

具有间断面的球形地球三维地震 射线追踪的伪弯曲法

K. Koketsu S. Sekine

摘要 提出了具有间断面的球形地球三维射线追踪的伪弯曲方法。该方法的基础是一阶近似3点扰动,同时曲线坐标中的斯奈尔定律应用到间断面上。我们通过与解析解和弯曲法结果的比较,证实了不同速度模型中伪弯曲方法射线追踪的计算精度和有效性。尽管有效性的改善是明显的,但它将随着间断面数量的增加而减小。尽管弯曲法精确,但在某些情况下亦可能是计算不稳定的。因此,伪弯曲法在射线自动计算方面还是可取的。

引言

尽管地震射线追踪在地震学中最基本的工具之一(如 Thurber, 1986; Thurber and Aki, 1987),但是为了能在精确地震定位和地震层析成像中使用,射线追踪方法还需要进一步改进。比如,由于地球是球形的而且有许多间断面,因此,在全球和区域研究中需要一种有效的公式和算法。

这里,采用的伪弯曲方法是由 Um 和 Thurber(1987)提出且很快替换了直角坐标系中的弯曲方法,现在我们将扩展到具有间断面的球形地球。然后,通过与解析解和弯曲法结果的对比,检验了伪弯曲法的精度和有效性。

1 射线方程

首先引入正交曲线坐标 q_i 和相应的单位矢量 e_i , 则地震射线由常微分方程表达为:

$$\frac{dq_i}{d\lambda} = \frac{1}{s} \frac{p_i}{h_i^2} \quad (1)$$

$$\frac{dp_i}{d\lambda} = \frac{\partial s}{\partial q_i} + \frac{1}{s} \sum_j \frac{p_j^2}{h_j^3} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \quad (2)$$

式中, h_i 是坐标的比例因子, λ 是射线长度(参见 Comer, 1984; Cervený, 1987)。慢度 s 是介质速度 v 的倒数。辅助变量 p_i 必须明确地满足条件:

$$H = \sum_j \left(\frac{p_j}{h_j} \right)^2 - s^2 = 0 \quad (3)$$

对于球坐标系 $q_i = (r, \theta, \varphi)$, 将方程(1)代入方程(2)且使用比例因子 $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r \sin \theta$, 方程(1)和(2)可以变为射线方程:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(s \frac{dr}{d\lambda} \right) &= \frac{\partial s}{\partial r} + \\ s \left[r \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + r \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \right], \\ \frac{d}{d\lambda} \left(s r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} \right) &= \frac{\partial s}{\partial \theta} + s r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2, \\ \frac{d}{d\lambda} \left(s r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda} \right) &= \frac{\partial s}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (4)$$

在弯曲法中,尽管非线性常微分方程(4)的边值问题没有转换为像打靶法(如 Jacob, 1970)一样的初值问题,但是利用有限差分法可直接求解。方程的非线性化迫使用迭代法去求解。Pereyra, Lee 和 Keller (1980)

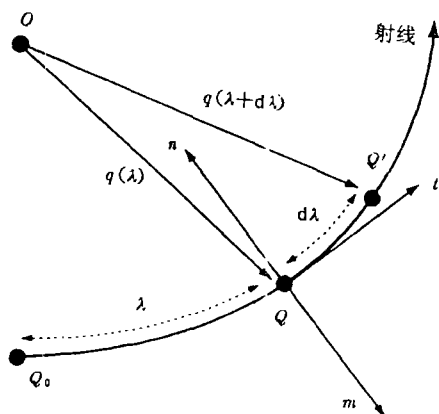


图1 弯曲射线的切向、法向和反法向单位矢量
导出了一个直角坐标系下弯曲法的有效公式, Koketsu (1991) 将其扩展到球坐标系。这些结果将简要地总结在附录 A 中。

除了方程(A5)中的有限差分表达式之外, 其他弯曲公式都没有近似, 因此我们希望迭代过程能快速收敛。另一方面, 这种方法不但计算量大, 而且还保持了与射线方程(4)一样的非线性度, 因此, 我们可能会遭遇数值不稳定的情况, 尤其是在速度变化快和对射线初始位置的猜想比较时更是如此。

2 伪弯曲法

为克服如前所述的弯曲法的缺陷, Um 和 Thurber (1987) 提出了快且稳定被称之为直角坐标系的伪弯曲法。这里, 我们将其扩展到球坐标系。

现在, 我们用 q 表示位置矢量, 由方程(3)定义慢度矢量 p :

$$p = \sum_j \frac{p_j}{h_j} e_j \quad (5)$$

这样, p 是由常射线程函确定的波阵面法线 (Cerveny, 1987)。如果我们使用 q , p 以及关于 e_i 的公式:

$$e_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial q}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial e_i}{\partial q_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k \quad (6)$$

这里 Γ_{ij}^k 是 Christoffel 记号, 则对于任意正交曲线坐标系方程(1)和(2)可以简化为极其简单的矢量方程:

$$\frac{dq}{d\lambda} \frac{p}{s}, \quad \frac{dp}{d\lambda} = \nabla s \quad (7)$$

由微分几何, 射线的切向和法向单位矢量 t 和 n 在 Q 点用矢量 q 表示为:

$$t = \frac{dq}{d\lambda}, \quad n = \frac{dt}{d\lambda} / \left| \frac{dt}{d\lambda} \right| \quad (8)$$

如图 1 所示 (如 Ben-Menahem and Singh, 1981)。由方程(7)和(8), 则有:

$$\nabla s = \frac{ds}{d\lambda} t + s \left| \frac{dt}{d\lambda} \right| n \quad (9)$$

这意味着 ∇s 是 t 和 n 的线性组合, 且与 t 和 n 处于同一平面内。

因此, 如果我们知道 t 和 ∇s , 通过 ∇s 减去平行于 t 的分量可以得到 n 方向, 我们也可以推导确切的关系:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{1}{s} [\nabla s - (\nabla s, t)t] = \\ &= \frac{1}{v} [(\nabla v \cdot t)t] \end{aligned} \quad (10)$$

上式实际代表获得 n 方向的过程。对于任意正交曲线坐标系, 从 ∇s 中减去平行于 t 的分量, 得到反平行于 n 的矢量, 或者反法向矢量 m 。

上述结果明显与 Um 和 Thurber (1987) 推导的直角坐标系下的结果相同, 因此, 我们能继续按他们的步骤在球坐标系下追踪地震射线, 如以下所示。首先, 用与弯曲法相似的方法在 q_1, q_2, \dots, q_N 处离散射线路径。其次, 选择 q_{k-1}, q_k, q_{k+1} 3 点, 暂时固定两个边点, 然后重新定位中点 q_k 使沿该段走时最小 (如图 2 所示)。 q_{k-1} 和 q_{k+1} 之间的射线段在重新定位之前近似为直线, 将其沿 m 从离开中点 q_{mid} 的方向移动中间点 q_k 来使射线段弯曲, 它是在 q_{mid} 点由 ∇v 确定的, 而 t 的近似值是:

$$t \sim \frac{1}{2L} [r_{k+1} - r_{k-1}, r_{mid}(\theta_{k+1} - \theta_{k-1})],$$

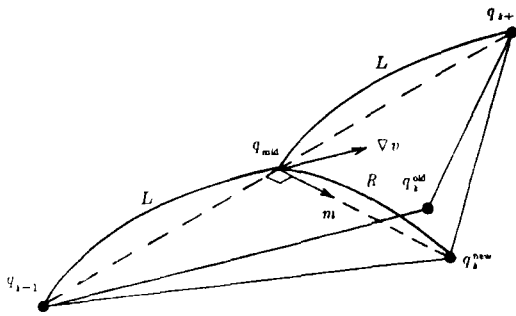


图2 伪弯曲法的3点扰动图(据 Um and Thurber, 1987 修正)。中点 q_i 从离开 q_{i-1} 和 q_{i+1} 的中点 q_{mid} 方向沿反法向量 m 重新定位

$$r_{mid} \sin \theta_{mid} (q_{i+1} - q_{i-1}) \quad (11)$$

按照费玛定理,由最小化 q_{i-1} 和 q_{i+1} 之间沿射线段的走时 T :

$$T = (L^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{s_{i+1} + s_k^{new}}{2} + \frac{s_k^{old} + s_{i+1}}{2} \right) \quad (12)$$

来决定移动的距离 R , 其最小化解为:

$$R = - \frac{cv_{mid} + 1}{4cm \nabla v_{mid}} + \left[\left(\frac{cv_{mid} + 1}{4cm \nabla v_{mid}} \right)^2 + \frac{L_2}{2cv_{mid}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

这里 $c = (s_{i-1} + s_{i+1})/2$, v_{mid} 是 q_{mid} 点的速度 (Um and Thurber, 1987)。如果 $\nabla v_{mid} = 0$, $R = 0$, 这样中点就保留在以前的位置 q_i^{old} 处。

因为 ∇v , t 和 n 能在用 q_{mid} 表示的单个位置上估计, 且共用同一正交坐标系, 在方程(11)和(13)中的矢量运算可采用与在直角坐标系相同的方式进行。因此, 如果我们将 n 的 r , θ 和 φ 分量表示为 n_r , n_θ 和 n_φ , 重新定位点 q_i^{new} 的坐标为:

$$\begin{bmatrix} r_k^{new} \\ \theta_k^{new} \\ \varphi_k^{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{mid} \\ \theta_{mid} \\ \varphi_{mid} \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} n_r/r_{mid} \\ n_\theta/r_{mid} \sin \theta_{mid} \\ n_\varphi/r_{mid} \sin \theta_{mid} \end{bmatrix} \quad (14)$$

这种3点扰动图能够连续地应用于所有点,

然后整个过程迭代直到收敛。

3 间断面

如果介质中有间断面, 那么不能简单地把上述过程应用于介质。然而, Zhao, Hasegawa 和 Horiuchi (1992) 已经提出了该问题的直角坐标方法, 因此, 把他们的方法引入我们的球形伪弯曲法中。

首先我们考虑一个间断面将介质划分为两区域 A , B , 其波速分别为 v^A , v^B 。Zhao 等 (1992) 计算了入射角 ξ^A , 出射角 ξ^B , 限制射线的入射段和出射段和间断面法向在同一平面, 应用斯奈尔定律传统的表达式:

$$\frac{\sin \xi^A}{v^A} = \frac{\sin \xi^B}{v^B} \quad (15)$$

因为射线方向平行于慢度矢量, 该过程等价于更简便的方程:

$$p_N^A \times t' = p_1^B \times t' \quad (16)$$

这里 p_N^A 是 A 区内在射线段最后点的慢度矢量, p_1^B 表示 B 区域内的第1个点的慢度矢量, 矢量 t' 与连接点处的间断面相切, 由于 t' 出现在方程(16)两边, 因此, t' 不必有单位长度。尽管与间断面相切的平面上有无限多切向矢量, 但还有必要且足以从其中选取两个线性独立矢量来制约入射和出射段 (Hanyga, 1988)。譬如, 如果间断面用 $r = h(\theta, \varphi)$ 来表示, 则它的法向矢量表示为:

$$n' = e_r - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} e_\theta - \frac{1}{h \sin \theta} \frac{\partial h}{\partial \varphi} e_\varphi \quad (17)$$

这样, 线性独立切向矢量取为:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \frac{1}{h \sin \theta} \frac{\partial h}{\partial \varphi} e_r + e_\varphi, \\ t'_2 &= \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} e_r + e_\theta \end{aligned} \quad (18)$$

然后, 我们考虑一个实际例子, 如图3所示。连接震源和台站的直线 $A1 \sim A3$ 作为初始估计。我们称射线路径和间断面的

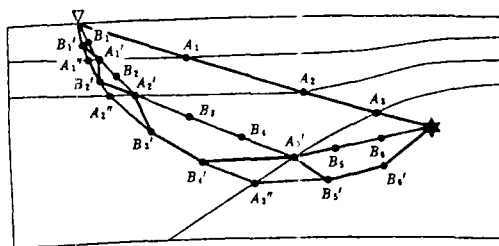


图3 在有间断面的地球里的重新定位方法。首先,重新定位间断点 A_1, A_2, \dots , 重新定位 B_1, B_2, \dots 。重复这些过程直至收敛

交点为间断点,称两个邻近间断面之间沿射线路径的点为连续点,首先斯奈尔定律(16)式应用于扰动间断点,这样 A_1, A_2, \dots , 就重新定位到 A'_1, A'_2, \dots 。用上述的伪弯曲图来寻找新的连续点位置,这样 B_1, B_2, \dots 就重新定位于 B'_1, B'_2, \dots 。然后,我们又回到斯奈尔定律再重新定位 A'_1, A'_2, \dots 到 A''_1, A''_2, \dots 。这种循环过程就像 Zhao 等(1992)在展平的地球中应用传统的斯奈尔定律所做的那样以迭代方式进行直至收敛。

Sun(1993)指出多级路径的离散化和特定的加强因子是避免收敛失效问题所必需的。我们以少量连续点的射线段开始,并且扰动这些初始段直至走时增加量或减少量落在改善限度 P 范围内。然后,将这些段上的连续点数加倍,并计算新的走时。如果新走时小于 P ,我们停止迭代。如果不小,继续扰动这些路径段,连续点按图4所示的流程再加倍。因为如果我们实施密集离散化,则局部扰动只发生在靠近间断面的地方,因此,这种多级路径离散化基本上与斯奈尔定律相匹配。在扰动射线段的时候,我们不能简单地采用方程(14)的结果,而要通过引入加强因子 $F (F \geq 1)$ 来使位置的改变放大为:

$$\begin{bmatrix} r_k^{\text{enhance}} \\ \theta_k^{\text{enhance}} \\ q_k^{\text{enhance}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_k^{\text{old}} \\ \theta_k^{\text{old}} \\ q_k^{\text{old}} \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} r_k^{\text{new}} - r_k^{\text{old}} \\ \theta_k^{\text{new}} - \theta_k^{\text{old}} \\ q_k^{\text{new}} - q_k^{\text{old}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

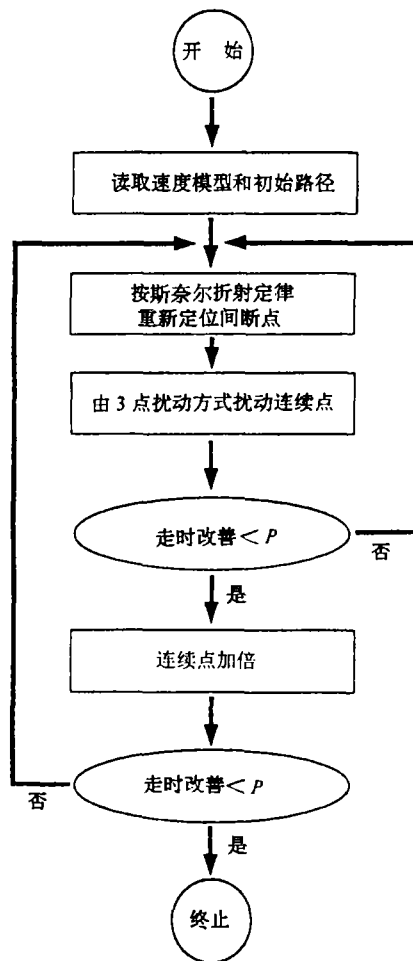


图4 间断伪弯曲法流程图(根据 Um and Thurber, 1987 修正)

在单段里,3点扰动相继实施,以便于从两端到中间寻求3个相邻的连续点,这种步骤比从射线段的一端到另一端寻求连续点的方法更为有效(详见 Um and Thurber, 1987)。

4 数值例子

本节中,我们将列出几个数值例子来说明具有间断面的球形地球伪弯曲法之精度和有效性。这里所有的 Fortran 代码以普通的优化法编译,在 200 MHz Ultra

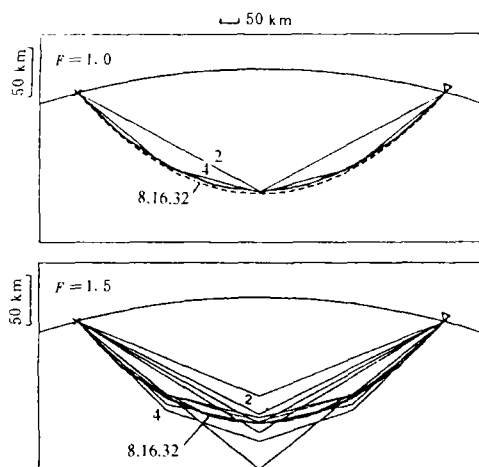


图5 速度模型 $v = a - br^2$ 的伪弯曲射线追踪。 $F = 1.0$ 和 $F = 1.5$ 时的结果分别显示在图中的上、下半部分。细实线代表中间和最终结果，粗虚线是解析解，细实线上的数字代表路径分段数

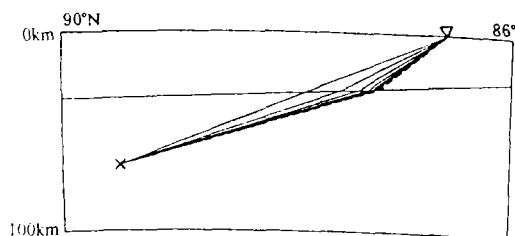


图6 平界面地球的伪弯曲射线追踪。细实线表示中间和最终结果，粗虚线是解析解

SPARC 处理器上运行。

4.1 $v = a - br^2$ 模型

由于模型 $v = a - br^2$ 的射线路径和走时的解析解是已知的(如 Bullen and Bolt, 1985), 因此首先选择该速度模型来试验。如果球形地球具有这样的速度模型, 且震源和台站在地表, 那么射线路径是一条连接两点的弧。

在图5中, 粗虚线代表上述弧线, 以各种离散化水平得到的中间结果和最终结果用细实线表示。附在线上的数字表示该路径的段数。如果我们不是采用特定的增强措施, 而是取增量因子 F 等于1, 那么虽然

明显收敛但相对于解析解还有相当大的残差(如图5的上半部所示)。另一方面, 在图5下半部分中取 $F = 1.5$ 获得了与解析解令人满意的一致性。增强的路径在各种水平上都越过真实路径。这种情况克服了收敛的失效, 导致走时的误差和路径长度的误差在 0.005 1% 或 0.014 6% 小范围内。由表1的试验表明, 这种小误差的产生是以迭代次数的增加和较长的 CPU 时间为代价的。

表1的底行是附录A 弯曲法得到的结果, 表明了快速收敛与迭代次数有关, 但在相同改善限度内和相同段数的情况下, 弯曲法需要的 CPU 时间是伪弯曲法的3倍多。

4.2 平界面模型

下面引入平界面模型来证实间断面公式。界面将地球划分为两个均匀的部分, 其速度分别为 5.8 km/s 和 6.5 km/s。解析解可以从斯奈尔定律的传统形式(15式)推导出来(图6中的粗虚线所示)。尽管8个连续点(10段)路径给出了最终结果, 但在两个连续点(4段)上就明显收敛于解析解。然而, 由于这个问题不受连续部分射线追踪的控制, 而是由间断面上的斯奈尔定律所控制, 因此, 特定的增强措施失效(如表2所示)。

表2表明底行所示的弯曲法的 CPU 时间比伪弯曲法增多了一倍, 同时又有略大的误差。与 $v = a - br^2$ 模型结果相比, 由于匹配斯奈尔定律的复杂性, 计算效率减小了。

4.3 日本岛下的层析模型

为了证实伪弯曲法可应用于极不均匀区域, 如俯冲带, 由于没有解析解的结果, 我们计算了日本主岛东北部的地震射线, 并且与弯曲法的结果做了对比。这里太平洋板块向西俯冲, 如图7下部所示。康拉德面和莫霍面也表示出来。我们假定震源

表 1 $v=a-br^2$ 速度模型在具有不同改善限度和增强因子的计算精度和有效性的结果对比

增强因子 <i>F</i>	改善限度 <i>P</i> /(%)	走时误差 /(%)	射线长度误差 /(%)	段数	迭代 次数	CPU 时间/s
1.0	0.100	0.015 5	0.154 5	16	7	0.004 00
1.0	0.010	0.005 4	0.148 5	32	10	0.007 30
1.3	0.010	0.003 8	0.056 8	32	13	0.008 51
1.5	0.010	0.005 1	0.014 6	32	17	0.008 90
1.7	0.010	0.006 4	0.007 9	64	22	0.014 00
1.0	0.001	0.001 8	0.112 2	128	16	0.023 35
弯曲	0.010	0.014 4	0.008 4	32	5	0.026 06

表 2 具有不同改善限度和增强因子的平界面地球计算精度和有效性的对比

增强因子 <i>F</i>	改善限度 <i>P</i> /(%)	走时误差 /(%)	射线长度误差 /(%)	段数	迭代 次数	CPU 时间/s
1.0	0.100	0.043 7	0.173 0	10	5	0.003 97
1.0	0.010	0.028 8	0.083 3	10	7	0.005 54
1.3	0.010	0.028 8	0.083 3	10	7	0.005 51
1.5	0.010	0.028 8	0.083 3	10	7	0.005 51
1.7	0.010	0.028 8	0.083 3	10	7	0.005 59
1.0	0.001	0.026 0	0.052 9	18	11	0.008 69
弯曲	0.010	0.035 3	0.135 1	10	6	0.010 77

(39.0°N, 140.5°E)在板块边界下 5 km 处,观测台站(39.0°N, 142.0°E)在地球表面上,在图中分别用叉号和倒三角表示,它们由一个三维 P 波速度模型的中间结果的垂直投影连接。水平投影表示在图 7 上部,数字表示了连续点总数。速度模型和间断面是 Zhao 和 Hasegawa(1993)确定的。图 7 中的粗虚线代表弯曲法计算的射线。

射线在南北方向的变形大表明了三维速度变化的影响。伪弯曲法结果与弯曲法吻合得较好。然而,表 3 表明随着间断面数量的增加,伪弯曲法的计算有效性减小,CPU 时间差别变化不大。

4.4 倾斜过渡带模型

因为微分方程(A2)有极大非线性,因此,在弯曲法中有时数值相当稳定。作为例子,线性化的方程(A5)可能会不稳定,如果射线路径的初始猜想不合适,或者在连续部分速度变化快的话。

图 8 的上部显示出了在 Zhao 和 Hasegawa(1993)模型下,以震源(37.0°N, 142.5°E)和台站(40.0°N, 140.0°E)之间为直线开始的弯曲法的不稳定迭代过程。图 8 下部没有出现伪弯曲法的这种不稳定性。而且我们如果从具有相同间断面的横向均匀层内的折射射线开始,就不会遇到这种

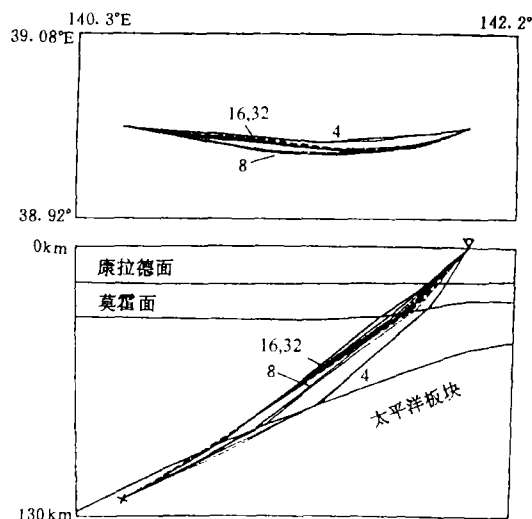


图 7 Zhao 和 Hasegawa(1993)的层析速度模型的伪弯曲射线追踪。水平和垂直投影分别显示在图上、下半部。粗虚线代表弯曲计算解。实线上的数字代表连续点数

表 3 Zhao 和 Hasegawa(1993)的层析速度模型的计算精度和有效性与弯曲法的对比

方法	走时差	射线长度差/(%)	CPU 时间/s
伪弯曲	0.083 8	0.016 9	0.400 76
弯曲			0.439 24

现象。庆幸的是由于把阻尼因子 α 应用于 (A8) 式的迭代解:

$$W^{m+1} = W^m + \alpha \delta W^m \quad (20)$$

因此, 弯曲法结果收敛。在走时变化小的情况下, 尽管通过 α 加倍, 加速了收敛, 但还需要多达 10 次的迭代。如果给定 α 初值大于 0.2, 则不会收敛。

图 9 显示了由于速度变化快而产生的另一种数值不稳定现象。模型地球在表面 $r = h(\theta)$ 附近有一个倾斜过渡带, 在图 9 中用粗影线表示, 其速度由 $v_1 = 6.0$ km/s 迅速变化到 $v_2 = 7.5$ km/s, 遵循以下规则:

$$v(r, \theta) = \frac{v_1 + v_2}{2} +$$

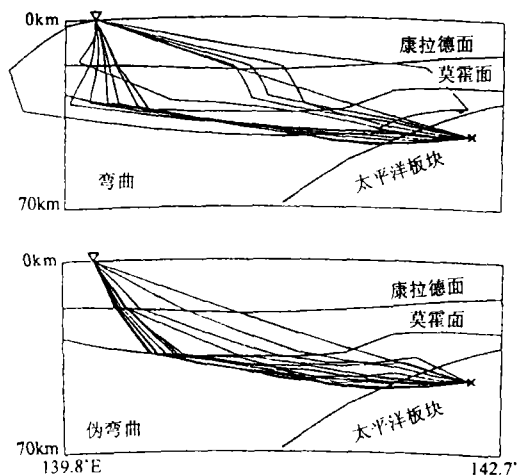


图 8 Zhao 和 Hasegawa(1993)的层析速度模型的弯曲法(上)和伪弯曲法(下)的射线追踪。两种情况中, 射线路径的初始猜想为震源和台站之间的直线

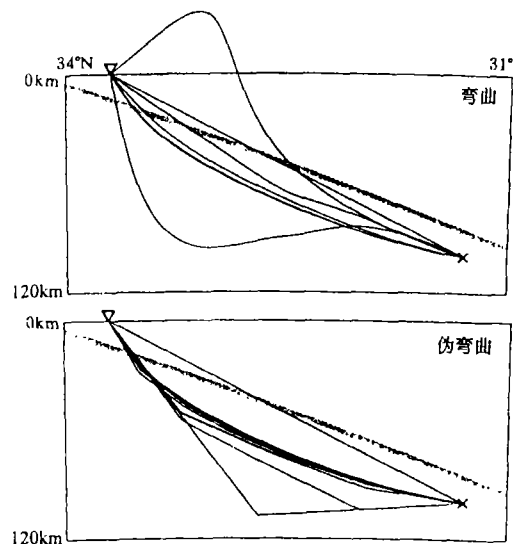


图 9 倾斜过渡带的弯曲法(上)和伪弯曲法(下)的射线追踪

$$\frac{v_2 - v_1}{2} \tanh\left(\frac{h(\theta) - r}{b}\right) \quad (21)$$

这里 $b = 12$ 。庆幸的是迭代仍是收敛的, 但一些中间路径极大地偏离最终路径, 而伪弯曲法的路径变形次序很稳定(如图 9 下部

所示)。

5 结论

Um 和 Thurber(1987)提出的射线追踪伪弯曲法已被推广到有间断面的球形地球。通过对比不同速度模型的解析解和弯曲法结果,已经证实了这种推广的有效性。

虽然伪弯曲法在有很少间断面的地球中计算很奏效,但随着间断面数量的增加,这种有效性会减小。然而,在数值稳定性方面,这种方法总是优于弯曲法。

附录 A: 弯曲法公式

在本附录中,简要总结了球坐标中的弯曲公式。方程(4)包括二阶导数,尽管可以通过像 Julian 和 Gubbins(1997)建议的一阶有限差分技术来求解,但是通过引入辅助变量:

$$p = \frac{dr}{d\lambda}, q = \frac{d\theta}{d\lambda}, w = \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (A1)$$

可以把方程(4)降为一阶微分方程,不但方便而且数值稳定。

为了避免多值和射线坐标快速变化问题,沿射线采用等距离点。因为我们不知道射线总长度 L , 也不能确定前进的间隔,我们这里引入一个新的独立变量 $l = \frac{\lambda}{L}$, 该变量定义在 $[0, 1]$ 范围内。 L 可以由独立的 l 来计算, $dL/dl = 0$ 。射线走时 T 可以通过解微分方程 $\frac{dT}{d\lambda}$ 来求得。

由以上的简化和变量变化,我们可得到微分方程组:

$$\frac{dr}{dl} = Lp, \frac{d\theta}{dl} = Lq, \frac{d\varphi}{dl} = Lw,$$

$$\frac{dp}{dl} = L \left[-\frac{pG}{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial r} + \right.$$

$$\left. r(q^2 + w^2 \sin^2 \theta) \right],$$

$$\frac{dq}{dl} = L \left[-\frac{qG}{s} + \frac{1}{sr^2} \frac{\partial s}{\partial \theta} - \right.$$

$$\left. \frac{2qp}{r} + \frac{w^2 \sin 2\theta}{2} \right],$$

$$\frac{dw}{dl} = L \left[-\frac{wG}{s} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{sr^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial s}{\partial \varphi} - \frac{2pw}{r} + \frac{2qw}{\tan \theta} \right],$$

$$\frac{dT}{dl} = Ls, \frac{dL}{dl} = 0 \quad (A2)$$

这里 G 是 s 对 λ 的导数, 可用空间导数 p, q, w 表示为:

$$G = \frac{\partial s}{\partial r} p + \frac{\partial s}{\partial \theta} q + \frac{\partial s}{\partial \varphi} w \quad (A3)$$

方程(A2)右边没有未知量的微分, 因此, 可以简单地用未知矢量:

$$\omega = (r, \theta, \varphi, p, q, w, T, L)^T \quad (A4)$$

改写为:

$$\frac{d\omega}{dl} = f(\omega)$$

我们使用在 $\omega_n (n=1, 2, \dots, N)$ 处的 N 个点将射线划分为 $N-1$ 段。然后正向差分图把微分方程转化为 $N-1$ 个方程:

$$f_n(\omega_n) + f_n(\omega_{n+1}) - \frac{2}{\Delta l} (\omega_{n+1} - \omega_n) =$$

$$h_n(\omega_n, \omega_{n+1}) = 0 \quad (A5)$$

这里 Δl 是点间间隔。

尽管方程(A5)不包括条件(3), 但由于方程(3)中 H 是正则方程(1)的哈密尔顿算子且不明确地依赖于 λ , 因此, $\frac{dH}{d\lambda} = 0$ 。这样, 如果该条件满足射线初始点, 则会自动满足整个射线, 我们可以把射线两端的边界条件定义为:

$$\begin{aligned} & (\tau_1 - \tau_s, \theta_1 - \theta_s, \varphi_1 - \varphi_s, T_1, p_1^2 + \\ & \tau_1^2 q^2 + \tau_1^2 \sin^2 \theta_1 w_1^2 - 1)^T = g_1(\omega_1) = 0 \end{aligned} \quad (A6)$$

$$\begin{aligned} & (\tau_N - \tau_R, \theta_N - \theta_R, \varphi_N - \varphi_R)^T = \\ & g_N(\omega_N) = 0 \end{aligned} \quad (A7)$$

这里 $(\tau_s, \theta_s, \varphi_s)$ 和 $(\tau_R, \theta_R, \varphi_R)$ 分别是震源

和台站坐标。(A6)第4项约束走时从零开始。

联立方程(A5), (A6)和(A7), 我们可得到联立非线性方程组:

$$F(W) = (g_1, h_1, h_2, \dots, h_{N-1}, g_N)^T = 0 \quad (A8)$$

对所有的未知矢量:

$$W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^T \quad (A9)$$

由于我们知道雅可比矩阵 $\frac{\partial F}{\partial W}$ 的解析表达式, 这样, 方程(A8)可以用迭代法(如牛顿法)求解。

如果间断面 $r = h(\theta, \varphi)$ 将介质划分为A, B两个区域, 从而把地震射线也划成两段, 每段我们有N个不同的点。现在对整个介质有 $16(N-1)$ 个方程, 在射线两 endpoints 有9个边界条件:

$$\begin{aligned} r_1^A &= r_s, \theta_1^A = \theta_s, \varphi_1^A = \varphi_s, \\ r_N^B &= r_R, \theta_N^B = \theta_R, \varphi_N^B = \varphi_R, T_1^A = 0, \\ (p_1^A)^2 + (r_1^A q_1^A)^2 + (r_1^A \sin \theta_1^A w_1^A)^2 &= 1, \end{aligned}$$

$$(p_1^B)^2 + (r_1^B q_1^B)^2 + (r_1^B \sin \theta_1^B w_1^B)^2 = 1 \quad (A10)$$

另外, 再引入5个方程:

$$\begin{aligned} r_N^A &= r_1^B, \theta_N^A = \theta_1^B, \varphi_N^A = \varphi_1^B, \\ T_N^A &= T_1^B, r_N^A = h(\theta_N^A, \varphi_N^A) \end{aligned} \quad (A11)$$

来确保两射线段在间断面处连接。

斯奈尔定律要求在间断面上连接点处的两个独立切向矢量满足方程(16)。因此, 方程总数有 $16(N-1)+9+5+2$, 与未知量 $16N$ 一致, 因此, 可以在有间断面的球形地球里进行射线追踪。

译自: Geophys J Int. 1998. 132: 339~346

原题: Pseudo-bending method for three-dimensional seismic ray tracing in a spherical earth with discontinuities

(中国科学技术大学研究生院(北京) 雷建设、北京市地震局 兰丛欣译; 李兴才校)