

MCMC 方法在测量不确定度评估中的应用

胡红波

(中国计量科学研究院 北京 100029)

摘要 针对利用 GUM 及系列文件进行不确定度评估时对某个概率分布较为复杂的影响量抽样的问题,介绍了马尔科夫链蒙特卡罗法(MCMC)在其中的应用。首先采用变量替换法对被测量的概率分布进行直接计算,然后介绍了 MCMC 方法中最典型、最常用的 Metropolis-Hastings 算法的原理和实现的过程,并通过计量校准中两个典型的实例进行了说明。最后分析了 MCMC 抽样样本的相关性、实现该方法时建议分布的影响以及样本收敛性的判断等。当 GUM 系列文件不太适合某一个测量场合的评估时,贝叶斯统计和 MCMC 方法的运用是一个很好的工具。

关键词 计量学; 不确定度评估; MCMC 抽样; 贝叶斯统计; Metropolis-Hastings 算法

doi: 10.3969/j.issn.1000-0771.2020.05.18

Application of MCMC Algorithm in Evaluating Measurement Uncertainty

HU Hongbo

(National Institute of Metrology Beijing 100029, China)

Abstract: When GUM and methods from its supplements are not applicable for uncertainty evaluation because of complicated distribution functions of some input quantities, the application of a flexible Markov chain Monte Carlo (MCMC) method is introduced. This paper first uses the method based on the change-of-variables formula to calculate the probability density function of measurand directly. The principle and implementation process of the most typical and commonly used Metropolis-Hastings algorithm in the MCMC method is introduced, with two typical examples in metrological calibration. Finally, the autocorrelation functions for the samples of the MCMC method, the performance of the proposed distribution when the method is implemented, and the difficulty in assessing the convergence of MCMC sampling are analyzed. The Bayesian approach and the MCMC method may be a valid and feasible alternative tool when the GUM and its supplements are not suitable for uncertainty evaluation.

Key words: metrology; uncertainty evaluation; MCMC sampling; bayesian statistics; metropolis-hastings algorithm

0 引言

对于计量校准的结果,都必须要有相应的测量不确定度描述。一般来说,一个测量结果有多大的实用性,或者能够提供多大的信息量,在很大的程度上取决于对其测量不确定度的描述^[1]。ISO 联合七个国际组织发布的 GUM^[2] (Guide to the expression of Uncertainty in Measurement) 及其系列文件 (GUM-S1, S2) 是测量不确定度评估的指导性文件,被各个国家和国际组织广泛采用,统一的测量不

确定度评估标准为贸易、量值比对和互认提供了可能,同一测量结果不同评定的方法会对数据分析造成很大的困难。

GUM 方法基于标准不确定度的可传递性,即某个测量结果的不确定度可以作为另一个测量过程不确定度的分量直接使用。对于给定的线性或者近似为线性的测量模型(在不确定度分析领域内) $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_N)$, 给定了各个输入量 X_1, X_2, \dots, X_N 的最佳估计值 x_1, x_2, \dots, x_N 和相应的标准不确定度 $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N)$, 即可按 GUM 文献^[2] 中

作者简介: 胡红波(1980—), 中国计量科学研究院副研究员, 研究方向: 机械振动与冲击加速度基准装置及计量技术、动态数据分析与处理, 邮箱: huhb@nim.ac.cn。

式(10)(不相关)或式(13)(相关)来计算被测量的标准不确定度。GUM S1 推荐采用蒙特卡罗法(Monte Carlo, MC),利用数值计算的方式实现基于概率密度函数(Probability density function, PDF)的传递^[3]。这种方法主要针对非线性的测量模型或者被测量明显不是对称的正态分布或者 t 分布的情况。若能得到被测量的 PDF,则能够方便地计算得到被测量的最佳估计值和任意置信概率下的区间等数值特征量,国内外学者已经做了很多的研究^[4-6]。要应用该方法,首先要依据输入量的分布对其进行抽样,当输入量的分布较为复杂,或者由于积分难以处理而得不到完整的解析形式时(比如利用贝叶斯统计计算得到),则按常规的方法无法对其进行抽样。本文介绍一种马尔科夫链-蒙特卡罗抽样法(Markov Chain Monte Carlo, MCMC),该方法是一种运用非常广泛的抽样方法,特别是在贝叶斯统计中^[7]。其不需要知道随机变量 PDF 的完整解析形式,只需要知道其核函数(kernel)或者运算表达式,就能够对随机变量实现抽样。本文首先依据 GUM 准则,采用直接的方法对给定测量模型的被测量的 PDF 进行了推导,然后介绍了 MCMC 方法中应用最广泛的 Metropolis-Hastings 算法的思想与实现的步骤,最后通过两个实例说明了该方法的应用并对 MCMC 抽样的样本进行了分析。

1 计算被测量分布的直接方法

GUM 所描述的泰勒一阶近似及 GUM S1 推荐的分布函数的传递都是以测量方程为基础的不确定度评估方法,也就是从已知输入量的特性来计算被测量的特性,是一种逻辑推理的方法,有学者称之为前向的不确定度评估方法^[8],这里介绍一种直接利用统计学中的变量替换法(Change-of-Variable Method)来解析计算被测量的概率分布的方法。对于实际的测量模型,假定测量方程如式(1)所示:

$$Y = \varphi(X) \quad (1)$$

输入量 X (一维或者多维)的联合分布函数为 $f_X(x)$,则被测量 Y 的分布如式(2)所示。

$$f_Y(y) = f_X[\varphi^{-1}(y)] |J_{\varphi^{-1}}(y)| \quad (2)$$

式中: φ^{-1} 为测量方程的反函数; $J_{\varphi^{-1}}$ 为测量方程反函数的雅克比式。当输入量为多个时, f_X 为联合概率分布, J 则为雅克比行列式。或者利用抽样

函数 $\delta(x)$ 的性质,利用式(3)计算被测量 Y 的概率密度函数^[9]。

$$f_Y(y) = \int f_X(x) \delta[\varphi(x) - y] dx \quad (3)$$

当输入量 X 是多维时,则式(3)为多重积分。

假定测量模型为 $Y = k \frac{X_1}{X_2}$,其中 k 为常数; X_1, X_2 为经过测量所得的结果,且假定其分布均为正态分布,均值分别为 x_1, x_2 ,方差分别为 σ_1^2, σ_2^2 ,且相互独立。考虑变换对 $(Y, Y_1) = \left(k \frac{X_1}{X_2}, X_2\right)$ 与 (X_1, X_2) 的映射关系,其逆变换关系为 $\varphi^{-1}(Y, Y_1) = \left(Y \frac{Y_1}{k}, \sqrt{Y_1}\right)$,对应雅克比行列式值的逆为 $J^{-1} = \frac{\sqrt{Y_1}}{2k}$,因为 X_1, X_2 相互独立,其联合概率分布即为各自概率分布的乘积,利用式(2)即可得到 (Y, Y_1) 的联合概率分布,再对 Y_1 进行积分即得被测量 Y 的概率分布如式(4)所示。

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^{+\infty} f_{Y, Y_1}(y, y_1) dy_1 \\ &= \int_0^{+\infty} f_{X_1, X_2}[\varphi^{-1}(y, y_1)] |J^{-1}| dy_1 \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y_1}}{4\pi k \sigma_1 \sigma_2} \exp \left[-\frac{\left(\frac{yy_1}{k} - x_1\right)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(\sqrt{y_1} - x_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] dy_1 \end{aligned} \quad (4)$$

2 MCMC 方法简介

运用 GUM S1 方法进行测量不确定度评估,首先要依据输入量的概率分布进行抽样,当输入量概率分布比较简单时,能够按照该标准推荐的方法进行直接抽样。当输入量分布比较复杂或者无法得到其解析形式的概率分布时(如式4为多重积分),常规的方法无法进行抽样,此时 MCMC 方法则能够实现对其进行抽样。MCMC 方法是一种应用非常广泛的间接迭代抽样方法,其不需要知道随机变量概率分布的具体解析表达式,只需要知道其分布核函数(例如 $f(x) \propto e^x \log(x^2 + 5)$)或其运算关系即可实现对该随机变量的抽样,该方法是贝叶斯统计中计算参数后验分布的主要方法。MCMC 方法包含

很多算法,本文主要介绍其中最基本的 Metropolis-Hastings 算法思想和实现过程,该算法 1953 年由 Metropolis 等人提出,1970 年 Hastings 等人对其做了进一步的扩展,详细的推导过程见参考文献[10]。该方法的基本思想是构造一个马尔科夫链(Markov 链)随机过程,使其平稳分布为需要采样的概率分布。马尔科夫链是一类在随机游动的研究,以及自动控制、通讯技术和生物技术等工程领域中应用非常广泛的随机过程模型,其主要特点是所谓无后效性,即随机过程下一个时刻所取的状态只与当前时刻有关,与以前的时刻没关系。由非周期的平稳马尔科夫链性质可知,不管该随机过程的初始状态如何,经过一定时间的状态转移后,该随机过程将趋于平稳分布,即随机过程的平稳分布与初始值无关^[11]。也就是我们需构造一个 Markov 过程,使其平稳分布即为我们所需要的概率分布,这样即使从任意一个初值开始,经过有限次的迭代后,所抽取的样本值即为我们所需要的概率分布样本空间的点。假定需抽样的随机变量分布函数为 $f(\theta)$,实现的过程如下:

- 1) 选择一个建议分布 $p(x)$ 作为马尔科夫链的转移函数,该建议分布便于直接采样;
- 2) 选择一个初始的参数抽样值 θ_0 ;
- 3) 以 θ_0 为参数从建议分布中抽样 x_1 ,即 $x_1 = p(\cdot | \theta_0)$;

$$4) \text{ 计算 } \beta = \min\left(1, \frac{f(x_1)p(\theta_0|x_1)}{f(\theta_0)p(x_1|\theta_0)}\right);$$

- 5) 在 $U[0, 1]$ 均分分布中随机抽样 α ,若 $\alpha \leq \beta$ 则 $\theta_1 = x_1$, $\theta_0 = \theta_1$, 否则 $\theta_1 = \theta_0$ 。

重复迭代步骤 3 至 5 共 N 次后,即可得到关于参数 θ 的 N 个样本,从而可以进一步运用 GUM S1 推荐的方法进行被测量不确定度的评估。运用该方法进行随机变量抽样时,以下几点需要注意:

- 1) 用该方法抽样所得到的样本的前面一小部

分样本点需去掉,即所谓的预烧期(Burnin 周期)。因为此阶段处于非平稳分布状态,与初始值的选择有关。具体去掉多大比例没有明确标准,可通过观察样本点图进行判断。

- 2) 关于建议分布 $p(x)$ 的选择,没有统一明确的标准,通常选择和目标分布类似的形状,这样有利于提高样本更新的效率。

- 3) 从该方法实现过程可以看出,其抽样产生的样本之间不是相互独立的,但当样本数量较大时,同样可以得到该随机变量的数字特征;另外也可以通过对样本采取进一步抽取的方式,降低样本之间的相关性,得到近似相互独立的样本。

3 MCMC 应用实例

本部分通过两个典型的实例说明 MCMC 方法在进行测量不确定度评估时的运用。为了便于比较,第一个例子是对可以直接进行采样的指数分布的采样,第二个例子结合实际测量中的问题说明该方法的应用。

3.1 指数分布的采样

指数分布通常用来描述在工程实践中只能取非负实数的量,比如放射性元素的半衰期、病人的寿命、产品的寿命等,因此指数分布有时又称为寿命分布。其分布函数如式(5)所示。

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中 λ 称为尺度常数。指数分布均值为 $\frac{1}{\lambda}$, 方

差为 $\frac{1}{\lambda^2}$ 。现假定 $\lambda = 0.5$,建议分布选取正态分布,

均值为采样值且标准差 $\sigma = 0.5$,采样初始值选择 $x_0 = 20$,利用 MCMC 算法迭代运行 11000 次后,得到的样本点及直方图如图 1 所示。

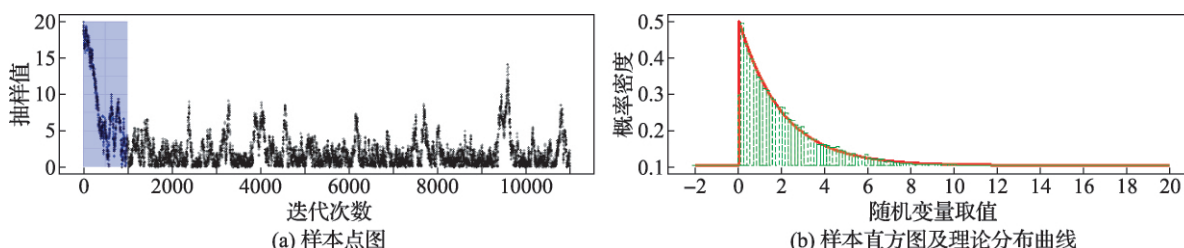


图 1 指数分布采样样本及直方图(红实线为指数分布理论概率密度曲线)

从样本点图可以看到在迭代开始阶段,样本值的起伏变化比较大,说明此时该马尔科夫链未达到平稳分布,对于此部分样本点应该将其去掉,即图 1(a)中浅蓝色阴影部分。图 1(b)中样本的直方图为去除样本前面 1000 个点后的结果。从样本直方图与理论分布比较可以看出,两者之间是一致的。

3.2 多个测量结果的合成

压电加速度计在机械振动冲击测量中主要用

于检测机械结构的加速度、速度和位移量,其在使用之前必须经过校准,确定其灵敏度大小。基准装置校准加速度计利用激光干涉法进行测量,具有最高的测量不确定度等级;校准加速度计的标准装置一般采用比较法实现,测量不确定度指标稍差。假定一只加速度计在 160Hz 的振动频率下用基准装置进行了一次校准,同时在标准装置上进行了 5 次校准,校准结果及相应的扩展不确定度如表 1 所示。

表 1 压电加速度计校准结果

	基准装置		标准装置			
灵敏度 [$\text{pC}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$]	0.2005	0.2009	0.2001	0.2007	0.2003	0.2005
$U_{\text{rel}}(k=2)$	0.3%	1.0%	1.0%	1.0%	1.0%	1.0%

对于采用标准装置测量的 5 次结果,假定每次测量过程相互独立,则取均值为最终测量结果,即 $\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 x_k = 0.2005 \text{pC}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$ 。假定所有测量结果均为正态分布,则 5 次测量均值对应的标准不确定度按照 GUM 的规定进行合成,即得 $u(\bar{x}) = 0.00045 \text{pC}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$ 。图 2 为标准装置 5 次测量结果均值与基准装置测量结果的分布。

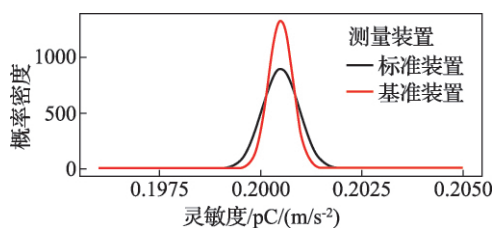


图 2 测量结果分布

对同一个量不同的精度的校准结果,GUM 及其补充文件中没有明确说明如何进行合成。但对于不同信息的融合,贝叶斯统计提供非常灵活的方式,并且 GUM 的修订中很多人推荐采用贝叶斯统计的方法进行不确定评估^[12]。故此处采用贝叶斯统计来进行处理并利用 MCMC 方法进行分析。要利用贝叶斯统计进行运算,首先需假定参数 θ ,即被测加速度计灵敏度的先验分布 $\pi(\theta)$,设定基准测量的结果即为被测量的先验分布,即 $\pi(\theta) \sim N(\theta_0, \sigma_0^2)$, $\theta_0 = 0.2005 \text{pC}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$ 为基准测量的结果,方差 $\sigma_0^2 = 0.0003^2$ 可由测量结果的不确定度计算得到。由贝叶斯公式可得到被测量的后验分布 $f(\theta$

$|x_1, x_2, \dots, x_5)$,如式(6)所示。

$$f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_5) \propto f(x_1, x_2, \dots, x_5|\theta) \pi(\theta) \quad (6)$$

考虑到标准装置 5 次测量结果服从正态分布且相互独立,故似然函数即为各自概率密度函数的乘积,式(6)即为式(7)所示。

$$f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_5) \propto \pi(\theta) \prod_{k=1}^5 f(x_k|\theta) \quad (7)$$

由于假定先验分布和测量结果均为正态分布,即为共轭的形式^[7],故式(7)所示的后验分布也为正态分布,且均值 $\bar{\theta}$ 与方差 σ_1^2 如式(8)所示。

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \frac{\frac{1}{\sigma_0^2} \theta_0 + \frac{1}{u(\bar{x})^2} \bar{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{u(\bar{x})^2}} \\ \frac{1}{\sigma_1^2} &= \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{u(\bar{x})^2} \end{aligned} \quad (8)$$

显然,后验正态分布的均值 $\bar{\theta} = 0.2005 \text{pC}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$,标准不确定度 $u(\bar{\theta}) = \sigma_1 = 0.00025 \text{pC}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$ 。可以看出,结合了基准装置和标准装置的测量结果后,最终得到结果的标准不确定度比基准测量值的标准不确定度稍小。同样,建议分布的选择正态分布,均值为采样值,方差 $\sigma = 0.02$ 。设定初始值为 0.1950。得到的样本图及相应的直方图如图 3 所示。

从图 3 可以看出,虽然初始点取值与被测量后验分布均值相差较远,但去掉初始迭代即图中浅蓝色阴影部分后即达到平稳分布的状态。另外,样本直方图与理论概率密度曲线也较为一致。

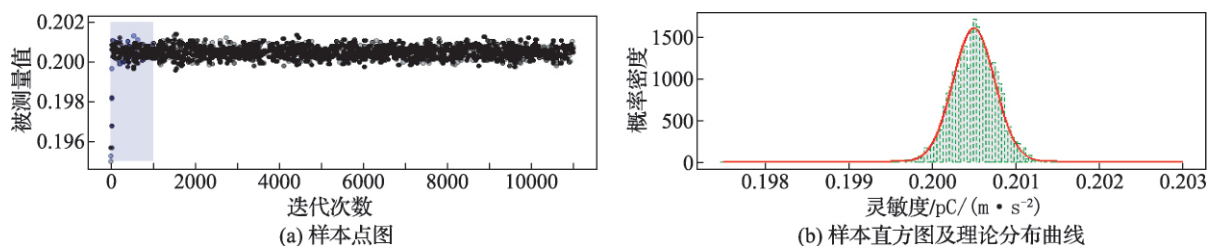


图3 样本点及直方图(红实线为被测量正态分布理论概率密度曲线)

4 MCMC 样本分析

4.1 样本点的相关性

由 MCMC 采样的过程可知,其得到的样本点不是相互独立的。样本点之间的相关性越大,则需要的采样点数越多,才能得到可靠的结论。我们可以通过分析 MCMC 采样点之间相关性的大小

来对样本点进行抽取,从而得到近似相互独立的样本。图4为前文第二个例子 MCMC 采样样本和每间隔 10 个样本点抽取后得到的样本的自相关函数的图形,红色点划线标识相关系数为 ± 0.1 。可以看出原始样本具有较大的相关性,但抽取后的样本基本相互独立,这样可以利用抽取后的样本进一步运算。

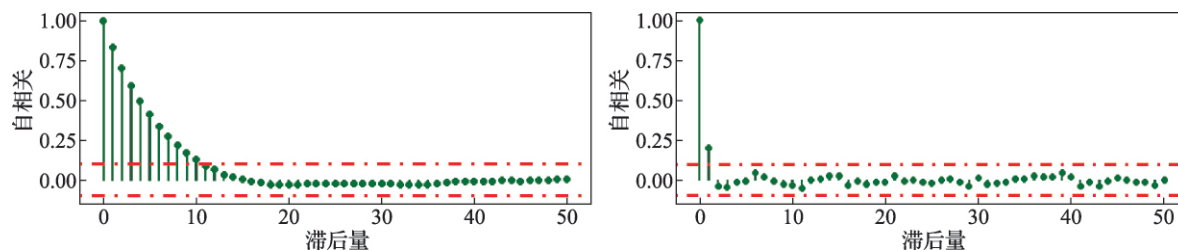


图4 原始样本的自相关与抽取后样本的自相关

4.2 初值的选择

在运用 MCMC 方法进行抽样时,必须设定样本初始的值,即开始迭代的点。一般来说,不同的初始值经过迭代都能使所得的样本达到目标分布,但不同的初始值会影响达到目标分布所需的迭代次数,应该尽量选择在所需目标分布样本空间内的点,这样样本会较快收敛到目标分布。然后去掉初始部分的样本点数据,这样不同的 MCMC 采样样本都能得到一致的结果。图5为前文第二个例子选择不同的样本初始值后所得到 MCMC 样本,可以看出两个不同初值的样本经过几步迭代并去掉浅蓝色阴影部分样本后都收敛到同一个状态。

4.3 迭代步距的选择

在给定了初始值以后,下一个样本点由建议分布 $p(x)$ 产生,建议分布的参数会影响下一个点取值的范围。对于本文所采用的建议分布为正态分布而言,则标准偏差的大小决定下一个离当前点的距离,即迭代步距的大小。

过大的标准偏差会造成 MCMC 样本波动幅度较大,即引起振荡;而过小的标准偏差会使样本收

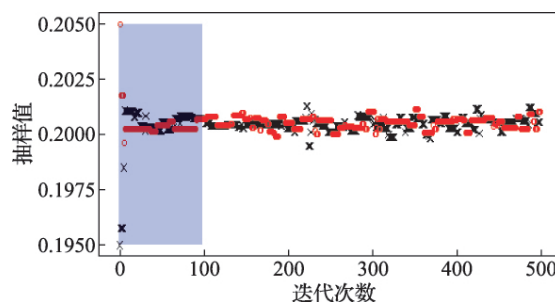


图5 不同初始值的 MCMC 样本

敛速度变慢,甚至难以达到目标分布。

如对混合正态分布 $f(x) \sim 0.4N(2, 0.4^2) + 0.6N(7, 0.5^2)$, 即均值为 2、标准不确定度为 0.4 和均值为 7、标准不确定度为 0.5 的两个正态分布合成的分布进行采样,此时建议分布依然选择均值为当前样本值,标准偏差 σ 分别为 1.5 和 0.5 的正态分布,初始样本值为 0,得到的样本及对应的直方图如图6所示,图中红实线为理论概率密度曲线。

从图6可以看出,显然标准偏差比较大的 MC-MC 采样样本是正确的,而标准偏差较小的采样过

程则始终在目标分布的一个局部较大概率区域内循环,无法正确地遍历整个样本空间。并且当初始值选择不同的值时,可能在另一个概率分布局部区域内循

环。故在运用 MCMC 方法的时候,最好选择不同的初始值,并且采用不同的建议分布参数,通过比较不同 MCMC 样本分布来确定合适的建议分布参数。

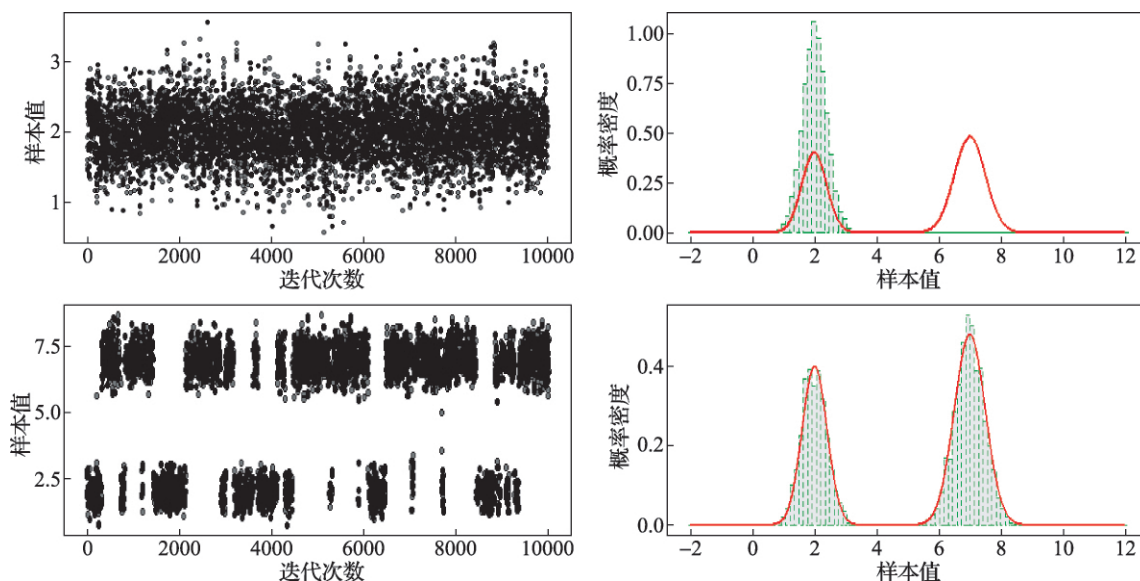


图6 两种不同步距的 MCMC 样本及其直方图(上图 $\sigma = 1.5$, 下图 $\sigma = 0.5$)

4.4 收敛性的判断

为了确保依据样本点得到结论的有效性和可靠性,必须确保 MCMC 抽样点达到了收敛状态,即所需要抽样的目标分布。目前没有一个统一的方法来确定 MCMC 样本是否已经达到了收敛状态,通常只有一些经验性的判断。比如通过观察样本点图、分析样本点的相关性并适当抽取后提高样本点的有效个数等。另外一种常用的方法是 Gelman_Rubin 诊断法^[13],该方法是一种方差比较法,使用该方法需要多条 MCMC 样本,即通过设定不同的初值,抽样几条 MCMC 样本,比较不同 MCMC 样本链之间方差的加权估计值和估计值方差的差异,并由此构建收敛因子,当收敛因子接近 1 时可认为 MCMC 样本已经收敛到目标分布。详细的推导过程本文不再叙述。图 7 是本文第二个例子中对被测量灵敏度最佳估计值生成 2 条 MCMC 样本链后运用该方法得到的收敛因子随迭代次数增加的变化图,可以看到收敛因子基本接近 1,即 MCMC 所收取的样本达到了目标分布的状态。

此外也可以采取对抽样得到的 MCMC 样本每间隔一定数量的样本数计算其均值,然后比较各段样本均值的变化,若各段均值变化量不大则可以认为样本达到了目标分布,否则应进一步采样。

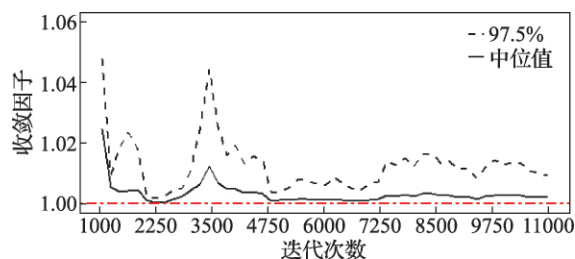


图7 MCMC 样本收敛性的判断

5 结论

MCMC 方法是一种功能非常强大的随机变量抽样算法,即使在不知道随机变量解析的分布函数条件下也能够使用,该方法在计量中同样有很广的应用潜力,比如不同实验室对某一个被测量校准结果的融合,或者利用 GUM S1 推荐的方法进行不确定度评估时对某一个分布较为复杂或者无法用解析表达分布函数的影响量抽样,均可采用该方法进行处理。目前贝叶斯统计在大数据时代应用非常广泛,其主要的原因之一是 MCMC 方法应用于后验分布参数的推断。现在也有很多软件都能实现该方法的各种具体的算法,比如 BUGS 软件等等。当

(下转第 88 页)

限接近于 1,吸收比得到了显著的提升。

该结构腔体的特点在于其利用挡板以及黑色反射镜在不改变空腔外形尺寸的前提下,极大的增加了光程,从而减小了出射立体角,并且利用黑色反射镜极大的吸收了入射光线所携带的能量,从而使腔体的吸收比得到了极大的提升。

3 问题与讨论

上述两种新的设计方案均依赖于超黑的镜面反射镜或者黑玻璃。事实上,不论多理想的镜面反射镜,由于实际表面的不理想或者灰尘的原因,实际上还是存在一定的散射特性,这些散射特性会对结果产生不小的影响。部分文献对超黑玻璃进行了一定的散射光强分析^[6],其散射的光强在角度偏离镜面处 10° 外,会有近 4 个数量级的降低。这也是上文两种方案入射角设定均大于 10° 的原因。

该散射将会是限制光吸收腔特性进一步提高的关键,尤其是第二种四象限超黑吸收腔。而这种超高吸收比(>0.9999)的实际测量目前依旧是一个难以解决的光学难题,故实际指标还有待进一步验证。

4 结束语

理想黑体是大家一直致力追求的目标,超黑的宽光谱的光吸收腔(黑体)目前正在朝着这个目标前

进。相信在不久的将来,超黑光吸收腔的吸收比会突破当前的水平,朝着 0.99999 乃至更高的目标迈进。

参考文献

- [1] 高鑫,王凯,方伟. 太阳辐照度绝对辐射计吸收腔结构优化[J]. 光学精密工程, 2018, 26(03): 624-631.
- [2] 魏继锋,蒋志雄,等. 石墨锥型高能激光全吸收能量计设计[J]. 中国激光, 2015, 42(02): 270-279.
- [3] 魏继锋,张卫,等. 水流吸收型高能激光能量计溯源方法及其溯源体系研究[J]. 强激光与粒子束, 2014, 26(12): 14-20.
- [4] 郝子恒. 晶体硅光陷阱结构制备及其抗反射性能研究[D]. 长春理工大学, 2015.
- [5] 严祥安,何伟康,等. “光陷阱”复合式太阳能发电系统[J]. 纺织高校基础科学学报, 2016, 29(01): 72-76.
- [6] 曹智睿,付跃刚. 点源透射比测试的高性能光陷阱技术研究[J]. 红外与激光工程, 2017, 46(01): 191-197.
- [7] 徐恒,韩义中,杨永军. 黑体辐射源的发展[J]. 计测技术, 2009, 29(05): 1-3.
- [8] 戴运峰,刘卫平,等. 快平衡全吸收式高能激光能量计[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(02): 387-391.
- [9] 严世杰,严斌,严慷. 独立光陷阱型光伏玻璃[P]. 香港: CN105470328A, 2016-04-06.
- [10] 孙超,朱海泉,等. 一种激光用光陷阱器[P]. 安徽: CN205720870U, 2016-11-23.
- [11] 王振宝,冯国斌,等. 全吸收旋转式高能激光能量计吸收腔设计[J]. 红外与激光工程, 2016, 45(12): 330-335.
- [12] 郭权锋,朱锋,等. 一种光陷阱结构[P]. 吉林省: CN109633897A, 2019-04-16.

(上接第 94 页)

GUM 系列文件不太适合某一个测量场合的评估时,贝叶斯统计和 MCMC 方法的运用是一个很好的工具。当然,利用该方法进行随机变量的抽样,建议分布的选取和样本收敛性的判断等依然是主要的问题,不收敛的样本可能会得到错误的结论。

参考文献

- [1] Antonio Possolo. Introducing a simple guide for the evaluation and expression of the uncertainty of NIST measurement results [J]. Metrologia, 2016, 53(1): S17-S24.
- [2] BIPM, JEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. International Organization for Standardization, Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement [S]. International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2008.
- [3] BIPM, JEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. International Organization for Standardization, Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement—Supplement 1, Propagation of Distribution Using a Monte Carlo method [S]. International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2008.

- [4] I Lira, D Grienschnig. Equivalence of alternative Bayesian procedures for evaluating measurement uncertainty [J]. Metrologia, 2010, 47(4): 334-336.
- [5] 薄晓静,陈晓怀. 基于贝叶斯理论的测量不确定度 A 类评定[J]. 工业计量, 2014, 14(4): 15-16.
- [6] 胡红波,于梅. 测量不确定度评估及基于 Monte Carlo 法的数值计算[J]. 计量技术, 2012(6): 72-76.
- [7] Andrew Gelman, John B Carlin, Hal S Stern, et al. Bayesian data analysis [M]. Third edition. New York: CRC Press, 2014: 293-353.
- [8] A. B. Forbes, J. A. Sousa. The GUM, Bayesian inference and the observation and measurement equations [J]. Measurement, 2011(44): 1422-1435.
- [9] 陈平,吴诚鸥,刘应安,等. 应用数理统计 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2008: 6-9.
- [10] Christian P Robert, George Casella. Introducing Monte Carlo Methods with R [M]. New York: Springer Press, 2010: 170-185.
- [11] 陆大金. 随机过程及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1998: 38-58.
- [12] Walter Bich, Maurice G Cox, Rene Dykbaer, et al. Revision of the ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement’ [J]. Metrologia, 2012, 49(6): 702-705.
- [13] 韦来生,张伟平. 贝叶斯统计 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2013: 200-220.