线性映射

映射本身就是一类函数,因此常使用一般函数通用的符号来表示映射.若令是Euclidean m空间的子空间,是另一个不同维Euclidean n空间内的子空间,则



称为子空间到子空间的映射(或函数,变换),它表示将子空间的每一个向量变成子空间的一个相对于向量的一种规则.于是,若和,则向量是的映射或变换,即有



并称子空间是映射的始集(initial set)或定义域(domain),称是映射的终集(final set)或上域(codomain)

若是向量空间的某个向量,则称为向量在映射下的像(image),或映射在点的值(value),而称为的原像.对于向量空间的子空间,映射表示子空间的元素(即向量)在映射下的值的集合,写作



特别地,代表对内所有向量的变换输出的集合,称为映射的值域(range),其符号为



一般地,映射的值域是的一个子集合.如果,即映射的值域等于向量空间,则称为满射(surjective).映射称为单射(injective),若它将的不同向量映射为的不同向量,即



或者



特别地,若映射既是单射,又是满射,则成为一对一映射(bijective).一个一对一映射存在逆映射.逆映射的任务就是将映射所做过的每一件事恢复原状.因此,若,则.其结果是,和.

矩阵与向量的乘法也可视为将的向量变换为的某个向量的映射,故矩阵与一向量的乘法称为该向量的矩阵变换(matrix transformation).

考察线性变换.当时,称线性变换为压缩映射(contracting mapping),因为在的像点的向量长度小于的长度.相反,如果,则称为膨胀映射(dilation mapping),因为变换的作用时将向量的长度(即向量的模)拉伸.

**定义**:令和分别是和的子空间,并且是一映射.称为线性映射(linear mapping)或线性变换(linear transformation),若对和所有变量,映射满足叠加性



和齐次性



定义中的两个关系式也可合并写作线性关系式



即线性是叠加性和齐次性的合称.更一般地,若分别为某个系统或过程的输入信号向量,则分别视为该系统或过程的输出信号向量.识别一个系统是否为线性系统的根据是:如果系统的输入为线性表达式,则当系统的输出也满足相同的线性关系时,该系统为线性系统.否则,为非线性系统.

**例**:如果我们定义矩阵为



则对每一



一般地,如果为任何矩阵,我们可定义一个从到的线性变换,即对每一,



变换为线性的,因为



因此,我们可以认为每一个矩阵定义了一个从到的线性变换.

线性子空间和线性映射之间存在下列内在联系.

**定理**:令和是两个向量空间,为一线性变换.

1. 若是的线性子空间,则是的线性子空间
2. 若是的线性子空间,则线性反变换是的线性子空间

线性映射具有以下基本性质:若是一线性变换,则



特别地,对于线性变换,若已知变换矩阵,由输入向量求输出向量,则称为正向问题(forward problem);反之,若已知变换矩阵,由输出向量求输入向量,则称为逆问题(inverse problem).正向问题的实质是矩阵-向量计算,而逆问题的本质则是矩阵方程的求解.

两个具有相同结构的向量空间和称为同构(isomorphic),记作.两个实(或复)向量空间和同构,若存在一个一对一线性映射能保持向量的内积不变,即对所有向量成立.这样一种映射称为向量空间的同构映射(isomorphism).