一、选择题

1. **D**

解析：

按定义$X \sim t(n)$,故X可表示成$X=\dfrac{Z}{\sqrt{Y/n}}$,其中$Y \sim \chi^2(n)$,$Z \sim N(0,1)$,且Z与Y相互独立，

从而$X^2=\dfrac{Z^2}{Y/n}$，由于$Z \sim N(0,1)$，$Z^2 \sim \chi^2(1)$,上式右端分子$Z^2 \sim \chi^2(1)$,分母$Y \sim \chi^2(n)$,

且Z与Y相互独立，故Z^2与Y相互独立，按F分布的定义得$X^2 \sim F(1,n)$

2. **C**
3. 答案：**A**

解析：显著水平α表示落入检验拒绝域的概率,所以显著性水平变小,拒绝域更小,在显著性水平$\alpha=0.05$的条件下能接受H_0：$\mu=\mu_0$,那么在显著性水平$\alpha=0.01$条件下也能够接受. 因此选 **A.**

4. **C**
5. **D**
6. 答案：**C**

【答】 [C]

【详解】根据列维 林德柏格定理的条件,要求$X_1,X_2,\ldots,X_n$独立分布,且$E(X_i)$与$D(X_i)$均存在,(A)(B)两项不能保证同分布,可排除;(D)项服从同一离散项分布,但不能保证EX_i,DX_i存在,也可排除;只有(C)为正确选项.

二、填空题

1. （**4.808，5.196**）
2. $t=\dfrac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$
3. 答案：扩大样本容量.

解析:因为犯两类错误的概率,当样本容量一定时,一个缩小另一个会扩大,所以要使得犯两类错误的概率同时缩小,只能扩大样本容量.

4. $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，$t(n-1)$
5. 答案：$\dfrac{\sigma^4}{10}$

解析：

因为$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,这里$n=21$,即$\dfrac{20S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(20)$，故$D\left(20S^2/\sigma^2\right)=2\times 20=40$,

即$\dfrac{20^2}{\sigma^4}D\left(S^2\right)=40, D\left(S^2\right)=\dfrac{\sigma^4}{10}$.

6. $F(m-1,n-1)$

三、解析：

解 设第i台车床开工数（停车为 0，开车为 1），$X_i\sim B(1,0.6)$,因此，200 台车床开工数 $Y=\sum_{i=1}^{200}X_i\sim B(200,0.6)$，供电应为$C$千瓦的电能才能保证正常工作达$99.9\%$，即

$$P\{Y\le C\}=P\left\{\frac{Y-200\times0.6}{\sqrt{200\times0.6\times0.4}}\le\frac{C-120}{\sqrt{48}}\right\}\ge 0.999$$

查表得 $\Phi(3.1)=0.999$，故可得 $\dfrac{C-120}{\sqrt{48}}\ge 3.1$，因此

$$C\ge 120+3.1\times\sqrt{48}=120+21.4774=141.4774$$

即供电 142 千瓦电就能以99.9%保证本间正常工作（即不影响生产）。

四、解析：

易见随机变量$(X_1+X_{n+1}),(X_2+X_{n+2}),\cdots,(X_n+X_{2n})$相互独立且都服从正态分布$\mathrm{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$.

因此可以将它们看作是取自总体$\mathrm{N}\left(2\mu,2\sigma^2\right)$的一个容量为$n$的简单

随机样本，其样本均值为$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{i+\mathrm{n}})=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}$,

样本方差为$\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{i+\mathrm{n}}-2\overline{X}\right)^2=\dfrac{1}{n-1}Y$。

又因为样本方差是总体方差的无偏估计，故$E\left(\dfrac{1}{n-1}Y\right)=2\sigma^2$，即$E(Y)=2(n-1)\sigma^2$。

五、解析：

$$L(X_1,\cdots,X_n;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda+1)X_i^{\lambda}=(\lambda+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)^{\lambda}$$

$$\ln L=n\ln(\lambda+1)+\lambda\ln\prod_{i=1}^{n}X_i$$

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$$

得 $\hat{\lambda}=-\dfrac{n+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

六、解析：

解：由 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\le\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ 得

$\sigma^2\ge\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}$，$\sigma^2\le\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$

所以 σ 的置信区间为：[$\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(11)}}$，$\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(11)}}$]

将 $n=12$，$S=0.2$ 代入得 [0.15，0.31]

七、解析：

检验假设 $H_0:\mu=1000$，$H_1:\mu\neq1000$

检验统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.

对于给定的 $\alpha=0.05$，由 $P\{|U|>u_{\frac{\alpha}{2}}\}=0.05$，得到拒绝域为 $\{|U|>1.96\}$.

将$\bar{X}=968$代入,计算检验统计量的观测值$u=\dfrac{968-1000}{80/\sqrt{25}}=-2<-1.96$,落入拒绝域，因此拒绝原假设$H_0$．即在显著性水平$\alpha=0.05$下,认为该种电子元件的平均使用寿命不是1000小时.

八、解析：

证：由题设X_k，D_k，可知$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$的数学期望与方差分别满足以下不等式：

$$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k)=\frac{1}{n}E(\sum_{k=1}^{n}X_k)\le\frac{1}{n}E(\sum_{k=1}^{n}A)\le A$$

$$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n}X_k)\le\frac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n}B)\le\frac{B}{n}$$

利用车比雪夫不等式可得

$$P\left\{\left|\overline{X}-E(\overline{X})\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}\le\frac{B}{\varepsilon^2 n}\xrightarrow{n\to+\infty}0$$

由大数定律定义可知，$X_1X_2\ldots\ldots X_n\ldots\ldots$服从大数定律。