波理论研究的发展	(251)
§ 2 侧向均匀介质中高频 P、SV、SH 波的 解耦	(254)
§ 3 程函方程与射线几何学	(261)
§ 4 射线振幅与走时计算公式	(272)
§ 5 地球展平变换问题	(279)
§ 6 广义射线法	(282)
§ 7 反射率法	(304)
§ 8 WKBJ 法	(311)
§ 9 侧向非均匀介质的近似体波理论	(326)
习题与思考题	(361)
第九章 滞弹性介质中和各向异性介质中的地震 波传播	(363)
§ 1 介质的耗散参数	(363)
§ 2 线性粘弹性体	(373)
§ 3 波在无限粘弹性介质中的传播	(390)
§ 4 粘弹性介质中的因果律与频散关系	(405)
§ 5 粘弹性介质中位移信号的畸变	(413)
§ 6 地球介质中的地震波衰减	(430)
§ 7 地球介质的各向异性特征	(446)
§ 8 各向异性介质中地震波传播的基本原理	(449)
习题与思考题	(459)
第十章 地震学的反演问题	(460)
§ 1 走时反演	(460)
§ 2 反射地震图反演	(473)
§ 3 线性化系统的离散反演问题	(486)
§ 4 模型空间和资料空间	(488)

§ 5	广义逆方法	(493)
§ 6	广义逆解的分辨率和协方差	(497)
§ 7	最大似然逆方法及随机逆方法	(499)
§ 8	用 Backus 和 Gilbert 法解欠定反演问题	(504)
§ 9	非线性反演问题简述	(509)
§ 10	地震反演问题的实例	(511)
	习题与思考题	(518)
第十一章	地震观测的解释	(519)
§ 1	地震观测台网与地球模型	(519)
§ 2	地震资料预处理的一些问题	(531)
§ 3	高频地震波的扩散因数和散射因数	(535)
§ 4	移动源的方向性函数	(543)
§ 5	自由振荡位移的数值计算	(544)
§ 6	因果性频散面波与自由振荡波的衰减观测	(551)
	习题与思考题	(557)
	参考文献	(558)

第一章 弹性动力学基础

§ 1 应力概念及其性质

在弹性力学中，外力的作用必须考虑它的分布情况，因为弹性体的变形与力的分布情况有关。

考虑一连续介质，里面质点的位置可以通过取定某一坐标系（比如直角坐标系） x_1, x_2, x_3 来表示。用 τ 代表这介质在坐标系中所占的区域， $\Delta\tau$ 是 τ 内的一个小体积元。考虑作用在这小体积元物质上的力，假如这个力总是和 $\Delta\tau$ 的质量成正比，像重力、离心力等，则称这种力为体力。

假定体力是 x_1, x_2, x_3 的连续函数，令矢量 $\boldsymbol{\varphi} = i f_1 + j f_2 + k f_3$ 代表每单元体积所受的体力（这里 i, j, k 分别为 x_1, x_2, x_3 轴向单位矢量），则整个介质的体力合力 Ψ 为

$$\Psi = \iiint_{\tau} \boldsymbol{\varphi} d\tau = \iiint_{\tau} \boldsymbol{\varphi} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (1.1)$$

$\boldsymbol{\varphi}$ 对坐标原点生成的总力矩是

$$\mathbf{M} = \iiint_{\tau} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\varphi}) dx_1 dx_2 dx_3 = \hat{i} M_1 + \hat{j} M_2 + \hat{k} M_3 \quad (1.2)$$

式中， \mathbf{r} 是坐标原点到介质中任一点的矢径，及

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \iiint_{\tau} (x_2 f_3 - x_3 f_2) dx_1 dx_2 dx_3 \\ M_2 &= \iiint_{\tau} (x_3 f_1 - x_1 f_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\ M_3 &= \iiint_{\tau} (x_1 f_2 - x_2 f_1) dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

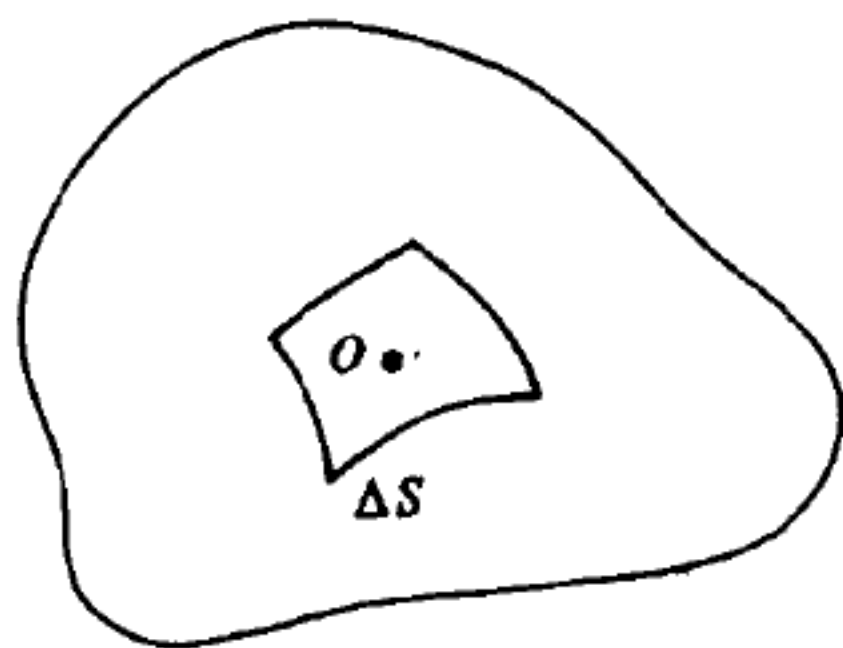


图 1.1 表面上包含有 O 点的小块面积 ΔS

作用在物体表面的力称为面力，像所谓力的压强便是。面力可以这样来描述：令表面小块面积 ΔS 上有任意一点 O (图 1.1)，作用在 O 点邻近的表面力的方向是各不相同的，作用在 ΔS 面上的力可用作用在 O 点的合力 T 和一个力偶 G 来代替，把 ΔS 慢慢地缩小而使 O 点始终包含在内，若极限

$$\lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ G \rightarrow 0}} \frac{G}{\Delta S} = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ T \rightarrow 0}} \frac{T}{\Delta S} = \sigma$$

存在，便称上述的 σ 为面力，它的量纲是 $[\text{力}][\text{长度}]^{-2}$ 。

若弹性体在表面受外力作用，则这些力的作用会传至物体内部。我们用应力的概念来表示物体内部的力的作用。

假想一物体 (图 1.2) 被一平面截断成两部分 A 和 B ，则 B 部分对 A 部分的作用可用 A 部分截面上的应力矢量来代表。应力矢量是面力的一种。在 A 部分的截面上任取一点 O ， O 点是包含在微小面积 ΔS 内的， ΔS 的外法线是 N ，令 O 点的面力是 F_N ，它是一个矢量，称之为应力矢量。它表示作用在法线为 N 的微元平面上的单位面积

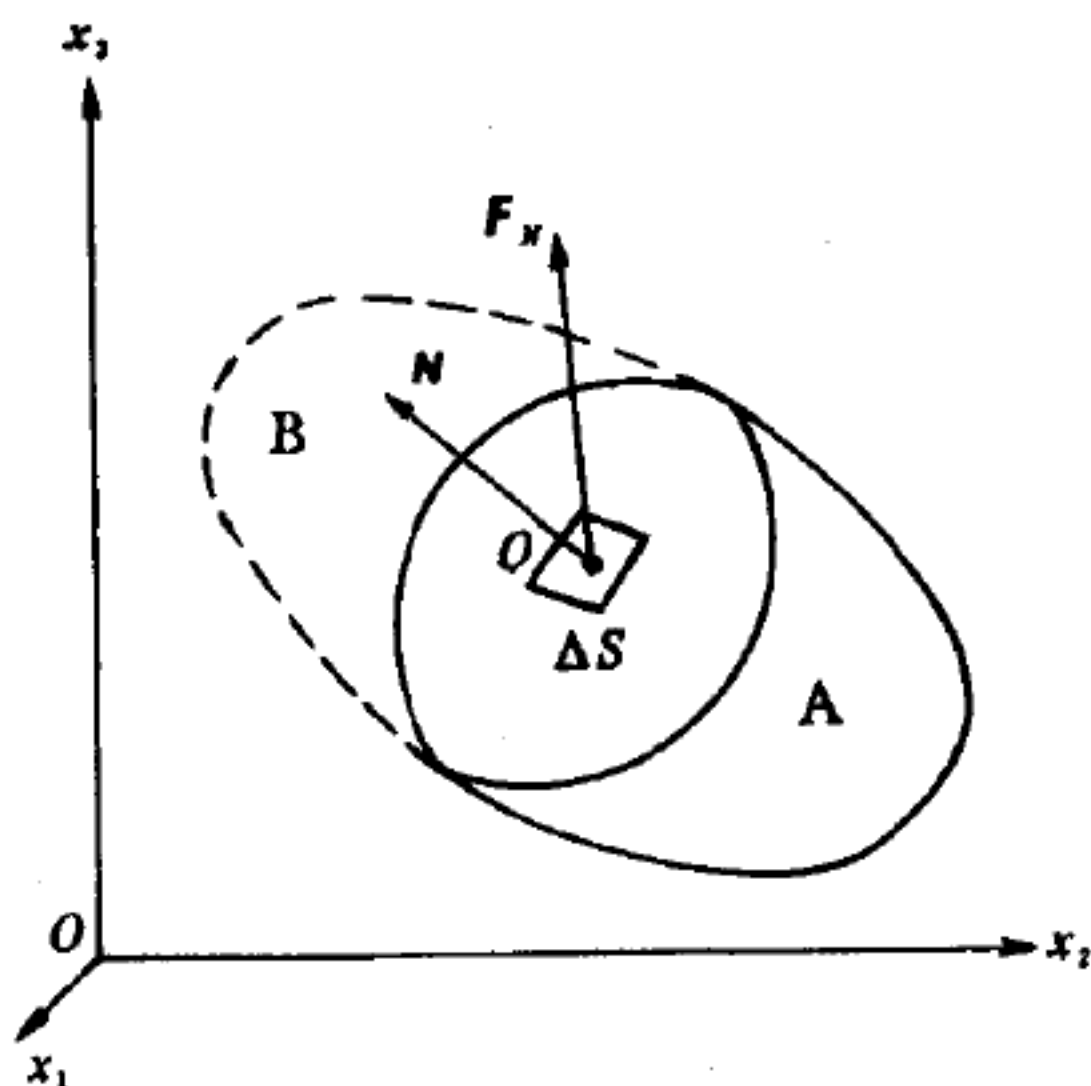


图 1.2 物体被假想平面截成两部分 A 和 B ， B 对 A 的作用

上的力。 F_N 可分解为 X_N , Y_N , Z_N 三个分量。

在 B 部分上同一点 O, 这时微小面积 ΔS 的外法线为 N' (图 1.3), 它与 N 方向相反, 按牛顿定律知, 应力矢量为 $F_{N'}$, 并有

$$F_N = -F_{N'} \quad (1.4)$$

它们分别表示 B 部分对 A 部分的作用以及反过来——A 部分对 B 部分的作用。

现在进一步叙述物体内部一点的应力。

首先在弹性体中取一正

方微元体, 整个弹性体可看作是由无数个这样的正方微元体组成。因为这正方体很小, 在这正方体上的各平面上的应力矢量便相当于通过正方体内部一点, 并作用在原来各个平面上的应力矢量。若所选择的坐标轴与正方体的相邻三条棱相平行 (图 1.4), 正方体各面上的应力都可用三个应力分量来表示: 在 $ABCD$ 平面上的应力分量是 $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$, 在 $CFED$ 平面上的应力分量是 $(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$, 在 $ADEG$ 平面上的应力分量是 $(\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})$, 在上述三个平面相对的平面上的应力分量分别与其所对的平面上的应力分量大小相等、方向相反。这样, 一共引进了九个应力分量

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

这些分量的下标规定如下: 第一个数字表示作用平面, 第二个数字表示应力分量的方向。两个下标相同的分量是法向应力, 不相同的是切向应力。这些分量和两个方向有关, 即应力矢量的方向

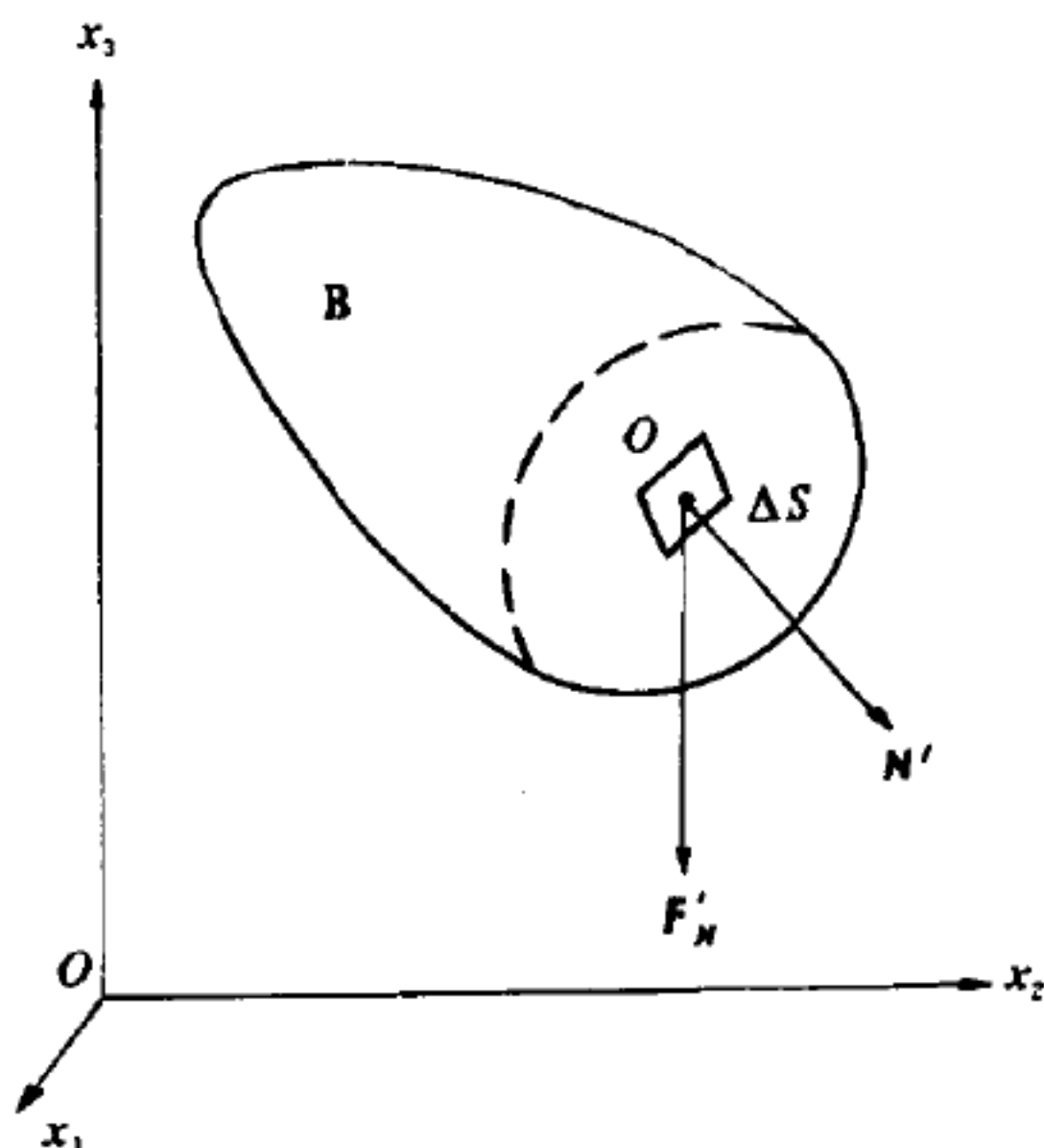


图 1.3 A 部分对 B 部分的反作用

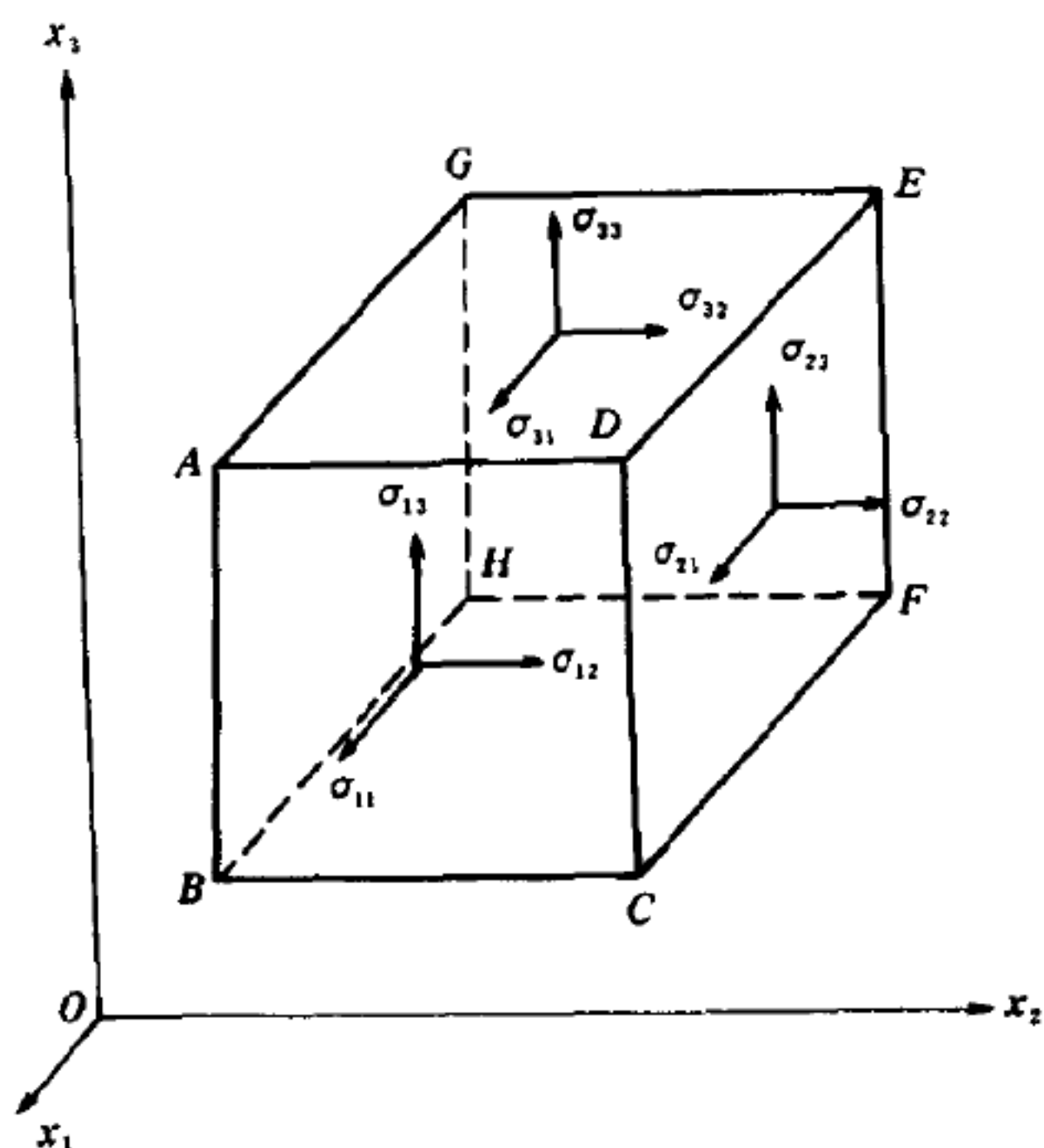


图 1.4 正方微元体上的应力分量

和作用平面的方向。因而它们构成一个张量，用 Σ 表示。它的分量也可表示为 σ_{ij} ， $i=1, 2, 3$ ； $j=1, 2, 3$ 。

此九个应力分量不是完全独立的，如果利用微元体的力矩平衡条件，则有

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.6)$$

这就是所谓切应力成对性定律。应力分量中只有六个是独立的。这样，应力张量是一个二阶对称张量。这六个分量充分表示了一点 M 上的应力状态，即在该点任意方向的作用面上的应力矢量完全可由这六个分量表示。比如要表示法线为 N 平面上的应力矢量 $F_N (X_N, Y_N, Z_N)$ (图 1.5)，作 ABC 平面，它的法线为 N ，但不通过 M 点。一般说来， ABC 平面上的应力矢量与要求的平面上的应力矢量是有差别的。但当这两个平面无限接近时，这种应力矢量的差别就完全消失。设这两个平面间的垂直距离是 h ，在 ABC 面上的应力矢量为 $F_N^* (X_N^*, Y_N^*, Z_N^*)$ ，则有

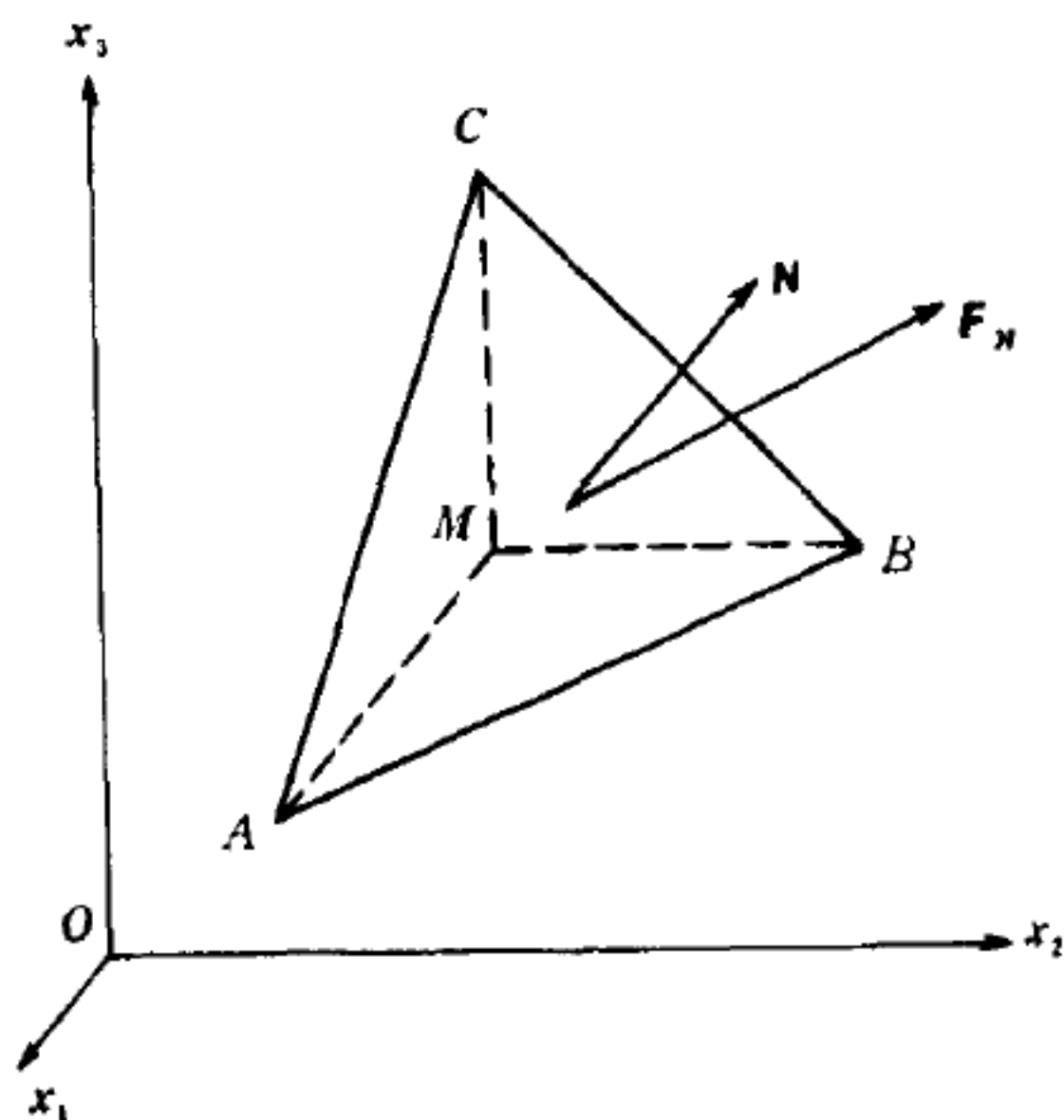


图 1.5 任意方向作用 ABC 构成的四面体

$$\lim_{h \rightarrow 0} F_N^*(X_N^*, Y_N^*, Z_N^*) = F_N(X_N, Y_N, Z_N) \quad (1.7)$$

设在 $MABC$ 四面体的侧面上，如 MAB 面上的平均应力矢量是 $(\sigma_{31}^*, \sigma_{32}^*, \sigma_{33}^*)$ ， MCA 面上是 $(\sigma_{21}^*, \sigma_{22}^*, \sigma_{23}^*)$ ， MBC 面上是 $(\sigma_{11}^*, \sigma_{12}^*, \sigma_{13}^*)$ (图 1.6)。当 $h \rightarrow 0$ 时，有

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} (\sigma_{11}^*, \sigma_{22}^*, \sigma_{33}^*, \sigma_{12}^*, \sigma_{13}^*, \sigma_{21}^*, \sigma_{23}^*, \sigma_{31}^*, \sigma_{32}^*) \\ &= (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

设 ABC 的面积是 ΔS ，则四面体 $MABC$ 的体积是

$$\Delta V = \frac{1}{3} h \Delta S \quad (1.9)$$

而平面 MBC ， MCA ， MAB 的面积分别是 ΔS_1 ， ΔS_2 ， ΔS_3 且分别有

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_1 &= \Delta S \cos(x_1, N) = l_1 \Delta S \\ \Delta S_2 &= \Delta S \cos(x_2, N) = l_2 \Delta S \\ \Delta S_3 &= \Delta S \cos(x_3, N) = l_3 \Delta S \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

这里 l_1 ， l_2 ， l_3 是法线 N 的方向余弦。

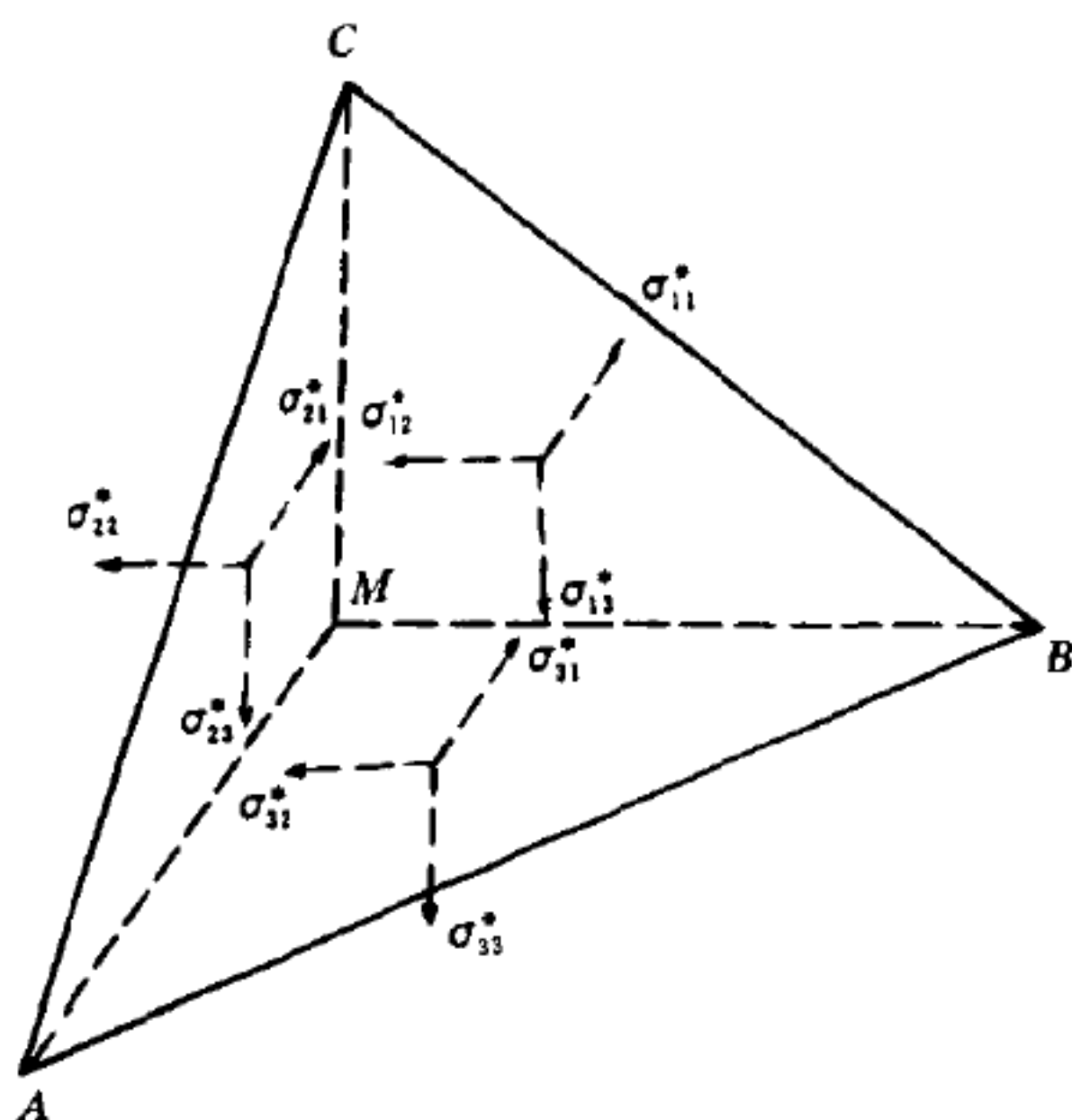


图 1.6 四面体上的平均应力分量

又若四面体中平均体力的三个分量是 f_1, f_2, f_3 , 则考虑 x_1 方向上的力的平衡, 有

$$f_1 \Delta V + X_N \Delta S + (-\sigma_{11}^*) \Delta S_1 + (-\sigma_{21}^*) \Delta S_2 + (-\sigma_{31}^*) \Delta S_3 = 0$$

也即

$$f_1 \cdot \frac{1}{3}h + X_N - \sigma_{11}^* l_1 - \sigma_{21}^* l_2 - \sigma_{31}^* l_3 = 0$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, 便得到

$$X_N = \sigma_{11} l_1 + \sigma_{21} l_2 + \sigma_{31} l_3 \quad (1.11)$$

同理, 有

$$\left. \begin{aligned} Y_N &= \sigma_{12} l_1 + \sigma_{22} l_2 + \sigma_{32} l_3 \\ Z_N &= \sigma_{13} l_1 + \sigma_{23} l_2 + \sigma_{33} l_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

由此可以看出, 若一点上的六个独立应力分量已知, 则过这一点的任意平面上的应力矢量都可用这六个应力分量表示, 故可以说, 六个独立应力分量描述了这点的应力状态。

§ 2 小变形的几何关系

在刚体上，作用力只引起刚体的整体移动与转动。如果物体是弹性的，则还会引起物体内部各点间的相对位置改变，当移去外力的作用后，物体又会恢复原来的状态。假定物体是各向同性的，且不考虑刚性运动部分，我们来讨论弹性体的变形。

考虑两个相邻的点 P 和 Q (图 1.7)，变形后它们分别移动到新位置 P' 和 Q' 。设 P 点的位移是 $u(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ ， Q 点的位移是

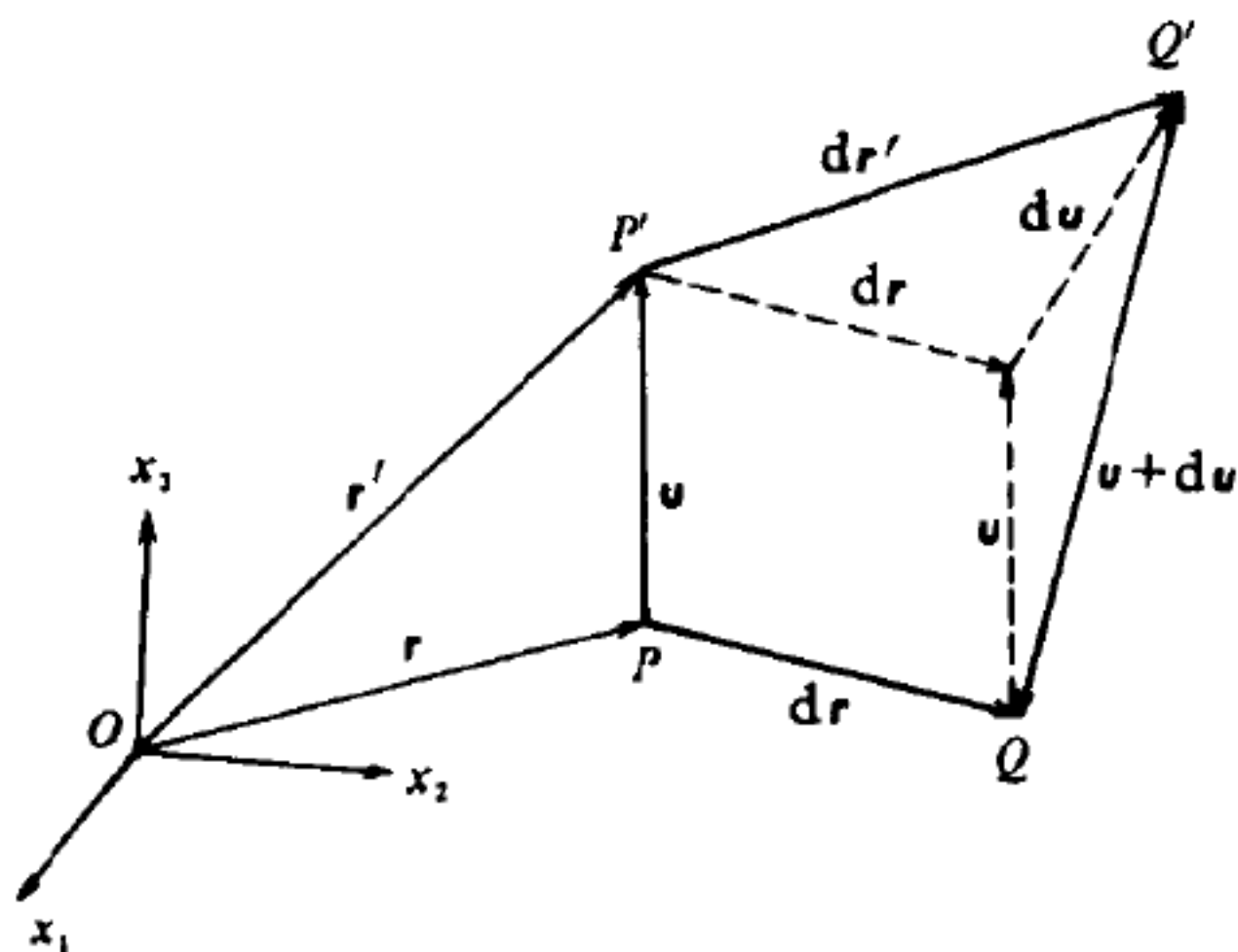


图 1.7 位移 u 和相对位移 du

$u(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u + du$ 。写成分量形式并用 Taylor 展开，有

$$u_1(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u_1(\mathbf{r}) + d\mathbf{r} \cdot \nabla u_1(\mathbf{r}) + \dots$$

考虑到小变形，可近似地写成

$$du_1 = u_1(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - u_1(\mathbf{r}) = d\mathbf{r} \cdot \nabla u_1(\mathbf{r})$$

同样，也可以写出另外两个分量的关系。写成矢量形式，为

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{r}' - d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (1.13)$$

这里 $\nabla \mathbf{u}$ 是位移梯度，是一个并矢，定义为

$$\nabla u(x_1, x_2, x_3) = \nabla x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nabla x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \nabla x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} \quad (1.14)$$

即

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

也可写成

$$(\nabla u)_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (1.16)$$

还可引进如下两个并矢, 分别代表介质一点上的应变与转动:
应变并矢 (又称应变张量) 为

$$E(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + u \nabla) \quad (1.17)$$

其中 $u \nabla$ 定义为

$$u \nabla = \frac{\partial u}{\partial x_1} i + \frac{\partial u}{\partial x_2} j + \frac{\partial u}{\partial x_3} k \quad (1.18)$$

这样, 应变并矢可写成

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

或写成分量形式

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.20)$$

转动并矢 (又称转动张量) 为

$$R(u) = I + \frac{1}{2}(\nabla u - u\nabla) \quad (1.21)$$

式中 I 为单位并矢。

在地震学的问题中，经常会遇到正交曲线坐标系的情况，这里给出在正交曲线坐标系中应变的表达形式及其推导。

现考虑某一点的一般正交曲线坐标 (q_1, q_2, q_3) ，它与直角坐标的关系是

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3), x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3), x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3) \quad (1.22)$$

或写成

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) \\ x_i &= x_i(q_1, q_2, q_3) \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

\mathbf{r} 为坐标原点至该点的矢径。

曲线坐标系中沿坐标轴的单位矢量可表示为

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha}, \quad h_\alpha = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \right|, \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.24)$$

式 (1.24) 中的 h_α 称为尺度因子。

按正交性，有

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{e}}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\alpha \times \hat{\mathbf{e}}_\beta = \hat{\mathbf{e}}_\gamma \quad (1.25)$$

这里 $\delta_{\alpha\beta}$ 是 Kronecker δ ，而 α, β, γ 必须是轮回顺序 ($\alpha\beta\gamma, \beta\gamma\alpha, \gamma\alpha\beta$)。

根据式 (1.24)，可有

$$d\mathbf{r} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha dq_\alpha \quad (1.26)$$

因而微元段长度是

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = h_1^2 (dq_1)^2 + h_2^2 (dq_2)^2 + h_3^2 (dq_3)^2 \quad (1.27)$$

由此式可确定尺度因子。

接着计算微商 $\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\alpha}{\partial q_\beta}$ ，这是一个矢量，可以写成

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\alpha}{\partial q_\beta} = c_1(\alpha, \beta) \hat{\mathbf{e}}_1 + c_2(\alpha, \beta) \hat{\mathbf{e}}_2 + c_3(\alpha, \beta) \hat{\mathbf{e}}_3 = \sum_{\gamma=1}^3 c_\gamma(\alpha, \beta) \hat{\mathbf{e}}_\gamma \quad (1.28)$$

为方便, 引进第二类 Christoffel 符号

$$c_\gamma(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \quad \beta \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

将式 (1.29) 代入式 (1.28), 并用 $\hat{\mathbf{e}}_\gamma$ 点乘, 则有

$$\hat{\mathbf{e}}_\gamma \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\alpha}{\partial q_\beta} = \hat{\mathbf{e}}_\gamma \cdot \sum_{\gamma=1}^3 c_\gamma(\alpha, \beta) \hat{\mathbf{e}}_\gamma = \hat{\mathbf{e}}_\gamma \cdot \sum_{\gamma=1}^3 \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \quad \beta \end{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \quad \beta \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

又有

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \right) \quad (1.31)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\gamma \cdot \hat{\mathbf{e}}_\alpha = \delta_{\gamma\alpha} = \frac{1}{h_\gamma h_\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\gamma} \quad (1.32)$$

利用这些关系很容易推导出如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \quad \beta \end{pmatrix} &= 0, \quad \text{当 } \gamma \neq \beta \neq \alpha \\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \quad \beta \end{pmatrix} &= 0, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \quad \alpha \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \quad \alpha \end{pmatrix} &= -\frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial h_\alpha}{\partial q_\gamma}, \quad \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \quad \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial h_\gamma}{\partial q_\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

可见, $\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\alpha}{\partial q_\beta}$ 完全可由尺度因子确定。

继续推导曲线坐标系中梯度算子的基本微分表达式。设 $\varphi(q_1, q_2, q_3)$ 是一标量函数, 则它的梯度是

$$\nabla \varphi = f_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + f_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + f_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (1.34)$$

其中 $f_i(q_1, q_2, q_3)$ 是 $\nabla \varphi$ 的分量。 φ 的微分可用两种方式表示, 即

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} dq_3 \quad (1.35)$$

及

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \nabla \varphi \cdot \left(\sum_{a=1}^3 h_a \hat{\mathbf{e}}_a dq_a \right) = h_1 f_1 dq_1 + h_2 f_2 dq_2 + h_3 f_3 dq_3 \quad (1.36)$$

比较上面两式, 有

$$f_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad f_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \quad f_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \quad (1.37)$$

代入式 (1.34), 得

$$\nabla \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (1.38)$$

这样, 梯度算子可表示为

$$\nabla = \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \quad (1.39)$$

特殊情况下有

$$\nabla q_a = \frac{\hat{\mathbf{e}}_a}{h_a}$$

如果将算子 ∇ 置于矢量 $\mathbf{u} = u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + u_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + u_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ 的前面, 结果是并矢, 它的分量为

$$(\nabla \mathbf{u})_{\alpha\beta} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial u_\beta}{\partial q_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^3 \frac{u_\gamma}{h_\alpha} \left(\gamma \begin{matrix} \beta \\ \alpha \end{matrix} \right) \quad (1.40)$$

我们再用梯度算子来表示矢量的散度与旋度, 它们是

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \sum_{a=1}^3 u_a \hat{\mathbf{e}}_a \\ &= \sum_{a=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left[\frac{1}{h_\beta} \hat{\mathbf{e}}_\beta \cdot \frac{\partial}{\partial q_\beta} (u_a \hat{\mathbf{e}}_a) \right] \\ &= \sum_{a=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \left[\frac{1}{h_a} \frac{\partial u_a}{\partial q_a} + \frac{u_a}{h_\beta} \left(\alpha \begin{matrix} \beta \\ \beta \end{matrix} \right) \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 u_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 u_3) \right] \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\text{及 } \operatorname{curl} \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \sum_{a=1}^3 u_a \hat{\mathbf{e}}_a = \nabla \times \sum_{a=1}^3 (u_a h_a) \nabla q_a \quad (1.42)$$

再应用如下矢积恒等关系

$$\nabla \times (\lambda \mathbf{a}) = (\nabla \lambda) \times \mathbf{a} + \lambda \operatorname{curl} \mathbf{a}$$

及 $\operatorname{curl} \operatorname{grad} a = 0$

则式 (1.42) 可写成

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{u} &= \sum_{a=1}^3 \nabla (u_a h_a) \times \nabla q_a = \sum_{a=1}^3 \left[\nabla (u_a h_a) \times \frac{\hat{\mathbf{e}}_a}{h_a} \right] \\ &= \sum_{\gamma=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_\gamma \left\{ \sum_{a=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \frac{\epsilon_{\beta a \gamma}}{h_a h_\beta} \frac{\partial}{\partial q_\beta} (u_a h_a) \right\} \end{aligned} \quad (1.43)$$

这里引入了置换张量 (Levi-Civita 符号) ϵ_{ijk} , 它定义为

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{当 } ijk \text{ 是顺序轮回时} \\ -1, & \text{当 } ijk \text{ 是逆序轮回时} \\ 0, & \text{当任意两个下标相同时} \end{cases} \quad (1.44)$$

式中 $\epsilon_{\beta a \gamma}$ 相当于 ϵ_{ijk} 。

这样, 旋度的分量是:

$$\begin{aligned} (\operatorname{curl} \mathbf{u})_1 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (u_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (u_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \\ (\operatorname{curl} \mathbf{u})_2 &= \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial (u_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (u_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \\ (\operatorname{curl} \mathbf{u})_3 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (u_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (u_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \end{aligned} \quad (1.45)$$

有了这些曲线坐标系的基本运算之后, 就不难写出曲线坐标系中的应变表达式, 它们是

$$\begin{aligned} \epsilon_{a\beta} &= [\mathbf{E}(\mathbf{u})]_{a\beta} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})_{a\beta} + (\mathbf{u} \nabla)_{a\beta}] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{h_a} \frac{\partial u_\beta}{\partial q_a} + \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial u_a}{\partial q_\beta} + \sum_{\gamma=1}^3 u_\gamma \times \right. \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{h_\alpha} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{h_\beta} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \right] \} \quad (1.46)$$

因此，线应变有

$$\epsilon_{kk} = \frac{1}{h_k} \left[\frac{\partial u_k}{\partial q_k} + \sum_{\gamma=1}^3 u_\gamma \begin{pmatrix} k \\ \gamma & k \end{pmatrix} \right] \quad (1.47)$$

切应变有

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_\beta}{h_\alpha} \frac{\partial(u_\beta/h_\beta)}{\partial q_\alpha} + \frac{h_\alpha}{h_\beta} \frac{\partial(u_\alpha/h_\alpha)}{\partial q_\beta} \right] \quad (\alpha \neq \beta) \quad (1.48)$$

于是，按式 (1.47) 和 (1.48) 就可写出两个常用曲线坐标系中的应变分量：

对于圆柱坐标系 (r, φ, z) ，有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right), \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \epsilon_{\varphi z} &= \epsilon_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) \\ \epsilon_{rz} &= \epsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \epsilon_{r\varphi} &= \epsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

对于球坐标系 (R, θ, φ) ，有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{RR} &= \frac{\partial u_R}{\partial R}, \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_R \right) \\ \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_R + (\cot\theta)u_\theta \right) \\ \epsilon_{\theta\varphi} &= \epsilon_{\varphi\theta} = \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - (\cot\theta)u_\varphi + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \epsilon_{\varphi R} &= \epsilon_{R\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R\sin\theta} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} - \frac{u_\varphi}{R} \right) \\ \epsilon_{R\theta} &= \epsilon_{\theta R} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

§ 3 动力学方程

弹性动力学方程是由物体内的应力、体积力（外力）及运动加速度构成的约束条件，可以从微分角度考虑，也可用积分方式建立。现从后一种方法给予考虑。

有体积为 V 的物体，它的表面积为 S ，运用动量定理，即 V 内所有质点的总动量变化率等于作用在这些质点上的合力，为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV = \iiint_V \mathbf{f} dV + \iint_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) dS \quad (1.51)$$

式中 ρ 为质点的密度， \mathbf{f} 是体积力， \mathbf{T} 是作用在表面 S 上的面力。这里不考虑质点的质量 ρdV 随时间变化的问题，所以上式左边可写成 $\iiint_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV$ 。

边界上的面力应与物体内部应力保持连续，即在边界上有

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \quad (1.52)$$

n_j 是边界表面法线 \mathbf{n} 的分量。这样将式 (1.51) 写成分量形式是

$$\iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV = \iiint_V f_i dV + \iint_S \sigma_{ij} n_j ds \quad (1.53)$$

应用 Gauss 散度定理，则上式变为

$$\iiint_V (\rho \ddot{u}_i - f_i - \sigma_{ij,j}) dV = 0 \quad (1.54)$$

式中字母上面加点表示时间微商 $\left(\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right)$ ，脚标之间的逗号

表示空间微商（如 $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ ）。这里要求被积函数满足

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + \sigma_{ij,j} \quad (1.55)$$

这就是动力学方程。

同样，考虑角动量定理，就可以得到在本章 § 1 中应用微分运算已知的所谓切应力成对性定理，即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 。

§ 4 线性弹性体中的应力应变关系 和应变能函数

由于外力作用到物体上使物体发生变形,产生应变 E ,相应地在物体内部也存在应力 Σ 。因而它们之间必然存在一定的关系,这种关系与物体本身的物理构成有关,要通过物理试验来得出。在本书中不考虑温度变化的影响。

对于最一般的情况,即各向异性线性弹性体中,应力与应变的关系有

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.56)$$

上式表示应力张量的每个分量是应变张量的所有分量的线性组合。系数 c_{ijkl} 在均匀弹性体中是常数,它有 81 个,构成一个四阶张量,称为弹性系数张量。由于应力与应变均是对称张量,即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 和 $\epsilon_{pq} = \epsilon_{qp}$, 所以有

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} \quad (1.57)$$

按此关系,可简化到只有 36 个独立的系数。如果从热力学角度来考虑,可有

$$c_{ijkl} = c_{pqij} \quad (1.58)$$

这样独立常数可简化到 21 个。

我们将对此作较详细的说明,并同时引进功、能的概念。假定体积为 V 的物体,表面积为 S ,按热力学第一定律,物体所具有的热力学能可以由于物体的变形而改变,但要遵守能量守恒原理,即在单位时间内,对物体所作的机械功+热量=能量(动能与热力学能的总和)的增加。让我们来逐个介绍上述诸项。

机械功:外力(体积力 f 和表面力 T) 在弹性体变形过程中,对它所作的功,在单位时间内有

$$\iiint_V f \cdot \dot{u} \, dV + \iint_S T \cdot \dot{u} \, dS = \iiint_V [f_i \dot{u}_i + (\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j}] dV \quad (1.59)$$

这里已应用了 Gauss 散度定理。将动力学方程式 (1.55) 代入, 再根据 σ_{ij} 和 ϵ_{ij} 的对称性, 则式 (1.59) 可变成:

$$\iiint_V (\rho \dot{u}_i \ddot{u}_i + \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (1.60)$$

热量: 若 $h(x, t)$ 为热流, 于是 $-h \cdot n$ 是单位时间内单位面积流入物体内的热量, 其中 n 是物体表面的外法线。如果 $Q(x, t)$ 代表输入物体内的热量, 则用热流表示为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V Q dV = - \iint_S h \cdot n dS \quad (1.61)$$

再应用散度定理, 则有

$$\dot{Q} = - \nabla \cdot h \quad (1.62)$$

动能: 动能的变化率是

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (1.63)$$

热力学能: 包括两部分, 一部分是弹性变形能, 另一部分是热能。若用 U 代表单位体积中的热力学能, 则有

$$\dot{U} = - h_{i,i} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{Q} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (1.64)$$

在 U 、 Q 和 ϵ_{ij} 有偏离热力学平衡状态的小扰动情况下, 有

$$dU = dQ + \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = T dI + \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (1.65)$$

这里 I 是单位体积的熵, T 是绝对温度。

应变能: 物体在变形过程中所获得的弹性能称为应变能, 它有

$$E = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (1.66)$$

而

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (1.67)$$

称作应变能函数, 也叫单位体积中的应变能。由式 (1.67) 的关

系, 可得

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (1.68)$$

又由式 (1.65) 知, 等熵过程中, 应力也可表示为

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T \quad (1.69)$$

如果应变能函数中的应力分量用线性的弹性本构关系代入, 则有

$$W = \frac{1}{2} c_{ijpq} \epsilon_{ij} \epsilon_{pq} \quad (1.70)$$

这是应变的二次形式, 自然就有 $c_{ijpq} = c_{pqij}$ 的对称性质。

若物体是各向同性的, 即在一点上, 所有方向的弹性性质相同, 这时, c_{ijpq} 是四阶各向同性张量 (各向同性张量是指在坐标系转动时, 它的分量保持不变), 它可表示为

$$c_{ijpq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \quad (1.71)$$

这样, 最后简化成 2 个独立常数 λ 和 μ , 称为 Lamé' 常数。此时的应力与应变关系有

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.72)$$

§ 5 互易性定理和动力学方程的 Green 函数

现在考虑在两种状态的外力作用及边界条件情况下, 两组不同的位移解之间的关系。利用 Betti 提出的互易性定理, 可以把复杂的问题简化。

若第一种状态是, 体积力为 f , 位移解是 $u(x, t)$, 相应的边界 S 上的面力为 $T(u, n)$ 。而第二种状态是, 体积力为 g , 解为 $v(x, t)$, 相应的边界面力为 $T(v, n)$ 。 n 是边界的外法线。则可以得到 u 和 v 之间有如下互易关系式:

$$\begin{aligned} & \iiint_V (f - \rho \ddot{u}) \cdot v \, dV + \iint_S T(u, n) \cdot v \, dS \\ &= \iiint_V (g - \rho \ddot{v}) \cdot u \, dV + \iint_S T(v, n) \cdot u \, dS \quad (1.73) \end{aligned}$$

这个关系式很容易证明。利用动力学方程及散度定理，等式左边可化为 $\iiint_V c_{pqij} v_{i,j} u_{p,q} dV$ ，而右边可化为 $\iiint_V c_{ijpq} u_{i,j} v_{p,q} dV$ ，可见，只要左边或右边改变哑标，并应用对称性关系 $c_{ijpq} = c_{pqij}$ ，式 (1.73) 就得到了证明。式 (1.73) 也称为互易性定理。它的物理意义是：第一组力（包括外力及惯性力）在第二组位移上所作的功，等于第二组力（包括外力及惯性力）在第一组位移上所作的功。

Betti 互易性定理中的两组力学量，不必取在同一时刻，例如 u 、 \ddot{u} 、 $T(u, n)$ 和 f 取在 t_1 时刻，而 v 、 \ddot{v} 、 $T(v, n)$ 和 g 取在 t_2 时刻，式 (1.73) 仍成立。进一步，如果取 $t_1 = t$ ， $t_2 = \tau - t$ ，然后对式 (1.73) 两边在 $0 \sim \tau$ 的时间范围内积分，则

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \left\{ \iiint_V (f(t) - \rho \ddot{u}(t)) \cdot v(\tau - t) dV + \right. \\ & \quad \left. \iint_S T(u(t), n) \cdot v(\tau - t) dS \right\} dt \\ &= \int_0^\tau \left\{ \iiint_V (g(\tau - t) - \rho \ddot{v}(\tau - t)) \cdot u(t) dV + \right. \\ & \quad \left. \iint_S T(v(\tau - t), n) \cdot u(t) dS \right\} dt \quad (1.74) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \rho \{ \ddot{u}(t) \cdot v(\tau - t) - u(t) \cdot \ddot{v}(\tau - t) \} dt \\ &= \rho \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} \{ \dot{u}(t) \cdot v(\tau - t) + u(t) \cdot \dot{v}(\tau - t) \} dt \\ &= \rho \{ \dot{u}(\tau) \cdot v(0) - \dot{u}(0) \cdot v(\tau) + u(\tau) \cdot \dot{v}(0) - u(0) \cdot \dot{v}(\tau) \} \end{aligned}$$

如果在某时刻 τ_0 之前, u 和 v 及 \dot{u} 和 \dot{v} 在整个 V 内处处为零, 那么必定有

$$\int_{-\infty}^{\tau} \rho [\ddot{u}(t) \cdot v(\tau - t) - u(t) \cdot \ddot{v}(\tau - t)] dt = 0$$

这样, 对于过去是静止的位移场, 式 (1.74) 形式的 Betti 定理有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\tau} dt \iiint_V \{u(x, t) \cdot g(x, \tau - t) - v(x, \tau - t) \cdot f(x, t)\} dV \\ &= \int_{-\infty}^{\tau} dt \iint_S \{v(x, \tau - t) \cdot T(u(x, t), n) - \\ & \quad u(x, t) \cdot T(v(x, \tau - t), n)\} dS \end{aligned} \quad (1.75)$$

在地震学问题中, 弹性动力学方程中的体积力项代表震源的受力情况, 它是较为复杂的, 比如震源的断层位错, 这些力只在有限时间内作用在有限的断层面上。对于这种复杂的受力情况, 可以引用 Green 函数法来解决。即先不顾及震源的复杂性, 而只考虑集中在某一点上、某一时刻、某一方向上的单位脉冲所引起的位移, 实际震源引起的位移则看作上述简单震源所产生的位移的合成。

简单震源引起的位移场是弹性动力学的 Green 函数。若单位脉冲作用在 $x=\xi$ 处、 $t=\tau$ 时刻及 x_n 方向上, 则在物体的另外任意一点上, 在 t 时刻 x_i 方向上的位移为 $G_{in}(x, t; \xi, \tau)$, 因而这 Green 函数是一个张量, 它在物体的整个体积 V 内应满足方程

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{in} = \delta_{in} \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ c_{ijpq} \frac{\partial}{\partial x_q} G_{pn} \right\} \quad (1.76)$$

其初始条件为, 当 $t \leq \tau$ 及 $x \neq \xi$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} G(x, t; \xi, \tau) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} G(x, t; \xi, \tau) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.77)$$

并在边界面 S 上满足相应的条件。

在实际应用中可以利用各种不同的边界条件。比如 S 是刚性

的, 边界条件与时间无关, 则 Green 函数中的时间起始点可以任意移动, 即

$$\begin{aligned} G(x, t; \xi, \tau) &= G(x, t - \tau; \xi, 0) \\ &= G(x, -\tau; \xi, -t) \end{aligned} \quad (1.78)$$

这是对于源点和接收点的时间对换关系。

弹性动力学 Green 函数的实际计算, 可能仍是一个复杂的问题。后面将结合地震问题给予计算。

有了 Green 函数后, 将它应用于互易性定理, 就可计算出实际的位移场来。例如要计算在 V 体积内、在体积力 f 作用及相应的边界条件下产生的位移场 u 。根据互易性原理, 可提出另一组情况: 在 ξ 处的 x_i 方向作用着瞬时单位集中力, 即 $g_i(x, t) = \delta_{in} \delta(x - \xi) \delta(t)$, 考虑边界条件后它的解 $v_i(x, t) = G_{in}(x, t; \xi, 0)$, 将这些代入式(1.75)中, 得

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V f_i(\xi, \tau) G_{in}(\xi, t - \tau; x, 0) dV(\xi) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_S \{ G_{in}(\xi, t - \tau; x, 0) T_i[u(\xi, \tau), n] - \\ &\quad u_i(\xi, \tau) c_{ijpq}(\xi) n_j \cdot G_{pn,q}(\xi, t - \tau; x, 0) \} dS(\xi) \end{aligned} \quad (1.79)$$

此表达式中, 如果是均匀介质, 则 c_{ijpq} 是常数; 对于某些特定边界条件, 表达式还可简化。

§ 6 最小势能定理和 Hamilton 原理

能量法是解地震学问题的一个有力工具, 下面介绍一个最普遍的定理——最小势能定理。物体在外力作用下将引起弹性变形, 体积内将存在应力。我们要研究这种变形后在平衡时的所谓总势能与应力的关系, 其总势能是

$$\text{总势能} = \text{应变能} - \text{已知外力所作的功}$$

对下面两种位移情况的总势能作比较：第一种情况的位移适合平衡方程，同时也满足边界条件；而第二种情况的位移，只适合有关位移的边界条件，但不满足平衡方程及以外力表示的边界条件。我们来证明第一种情况的总势能比第二种情况小。也就是说，在满足已知位移边界条件的一切位移中，以能满足平衡方程的外力边界条件的位移所形成的总势能为最小。证明如下：

设第一种情况的位移为 u ，相应的应变分量为 ϵ_{ij} ，应力分量为 σ_{ij} ，因此应变能函数是

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (1.80)$$

在体积为 V 的弹性体内总的应变能为

$$U = \iiint_V W dV = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (1.81)$$

其中

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (1.82)$$

位移 u 满足平衡方程，即

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1.83)$$

而且在以外力表示边界条件的那部分表面 S_A 上满足

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \quad (1.84)$$

而在以位移给出边界条件的那部分表面 S_B 上有

$$u_i = u_i^* \quad (1.85)$$

u_i^* 是给出的已知条件。

令另外一种情况的位移为

$$u = u + \delta u \quad (1.86)$$

此位移只能适合 S_B 边界上的条件，但不满足平衡方程(1.83)和在 S_A 上的边界条件，因而在 S_B 上有

$$\delta u = 0 \quad (1.87)$$

引进如下符号

$$\left. \begin{aligned} \delta \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \\ \delta \sigma_{ij} &= \lambda \delta \theta \delta_{ij} + 2\mu \delta \epsilon_{ij} \\ \delta \theta &= \delta \epsilon_{kk} \end{aligned} \right\} \quad (1.88)$$

这样,两组位移情况的应变能分别为 U (对应于 u) 和 $U + \delta U$ (对应于 $u + \delta u$)。而第二种情况的应变能函数 $W + \delta W$ 有

$$\begin{aligned} W + \delta W &= \frac{1}{2} (\epsilon_{ij} + \delta \epsilon_{ij}) (\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}) \\ &= W(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}) + W(\sigma_{ij}, \delta \epsilon_{ij}) + W(\delta \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}) + \\ &\quad W(\delta \sigma_{ij}, \delta \epsilon_{ij}) \end{aligned} \quad (1.89)$$

式中 $W(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij})$ 就是第一种情况的应变能函数,而

$$2W(\sigma_{ij}, \delta \epsilon_{ij}) = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (1.90)$$

同理

$$2W(\delta \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}) = \delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (1.91)$$

$$2W(\delta \sigma_{ij}, \delta \epsilon_{ij}) = \delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (1.92)$$

考虑应力应变关系,不难证明有 $W(\sigma_{ij}, \delta \epsilon_{ij}) = W(\delta \sigma_{ij}, \epsilon_{ij})$ 。

并令
$$\Omega = \iiint_V [W(\sigma_{ij}, \delta \epsilon_{ij}) + W(\delta \sigma_{ij}, \epsilon_{ij})] dV \quad (1.93)$$

则

$$\Omega = 2 \iiint_V W(\sigma_{ij}, \delta \epsilon_{ij}) dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (1.94)$$

按 Gauss 公式,可写成

$$\Omega = \iint_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS - \iiint_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV \quad (1.95)$$

也即

$$\Omega = \iint_S T_i \delta u_i dS + \iiint_V f_i \delta u_i dV \quad (1.96)$$

注意到物体从平衡点的位移 u 开始,变化到 $u + \delta u$,这段时间内外力不变,所以可将式(1.96)写成

$$\Omega = \delta \left[\iint_S T_i u_i dS + \iiint_V f_i u_i dV \right] \quad (1.97)$$

按总势能的定义有

$$E = U - \iint_S T_i u_i dS - \iiint_V f_i u_i dV \quad (1.98)$$

因此,对于第二种情况的变化量有

$$\delta E = \delta U - \delta \left[\iint_S T_i u_i dS + \iiint_V f_i u_i dV \right] \quad (1.99)$$

而应变能变化是

$$\delta U = \Omega + \iiint_V W(\delta \sigma_{ij}, \delta \epsilon_{ij}) dV \quad (1.100)$$

代入式(1.99)得总势能变化是

$$\delta E = \iiint_V W(\delta \sigma_{ij}, \delta \epsilon_{ij}) dV \quad (1.101)$$

这是应变的二次形式,一定有

$$\delta E \geq 0 \quad (1.102)$$

这就证明了适合已知位移边界条件的位移中,能满足平衡方程的位移所造成的总势能为最小。

上述最小势能定理是在弹性体平衡状态下进行讨论的。我们还应讨论弹性介质的动力学特征,为此引用 Lagrange 密度 L , 它可大大简化许多力学公式的表达形式。

定义

$$L = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (1.103)$$

若 ρ 为常量,则有

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.104)$$

以及

$$\frac{\partial L}{\partial \epsilon_{ij}} = -\sigma_{ij} \quad (1.105)$$

则动力学方程可以用 Lagrange 形式表示为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) = f_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (1.106)$$

再定义一个四梯度算子, 即

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial t} \right), (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (1.107)$$

则上述 Lagrange 方程可用更简洁的形式表示为

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial (u_{k,\mu})} = f_k \quad (1.108)$$

在地震学中, 更注重讨论动力学过程, 因而要介绍动态中的 Hamilton 原理。Hamilton 原理也称为虚功原理, 它是最小势能原理的另一种物理解释。

按最小势能原理, 弹性力学的正确解必定使 $\delta E = 0$, 这样式 (1.99) 变为

$$\delta U = \int_{S_A} T_i \delta u_i dS + \iiint_V f_i \delta u_i dV \quad (1.109)$$

在动态情况下, 必须考虑惯性力的影响, 这样应该有

$$\begin{aligned} \delta U &= \iiint_V f_i \delta u_i dV + \int_{S_A} T_i \delta u_i dS \\ &= \iiint_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \end{aligned} \quad (1.110)$$

上式在任何时刻都成立, 取任意一段时间间隔 (t_1, t_2) , 上式中的惯性力项为

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV &= \iiint_V \rho dV \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dt \right] \\ &= \iiint_V \rho dV \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \delta u_i \right] \Big|_{t_1}^{t_2} - \iiint_V \rho dV \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \right] dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \delta \left[\frac{1}{2} \iiint_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV \right] dt \end{aligned} \quad (1.111)$$

如果选择 δu 在 $t=t_1$ 及 $t=t_2$ 时都为零, 则式(1.110)可重新写成

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V (L + f_i u_i) dV + \iint_{S_A} T_i u_i dS \right] dt = 0 \quad (1.112)$$

式中假设 f 与 u 无关。它也称为 Hamilton 变分原理的表达式。

习题与思考题

1. 试用微元体的力矩平衡条件及体积 V 内的角动量守恒定律来证明应力张量为对称张量。

2. 试证明对于各向同性介质中传播的平面体波, 应变能函数 $\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$ 的值为动能密度 $\frac{1}{2} \rho \dot{u}^2$ 。

3. 如果在固定应变下温度升高, 物体中的应力将如何? 应力遵守 Hooke 定律式(1.56)吗? 还是必须以某种方式修改?

4. 从式(1.52)出发, 试求作用于以 \hat{n} 为法线的面元上的位移 u 所引起的面力 T 为下述形式: $T(u, \hat{n}) = \lambda(\nabla \cdot u) \hat{n} + \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} + \hat{n} \times (\nabla \times u) \right)$, 这里 $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = (\hat{n} \cdot \nabla) u$ 。

5. 面力 $T[u(x), \hat{n}]$ 是位置 x 的函数, 在法线为 \hat{n} 的界面 S 上取微元体, 有平衡方程 $T(x + \delta x, \hat{n}) dS - T(x, \hat{n}) dS = (\rho \ddot{u} - f) dS dx$, 当 $\delta x \rightarrow 0$ 时, 此式的左边为零, 即 $T(x + \delta x, \hat{n}) - T(x, \hat{n}) \rightarrow 0$, 当 δx 平行于 \hat{n} 时, 此表示 $T(u, \hat{n})$ 是 x 的连续函数。

(a) 设想一本书放在一个平桌面上, 面力是桌面上位置的连续函数吗? 为什么? 此与面力是 x 的连续函数的结论是否矛盾? 请确切说明。

(b) 试证明 $\sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zz}$ 在任何介质中都是 z 的连续函数, 但 τ_{xz} 在 x 或 y 方向上不必连续, $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$ 在 z 方向上不必连续。

6. 对于流体中压力为 p 的某点, 应力张量是各向同性的, 且

具有分量 $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$ 。为强调固体中的应力与流体中存在的应力之间的差别，用 $\tau_{ij} = \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} + \tau'_{ij}$ 定义差应力，用 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij} + \epsilon'_{ij}$ 定义差应变（流体中的 τ'_{ij} 与 ϵ'_{ij} 为零）。试证明在各向同性弹性介质中的应变能 W 为：

$$W = \frac{1}{2} \left[\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \epsilon_{ii} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon'_{ij} \epsilon'_{ij} \right]$$

并证明 ϵ_{ii} 是单位体积的体积应变，且 $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ ，并说明为什么 k 和 μ 必为正数。

7. 何谓 Green 函数？按互易原理，具体推导出将位移用 Green 函数表示的式 (1.79)。

第二章 无限介质中波的传播

§ 1 波动方程的基本解

波是在介质中以有限速度传播的扰动,它通常具有周期性,如声波、水波、电磁波等。所有波动有两个重要的共同特征:一是传递能量至远处;二是这种扰动只通过介质,而不给介质留下永久位移。波动传播时,连续介质中每一质点的运动都与前面质点运动相类似,只是时间上有延迟,最后仍回到它原来的位置。根据这两个共同特征,无论对何种介质,所有的波动都有可能归结为要服从如下二阶线性偏微分方程

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

式中, $\phi(x, t)$ 代表以速度 c 传播的扰动。式(2.1)也称为波动方程。

可以很容易求得式(2.1)的一些基本解。

我们通过如下关系,改变式(2.1)中的独立变量。令

$$\left. \begin{aligned} u &= t - \frac{1}{c}(lx + my + nz) \\ v &= t + \frac{1}{c}(lx + my + nz) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

且 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 。此时,注意到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{l}{c} \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{m}{c} \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{n}{c} \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

这样,方程(2.1)可写成

$$4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0 \quad (2.4)$$

对上式积分,得

$$\begin{aligned} \phi = f(u) + g(v) &= f\left(t - \frac{lx + my + nz}{c}\right) + \\ &g\left(t + \frac{lx + my + nz}{c}\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中 f, g 是任意的两次可微函数。这是波动方程的 D'Alembert 解。

在某一给定时刻 t , 如果要使 ϕ 是常量, 则要求 x, y, z 满足 $lx + my + nz = \text{常量}$ 。这是一个平面方程, 其法线的方向余弦为 (l, m, n) , 因而称这种波为平面波, 称 $lx + my + nz = \text{常量}$ 的平面为波前。用单位矢量 \hat{p} 表示

$$\hat{p} = li + mj + nk \quad (2.6)$$

那么式(2.5)可写成

$$\phi = f\left(t - \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) \quad (2.7)$$

若考虑的是一维问题, 则方程(2.1)可简化为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

D'Alembert 解(2.5)变成为

$$\phi = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (2.9)$$

先讨论下面这种情况

$$\phi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (2.10)$$

因为有

$$\begin{aligned} \phi(x + c\tau, t + \tau) &= f\left(t + \tau - \frac{x + c\tau}{c}\right) \\ &= f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \phi(x, t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

表示在距离为 x , 时刻为 t 的 ϕ 值等于在距离为 $x + c\tau$, 时刻为 $t + \tau$ 的 ϕ 值, 因而 $\phi = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ 代表在 x 正方向传播的扰动。它的速度是 c , 而且形状保持不变。同样可以讨论 $\phi = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ 的情况, 它代表在 x 负方向传播的扰动。这样, 也称式(2.5)和(2.9)为波动方程的行波形式的解。

对于具有球对称的球坐标情况, 方程(2.1)可简化为

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial R^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}, \phi_1 = R\phi \quad (2.12)$$

利用前面解的结果, 可有

$$\phi = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{c}\right) + \frac{1}{R} g\left(t + \frac{R}{c}\right), (R \neq 0) \quad (2.13)$$

其波阵面(波前)为同心球面。即给定某一时刻, ϕ 为常量的所有点离原点的距离都相同, 称这种波为球面波。式(2.13)中右边第一项代表由原点向外传播的波, 第二项则代表传向原点的波。

进一步, 对方程(2.1)的两边作 Fourier 变换。按 Fourier 变换的定义

$$S(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.14)$$

这样, 在变换域上的方程有

$$\nabla^2 S + k_c^2 S = 0, \quad k_c = \frac{\omega}{c} \quad (2.15)$$

它称为 Helmholtz 方程, k_c 称为波数。其解经 Fourier 反变换, 可

得原来问题时间域上的解。即

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.16)$$

由于 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 是实函数，所以它的变换有

$$S(\mathbf{x}, -\omega) = S^*(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.17)$$

式中“*”号表示复共轭值。

因此，式(2.16)也可表示为

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\mathbf{x}, -\omega) e^{-i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} S(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.18)$$

定义传播矢量 \mathbf{k} 为

$$\mathbf{k} = k_c \hat{\mathbf{p}} \quad (2.19)$$

只考虑式(2.7)的第一项，它的 Fourier 变换有

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right\} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= S(0, \omega) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

假定

$$S(0, \omega) = A(\omega) e^{-ix_0(\omega)} \quad (2.21)$$

式中， A, x_0 均为常函数，则由式(2.18)得到波谱表象(表示式)

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - x_0(\omega)]} d\omega \quad (2.22)$$

这样，将波函数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 表示成在整个频率范围上的平面波的积分。这就是 Fourier 的叠加原理。因而波函数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 的一个波谱分量有如下形式

$$\psi(\mathbf{x}, t, \omega_0) = A(\omega_0) \cos\left[\omega_0 \left(t - \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) - x_0\right] \quad (2.23)$$

式中 ω_0 是 ω 的某一特定值。幅度因子 $A(\omega_0)$ 称波谱幅度，余弦

项内的量称为相位。 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 称为周期, 式(2.23)中的 t 用 $t+T$ 替代, 其值不变, 因而认为 ψ 对于时间是调谐的。同理, 波长 $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0}$, 用 $\hat{p} \cdot x + \lambda$ 替代 $\hat{p} \cdot x$, ψ 也不受影响, 因而 ψ 对于空间, 同样是调谐的。

角频率 ω 、周期 T 、波长 λ 及波数 k_c 之间有如下的关系

$$k_c = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.24)$$

波动方程解虽对时间和空间都有周期性, 但还不能说明满足波动方程的波就是行波。如对于式(2.5)中 $f=g$ 的情况, 即将两个相反方向传播的行波叠加, 这时有

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t, \omega_0) &= A(\omega_0) \left\{ \cos \left[\omega_0 \left(t - \frac{\hat{p} \cdot \hat{x}}{c} \right) - x_0 \right] \right. \\ &\quad \left. + \cos \left[\omega_0 \left(t + \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{x}}{c} \right) - x_0 \right] \right\} \\ &= 2A(\omega_0) \cos \left[\frac{\omega_0}{c} (\hat{p} \cdot \mathbf{x}) \right] \cos(\omega_0 t - x_0) \quad (2.25) \end{aligned}$$

这是驻波, 它的形状是不移动的, 且在 $\hat{p} \cdot \mathbf{x} = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3\lambda}{4}, \dots$ 的平面上为零。这些平面称为节平面。

§ 2 标量 Helmholtz 方程的分离变数解

讨论在直角坐标、圆柱坐标及球坐标情况下, 通过变量分离法求解。

直角坐标 (x, y, z) 情况:

设 Helmholtz 方程式(2.15)解的形式为

$$S = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.26)$$

代入方程式(2.15), 则有

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k_c^2 = 0 \quad (2.27)$$

这里符号 “” 表示对变量进行二次微商。且

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (2.28)$$

式中 k_x, k_y, k_z 称为分离常数。若 X, Y, Z 能满足如下方程，则式 (2.27) 就得以满足，即

$$\left. \begin{aligned} X'' + k_x^2 X &= 0 \\ Y'' + k_y^2 Y &= 0 \\ Z'' + k_z^2 Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

这些方程的解分别比例于

$$e^{\pm i k_x x}, \quad e^{\pm i k_y y}, \quad e^{\pm i k_z z}$$

再引用符号 $k_x = l k_c, k_y = m k_c, k_z = n k_c$ ，并对上面的解取负号形式，有

$$S = A e^{-i k_c (lx + my + nz)} = A e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.30)$$

且有 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 。可以看出，对于每一个 k_c 值，总可以找到无数多个 Helmholtz 方程的解，使式 (2.27) 得以满足。从数学角度考虑，只要保证 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ，也允许它们取复数。因而最一般形式的解为

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \iint A(l, m, \omega) e^{-i k_c [lx + my + z \sqrt{1 - l^2 - m^2}]} dl dm \quad (2.31)$$

式中 $A(l, m, \omega)$ 是 l, m 的任意函数。

如果将式 (2.31) 的变量换成 k_x 和 k_y ，并且只考虑实值，且为了符号一致性起见，引进因子 $(2\pi)^{-2}$ ，这样有

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y, \omega) e^{-i[k_x x + k_y y + z \sqrt{k_c^2 - k_x^2 - k_y^2}]} dk_x dk_y \quad (2.32)$$

可以把被积函数中的 $A(k_x, k_y, \omega) \exp[-iz \sqrt{k_c^2 - k_x^2 - k_y^2}]$ 看作是 $S(\mathbf{r}, \omega)$ 的二重 Fourier 变换，即

$$A(k_x, k_y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\mathbf{r}, \omega) e^{i[k_x x + k_y y + z \sqrt{k_c^2 - k_x^2 - k_y^2}]} dx dy \quad (2.33)$$

回到时间域，有

$$A(k_x, k_y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, t) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d\mathbf{r} dy dt \quad (2.34)$$

其反变换是

$$\phi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} dk_x dk_y d\omega \quad (2.35)$$

此结果表示了一般的叠加原理。

圆柱坐标 (r, φ, z) 情况：

在圆柱坐标系中，Helmhotz 方程的形式是

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + k_c^2 S = 0 \quad (2.36)$$

用分离变数法，设式 (2.36) 解的形式是

$$S = H(r)\Phi(\varphi)Z(z) \quad (2.37)$$

要求 H 、 Φ 、 Z 满足：

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) H = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - (k^2 - k_c^2) Z = 0 \quad (2.40)$$

式中 k 和 m 为分离常数，即有 $k^2 + m^2 = k_c^2$ 。

式 (2.38) 是 m 阶 Bessel 方程，它的解用 $H_m(kr)$ 函数表示。

式 (2.39) 的解是

$$\Phi = \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (m\varphi) \text{ 或 } e^{\pm im\varphi}$$

在大多数应用中，要求 S 是单值函数。由于 $\Phi(2\pi + \varphi) = \Phi(\varphi)$ ，这就要求 m 必须是整数，而且要求式 (2.39) 中取 m^2 的形式。因为若在式 (2.39) 中取 $-m^2$ ，解的形式为 $\exp(\pm m\varphi)$ ，将使 S 不为单值。

令 $\nu_c^2 = k^2 - k_c^2$, 则式 (2.40) 的解为

$$Z = e^{\pm \nu_c z}$$

取 $k > k_c$ 及指数中的下方符号, 这能保证当 z 趋于无限时为零。将上面三部分合起来, 得到

$$H_m(kr) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (m\varphi) e^{\pm \nu_c z} \quad (2.41)$$

最后, 其一般解可取

$$S(x, \omega) = \sum_m \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} (m\varphi) \int A(m, k) H_m(kr) e^{\pm \nu_c z} dk \quad (2.42)$$

其中 $A(m, k)$ 是 m 和 k 的任意函数。如果要求解在 $r=0$ 处为有限值, 则 $H_m(kr) = J_m(kr)$ 。在这种情况下, 有

$$S^\pm = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty A(m, k) \Phi_m^\pm(k_c r) dk \quad (2.43)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Phi_m^\pm(k_c r) &= e^{\pm \nu_c z} Y_m(kr, \varphi) \\ Y_m(kr, \varphi) &= J_m(kr) e^{im\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

球坐标 (R, θ, φ) 情况:

在球坐标系中, Helmholtz 方程的形式是

$$\frac{\partial^2 S}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial S}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} + k_c^2 S = 0 \quad (2.45)$$

设其解为

$$S = \mathcal{R}(R) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (2.46)$$

代入方程 (2.45), 则要求 $\mathcal{R}, \Theta, \Phi$ 满足:

$$\frac{d^2 \mathcal{R}}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\mathcal{R}}{dR} + \left[k_c^2 - \frac{l(l+1)}{R^2} \right] \mathcal{R} = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{d\Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (2.49)$$

这里 l 和 m 为分离系数。像在柱坐标系情况一样,如果要求 $S(2\pi + \varphi) = S(\varphi)$, 则 m 必须是整数。

式(2.48)的解是缔合 Legendre 函数。在大多数的实际应用中,只需要 $P_l^m(\cos\theta)$, 对于整数 l , 在 $0 \leq \theta \leq \pi$ 的范围中,它是有限的。方程(2.47)可用球 Bessel 函数 $Z_l(k_c R)$ 求解。这三部分合起来,式(2.45)的解为

$$Z_l(k_c R) P_l^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (m\varphi) \quad (2.50)$$

这里 l, m 都是整数。可写成更一般的形式

$$S^\pm = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A(l, m) \Phi_{ml}^\pm(k_c R) \quad (2.51)$$

其中

$$\Phi_{ml}^\pm(k_c R) = \begin{Bmatrix} j_l(k_c R) \\ h_l^{(2)}(k_c R) \end{Bmatrix} Y_{ml}(\theta, \varphi) \quad (2.52)$$

$$Y_{ml}(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (2.53)$$

§ 3 矢量 Helmholtz 方程的分离变数解

上一节讨论了标量 Helmholtz 方程的解的形式,现在来讨论矢量 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \mathbf{u} + k_c^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2.54)$$

这种方程的分离变数问题更为复杂。首先考虑直角坐标,其三个独立变量即坐标分量 x_1, x_2, x_3 。方程中的三个未知函数是 u_1, u_2, u_3 , 即是矢量的三个分量。因为 $\nabla^2 \mathbf{i} = \nabla^2 \mathbf{j} = \nabla^2 \mathbf{k} = 0$, 故式(2.54)可分离成三个标量方程, 即

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u_1 + k_c^2 u_1 &= 0 \\ \nabla^2 u_2 + k_c^2 u_2 &= 0 \\ \nabla^2 u_3 + k_c^2 u_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

每个方程中只包含一个单独的未知函数。但在球坐标系中却不能分离成三个独立的标量方程，即三个未知函数 u_R, u_θ, u_φ 的方程有一定的关联，它们是

$$\nabla^2 u_R + \left(k_c^2 - \frac{2}{R^2} \right) u_R - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.56)$$

$$\nabla^2 u_\theta + \left(k_c^2 - \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \right) u_\theta + \frac{2}{R^2} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} - \frac{2}{R^2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.57)$$

$$\nabla^2 u_\varphi + \left(k_c^2 - \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \right) u_\varphi + \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + \frac{2}{R^2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.58)$$

这是由三个两阶齐次微分方程构成的联立方程组，经常地， u_R, u_θ, u_φ 对每一个变量会导致一个六阶微分方程。对于其他正交曲线坐标系也会出现类似的问题。为简化矢量方程的解，回避这种问题。我们设法寻找一些方法，将 \mathbf{u} 分解成三个独立的矢量，每一个矢量只产生用一个单独的标量势函数表示的二阶偏微分方程，而每一个标量方程必须可用它的独立变量进行分离。最后，每个环节的结果构成了矢量方程的一般解。这种方法就称为矢量 Helmholtz 方程的矢量分离变数法。

总结一下，为得到矢量 Helmholtz 方程的上述解，应具备如下三个条件：

- (1) 矢量解从某一意义上说必须是正交的。
- (2) 三个标量方程必须可用它的独立变量进行分离。
- (3) 矢量解中总有一个切于坐标曲面，另有一个垂直于坐标曲面。

可以说，如果一个矢量场能满足这些要求，则认为矢量是可分离的。

现在留下来的问题是如何选择三个标量，使它们能表示矢量

场。可以采用 Helmholtz 分解定理, 即

$$\mathbf{u} = \text{grad}\varphi + \text{curl } \mathbf{A} \quad \text{div}\mathbf{A} = 0 \quad (2.59)$$

式中, 梯度项称为纵向分量, 因它指向标量势的最大变化率方向。旋度项称为横向分量。矢量场的这种分法使我们有可能根据前面所讲的第三个要求, 在应用边界条件时进行化简。

按矢量解的正交性要求, 可选择横向解中的两个矢量, 它们垂直、或者切于坐标曲面中的一个。当然也应注意使独立的标量势简化到三个。

我们寻求的横向解中, 第一个横向解是 $\mathbf{M} = \text{curl}(\mathbf{a}\psi)$, ψ 称为标量势, 它满足 $\nabla^2\psi + k_c^2\psi = 0$ 。并引入一个垂直坐标面的矢量 \mathbf{a} , 在直角坐标系和圆柱坐标系中, 使 $\mathbf{a} = \mathbf{k}$, 在球坐标系中, 取 $\mathbf{a} = \mathbf{R}$, 因而 \mathbf{M} 是垂直于 \mathbf{a} 的。对 \mathbf{M} 作用算子 $(\nabla^2 + k_c^2)$, 则有

$$\nabla^2\mathbf{M} + k_c^2\mathbf{M} = \text{curl}[\psi\nabla^2\mathbf{a} + 2(\text{grad}\psi \cdot \text{grad}\mathbf{a})] \quad (2.60)$$

由于 \mathbf{a} 是常矢量, 故此式右边为零。即 \mathbf{M} 满足矢量 Helmholtz 方程且在坐标面内。

第二个横向解可考虑是垂直于上述坐标面的。引入另一标量势 χ , 它满足 $\nabla^2\chi + k_c^2\chi = 0$, 构成的解是

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k_c} \text{curl curl}(\mathbf{a}\chi) \quad (2.61)$$

显然, $\nabla^2\mathbf{N} + k_c^2\mathbf{N} = 0$ 。其中的因子 $\frac{1}{k_c}$ 是为了使两个横向解有相同的量纲。

同理, 对于纵向解也引入一个标量势 φ , 即

$$\mathbf{L} = \frac{1}{k_c} \text{grad}\varphi \quad (2.62)$$

于是, 矢量 Helmholtz 方程的一般解可通过三个标量势 φ, ψ, χ 的线性组合, 并考虑相应的物理边界条件来得到。

三个标量势 φ, ψ, χ 满足标量 Helmholtz 方程, 构成三个独立的矢量场, 它们是

$$\left. \begin{aligned} M &= \text{curl}(\mathbf{a}\psi) = \text{grad}\psi \times \mathbf{a} \\ N &= \frac{1}{k_c} \text{curl} \text{curl}(\mathbf{a}\chi) \\ L &= \frac{1}{k_c} \text{grad}\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

L, M, N 也称为 Hansen 矢量。很容易证明, 这些矢量有如下关系

$$\text{div} M = 0, \text{div} N = 0, \text{div} L = -k_c \varphi, \text{curl} L = 0 \quad (2.64)$$

进一步, 如果标量势 φ, ψ, χ 之间没有差异, 则有

$$\left. \begin{aligned} M &= k_c L \times \mathbf{a} = \frac{1}{k_c} \text{curl} N \\ N &= \frac{1}{k_c} \text{curl} M \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

现在利用求解标量 Helmholtz 方程的方法来得到 Hansen 矢量的分离变数解。以球坐标为例给予推导。

若标量本征函数是 $S = f(R)Y(\theta, \varphi)$, 将它代入 Hansen 矢量中, 并注意 $\mathbf{a} = R\hat{\mathbf{e}}_R$ ($\hat{\mathbf{e}}_R$ 为径向单位矢量), 则得

$$\left. \begin{aligned} M &= f(R)C(\theta, \varphi) \\ k_c N &= \left[k_c^2 R f(R) + \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R f(R)) \right] P(\theta, \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R f(R)) B(\theta, \varphi) \\ k_c L &= \frac{\partial f(R)}{\partial R} P(\theta, \varphi) + \frac{1}{R} f(R) B(\theta, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

式中矢量 C, P, B 只与 θ, φ 有关, 称为矢量球调和函数。具体表示为

$$\left. \begin{aligned} P(\theta, \varphi) &= Y(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_R \\ B(\theta, \varphi) &= R \text{grad} Y(\theta, \varphi) = \hat{\mathbf{e}}_R \times C(\theta, \varphi) \\ C(\theta, \varphi) &= \text{curl}(\hat{\mathbf{e}}_R R Y(\theta, \varphi)) \\ &= \text{grad} Y \times R \hat{\mathbf{e}}_R = B \times \hat{\mathbf{e}}_R \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

进一步用本征数 m, l 表示为:

$$\left. \begin{aligned}
P_{ml}(\theta, \varphi) &= Y_{ml}(\theta, \varphi) \hat{e}_R = \hat{e}_R P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \\
\sqrt{l(l+1)} B_{ml}(\theta, \varphi) &= R \text{grad } Y_{ml}(\theta, \varphi) \\
&= \left(\hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{ml}(\theta, \varphi) \\
\sqrt{l(l+1)} C_{ml}(\theta, \varphi) &= \text{curl}[R \hat{e}_R Y_{ml}(\theta, \varphi)] \\
&= \left(\hat{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{ml}(\theta, \varphi)
\end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

它们满足如下正交关系：

$$P_{ml} \cdot B_{m'l'} = P_{ml} \cdot C_{m'l'} = B_{ml} \cdot C_{m'l'} = 0 \quad (2.69)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi B_{ml} \cdot C_{m'l'}^* \sin\theta d\theta d\varphi = 0 \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_{ml} \cdot P_{m'l'}^* \sin\theta d\theta d\varphi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi B_{ml} \cdot B_{m'l'}^* \sin\theta d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi C_{ml} \cdot C_{m'l'}^* \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{mm'} \delta_{ll'} \Omega_{ml}
\end{aligned} \quad (2.71)$$

式中

$$\Omega_{ml} = \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \quad (2.72)$$

这里“*”号表示其复共轭值。

下面给出这些正交关系的证明。

式(2.69)可直接从矢量定义中给予证明。对于式(2.70)，由于有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{l(l+1)} B_{ml} \cdot \sqrt{l'(l'+1)} C_{m'l'}^* \sin\theta d\theta d\varphi \\
&= -2\pi i m \delta_{mm'} \int_0^\pi \left[\frac{dP_l^m}{d\theta} P_{l'}^m + P_l^m \frac{dP_{l'}^m}{d\theta} \right] d\theta \\
&= -2\pi i m \delta_{mm'} [P_l^m(\cos\theta) P_{l'}^m(\cos\theta)]_0^\pi = 0
\end{aligned} \quad (2.73)$$

而被证明。对于第三个关系式(2.71)，其第一项有

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_{ml} P_{m'l'}^* \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{ml} Y_{m'l'}^* \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi\delta_{mm'} \int_0^\pi P_l^m(\cos\theta) P_{l'}^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta \\
&= \delta_{mm'} \delta_{ll'} \Omega_{ml}
\end{aligned} \tag{2.74}$$

式中已利用了 Legendre 函数的正交关系。同理,其第二项有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{l(l+1)} \mathbf{B}_{ml} \cdot \sqrt{l'(l'+1)} \mathbf{B}_{m'l'}^* \sin\theta d\theta d\varphi \\
&= 2\pi\delta_{mm'} \int_0^\pi \left(\frac{dP_l^m}{d\theta} \frac{dP_{l'}^m}{d\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} P_l^m P_{l'}^m \right) \sin\theta d\theta
\end{aligned} \tag{2.75}$$

由于

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP_l^m}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] P_l^m = 0 \tag{2.76}$$

将其乘以 $P_{l'}^m$ 后有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta P_{l'}^m \frac{dP_l^m}{d\theta} \right) + l(l+1) P_l^m P_{l'}^m \\
&= \frac{dP_l^m}{d\theta} \frac{dP_{l'}^m}{d\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} P_l^m P_{l'}^m
\end{aligned} \tag{2.77}$$

再将等式两边乘以 $\sin\theta$, 然后对 θ 在 $(0, \pi)$ 区间上积分, 得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \left(\frac{dP_l^m}{d\theta} \frac{dP_{l'}^m}{d\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} P_l^m P_{l'}^m \right) \sin\theta d\theta \\
&= l(l+1) \int_0^\pi P_l^m P_{l'}^m \sin\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} l(l+1) \Omega_{ml} \delta_{ll'}
\end{aligned} \tag{2.78}$$

将式(2.78)代入式(2.75), 式(2.71)第二项即得到了证明。对于式(2.71)第三项, 可用同样的方法给予证明。

§ 4 Navier 方程及其本征矢量解

对于各向同性介质, 应力与应变的关系或应力与位移的关系有简单的形式, 将它代入动力学方程式(1.55), 则可得到以位移表示的动力学方程, 称为 Navier 方程, 它的矢量形式是

$$\alpha^2 \text{grad div } \mathbf{u} - \beta^2 \text{curl curl } \mathbf{u} + \mathbf{F} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.79)$$

其中

$$\alpha = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad \beta = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} \quad (2.80)$$

分别为纵波速度和横波速度。

引进 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ 的 Fourier 变换

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.81)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.82)$$

则在变换域上的 Navier 方程有

$$\alpha^2 \text{grad div } \mathbf{u} - \beta^2 \text{curl curl } \mathbf{u} + \mathbf{F} + \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2.83)$$

假定

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\beta, \text{curl } \mathbf{u}_\alpha = 0, \text{div } \mathbf{u}_\beta = 0 \quad (2.84)$$

即 \mathbf{u}_α 是位移矢量的无旋部分, 而 \mathbf{u}_β 是无散部分。当 $\mathbf{F}=0$ 时, 式 (2.83) 可写成

$$\alpha^2 \text{grad div } \mathbf{u}_\alpha - \beta^2 \text{curl curl } \mathbf{u}_\beta + \omega^2 (\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\beta) = 0$$

或者写成

$$\alpha^2 (\nabla^2 + k_\alpha^2) \mathbf{u}_\alpha + \beta^2 (\nabla^2 + k_\beta^2) \mathbf{u}_\beta = 0 \quad (2.85)$$

其中 $k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}, k_\beta = \frac{\omega}{\beta}$ 。式 (2.85) 也可用下面两个方程来满足

$$(\nabla^2 + k_\alpha^2) \mathbf{u}_\alpha = 0, \quad (\nabla^2 + k_\beta^2) \mathbf{u}_\beta = 0 \quad (2.86)$$

这些都是矢量 Helmholtz 方程。

按本章 §3 的讨论, 用标量势函数求解。对式 (2.86) 的第一个方程引进标量势 φ_α , 第二个方程引进标量势 φ_β 。这样, 总位移的 Hansen 本征矢量解是

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{k_a} \text{grad} \varphi_a \\ M &= \text{curl}(a\varphi_\beta) = (\text{grad} \varphi_\beta) \times a = \frac{1}{k_\beta} \text{curl} N \\ N &= \frac{1}{k_\beta} \text{curl curl}(a\varphi_\beta) = \frac{1}{k_\beta} \text{curl} M \end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

式中的 a 可以这样取定：在直角坐标系的情况下，取 $a=k$ ，对于圆柱坐标系，取 $a=\hat{e}_z$ ，对于球坐标系，取 $a=\hat{e}_R$ 。

对上述本征矢量解，下面举例说明。

例 1：二维场。

若运动与 y 坐标无关，则位移矢量 $u(u, v, w)$ 用 Hansen 本征矢量表示为

$$u = L + M + N \quad (2.88)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} L &= \text{grad} \varphi \\ M &= \text{curl}(k\psi_1) \\ N &= \text{curl curl}(k\psi_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

这里势函数满足方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \psi_{1,2} &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi_{1,2}}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

由于 $\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$ ，所以，式(2.89)为：

$$\left. \begin{aligned} L &= i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ M &= -j \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ N &= i \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} - k \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

如果令 $\psi = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}$ ，则得到位移分量为

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.92)$$

而应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mu \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \mu \frac{\partial v}{\partial z} \\ \sigma_{zz} &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

由上面的结果可以看到,位移与应力可用标量函数 φ, ψ, v 表示,只有 φ 和 ψ 有耦合关系,而 v 与 φ, ψ 无耦合关系。因而存在两个独立问题:一个是 $\varphi = \psi = 0$, 这样得到 $u = w = \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0$; 另一个是 $v = 0$, 则有 $\sigma_{xy} = 0$ 。即将原来的问题分解成为两个很有实用价值的独立问题。

例 2: 轴对称场。

若运动相对于 z 轴是对称的,则采用圆柱坐标系,位移矢量是 $u(u_r, u_\varphi, u_z)$ 。由于轴对称, $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$, 则

$$\left. \begin{aligned} L &= \hat{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \hat{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ M &= -\hat{e}_\varphi \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \\ N &= \hat{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial z} - \hat{e}_z \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

式中, $\psi = \frac{\partial \psi_2}{\partial r}$ 。因 ψ_2 满足方程

$$\nabla^2 \psi_2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \quad (2.95)$$

所以 ψ 应该满足

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{r^2} \psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.96)$$

现在可以将位移和应力用势函数表示,有

$$\left. \begin{aligned}
 u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \\
 u_\varphi &= \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = v \\
 u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} \\
 \sigma_{rr} &= \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\
 &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r^2} \right) \\
 \sigma_{z\varphi} &= \mu \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \\
 \sigma_{zz} &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 &= \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

我们再一次把原来的问题分成了两个独立的问题,第一个问题是 $u_r = u_z = \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = 0$, 则可用 v 来求解;第二个问题是 $u_\varphi = \sigma_{z\varphi} = 0$, 则可用 φ 与 ψ 进行求解。但应注意, φ 是满足波动方程的, 但 ψ 并不满足波动方程, 而是式(2.96)。

§ 5 平面波

我们已经知道, 三维标量波动方程(2.1)的解的形式可以是

$$\psi_c(\mathbf{x}, t) = f\left(t - \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) \quad (2.98)$$

式中 f 是任意两次可微函数, $\hat{\mathbf{p}}$ 是单位矢量, \mathbf{x} 是位置矢量, c 为传播速度。在任意给定时刻 t , $\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x} = \text{常量}$ 的方程代表一个垂直于单位矢量 $\hat{\mathbf{p}}$ 的平面。这样, 解 ψ_c 就代表一个行进中的平面波, 它的等相平面垂直于 $\hat{\mathbf{p}}$, 而传播速度是 c 。相应地, 这种情况下的无源

Navier 方程的本征矢量解为

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{k_\alpha} \text{grad} \psi_\alpha = -\frac{1}{\alpha k_\alpha} \psi'_\alpha \hat{p} \\ M &= \text{curl}(k \psi_\beta) = -\frac{1}{\beta} \psi'_\beta (\hat{p} \times k) \\ N &= \frac{1}{k_\beta} \text{curl} M = -\frac{1}{\beta^2 k_\beta} \psi''_\beta [(\hat{p} \times k) \times \hat{p}] \end{aligned} \right\} \quad (2.99)$$

这里“'”代表对函数中变量微商。

若将式(2.98)的任意函数取为谐平面波形式 $f(t) = e^{i\omega t}$, 则

$$\begin{aligned} \psi_c(x, t) &= e^{i(\omega t - k_c \cdot x)} \\ &= e^{i[\omega t - k_c(lx_1 + mx_2 + nx_3)]} \end{aligned} \quad (2.100)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} k_c &= k_c \hat{p}, \quad k_c = \frac{\omega}{c}, \quad c = \alpha \text{ 或 } \beta \\ \hat{p} &= li + mj + nk, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

k_c 称为传播矢量, 它的模 k_c 称为波数。在此特定的谐波情况下, 式(2.99)可简化为

$$\left. \begin{aligned} L &= -i\psi_\alpha \hat{p} = -i(li + mj + nk)\psi_\alpha \\ M &= -ik_\beta \psi_\beta (\hat{p} \times k) = -i(mi - lj)k_\beta \psi_\beta \\ N &= k_\beta \psi_\beta [(\hat{p} \times k) \times \hat{p}] \\ &= [-lni - mnj + (l^2 + m^2)k]k_\beta \psi_\beta \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

这三个本征矢量是相互垂直的。矢量 L 的位移方向与传播方向一致, 以速度 α 传播, 这种波称为纵波(P波)。而矢量 M 和 N 的位移都是垂直传播方向的, 它们都以速度 β 传播, 这种波为横波(S波)。

为更好地理解由这些波构成的总的运动, 考虑在直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 中, 平面波由原点出发, 沿矢量 \hat{p} 方向传播。图 2.1 表示了构成平面波的一些几何参数。观测点 $Q(x)$ 是波阵面上的一点, 在给定频率及时刻的情况下, 在整个 π 平面上 $\psi_{\alpha, \beta} = \text{常量}$, 因而 L, M, N 在 π 平面上的各点都是相同的。这些矢量分别表示 P、

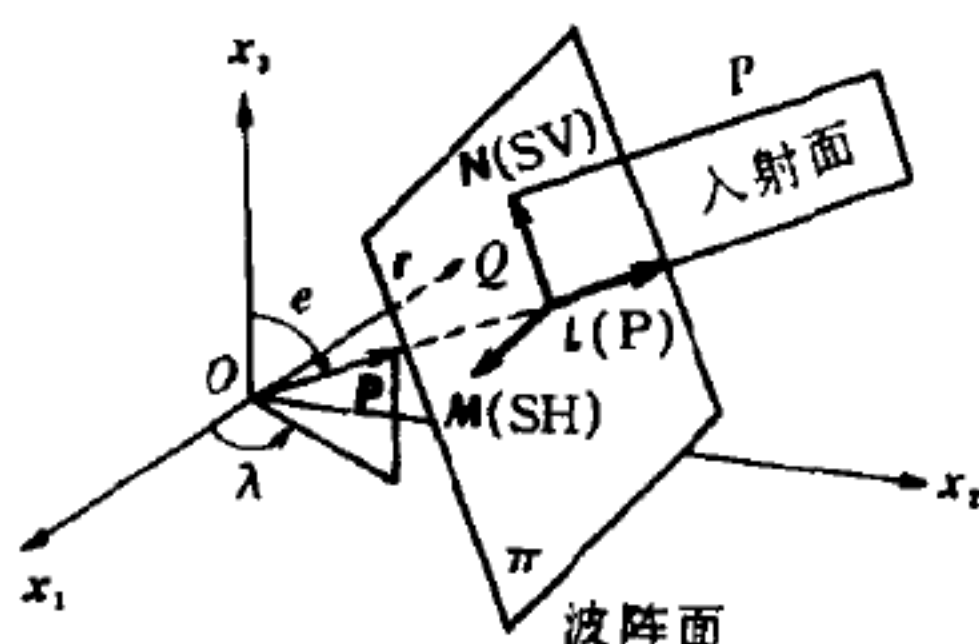


图 2.1 平面波前和 L, M, N 矢量, L 垂直于波阵面 π, N, M 在波阵面上, 它们形成右旋系统

SH、和 SV 波运动。绕 x_3 轴转动 λ 角度, 使 \hat{p} 落在 x_1-x_3 坐标面内 (图 2.2), 则式(2.102)联合式(2.100)变为($m=0$)

$$\left. \begin{aligned} L &= (li + nk) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{lx_1 + nx_3}{\alpha} \right) - \frac{i\pi}{2} \right] \\ N &= lk_{\beta} (ni - lk) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{lx_1 + nx_3}{\beta} \right) + i\pi \right] \\ M &= lk_{\beta} j \exp \left[i\omega \left(t - \frac{lx_1 + nx_3}{\beta} \right) + \frac{i\pi}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

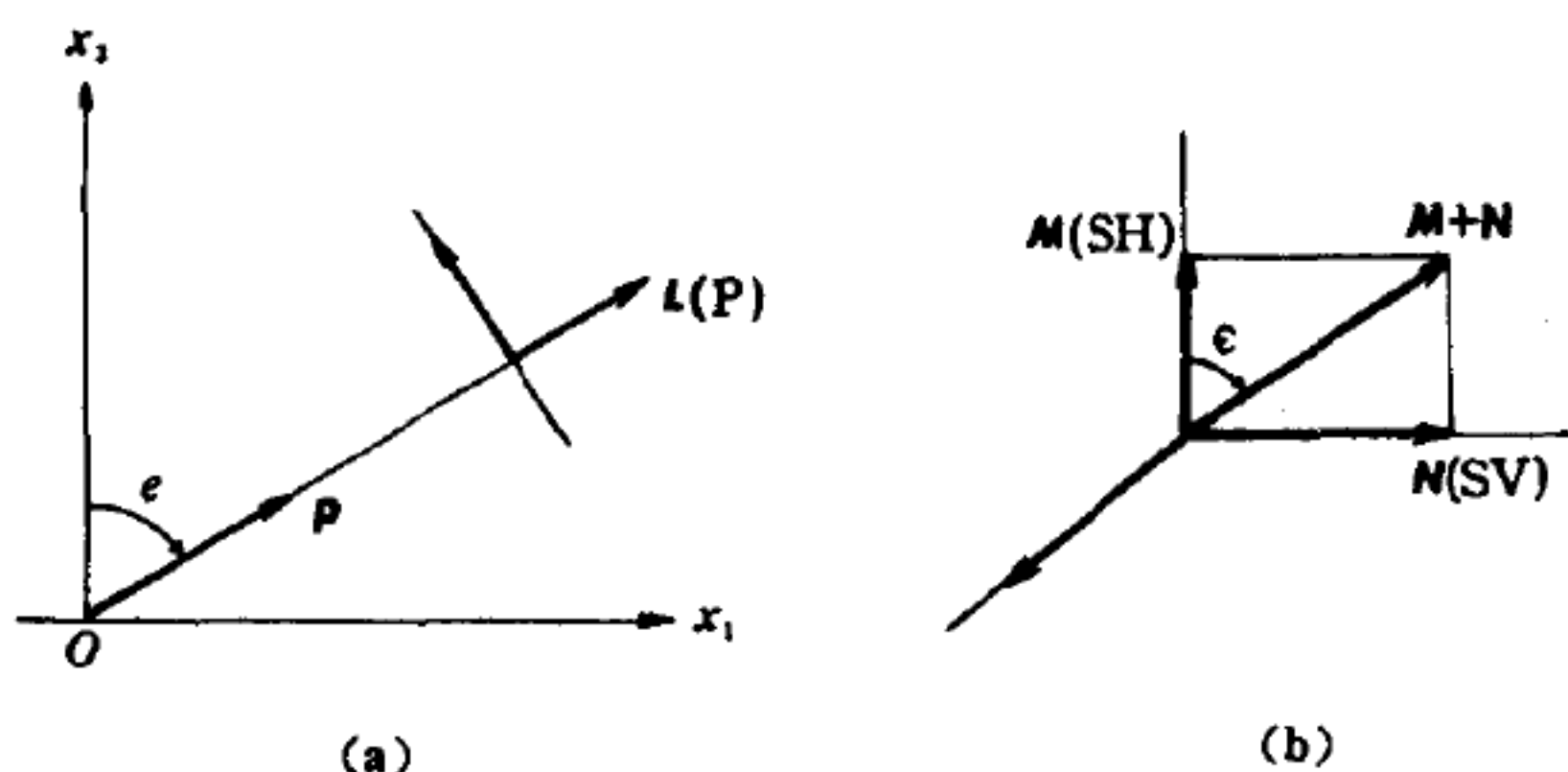


图 2.2 λ 射平面 x_1-x_3 和偏振角

(a) 与平面纵波有关的矢量; (b) 与平面横波有关的矢量

这里有 $l^2 + n^2 = 1$ 。可看出, L 和 N 在垂直平面 x_1-x_3 上, 而 M 在垂直于平面 x_1-x_3 的水平面上。矢量 L 和 N 构成入射平面。矢量 N 表示一种线性偏振的剪切波在垂直平面上的运动, 称为 SV 运动。 M 是线性偏振的剪切波在水平面上的运动, 称为 SH 运动。矢量 M 与合成矢量 $M+N$ 之间的夹角 ϵ 称为偏振角。而 L 和 $(M+N)$ 构成的平面为剪切波的偏振平面。这样, M 没有垂直分量, 而 L 和 N 则既有垂直分量也有水平分量。

用式(2.103)及 $\hat{p} = li + nk$, 可将位移场写成 P、SV 和 SH 形式, 有

$$\left. \begin{aligned} u_P &= A\hat{p}\exp\left[i\omega\left(t - \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{x}}{\alpha}\right)\right] \\ u_{SV} &= B(\mathbf{j} \times \hat{p})\exp\left[i\omega\left(t - \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{x}}{\beta}\right)\right] \\ u_{SH} &= C\mathbf{j}\exp\left[i\omega\left(t - \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{x}}{\beta}\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad (2.104)$$

若 A, B, C 是实数, 则只需考虑上面结果的实部, 有

$$\left. \begin{aligned} u_P &= A\hat{p}\cos\omega\left(t - \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{x}}{\alpha}\right) \\ u_{SV} &= B(\mathbf{j} \times \hat{p})\cos\omega\left(t - \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{x}}{\beta}\right) \\ u_{SH} &= C\mathbf{j}\cos\omega\left(t - \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{x}}{\beta}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

相应的应力分量可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}(u_P) &= \frac{A}{\alpha}\omega(\lambda\delta_{ij} + 2\mu l_i l_j)\sin\omega\left(t - \frac{l_k x_k}{\alpha}\right) \\ \sigma_{ij}(u_{SV}) &= \mu \frac{B}{\beta}\omega[l_i(\mathbf{j} \times \hat{p})_j + (\mathbf{j} \times \hat{p})_i l_j]\sin\omega\left(t - \frac{l_k x_k}{\beta}\right) \\ \sigma_{ij}(u_{SH}) &= \mu \frac{C}{\beta}\omega[l_i \delta_{2j} + \delta_{2i} l_j]\sin\omega\left(t - \frac{l_k x_k}{\beta}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.106)$$

§ 6 平面波、柱面波和球面波之间的关系

我们讨论的地震学问题限于线性弹性力学范围内,因而可利用叠加原理,即将基本解求和或积分可得到一些新的解。例如,若 $\psi = \psi_3(x_1, x_2, x_3; t)$ 满足三维波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.107)$$

则 $\psi = \psi_3(x_1 + \xi_1, x_2, x_3; t)$ 也是此方程的解。

如果有

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \int_{\xi_1=-\infty}^{\xi_1=+\infty} \psi_3(x_1 + \xi_1, x_2, x_3; t) d\xi_1 \\ &= \int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} \psi_3(\xi, x_2, x_3; t) d\xi \end{aligned} \quad (2.108)$$

则它满足二维波动方程。按此方法,也可得到一维波动方程的解。这些方法基本上用于某些轴对称的波动解的叠加,条件是只要上述积分收敛即可。

反过来,若将不同角度的解叠加得到一个新的解,则它也会满足高一维的波动方程。因而可以借此方法来获得三维柱坐标或三维球坐标情况下的波动方程解。例如,有二维解 $\psi_2 = \psi_2(z, x)$, 或写成 $\psi_2 = \psi_2(z, r \cos \varphi)$, 则三维解是

$$\psi_3(z, r, \varphi) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \psi_2[z, r \cos(\varphi - \lambda)] g(\lambda) d\lambda \quad (2.109)$$

式中 $g(\lambda)$ 是任意权函数。

对 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 S + k_c^2 S = 0 \quad (2.110)$$

一维解有 $S_1 = e^{ik_c x} = e^{ik_c r \cos \varphi}$ 。注意有关系式: $r \cos(\varphi - \lambda) = x \cos \lambda + y \sin \lambda$, 则其二维解为

$$S_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{ik_c (x \cos \lambda + y \sin \lambda)} g(\lambda) d\lambda \quad (2.111)$$

在柱坐标中,我们已得出基本波函数式(2.44),再加上时间因子,有

$$e^{i\omega t} \Phi_m^\pm(k_c r) = e^{im\varphi} J_m(kr) e^{i\omega t \pm \nu_c z} \quad (2.112)$$

式中 $\nu_c = \sqrt{k^2 - k_c^2}$, 这是柱面驻波形式, 它也代表在 z 轴方向传播的等相面中的平面波, 传播速度是 $\omega/\text{Re} \sqrt{k_c^2 - k^2}$, 在等相面上波的幅度与 r 和 φ 有关。式(2.112)也可分解为平面波表达。为了说

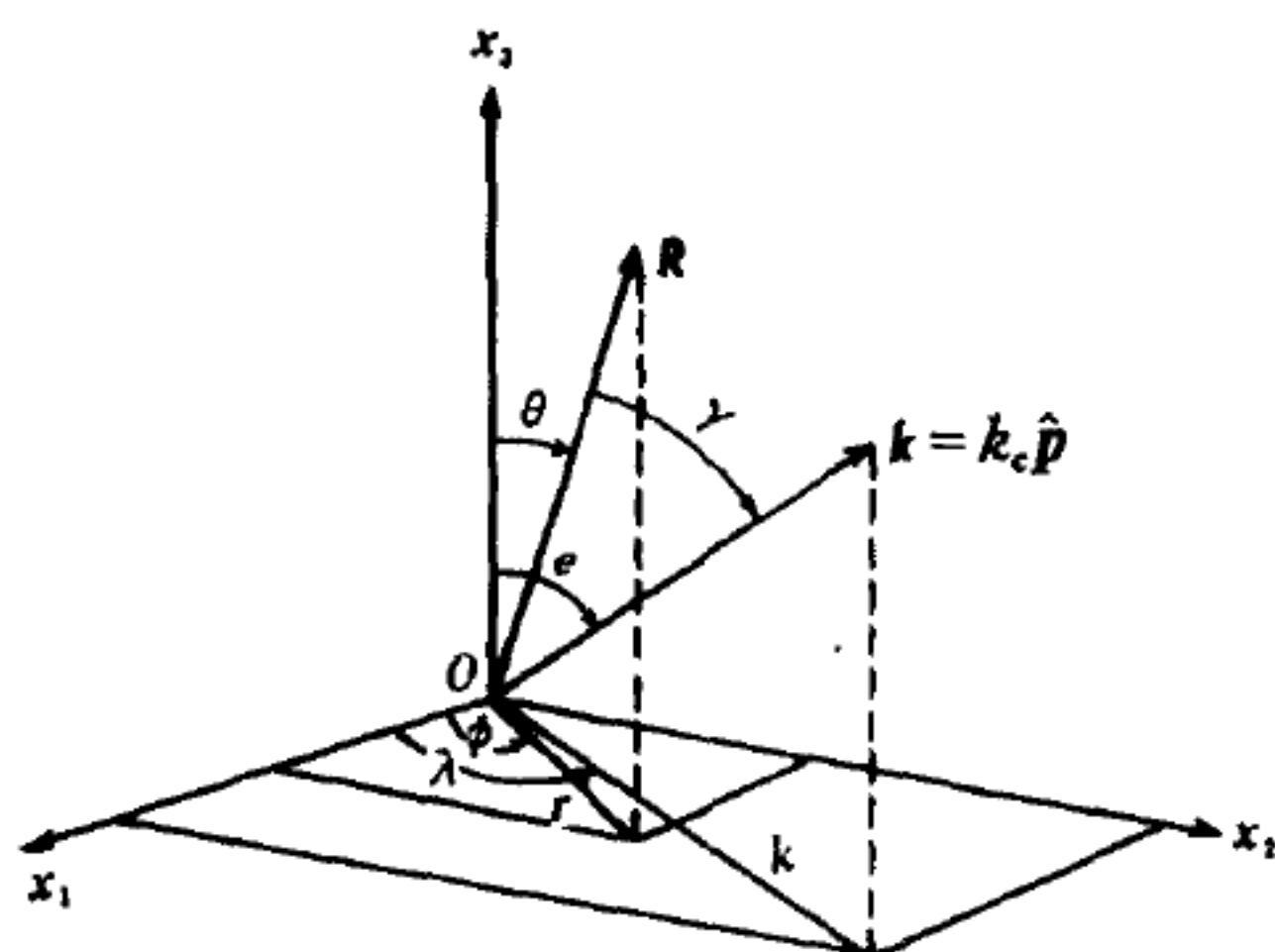


图 2.3 球坐标系及波数空间中的对应坐标
(k_c, e, λ) ($R = r \sin \theta$, $k = k_c \sin e$)

明这点,参看图 2.3,且首先注意到

$$\begin{aligned} e^{-ik \cdot x} &= e^{-i[k_c r \sin e \cos(\varphi - \lambda) + k_c z \cos e]} \\ &= e^{-ik_c r \cos(\varphi - \lambda) \pm \nu_c z} \end{aligned} \quad (2.113)$$

其中

$$k = k_c \hat{p} = k_c (\sin e \cos \lambda \hat{i} + \sin e \sin \lambda \hat{j} + \cos e \hat{k}) \quad (2.114)$$

$$\sin e = \frac{k}{k_c}, \cos e = \frac{1}{k_c} \sqrt{k_c^2 - k^2} = \pm \frac{i\nu_c}{k_c}, \nu_c = \sqrt{k^2 - k_c^2}.$$

用 $\exp(i\zeta \sin \alpha)$ 的 Fourier 级数展开式,即

$$e^{i\zeta \sin \alpha} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\zeta) e^{im\alpha} \quad (2.115)$$

$$J(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\zeta \sin \alpha - m\alpha)} d\alpha \quad (2.116)$$

因而可推得

$$e^{ikr \sin(\varphi - \lambda - \frac{\pi}{2})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) e^{im(\varphi - \lambda - \frac{\pi}{2})} \quad (2.117)$$

$$J_m(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[kr \sin(\varphi - \lambda - \frac{\pi}{2}) - m(\varphi - \lambda - \frac{\pi}{2})]} d\lambda \quad (2.118)$$

将它们代入式(2.113)中,有

$$e^{-ik \cdot x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) e^{im(\varphi - \lambda - \frac{\pi}{2}) \pm i\nu_c z} \quad (2.119)$$

$$J_m(kr) e^{im\varphi \pm i\nu_c z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(-k \cdot x + m\frac{\pi}{2} + m\lambda)} d\lambda \quad (2.120)$$

将式(2.112)代入式(2.119),最后有

$$e^{-ik \cdot x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{g_m(\lambda)} \Phi_m^{\pm}(k_c r) \quad (2.121)$$

$$\Phi_m^{\pm}(k_c r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_m(\lambda) e^{-ik \cdot x} d\lambda \quad (2.122)$$

其中

$$g_m(\lambda) = \exp \left[im \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

式(2.121)表示平面波可以看成由无数多个柱面驻波叠加而成,而式(2.112)表示柱面驻波可由平面波叠加而成,这些平面波在原点的传播方向形成一个圆锥, x_3 轴是圆锥轴,圆锥角为 $2e$ 。

上述推导的是平面波与柱面波之间的关系;下面推导平面波与球面波之间的关系。

$$\text{已知} \quad e^{-ik \cdot x} = e^{-ik_c R \cos \gamma} \quad (2.123)$$

这里 γ 是传播矢量与半径矢量之间的夹角(图 2.3),它为

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos e + \sin \theta \sin e \cos(\varphi - \lambda) \quad (2.124)$$

当 k_c 和 x 给定后, $\exp(-ik \cdot x)$ 只是两个角度 e 和 λ 的函数,因而可将它展成一个收敛的球面调和级数,即有