953501 Голубович Ю.

Лабораторная работа №7 (вариант 2)

# Лабраторная работа №7

## Системы дифференциальных уравнений

## Вариант 2

### Задание 1.

1). Исследуйте поведение фазовых кривых системы уравнений вблизи точки покоя. Сделайте чертеж.

2). Определите тип точки покоя по фазовому портрету и собственным значениям матрицы системы.

3). Найдите общее решение системы и выделите фундаментальную систему решений. Сравните с результатами, полученными в Maple.

4). Постройте в системе $Oxy_1y_2$ кривые, удовлетворяющие системе и содержащие точки $(0, y_1^0, y_2^0)$. $y_1^0$ и $y_2^0$ возьмите те же, что при построении фазового портрета. Сравните чертежи на плоскости и в пространстве

5). Перейдите от системы к однородному ДУ 1-го порядка относительно функции $y_2(y_1)$, постройте его поле направлений в окрестности особой точки. Сравните с фазовым портретом системы.

1.2. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 5y_2 \\ y_2' = y_1 + 7y_2 \end{cases}$

```
M := Matrix([[3, 5], [1, 7]]) :
v := Eigenvectors(M) :
```

$$v := \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• 1), 2), 3):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \\ \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 8 \end{matrix}$$

Т.к. $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, то точка покоя системы — неустойчива (неустойчивый узел).

Т.к. $|A| = 16 \neq 0$, то система имеет единственное тривиальное решение $\bar{y} = (0,0)^T$, то есть единственную точку покоя $\bar{\alpha} = (0,0)$.

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 5\beta = 0 \\ \alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -5\beta \qquad \bar{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} -5\alpha + 5\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta \qquad \bar{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Фундаментальная система решений:

$$\bar{y}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} \quad \text{и} \quad \bar{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8x}$$

Общее решение системы:

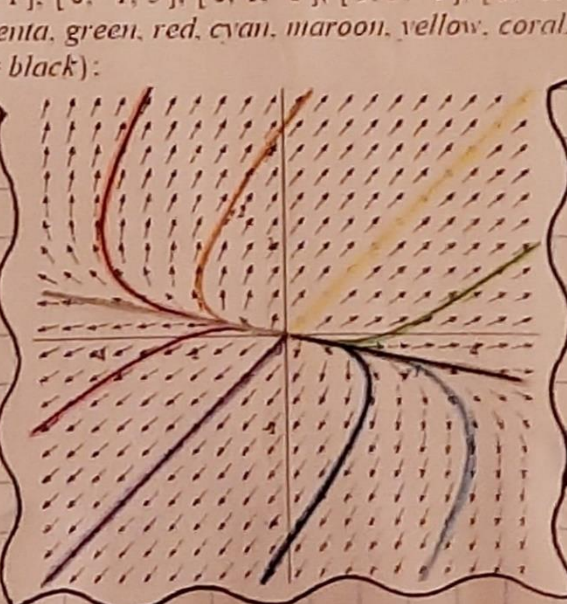
$$\bar{y} = C_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8x} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_1(x) = -5C_1 e^{2x} + C_2 e^{8x} \\ y_2(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{8x} \end{cases}$$

- В системе Maple:

```
ds := diff(y1(x), x) = 3·y1(x) + 5·y2(x), diff(y2(x), x) = y1(x) + 7·y2(x) :
dsolve({ds}, {y1(x), y2(x)}) :
subs(_C2 = C_2, _C1 = C_1, dsolve({ds}, {y1(x), y2(x)})) ;
```

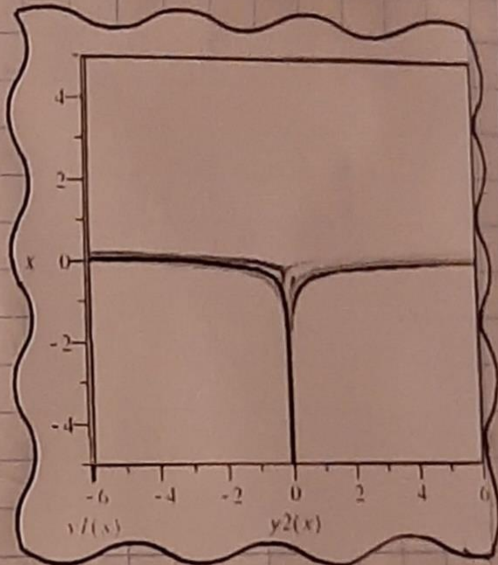
$$\left\{ y1(x) = C_1 e^{8x} + C_2 e^{2x},\ y2(x) = C_1 e^{8x} - \frac{1}{5} C_2 e^{2x} \right\}$$

```
phaseportrait({ds}, [y1(x), y2(x)], x = -1 ..1, [[0, -4, -1], [0, 4, 1], [0, -3, 5], [0, 3, -5],
    [0, -1, -1], [0, 1, 1], [0, -1, 3], [0, 1, -3], [1, 5, -1], [1, -5, 1]], y1 = -5 ..5, y2 = -5 ..5,
    linecolor = [magenta, green, red, cyan, maroon, yellow, coral, blue, black, grey], arrows
    = medium, color = black) :
```

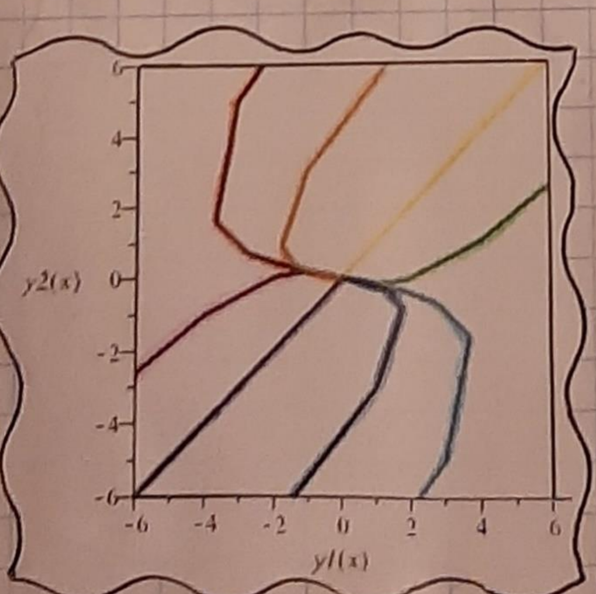


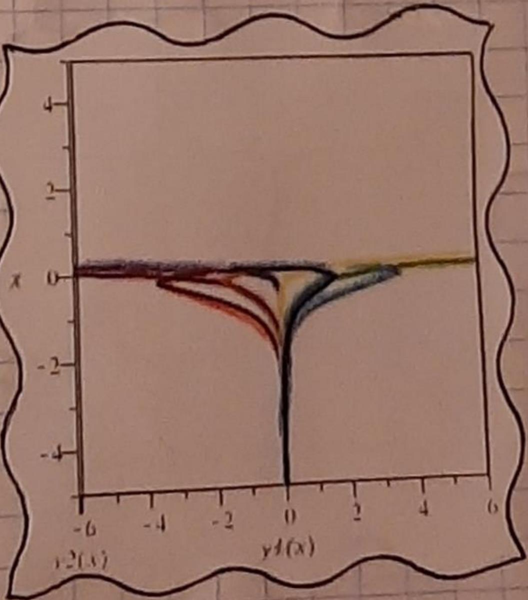
4): В системе Maple:

$DEplot3d\left(\left\{\frac{d}{dx}\,y1(x) = 3\,y1(x) + 5\,y2(x),\ \frac{d}{dx}\,y2(x) = y1(x) + 7\,y2(x)\right\}, \{y1(x), y2(x)\}, x = -5..5, [[y1(0) = -4, y2(0) = -1], [y1(0) = 4, y2(0) = 1], [y1(0) = -3, y2(0) = 5], [y1(0) = 3, y2(0) = -5], [y1(0) = -1, y2(0) = -1], [y1(0) = 1, y2(0) = 1], [y1(0) = -1, y2(0) = 3], [y1(0) = 1, y2(0) = -3], ], y1 = -6..6, y2 = -6..6, scene = [x, y1(x), y2(x)], linecolor = [magenta, green, red, cyan, maroon, yellow, coral, blue]\right);$


Проекции 3d графика на плоскости:



• 5) :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 + 5y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 7y_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{y_1 + 7y_2}{3y_1 + 5y_2} \qquad y_2 = y_2(y_1)$$

• $\frac{y_2}{y_1} = u, \quad y_2 = uy_1, \quad y_2' = u'y_1 + u$

$$u'y_1 + u = \frac{y_1 + 7uy_1}{3y_1 + 5uy_1} \Rightarrow u'y_1 = \frac{1 + 7u - 3u - 5u^2}{3 + 5u} \Big( = -\frac{5u^2 - 4u - 1}{3 + 5u}$$

$$\frac{(3+5u)\,du}{5u^2 - 4u - 1} = -\frac{dy_1}{y_1}$$

$$convert\left(\frac{3 + 5\cdot u}{5\cdot u^2 - 4\cdot u - 1}, parfrac\right);$$

$$-\frac{5}{3\,(5\,u + 1)} + \frac{4}{3\,(u - 1)}$$

$$\frac{A}{5u+1} + \frac{B}{u-1} = \frac{3+5u}{(5u+1)(u-1)}$$

$$A(u-1) + B(5u+1) = 5u + 3$$

$$u = 1: \quad 6B = 8 \Rightarrow B = \frac{4}{3}$$

$$u = -\frac{1}{5}: \quad -\frac{6}{5}A = 2 \Rightarrow A = -\frac{5}{3}$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{5\,du}{5u+1} + \frac{4}{3}\int \frac{du}{u-1} = -\int \frac{dy_1}{y_1} + C$$

$$-\frac{1}{3}\ln|5u+1| + \frac{4}{3}\ln|u-1| = -\ln|y_1| + \ln|\tilde{C}_1|$$

$$-\ln|5u+1| + 4\ln|u-1| = -\ln|y_1|^3 + \ln|\tilde{C}_1|^3$$

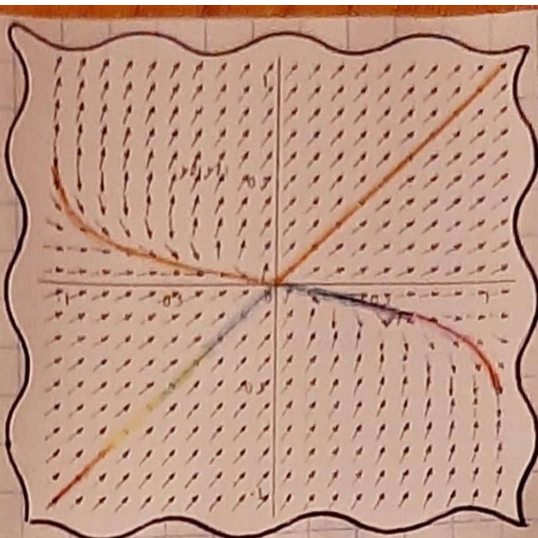
$$\frac{(u-1)^4}{5u+1} = \frac{C_1}{y_1^3} \Rightarrow \frac{(y_2 - y_1)^4 \cdot y_1}{y_1^4 \cdot (5y_2 + y_1)} = \frac{C_1}{y_1^3} \Rightarrow \frac{(y_2 - 1)^4}{5y_2 + y_1} = C_1$$

• В системе Maple:

$$d := dsolve\left(diff(y2(y1), y1) = \frac{y1 + 7\cdot y2(y1)}{3\cdot y1 + 5\cdot y2(y1)}, y2(y1), implicit\right);$$

$$d := \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5\,y2(y1) + y1}{y1}\right) - \frac{4}{3}\ln\left(-\frac{-y2(y1) + y1}{y1}\right) - \ln(y1) - \_C1 = 0$$

$$DEplot\left(diff(y2(y1), y1) = \frac{y1 + 7\cdot y2(y1)}{3\cdot y1 + 5\cdot y2(y1)}, y2(y1), y1 = -1.05..1.05, y2 = -1.05..1.05, [y2(1) = -0.4, y2(-1) = 0.4], color = black, arrows = medium, linecolor = [y1, coral]\right)$$



Ответ: $\bar{y} = C_1\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}e^{2x} + C_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{8x}$.

Задание 2. Решите систему ДУ методом исключений и сравните с ответом, полученном в Maple.

2.2. $\begin{cases} y_1' = 7y_1 + y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 3y_2 \end{cases}$

- Продифференцируем первое уравнение системы:

$y_1'' = 7y_1' + y_2' = 49y_1 + 7y_2 + 5y_1 + 3y_2 = 54y_1 + 10y_2$

$y_1'' = 54y_1 + 10y_1' - 70y_1 = 10y_1' - 16y_1$

$y_1'' = 10y_1' - 16y_1$

$y_1'' - 10y_1' + 16y_1 = 0$ (ДУ с постоянными коэффиц.)

$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \left[\begin{matrix}2\\8\end{matrix}\right.$

$y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{8x}$

Найдем $y_2$ из уравнения 1:

$y_1' = 2C_1e^{2x} + 8C_2e^{8x}$

$y_2 = y_1' - 7y_1 = 2C_1e^{2x} + 8C_2e^{8x} - 7C_1e^{2x} - 7C_2e^{8x} = -5C_1e^{2x} + C_2e^{8x}$

- Результаты в системе Maple:

```
ds := diff(y1(x), x) = 7·y1(x) + y2(x), diff(y2(x), x) = 5·y1(x) + 3·y2(x) :
subs(_C2 = C2, _C1 = C1, dsolve({ds}, {y1(x), y2(x)}));
```

$$\left\{y1(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{8x},\ y2(x) = -5 C_1 e^{2x} + C_2 e^{8x}\right\}$$

Ответ: $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{8x} \\ y_2 = -5C_1 e^{2x} + C_2 e^{8x} \end{cases}$

**Задание 3.** Решите задачу Коши с помощью методов Лагранжа и Даламбера. Сравните результаты с полученными в Maple. Сделайте чертеж.

3.2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = -4x + 1 \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \ y(0) = 1$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} :$$

1) Решим однородную систему ДУ:

```
LinearAlgebra[Eigenvectors](A);
```

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = -4x \end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(2-\lambda)\lambda - 8 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 4$

$\lambda_1 = -2 \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 0 \\ -4\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \quad 2\alpha = \beta \quad \bar{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 0 \\ -4\alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \quad \alpha = -\beta \quad \bar{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Общее решение однородной системы:

$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2t} - C_2 e^{4t} \\ y(t) = 2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} \end{cases}$

```
dsolve({diff(x(t), t) = 2·x(t) − 2·y(t), diff(y(t), t) = −4·x(t)}, {x(t), y(t)}
```

$$\left\{x(t) = -\_C1\, e^{4t} + \frac{1}{2}\_C2\, e^{-2t},\ y(t) = \_C1\, e^{4t} + \_C2\, e^{-2t}\right\}$$

2) Решим неоднородную систему ДУ методом Лагранжа:

$\begin{cases} x = C_1(t) e^{-2t} - C_2(t) e^{4t} \\ y = 2C_1(t) e^{-2t} + C_2(t) e^{4t} \end{cases}$

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{-2t} - C_2'(t)e^{4t} = 0 \\ 2C_1'(t)e^{-2t} + C_2'(t)e^{4t} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2'(t)e^{4t} = C_1'(t)e^{-2t} \\ 3C_1'(t)e^{-2t} = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1'(t) = \frac{e^{2t}}{3} \Rightarrow C_1(t) = \frac{1}{6}e^{2t} + C_1$$

$$\begin{cases} C_1'(t) = \dfrac{e^{2t}}{3} \\ C_2'(t) = \dfrac{e^{-4t}}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad C_2(t) = -\frac{1}{12}e^{-4t} + C_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{6}e^{2t} + C_1\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{-2t} + \left(-\frac{1}{12}e^{-4t} + C_2\right)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{4t} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x = C_1e^{-2t} - C_2e^{4t} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \\ y = 2C_1e^{-2t} + C_2e^{4t} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = C_1e^{-2t} - C_2e^{4t} + \frac{1}{4} \\ y = 2C_1e^{-2t} + C_2e^{4t} + \frac{1}{4} \end{cases}$$ — общее решение неоднородной системы ДУ

3) Решим неоднородную систему ДУ методом Даламбера (домножим 2-ое уравнение на $\lambda$ и просуммируем с первым).

$$x' + \lambda y' = (2-4\lambda)x - 2y + \lambda$$

$$x' + \lambda y' = (2-4\lambda)\left(x + \frac{2}{4\lambda-2}y\right) + \lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{2\lambda-1} \Rightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \left[\begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}\right.$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow z = x+y \quad z' = x'+y' \quad z = z(t)$$

$$z' = -2z + 1 \Rightarrow \frac{dz}{z - \frac{1}{2}} = -2dt$$

$$\ln\left|z - \frac{1}{2}\right| = -2t + \tilde{C}_1 \Rightarrow z - \frac{1}{2} = e^{-2t} \cdot C_1$$

$$x + y = e^{-2t} \cdot C_1 + \frac{1}{2}$$

$\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow z = x - \frac{1}{2}y \qquad z' = x' - \frac{1}{2}y' \qquad z = z(t)$

$$z' = 4z - \frac{1}{2} \Rightarrow z' = 4\left(z - \frac{1}{8}\right) \Rightarrow \frac{dz}{z - \frac{1}{8}} = 4dt$$

$$z - \frac{1}{8} = e^{4t}C_2 \Rightarrow x - \frac{1}{2}y = e^{4t} \cdot C_2 + \frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = e^{4t} \cdot C_2 + \frac{1}{8} \\ x + y = e^{-2t} \cdot C_1 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = e^{-2t} \cdot C_1 + \frac{1}{2} - y \\ e^{-2t}C_1 + \frac{1}{2} - y - \frac{1}{2}y = e^{4t}C_2 + \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}y = e^{-2t}C_1 - e^{4t}C_2 + \frac{3}{8}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}C_1e^{-2t} - \frac{2}{3}C_2e^{4t} + \frac{1}{4} \\ x = e^{-2t}C_1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}C_1e^{-2t} + \frac{2}{3}C_2e^{4t} - \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}C_1e^{-2t} + \frac{2}{3}C_2e^{4t} + \frac{1}{4}$$

Пусть $\frac{1}{3}C_1 = \widetilde{C}_1$, $-\frac{2}{3}C_2 = \widetilde{C}_2$:

$$\begin{cases} x = \widetilde{C}_1e^{-2t} - \widetilde{C}_2e^{4t} + \frac{1}{4} \\ y = 2\widetilde{C}_1e^{-2t} + \widetilde{C}_2e^{4t} + \frac{1}{4} \end{cases}$$ – общее решение неоднородной системы ДУ

Тогда решения, полученные методами Лагранжа и Даламбера идентичны.

4) Решим задачу Коши: $x(0) = 1$, $y(0) = 1$

$$\begin{cases} 1 = C_1 - C_2 + \frac{1}{4} \\ 1 = 2C_1 + C_2 + \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = 3C_1 + \frac{2}{4} \\ C_2 = C_1 - \frac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{4t} + \frac{1}{4} \\ y = e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{4t} + \frac{1}{4} \end{cases}$$ – решение задачи Коши

- Решение в системе Maple:

#общее решение неоднородного су

$ds := diff(x(t), t) = 2 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), diff(y(t), t) = -4 \cdot x(t) + 1$ :

$cond := x(0) = 1, y(0) = 1$ :

$subs(\_C2 = C_2, \_C1 = C_1, dsolve(\{ds\}, \{x(t), y(t)\}))$;

$$\left\{x(t) = -e^{4t} C_2 + \frac{1}{2} e^{-2t} C_1 + \frac{1}{4}, y(t) = e^{4t} C_2 + e^{-2t} C_1 + \frac{1}{4}\right\}$$

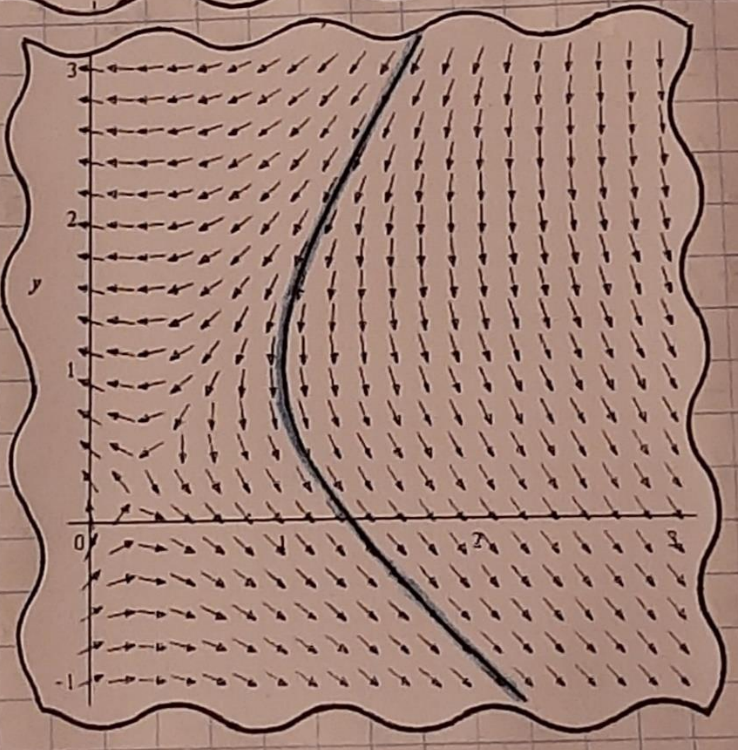
#задача Коши

$subs(\_C2 = C_2, \_C1 = C_1, dsolve(\{ds, cond\}, \{x(t), y(t)\}))$;

$$\left\{x(t) = \frac{1}{4} e^{4t} + \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{4}, y(t) = -\frac{1}{4} e^{4t} + e^{-2t} + \frac{1}{4}\right\}$$

График частного решения:

$DEplot([ds], [x(t), y(t)], t = -2 \,..\, 2, y = -1 \,..\, 3, x = 0 \,..\, 3, [[cond]], color = black, arrows = medium, linecolor = blue)$;




Ответ: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{4} e^{4t} + \frac{1}{4} \\ y = e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{4t} + \frac{1}{4}. \end{cases}$

**Задание 1.** Исследуйте поведение фазовых кривых системы уравнений вблизи точки покоя. Сделайте чертеж.

Определите тип точки покоя по фазовому портрету и собственным значениям матрицы системы.

Найдите общее решение системы и выделите фундаментальную систему решений. Сравните с результатами, полученными в Maple.

Постройте в прямоугольной системе $Oxy_1y_2$ пространственные кривые, удовлетворяющие заданной системе и содержащие соответственно точки $(0, y_1^0, y_2^0)$. Значения $y_1^0, y_2^0$ возьмите те же, что использовались для построения фазового портрета. Сравните чертежи, полученные на плоскости и в пространстве.

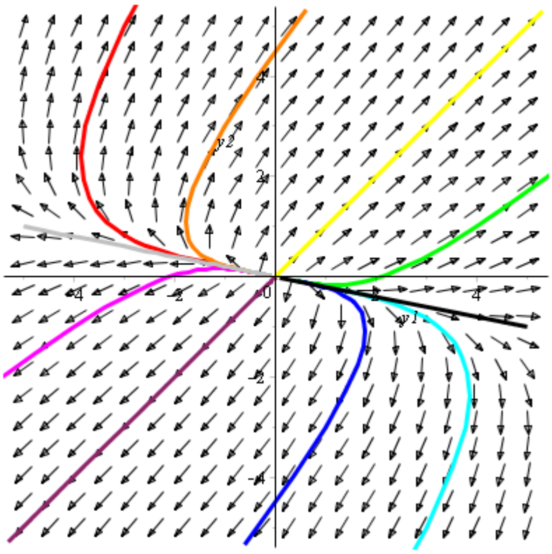
Перейдите от системы уравнений к однородному дифференциальному уравнению 1-го порядка относительно функции $y_2(y_1)$, постройте его поле направлений в окрестности особой точки. Сравните с фазовым портретом системы.

Вариант 2. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 5y_2, \\ y_2' = y_1 + 7y_2 \end{cases}$

```
> #Task1
> restart;
> with(DEtools) :
> ds := diff(y1(x), x) = 3·y1(x) + 5· y2(x), diff(y2(x), x) = y1(x) + 7· y2(x) :
> dsolve({ds}, {y1(x), y2(x)}) :
> subs(_C2 = C_2, _C1 = C_1, dsolve({ds}, {y1(x), y2(x)}));
```

$$\left\{ y1(x) = C_1 \mathrm{e}^{8x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}, y2(x) = C_1 \mathrm{e}^{8x} - \frac{1}{5} C_2 \mathrm{e}^{2x} \right\} \quad \textbf{(1)}$$

```
> phaseportrait({ds}, [y1(x), y2(x)], x = -1 ..1, [[0, -4, -1], [0, 4, 1], [0, -3, 5], [0, 3, -5],
    [0, -1, -1], [0, 1, 1], [0, -1, 3], [0, 1, -3], [1, 5, -1], [1, -5, 1]], y1 = -5 ..5, y2 = -5 ..5,
    linecolor = [magenta, green, red, cyan, maroon, yellow, coral, blue, black, grey], arrows
    = medium, color = black);
```




```
> with(LinearAlgebra) :
> M := Matrix([[3, 5], [1, 7]]) :
> v := Eigenvectors(M);
```

$$v := \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

```
> DEplot3d({d/dx y1(x) = 3 y1(x) + 5 y2(x), d/dx y2(x) = y1(x) + 7 y2(x)}, {y1(x),
    y2(x)}, x = -5 ..5, [[y1(0) = -4, y2(0) = -1], [y1(0) = 4, y2(0) = 1], [y1(0) = -3,
    y2(0) = 5], [y1(0) = 3, y2(0) = -5], [y1(0) = -1, y2(0) = -1], [y1(0) = 1, y2(0)
    = 1], [y1(0) = -1, y2(0) = 3], [y1(0) = 1, y2(0) = -3], ], y1 = -6 ..6, y2 = -6 ..6, scene
    = [x, y1(x), y2(x)], linecolor = [magenta, green, red, cyan, maroon, yellow, coral,
    blue]);
```

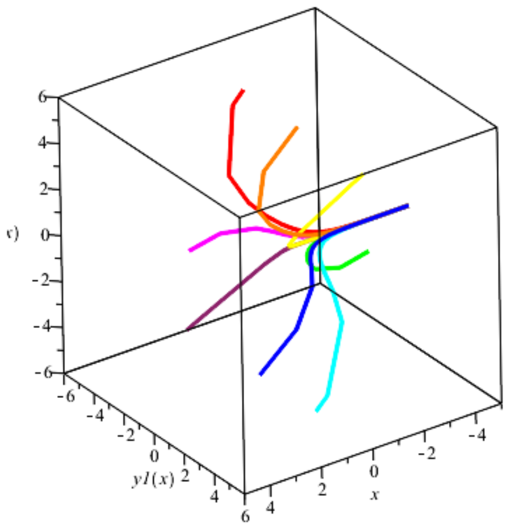
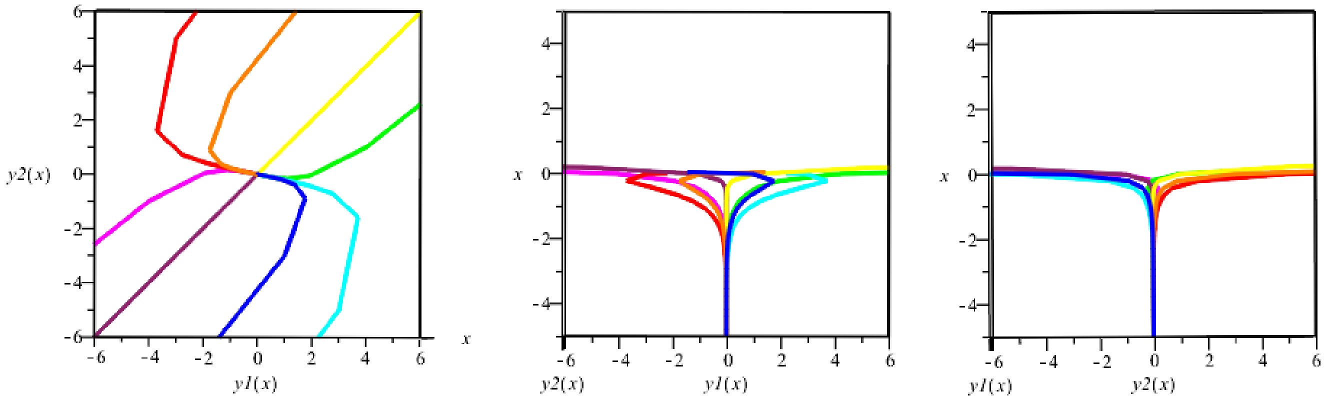
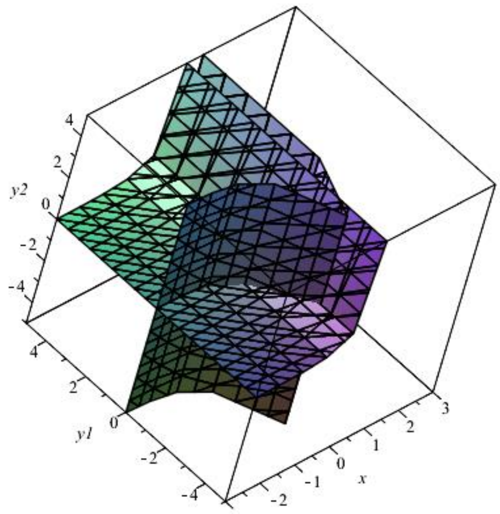



График 3д в разных ракурсах




$$> plots[implicitplot3d]\left(\left[y1(x)=\frac{11}{13}\cdot e^{8\cdot x}+\left(-\frac{20}{3}\right)\cdot e^{2\cdot x}, y2(x)=\frac{11}{13}\cdot e^{8\cdot x}-\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{20}{3}\right)\cdot e^{2\cdot x}\right], x=-3..3, y1=-5..5, y2=-5..5\right)$$



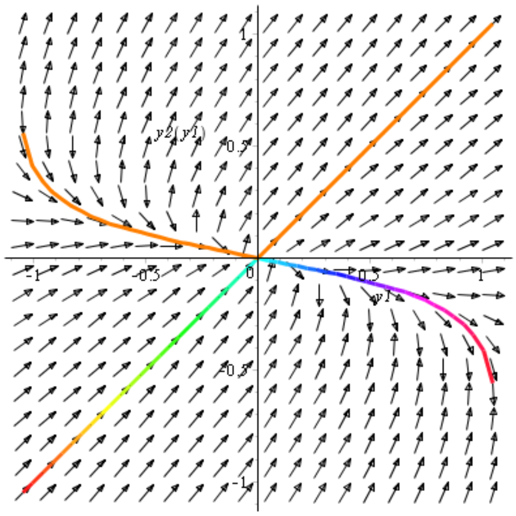
> $convert\left(\frac{3+5\cdot u}{5\cdot u^2-4\cdot u-1}, parfrac\right);$

$$-\frac{5}{3\,(5\,u+1)}+\frac{4}{3\,(u-1)} \qquad (3)$$

> $d := dsolve\left(diff(y2(y1), y1) = \frac{y1+7\cdot y2(y1)}{3\cdot y1+5\cdot y2(y1)}, y2(y1), implicit\right);$

$$d := \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5\,y2(y1)+y1}{y1}\right)-\frac{4}{3}\ln\left(-\frac{-y2(y1)+y1}{y1}\right)-\ln(y1)-\_C1=0 \qquad (4)$$

> $DEplot\left(diff(y2(y1), y1) = \frac{y1+7\cdot y2(y1)}{3\cdot y1+5\cdot y2(y1)}, y2(y1), y1=-1.05..1.05, y2=-1.05..1.05, [y2(1)=-0.4, y2(-1)=0.4], color=black, arrows=medium, linecolor=[y1, coral]\right)$




**Задание 2.** Решите систему уравнений методом исключений и сравните результат с ответом, полученным в Maple.

Вариант 2. $\begin{cases} y_1' = 7y_1 + y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 3y_2 \end{cases}$

> #Task2
> restart;
> with(DEtools) :
> $ds := diff(y1(x), x) = 7\cdot y1(x) + y2(x), diff(y2(x), x) = 5\cdot y1(x) + 3\cdot y2(x) :$
> $subs(\_C2 = C_2, \_C1 = C_1, dsolve(\{ds\}, \{y1(x), y2(x)\}));$

$$\{y1(x) = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{8x}, y2(x) = -5\,C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{8x}\} \qquad (5)$$

**Задание 3.** Решите задачу Коши с помощью методов Лагранжа и Д'Аламбера. Сравните с результатом, полученным в Maple. Сделайте чертеж.

Вариант 2. $\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -4x + 1 \end{cases}$ x(0)=1 y(0)=1

изменила начальное условие, т.к. система была однородная

> *#Task3*

> *restart;*

> *with(DEtools) :*

> *#общее решение однородного ду*

> $dsolve(\{diff(x(t), t) = 2\cdot x(t) - 2\cdot y(t), diff(y(t), t) = -4\cdot x(t)\}, \{x(t), y(t)\});$

$$\left\{x(t) = -\_C1\, e^{4t} + \frac{1}{2}\_C2\, e^{-2t}, y(t) = \_C1\, e^{4t} + \_C2\, e^{-2t}\right\} \quad (6)$$

> $A := \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ : $LinearAlgebra[Eigenvectors](A);$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

> *#общее решение неоднородного ду*

> $ds := diff(x(t), t) = 2\cdot x(t) - 2\cdot y(t), diff(y(t), t) = -4\cdot x(t) + 1 :$

> $cond := x(0) = 1, y(0) = 1 :$

> $subs(\_C2 = C_2, \_C1 = C_1, dsolve(\{ds\}, \{x(t), y(t)\}));$

$$\left\{x(t) = -e^{4t} C_2 + \frac{1}{2} e^{-2t} C_1 + \frac{1}{4}, y(t) = e^{4t} C_2 + e^{-2t} C_1 + \frac{1}{4}\right\} \quad (8)$$

> *#задача Коши*

> $subs(\_C2 = C_2, \_C1 = C_1, dsolve(\{ds, cond\}, \{x(t), y(t)\}));$

$$\left\{x(t) = \frac{1}{4} e^{4t} + \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{4}, y(t) = -\frac{1}{4} e^{4t} + e^{-2t} + \frac{1}{4}\right\} \quad (9)$$

> $DEplot([ds], [x(t), y(t)], t = -2..2, y = -1..3, x = 0..3, [[cond]], color = black, arrows = medium, linecolor = blue);$