

不等式选讲

余周炜*

2019 年 10 月 28 日

*Email: yuzhouwei6326@outlook.com

目录

1 均值不等式	4
1.1 证明	4
1.2 推广	5
1.2.1 加权算术-几何平均不等式	5
1.2.2 矩阵形式	5
1.2.3 极限形式	5
2 幂平均不等式	6
2.1 特例	6
3 伯努利不等式	7
3.1 证明	7
3.2 推广	7
3.2.1 实数域形式	7
3.2.2 一般形式	8
4 权方和不等式	8
5 舒尔不等式	9
5.1 证明	9
5.2 一般形式	10
6 琴生不等式	10
6.1 凸函数	10
6.2 琴生不等式	10
6.3 证明	11
7 柯西不等式	12
7.1 证明	13
7.2 推广	13
7.3 拉格朗日恒等式	14
8 赫尔德不等式	14
8.1 证明	14
9 排序不等式	15
9.1 证明	15

目录	3
10 切比雪夫总和不等式	16
10.1 证明	16
11 三角不等式	16
12 闵可夫斯基不等式	17
12.1 证明	17

1 均值不等式

设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 将

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} = \exp \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i \right] \\ H_n &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \\ Q_n &= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}} \end{aligned}$$

分别叫做这 n 个正数的算术平均数、几何平均数、调和平均数和平方平均数，有下面的均值不等式成立：

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n \quad (1.1)$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时取等号。

1.1 证明

证明. 1. 当 $n = 1$ 时，显然成立。

2. 设 $n = k (k \geq 1)$ 时, $A_k \geq G_k$,

$$\underbrace{x_{k+1} + (k-1)G_{k+1}}_{k \text{ numbers}} \geq k \sqrt[k]{x_{k+1} G_{k+1}^{k-1}}$$

3. $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} + (k-1)G_{k+1}}{k} \\ & \geq G_k + \sqrt[k]{x_{k+1} G_{k+1}^{k-1}} \\ & \geq 2 \sqrt[2k]{G_k^k x_{k+1} G_{k+1}^{k-1}} = 2G_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (k+1)A_{k+1} &= x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \\ &\geq 2kG_{k+1} - (k-1)G_{k+1} \\ &= (k+1)G_{k+1} \implies A_{k+1} \geq G_{k+1} \end{aligned}$$

也成立。

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}^+, A_n \geq G_n$

□

1.2 推广

1.2.1 加权算术-几何平均不等式

不仅“均匀”的算术平均数和几何平均数之间有不等式，加权的算术平均数和几何平均数之间也有不等式。设 x_1, \dots, x_n 和 p_1, \dots, p_n 为正实数，并且 $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ ，那么：

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \geq x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$$

1.2.2 矩阵形式

算术-几何平均不等式可以看成是一位向量系数的平均数不等式。对于二维矩阵，一样有类似的不等式：对于系数都是正实数的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

设

$$A_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \quad G_i = \sqrt[k]{\prod_{j=1}^k a_{ij}}$$

，那么有：

$$\sqrt[k]{A_1 A_2 \cdots A_k} \leq \frac{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}{n}$$

也就是说：对 k 个纵列取算术平均数，它们的几何平均小于等于对 n 个横行取几何平均数的算术平均。

1.2.3 极限形式

也称为**积分形式**：对任意在区间 $[0, 1]$ 上可积的正值函数 f ，都有：

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \exp\left(\int_0^1 \ln f(x) dx\right) \quad (1.2)$$

这实际上是在算术-几何平均值不等式取成

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \exp\left(\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n}{n}\right)$$

后，将两边的黎曼和中的 n 趋于无穷大后得到的形式。

2 幂平均不等式

幂平均 (power mean), 也叫广义平均 (generalized mean), 是毕达哥拉斯平均 (包含了算术, 几何, 调和平均) 的一种抽象化。

若 p 是一非零实数, 可定义实数 x_1, \dots, x_n 的 p 次幂平均为

$$M_p(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.1)$$

一般地, 如果 $p < q$, 则 $M_p(x_1, \dots, x_n) \leq M_q(x_1, \dots, x_n)$ 且这两个平均相等当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 。这由事实

$$\forall p \in \mathbb{R}, \frac{\partial M_p(x_1, \dots, x_n)}{\partial p} \geq 0 \quad (2.2)$$

得出, 上述不等式可由琴生不等式证明。

特别地, 对 $p \in \{-1, 0, 1, 2\}$, 幂平均不等式蕴含了均值不等式。

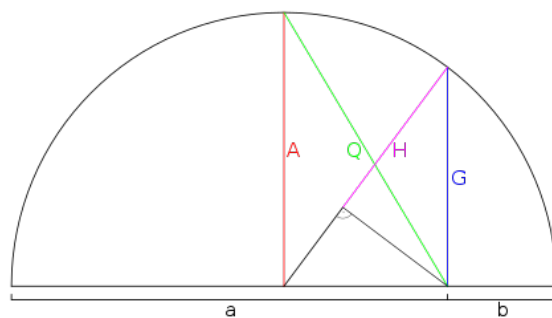


图 1: 特例: $n=2$ 时的图形描述

2.1 特例

最小值:

$$M_{-\infty}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{p \rightarrow -\infty} M_p(x_1, \dots, x_n) = \min\{x_1, \dots, x_n\}$$

调和平均:

$$M_{-1}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

几何平均:

$$M_0(x_1, \dots, x_n) = \lim_{p \rightarrow 0} M_p(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

算术平均

$$M_1(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

平方平均

$$M_2(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

立方平均

$$M_3(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[3]{\frac{x_1^3 + \dots + x_n^3}{n}}$$

最大值

$$M_{+\infty}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{p \rightarrow \infty} M_p(x_1, \dots, x_n) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

3 伯努利不等式

$$\forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1,$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (3.1)$$

如果 $n \geq 0$ 且是偶数, 则不等式对任意实数 x 成立。

可以看到在 $n = 0, 1$, 或 $x = 0$ 时等号成立, 而对于任意正整数 $n \geq 2$ 和任意实数 $x \geq -1, x \neq 0$, 有严格不等式:

$$(1+x)^n > 1+nx \quad (3.2)$$

3.1 证明

可以用数学归纳法证明: 当 $n = 0, 1$, 不等式明显成立。假设不等式对正整数 n , 实数 $x \geq -1$ 时成立, 那么

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \quad (3.3)$$

$$\geq (1+x)(1+nx) \quad (3.4)$$

$$= 1 + (n+1)x + nx^2 \quad (3.5)$$

$$\geq 1 + (n+1)x \quad (3.6)$$

3.2 推广

3.2.1 实数域形式

如果 $x > -1$, 那么:

- 若 $r \leq 0$ 或 $r \geq 1$, 有 $(1+x)^r \geq 1+rx$
- $0 \leq r \leq 1$, 有 $(1+x)^r \leq 1+rx$

$r=0,1$ 时, 等式显然成立; 除此之外, 等号成立当且仅当 $x=0$ 。

我们用导数来证明该结论:

证明. 在 $(-1, +\infty)$ 上定义 $f(x) = (1+x)^r - (1+rx)$, 其中 $r \neq 0, 1$, 对 x 求导得 $f'(x) = r(1+x)^{r-1} - r$, 则 $f'(x) = 0$ 当且仅当 $x=0$ 。分情况讨论:

1° $0 < r < 1$, 则对 $x > 0, f'(x) < 0$; 对 $-1 < x < 0, f'(x) > 0$ 。因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 时取最大值 0, 故得 $(1+x)^r \leq 1+rx$ 。

2° $r < 0$ 或 $r > 1$, 则对 $x > 0, f'(x) > 0$; 对 $-1 < x < 0, f'(x) < 0$ 。因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 时取最小值 0, 故得 $(1+x)^r \geq 1+rx$ 。

在这两种情况下, 等号成立当且仅当 $x=0$ 。□

3.2.2 一般形式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n \quad (3.7)$$

其中 x_i 均为同号且大于等于 -1 的实数。(该证明摘自 [2]):

证明. 构造数列

$$x_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) - (1+a_1+a_2+\cdots+a_n) \quad (n \geq 2)$$

则 $x_{n+1} - x_n = a_{n+1}[(1+a_1)\cdots(1+a_n) - 1]$ 。

若 $a_i > 0 (i=1, 2, \cdots, n+1)$, 由上式易见 $x_{n+1} > x_n$; 若 $-1 < a_i < 0 (i=1, 2, \cdots, n)$, 则 $0 < 1+a_i < 1$, 也有 $x_{n+1} > x_n$

因此 $\{x_n\}$ 是一个单调递增的序列 ($n \geq 2$)。由于 $x_2 = (1+a_1)(1+a_2) - (1+a_1+a_2) = a_1a_2 > 0$, 则对一切 $n \geq 2, x_n > 0$, 从而原不等式成立。□

4 权方和不等式

设 $a_i, b_i > 0, i=1, 2, \cdots, n, k > 0$, 则

$$\frac{a_1^{k+1}}{b_1^k} + \frac{a_2^{k+1}}{b_2^k} + \cdots + \frac{a_n^{k+1}}{b_n^k} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{k+1}}{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^k} \quad (4.1)$$

证明. 令

$$s = (a_1+a_2+\cdots+a_n)^{-1} \quad (4.2)$$

$$t = (b_1+b_2+\cdots+b_n)^{-1} \quad (4.3)$$

□

则原不等式等价于 $\sum_{i=1}^n \frac{(sa_i)^{k+1}}{(tb_i)^k} \geq 1$

由伯努利不等式有:

$$\frac{(sa_i)^{k+1}}{(tb_i)^k} = tb_i \cdot \left(\frac{sa_i}{tb_i} \right)^{k+1} \quad (4.4)$$

$$\geq tb_i \left[1 + (k+1) \left(\frac{sa_i}{tb_i} - 1 \right) \right] \quad (4.5)$$

$$= tb_i \left[(k+1) \frac{sa_i}{tb_i} - k \right] = (k+1)sa_i - ktb_i \quad (4.6)$$

则

$$\sum_{i=1}^n \frac{(sa_i)^{k+1}}{(tb_i)^k} \geq \sum_{i=1}^n [(k+1)sa_i - ktb_i] = (k+1) - k = 1 \quad (4.7)$$

此即

$$\frac{a_1^{k+1}}{b_1^k} + \frac{a_2^{k+1}}{b_2^k} + \cdots + \frac{a_n^{k+1}}{b_n^k} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{k+1}}{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^k} \quad (4.8)$$

5 舒尔不等式

舒尔不等式 (Schur's Inequality) 是一个对于正数成立的不等式, 由 Issai Schur 的名字命名。

对于非负实数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 和 $r > 0$:

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0 \quad (5.1)$$

当 $a = b = c$ 或 a, b, c 中有两个相等, 另一个为 0 时取 “=”。

5.1 证明

不失一般性 (WLOG, Without Loss Of Generality), 令 $a \geq b \geq c$, 注意到

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) \quad (5.2)$$

$$= a^r(a-b)(a-c) - b^r(a-b)(b-c) = (a-b)(a^r(a-c) - b^r(b-c)) \quad (5.3)$$

显然, $a^r \geq b^r \geq 0$, 并且 $a-c \geq b-c \geq 0$, 因此

$$(a-b)(a^r(a-c) - b^r(b-c)) \geq 0 \quad (5.4)$$

$$\implies a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) \geq 0 \quad (5.5)$$

又因为 $c^r(c-a)(c-b) \geq 0$, 原命题得证。

5.2 一般形式

$a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ 满足 $a \geq b \geq c, x \geq y \geq z$ 或 $z \geq y \geq x$ 。令 $k \in \mathbb{Z}^+, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ 凸或者单调, 那么

$$f(x)(a-b)^k(a-c)^k + f(y)(b-a)^k(b-c)^k + f(z)(c-a)^k(c-b)^k \geq 0 \quad (5.6)$$

标准形式即

$$x = a, y = b, z = c, k = 1, f(m) = m^r \quad (5.7)$$

6 琴生不等式

6.1 凸函数

设连续函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$ (或开区间 (a, b)), 对于区间 $[a, b]$ 内任意两点 x_1, x_2 都有:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad (6.1)$$

则称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的凸函数 (下凸函数), 若把不等号反向, 则称这样的 $f(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上的凹函数 (上凸函数)。

凸函数的几何意义是, 过 $y = f(x)$ 曲线上任意两点作弦, 则弦的中点必在该曲线上方或在曲线上。

6.2 琴生不等式

琴生不等式 (Jensen's inequality) 以丹麦数学家约翰·琴生 (Johan Jensen) 命名。它给出积分的凸函数值和凸函数的积分值之间的关系。它于 1906 年被琴生证明。该不等式说明平均数的凸变换小于或等于凸变换之后的平均数。

两点形式:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

其中 $t \in [0, 1]$ 。

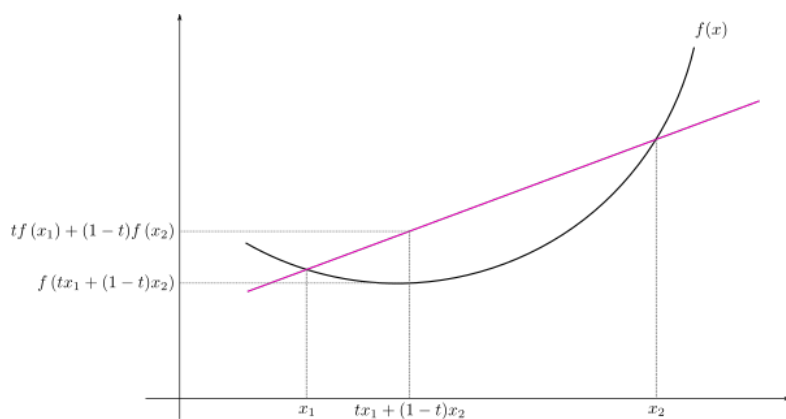


图 2: 凸函数的割线在该函数图像的上方

一般形式: 对于任意点集 $\{x_i\}$, 若 $\lambda_i \geq 0$ 且 $\sum_i \lambda_i = 1$, 使用数学归纳法, 可以证明凸函数 $f(x)$ 满足:

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i) \quad (6.2)$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$ 时取等号。

该式被称为 Jensen 不等式。

在概率论中, 如果 X 是一个随机变量, φ 是一个凸函数:

$$\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)] \quad (6.3)$$

6.3 证明

证明. 1. $n=1,2$ 时, 由凸函数的定义成立。

2. 假设 $n=k$ 时, 公式(6.2)成立。

3. $n=k+1$ 时

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\lambda_{k+1} x_{k+1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \quad (6.4)$$

$$= f\left(\lambda_{k+1} x_{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \eta_i x_i\right) \quad (6.5)$$

其中

$$\eta_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} \quad (6.6)$$

由公式(6.2)的结论和公式(6.5)有:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) \leq \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) + (1 - \lambda_{k+1}) f\left(\sum_{i=1}^k \eta_i x_i\right) \quad (6.7)$$

注意到 λ_i 满足:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1 \quad (6.8)$$

因此:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 - \lambda_{k+1} \quad (6.9)$$

因此 η_i 也满足:

$$\sum_i^k \eta_i = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} = 1 \quad (6.10)$$

由公式(6.2)和(6.10)得到:

$$\sum_{i=1}^k f(\eta_i x_i) \leq \sum_{i=1}^k \eta_i f(x_i) \quad (6.11)$$

由公式(6.7)和式(6.11):

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) \leq \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) + (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \eta_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i) \quad (6.12)$$

因此 $i = k + 1$ 时, Jensen 不等式成立。

综上, Jensen 不等式成立。 \square

7 柯西不等式

柯西不等式 (Cauchy-Schwarz inequality) 是数学中最重要的不等式之一, 对于内积空间中的任意两个向量 \mathbf{u}, \mathbf{v} 有:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \quad (7.1)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是内积。在欧几里得空间中, 即:

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right) \quad (7.2)$$

引入向量的范数, 则该不等式可以写作:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \quad (7.3)$$

当前仅当 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 线性相关时取等号。

7.1 证明

证明. 下面分两种情况讨论。

1° 平凡情形: $\mathbf{v} = 0$, 该定理显然成立。

2° 假定 $\mathbf{v} \neq 0$ 令 $\lambda = \langle u, v \rangle / \|v\|^2$

$$0 \leq \|u - \lambda \cdot v\|^2 \quad (7.4)$$

$$= \langle u, u \rangle - \langle \lambda \cdot v, u \rangle - \langle u, \lambda \cdot v \rangle + \langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v \rangle \quad (7.5)$$

$$= \langle u, u \rangle - \lambda \langle v, u \rangle - \lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle \quad (7.6)$$

$$= \|u\|^2 - 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \|v\|^2 \quad (7.7)$$

$$= \|u\|^2 - 2 \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2} + \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2} \quad (7.8)$$

$$= \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2} \quad (7.9)$$

因此: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ 成立。

□

7.2 推广

积分形式 对于平方可积的复值函数, 有:

$$\left| \int f(x)g(\bar{x}) \, dx \right|^2 \leq \int |f(x)|^2 \, dx \cdot \int |g(x)|^2 \, dx$$

期望形式 设 X, Y 为任意两个随机变量, 有:

$$[\mathbf{E}(XY)]^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) \quad (7.10)$$

以下证明:

$$g(t) = \mathbf{E}((tX - Y)^2) = t^2(\mathbf{E}(X^2)) - 2t\mathbf{E}(XY) + \mathbf{E}(Y^2) \quad (7.11)$$

$$\because (tX - Y)^2 \geq 0, g(t) \geq 0 \quad (7.12)$$

$$\Delta = (2\mathbf{E}(XY))^2 - 4(\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2)) \leq 0 \quad (7.13)$$

当且仅当 $tX = Y$ 时有 $g(t) = 0$ 所以:

$$[\mathbf{E}(XY)]^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) \quad (7.14)$$

7.3 拉格朗日恒等式

在三维欧氏空间中有下列关系:

$$\|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 \quad (7.15)$$

8 赫尔德不等式

赫尔德不等式 (Hölder's inequality) 是数学分析的一条不等式, 取名自 (Otto Hölder)。这是一条揭示 L^p 空间的相互关系的基本不等式:

设 S 为测度空间, $1 \leq p, q \leq \infty$, 及 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 设 f 在 $L^p(S)$ 内, g 在 $L^q(S)$ 。则 fg 在 $L^1(S)$ 内, 且有

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

若 S 取作 $\{1, \dots, n\}$ 附计数测度, 便得赫尔德不等式的特殊情形: 对所有实数 (或复数) $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$, 有

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q} \quad (8.1)$$

我们称 p, q 互为赫尔德共轭。

若取 S 为自然数集附计数测度, 便得与上类似的无穷级数不等式。

当 $p = q = 2$, 便得到柯西-施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwarz inequality)。

8.1 证明

在数学中, 杨氏不等式 (Young's inequality for products) 是一个关于两个数乘积的不等式, 该不等式以 William Henry Young 的名字命名。

引理 1 (杨氏不等式). 如果 a, b 是非负实数, p, q 是大于 1 的实数满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (8.2)$$

当且仅当 $a^p = b^q$ 时取等号。

证明. $a = 0$ 或 $b = 0$ 时显然成立。因此假定 $a > 0, b > 0$, 令 $t = 1/p, 1 - t = 1/q$, 因为对数函数是凹的,

$$\ln(ta^p + (1-t)b^q) \geq t \ln(a^p) + (1-t) \ln(b^q) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab) \quad (8.3)$$

当且仅当 $a^p = b^q$ 时取等号。 □

证明. 如果 $1 < p, q < \infty$, 由杨氏不等式可得:

对于 $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n \frac{|x_k|}{\|\mathbf{x}\|_p} \frac{|y_k|}{\|\mathbf{y}\|_q} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q} \right) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (8.4)$$

因此对于任意 $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q \quad (8.5)$$

□

9 排序不等式

排序不等式 (Rearrangement Inequality) 又称排序原理, 设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n, c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 b_1, b_2, \cdots, b_n 的任一排列, 则

$$\underbrace{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}_{\text{反序和}} \leq \underbrace{a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n}_{\text{乱序和}} \leq \underbrace{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}_{\text{顺序和}} \quad (9.1)$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时, 反序和等于顺序和。

9.1 证明

设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ 为两组实数, c_1, c_2, \cdots, c_n 是 b_1, b_2, \cdots, b_n 的任一排列, 因为 b_1, b_2, \cdots, b_n 的全排列只有 $n!$ 个, 所以:

$$S = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n \quad (9.2)$$

的不同的值也只有有限个 (个数 $\leq n!$), 其中必有最大值和最小值。

考虑式(9.2), 若 $c_1 \neq b_1$, 则有某 $c_k = b_1 (k > 1), c_1 > c_k$, 将(9.2)对换, 得

$$S' = a_1 c_k + \cdots + a_k c_1 + \cdots + a_n c_n \quad (9.3)$$

(9.3)-(9.2)得:

$$S' - S = a_1 c_k + a_k c_1 - a_1 c_1 - a_k c_k = (a_k - a_1)(c_1 - c_k) \geq 0 \quad (9.4)$$

这说明将(9.3)调换为 $a_1 b_1$ 后, 和式不减小。

若 $c_1 = b_1$, 则转而考察 c_2 , 并进行类似讨论。

类似地, 可以证明, 将(9.2)中的第一项换为 $a_1 b_1$, 第二项换位 $a_2 b_2$ 后, 和式不减小。

如此下去, 经过有限步调整, 可以一切和数中, 最大和数所对应的情况只能是数组 $\{c_i\}$ 由小到大排序的情况, 最大和数是顺序和。

同理可证, 最小和数是反序和。

10 切比雪夫总和不等式

如果

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \quad (10.1)$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \quad (10.2)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right) \quad (10.3)$$

类似的, 如果

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \quad (10.4)$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \quad (10.5)$$

那么

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right) \quad (10.6)$$

10.1 证明

证明. 由排序不等式 (Rearrangement inequality) 可知

$$S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n}$$

当 $i_k = k$ 时取最大值。

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \quad (10.7)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_1 \quad (10.8)$$

$$\cdots \quad (10.9)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1} \quad (10.10)$$

将上述不等式相加, 可得不等式(10.3)。

□

11 三角不等式

三角不等式 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (11.1)$$

绝对值不等式 对实数 a, b 有:

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \quad (11.2)$$

12 闵可夫斯基不等式

在数学分析中, 闵可夫斯基不等式 (Minkowski Inequality) 表明 L^p 空间是赋范向量空间 (normed vector spaces), 令 S 是一个测度空间, 令 $1 \leq p \leq \infty$, f, g 是 $L^p(S)$ 空间中的元素, 那么 $f + g$ 也在 $L^p(S)$ 中, 我们有不等式:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (12.1)$$

特殊地, 在计数测度下有:

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \quad (12.2)$$

12.1 证明

不失一般性, 假定:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \neq 0 \quad (12.3)$$

定义:

$$q = \frac{p}{p-1}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1 \quad (12.4)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k)^{p-1} \quad (12.5)$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/q} \quad (12.6)$$

$$= \left(\left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \right) \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/q} \quad (12.7)$$

两边同时除以:

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/q} \quad (12.8)$$

并注意到

$$1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p} \quad (12.9)$$

有:

$$\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{1/p} \quad (12.10)$$

参考文献

- [1] Wikipedia
- [2] 不等式的解题方法与技巧。
- [3] 贝努利不等式的几个推论及应用。