内积与范数

# 向量的内积与范数

n阶复向量 之间的内积



称为**典范内积**.**采用典范内积**的有限维向量空间或者习惯称为**n阶Euclidean空间或者Euclidean n空间.**

另外还经常使用加权内积



其中,加权矩阵G为正定的Hermitian矩阵,即满足条件.

**定理**:在实或复**内积空间**中,范数具有以下性质:

1. ,并且
2. 对所有向量和标量c成立
3. 范数服从极化恒等式



1. 范数满足**平行四边形法则**



1. 范数满足三角形不等式
2. 范数服从Cauchy-Schwartz不等式



等号成立,当且仅当,其中,为某个非零常数.

常数向量的内积**通常采用典型内积**,而常用的向量范数(**范数并非都由内积导出**)有以下几种.

1. 范数(也称0范数)



1. 范数(也称和范数或1范数)



1. 范数(常称Euclidean范数,有时也称Frobenius范数)



1. 范数(也称无穷范数或极大范数)



1. 范数



注意1:范数不满足范数公理中的齐次性,它是一种虚拟的范数.然而, 范数在稀疏向量与稀疏表示中却起着关键的作用.

注意2:当p=2时,范数与Euclidean范数完全等价,另外无穷范数是范数的极限形式,即有



范数是酉不变的,若对所有向量和所有酉矩阵恒成立

**命题**:Euclidean范数是酉不变的

利用向量的典范内积和Euclidean范数可以定义两个向量之间的夹角

**定义**:两个向量之间的夹角定义为



显然,若则,称常数向量和正交.因此两个常数向量正交的数学定义如下.

**定义**:两个常数向量和称为正交,并记作,若它们的内积等于零,即

由定义知,零向量与同一空间的任何向量正交

# 矩阵的内积与范数

将向量的内积与范数加以推广,即可引出矩阵的内积与范数

令复矩阵和,将这两个矩阵分别”拉长”为向量



vec(A)称为矩阵的(列)向量化

矩阵的内积记作,定义两个”拉长向量”和之间的内积



或等价写作



其中表示正方矩阵的迹函数,定义为该矩阵对角元素之和.

令表示一实数域或复数域,表示实数或复数矩阵的集合.

矩阵的范数记作,它是矩阵的的实值函数,必须具有以下性质:

1. 正值性:对于任何非零矩阵,其范数大于零,即若(零矩阵);并且当且仅当
2. 正比例性:对于任意,有
3. 三角不等式:
4. 两个矩阵乘积的范数小于或等于两个矩阵范数的乘积,即

矩阵的范数有三种主要类型:诱导范数、元素形式范数和Schatten范数

1. 诱导范数

诱导范数又称矩阵空间上的算子范数,定义为:





常用的诱导范数为p范数



P范数也称Minkowski p范数或者范数.特别地,,对应的诱导范数分别为







也就是说,诱导和范数分别是该矩阵各列元素绝对值之和的最大值(最大绝对列和)及最大绝对行和;而诱导范数则是矩阵A的最大奇异值

1. 元素形式范数

将矩阵先按列堆栈的形式,排列成一个向量,然后采用向量范数定义,即得矩阵的范数.由于这类范数是使用矩阵的元素表示的,故称为元素形式范数.元素形式范数是下面的p矩阵范数



以下是三种典型的元素形式的p范数:

1. 范数(和范数)(p=1)



1. Frobenisu范数(p=2)



1. 最大范数(max norm)即的p范数,定义为

