<u>מטלה 3</u>

שאלה 1

הוכיחו כי אם $f(x)$ קמורה וכן אינה שלילית לכל x, אזי $\left(f(x)\right)^2$ הינה פונקציה קמורה.

(רמז: $\left(f(x)-f(y)\right)^2 \geq 0$).

שאלה 2

Perform 3 steps of the Newton's method to show that the intersection point of $f(x) = 72x^3 + 5x - 1$ with the x axis is approximately $x = 0.150708$ for $\varepsilon = 0.15$.

שאלה 3

נתונה הפונקציה $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,a) = x^4 + y^4 - 300xy + \sqrt[16]{a+5}$.

מצאו את המינימום של f והוכיחו כי הוא גלובלי.

שאלה 4

פתרו את הבעיה הבאה בעזרת תנאי KKT

$$\max_{x,y,z}(x+y)$$
$$s.t$$
$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$$
$$x + y + z = 1$$

שאלה 5

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} -5x^2 + 10 & x < 0 \\ -2e^x + 25 & 0 \leq x < 2 \\ -5x^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

מעוניינים למצוא קיצון לבעיה הבאה:

$$max f(x)$$
$$s.t \quad -1 \leq x \leq 3$$

א. מהו מספר האיטרציות המינימלי בשיטת חתך הזהב שיש לבצע כדי שגודל אינטרוואל אי הוודאות לא יהיה גדול מ 0.25?

ב. הוכיחו כי f יונימודלית.

שאלה 6

א. האם הקבוצה $D = \{(x, y) | \, x^2 + y^2 \le 1, \;\; x \ne y\}$ הינה קבוצה קמורה? הוכיחו.

ב. הוכיחו כי אם $g(x)$ פונקציה קמורה אזי הפונקציה $f(x) = max\{0, g(x)\}$ הינה פונקציה קמורה.

הערה: בכל סעיפי ההוכחה יש להשתמש בהגדרות פורמליות, שרטוט לא יתקבל כתשובה מלאה.

שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2$ המוגדרת על כל $\Re^3$.

א. הוכיחו כי f קמורה.

ב. בצעו איטרציה בודדת של שיטת המורד התלול מהנקודה $\vec{x}_1 = (0, 0, 3)^T$.

ג. הראו כי הגרדיאנטים שמצאתם בסעיף הקודם אורטוגונלים.

ד. מצאו את נקודת המינימום של הפונקציה והוכיחו כי זהו המינימום.

שאלה 8

השאלה מתייחסת לאלגוריתם החיפוש "קואורדינטות מחזוריות" המופיע בדף הנוסחאות, באופן כללי וללא תלות בבעיה ספציפית. פרט לסעיף ד' לאורך כל השאלה הניחו שבכל הרצה והרצה מצליחים למצוא את θ^* באופן אנליטי. השיבו על הסעיפים הבאים ביחס לאלגוריתם:

א. עדכנו את תנאי העצירה של האלגוריתם כך שייבדק עבור כל זוג נקודות עוקבות <u>בתחילתו</u> של כל מחזור.

ב. הוחלט לבצע את החיפוש לקיצון בעזרת האלגוריתם על פי כיווני הצירים פעמיים, עבור אותה פונקציית מטרה ועם נקודות התחלה זהות. פעם אחת תוך שימוש בווקטורי הכיוון הבאים, משמאל לימין $\vec{d}_1^k = (0, \ldots, 1), \ldots, \vec{d}_n^k = (1, \ldots, 0)$, ופעם אחת בסדר ההפוך, מימין לשמאל (כפי שראינו בהרצאות). האם המסלול שהאלגוריתם יבצע יהיה בהכרח זהה בדרך להתכנסות? הסבירו

ג. הוחלט בנוסף לנסות את אוסף וקטורי הכיוון הבאים:

$$\vec{d}_1^k = (0, \ldots, 17), \ldots, \vec{d}_n^k = (17, \ldots, 0).$$

עבור אותה פונקציית מטרה ושוב מאותה נקודת התחלה. מה דעתכם על החלטה זו? נמקו

ד. בזמן הרצת האלגוריתם, באחד השלבים, התקבל כי θ^* לא קיימת. כלומר, הסתבר באופן אנליטי מדויק כי אין כזו (ז"א שהנגזרת של f כפונקציה של θ לעולם לא מתאפסת) למרות שפונקציית המטרה גזירה בכל כיוון ומקום. כיצד הייתם מציעים לפעול במקרה כזה ביחס לבעיה אותה האלגוריתם מנסה לפתור?

ה. בשלב מסוים של הרצת השיטה, האלגוריתם נמצא בנקודה $(1, 2, 3)$ וזז בכיוון $(0, 1, 0)$.
האם כיוון זה מגדיר כיוון עליה או ירידה של פונקציה המטרה אם ידוע שמתקיים
$\nabla f(1, 2, 3) = (3, 4, 5)$?

שאלה 9

נתונה הפונקציה

$$f(x, y) = \left(x^2 - y^2\right) e^{(-x^2-y^2)/2}$$

א. אפיינו את נקודות הקיצון של f .

ב. הוכיחו כי f אינה קמורה על פי הגדרה.

ג. הוחלט להפעיל שיטת חיפוש מכוונת מהנקודה (1,2) בכיוון הישר (3,4). מה יהיה קצב השינוי בערך הפונקציה אם נבצע צעד קטן כרצוננו בכיוון זה? האם ערך הפונקציה ירד או יעלה?

שאלה 10

יהיו S_1 ו- S_2 קבוצות קמורות ב- $\mathcal{R}^2$.

הוכיחו כי הקבוצה של הסכומים החלקיים הנתונה על פי

$$S = \{(x, y_1 + y_2) \in \mathcal{R}^2 |\ (x, y_1) \in S_1,\ \ (x, y_2) \in S_2\}$$

הינה קבוצה קמורה.

שאלה 11

נתונות הפונקציות $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ו- $g(x) = x^4 - x$.

א. (15%) הראו כי פונקציית ההפרש $h(x) = f\left(x\right) - g\left(x\right)$ הינה פונקציה קעורה לכל $x > 0$.

ב. (17%) השתמשו בשיטת חתך הזהב כדי למצוא את נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$ באינטרוול $[0,4]$ עד לאינטרוול אי-וודאות בגודל 0.6 לכל היותר.

ג. (18%) מצאו בעזרת שיטת ניוטון את נקי החיתוך שבין f ל- g , שאינה הנקודה $\left(0,0\right)$, עד שמתקיים תנאי העצירה $|x_{k+1} - x_k| < 0.04$.

שאלה 12

לחברה יש n מפעלים.

מפעל i ממוקם בנקודה (x_i, y_i) במישור R^2.

החברה מעוניינת למקם מחסן בנקודה (x, y) שתמזער את סך המרחקים מהמחסן:

$$Minimize \sum_{i=1}^{n} (\text{המרחק ממפעל } i \text{ למחסן})^2$$

א. השלימו את ניסוח פונקציית המטרה באופן מתמטי.

ב. מצאו את מטריצת ההסיאן של פונקציית המטרה והראו כי פונקציית המטרה קמורה.

ג. פתרו את הבעיה במונחי x_i ו y_i.