

# 高中数学 必修 1 知识点

## 第一章 集合与函数概念

### 1.1 集合

#### 1.1.1 集合的含义与表示

- 1.集合的概念
  - 集合中的元素具有确定性、互异性和无序性
- 2.常用数集及其记法
  - $N$ 表示自然数集
  - $N^*$ 或 $N_+$ 表示正整数集
  - $Z$ 表示整数集
  - $Q$ 表示有理数集
  - $R$ 表示实数集.
- 3.集合与元素间的关系
  - 对象 $a$ 与集合 $M$ 的关系是 $a \in M$ ，或者 $a \notin M$ ，两者必居其一.
- 4.集合的表示法
  - 自然语言法：用文字叙述的形式来描述集合
  - 列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合
  - 描述法： $\{x \mid x \text{ 具有的性质}\}$ ，其中 $x$ 为集合的代表元素
  - 图示法：用数轴或韦恩图来表示集合.
- 5.集合的分类
  - 含有有限个元素的集合叫做有限集.
  - 含有无限个元素的集合叫做无限集.
  - 不含有任何元素的集合叫做 空集( $\emptyset$ ).

#### 1.1.2 集合间的关系

#### 6.子集、真子集、集合相等

- | 名称 | 记号                                  | 读作                    | 意义            | 性质   | 示意图 |
|----|-------------------------------------|-----------------------|---------------|--|-----|
| 子集 | $A \subseteq B$ (或) $B \supseteq A$ | "A 包含于 B (或者) B 包含 A" | A 中的任一元素都属于 B | (1) $A \subset A$<br>(2) $\emptyset \subset A$<br>(3)若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ 则 $A \subseteq C$<br>(4)若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 则 $A = B$ |     |

名称	记号	读作	意义	性质	示意图
真子集	$A \subsetneq B$ (或) $B \supsetneq A$	"A 真包含于 B (或者) B 真包含 A"	$A \subseteq B$ , 且 B 中至少有一元素不属于 A	(1) $\emptyset \subsetneq A$ (A 为非空子集) (2)若 $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C$ 则 $A \subsetneq C$	
集合相等	$A = B$	"A 等于 B"	A 中的任一元素都属于 B, B 中的任一元素都属于 A	(1) $A \subseteq B$ (2) $B \subseteq A$	

7. 已知集合 A 有  $n(n > 1)$  个元素，则它有  $2^n$  个子集，它有  $2^n - 1$  个真子集，它有  $2^n - 1$  个非空子集，它有  $2^n - 2$  非空真子集。

### 1.1.3 集合的基本运算

#### 8. 交集、并集、补集

•

名称	记号	意义	性质	示意图
交集	$A \cap B$	$\{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\}$	(1) $A \cap A = A$ (2) $A \cap \emptyset = \emptyset$ (3) $A \cap B \subseteq A$ $A \cap B \subseteq B$	
并集	$A \cup B$	$\{x \mid x \in A, \text{或 } x \in B\}$	(1) $A \cup A = A$ (2) $A \cup \emptyset = A$ (3) $A \cup B \supseteq A$ $A \cup B \supseteq B$	
补集	$\complement_S A$	$\{x \mid x \in U, \text{且 } x \notin A\}$	(1) $A \cup (\complement_S A) = U$ (2) $A \cap (\complement_S A) = \emptyset$ (3) $\complement_S(\complement_S A) = A$ $\complement_S S = \emptyset$ (4) $\complement_S(A \cap B) = (\complement_S A) \cup (\complement_S B)$ $\complement_S(A \cup B) = (\complement_S A) \cap (\complement_S B)$	

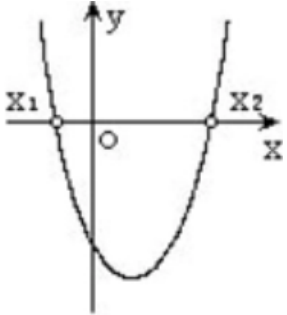
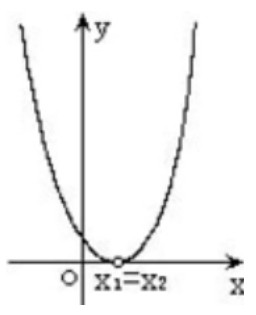
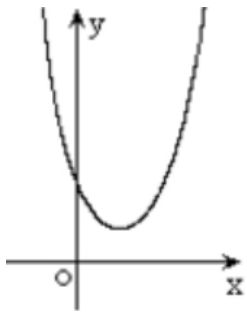
### 1.1.4 补充知识:含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

#### 9. 含绝对值的不等式的解法

•

不等式	解集
$ x  < a(a > 0)$	$\{x \mid -a < x < a\}$
$ x  > a(a > 0)$	$\{x \mid x < -a \text{ 或 } x > a\}$
$ ax + b  < c(c > 0)$ $ ax + b  > c(c > 0)$	把 $ax + b$ 看成一个整体， 化成 $ x  < a(a > 0)$ 或者 $ x  < a(a > 0)$ 型不等式来求解

#### 10. 一元二次不等式的解法

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图像			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (其中 $x_1 < x_2$ )	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\}$	$R$
$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

## 1.2 函数及其表示

### 1.2.1 函数的概念

#### 1. 函数的概念

1. 设  $A$ 、 $B$  是两个非空的数集，如果按照某种对应法则  $f$ ，对于集合  $A$  中任何一个数  $x$ ，在集合  $B$  中都有唯一确定的数  $f(x)$  和它对应，那么这样的对应（包括集合  $A$ 、 $B$  以及  $A$  到  $B$  的对应法则  $f$ ）叫做集合  $A$  到  $B$  的一个函数，记作  $f: A \rightarrow B$ 。
2. 函数的三要素：定义域、值域和对应法则。
3. 只有定义域相同，且对应法则也相同的两个函数才是同一函数

#### 2. 区间的概念及表示法

1. 设  $a$ 、 $b$  是两个实数，且  $a < b$ 
  1. 满足  $a \leq x \leq b$  的实数  $x$  的集合叫做闭区间，记作  $[a, b]$ ；
  2. 满足  $a < x < b$  的实数  $x$  的集合叫做开区间，记作  $(a, b)$ ；
  3. 满足  $a \leq x < b$ ，或  $a < x \leq b$  的实数  $x$  的集合叫做半开半闭区间，分别记作  $[a, b)$ ， $(a, b]$ ；
  4. 满足  $x \geq a$ ， $x > a$ ， $x \leq b$ ， $x < b$  的实数  $x$  的集合分别记作  $[a, +\infty)$ ， $(a, +\infty)$ ， $(-\infty, b]$ ， $(-\infty, b)$
  5. 注意：对于集合  $\{x \mid a < x > b\}$  与区间  $(a, b)$ ，前者  $a$  可以大于或等于  $b$ ，而后者必须  $a < b$ ，（前者可以不成立，为空集；而后者必须成立）

#### 3. 求函数的定义域时，一般遵循以下原则：

1.  $f(x)$  是整式时，定义域是全体实数。

2.  $f(x)$  是分式函数时，定义域是使分母不为零的一切实数。

3.  $f(x)$  是偶次根式时，定义域是使被开方式为非负值时的实数的集合。

1. 这段话的意思是，在求一个函数的定义域时，通常遵循一个规则。具体来说，当函数  $f(x)$  是一个偶次根式（即平方根、四次根、六次根等）时，其定义域是使得被开的数值表达式为非负值时的实数的集合。

2. 举个例子，如果有一个函数  $f(x) = \sqrt{x}$ （平方根函数），则根据这个规则，该函数的定义域是使得  $x$  非负的实数的集合，即  $x \geq 0$ 。因为在实数范围内，平方根函数的自变量  $x$  不能取负值，否则结果将无实数解。

3. 对数函数的真数大于零，当对数或指数函数的底数中含变量时，底数须大于零且不等于1。

1. 当涉及一个式子时，我们可以将这些概念总结如下：

对数函数表示为  $\log_a b$ ，其中：

-  $b$  是真数（也就是对数的结果），

-  $a$  是底数（也就是指数的基数）。

这个式子告诉我们以底数 ( $a$ ) 的几次方可以得到真数 ( $b$ )。

2. 这段话解释了对数函数和指数函数的定义域的一般规则：

1. 对于对数函数，真数（即对数中的数值）必须大于零。这是因为在常用对数（以10为底）或自然对数（以  $e$  为底）等对数函数中，真数必须是正数，否则无法得到实数解。

2. 对于底数为变量的对数或指数函数，底数必须大于零且不等于1。这是因为如果底数为0，则对数函数或指数函数无法定义，而如果底数为1，则对数函数或指数函数始终为1，失去了函数的变化性。因此，底数必须大于零且不等于1，以确保函数有意义且能够表现出其特有的性质和行为。

5.  $y = \tan x$  中， $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 。

6. 零（负）指数幂的底数不能为零。

7. 若  $f(x)$  是由有限个基本初等函数的四则运算而合成的函数时，则其定义域一般是各基本初等函数的定义域的交集。

8. 对于求复合函数定义域问题，一般步骤是：若已知  $f(x)$  的定义域为  $[a, b]$ ，其复合函数  $f[g(x)]$  的定义域应由不等式  $a \leq g(x) \leq b$  解出。

9. 对于含字母参数的函数，求其定义域，根据问题具体情况需对字母参数进行分类讨论。

10. 由实际问题确定的函数，其定义域除使函数有意义外，还要符合问题的实际意义。

#### 4. 求函数的值域或最值

求函数最值的常用方法和求函数值域的方法基本上是相同的。事实上，如果在函数的值域中存在一个最小（大）数，这个数就是函数的最小（大）值。因此求函数的最值与值域，其实质是相同的，只是提问的角度不同。求函数值域与最值的常用方法：

1. 观察法：对于比较简单的函数，我们可以通过观察直接得到值域或最值。

2. 配方法：将函数解析式化成含有自变量的平方式与常数的和，然后根据变量的取值范围确定函数的值域或最值。

3. 判别式法：若函数  $y = f(x)$  可以化成一个系数含有  $y$  的关于  $x$  的二次方程  $a(y)x^2 + b(y)x + c(y) = 0$ ，则在  $a(y) \neq 0$  时，由于  $x, y$  为实数，故必须有  $\Delta = b^2(y) - 4a(y) \cdot c(y) \geq 0$  从而确定函数的值域或最值。
4. 不等式法：利用基本不等式确定函数的值域或最值。
5. 换元法：通过变量代换达到化繁为简、化难为易的目的，三角代换可将代数函数的最值问题转化为三角函数的最值问题。
6. 反函数法：利用函数和它的反函数的定义域与值域的互逆关系确定函数的值域或最值。
7. 数形结合法：利用函数图象或几何方法确定函数的值域或最值。
8. 函数的单调性法。

## 1.2.2 函数的表示法

### 1. 函数的表示方法

- 表示函数的方法，常用的有 **解析法**、**列表法**、**图象法** 三种
  - 解析法：就是用 **数学表达式** 表示两个变量之间的对应关系。
  - 列表法：就是 **列出表格** 来表示两个变量之间的对应关系。
  - 图象法：就是 **用图象** 表示两个变量之间的对应关系。

### 2. 映射的概念

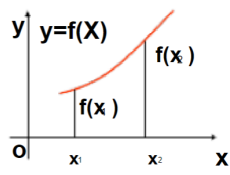
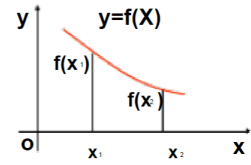
- 设  $A$ 、 $B$  是两个集合，如果按照某种对应法则  $f$ ，对于集合  $A$  中任何一个元素，在元素  $B$  中都有唯一的元素和它对应，那么这样的对应（包括集合  $A$ ， $B$  以及  $A$  到  $B$  的对应法则  $f$ ）叫做集合  $A$  到  $B$  的映射，记作： $f: A \rightarrow B$
- 给定一个集合  $A$  到  $B$  的映射，且  $a \in A, b \in B$ ，如果元素  $a$  和元素  $b$  对应，那么我们把元素  $b$  叫做元素  $a$  的象，元素  $a$  叫做元素  $b$  的原象。

## 1.3 函数的基本性质

### 1.3.1 单调性与最大（小）值

#### 1. 函数的单调性

##### 1. 定义及判定方法

函数的性质	定义	图像	判断方法
增函数	如果对于属于定义域内某个区间上的任意两个自变量的值 $x_1, x_2$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上时增函数。		1. 利用定义 2. 利用已知函数的单调性 3. 利用函数图象 （在某个区间图象上升为增） 4. 利用复合函数
减函数	如果对于属于定义域内某个区间上的任意两个自变量的值 $x_1, x_2$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上时减函数。		1. 利用定义 2. 利用已知函数的单调性 3. 利用函数图象 （在某个区间图象下降为增） 4. 利用复合函数

2. 在公共定义域内，两个增函数的和是增函数，两个减函数的和是减函数，增函数减去一个减函数为增函数，减函数减去一个增函数为减函数。

3. 对于复合函数  $y = f[g(x)]$ ，令  $u = g(x)$

- 若  $y = f(u)$  为增， $u = g(x)$  为增，则  $y = f[g(x)]$  为增
- 若  $y = f(u)$  为减， $u = g(x)$  为减，则  $y = f[g(x)]$  为增
- 若  $y = f(u)$  为增， $u = g(x)$  为减，则  $y = f[g(x)]$  为减
- 若  $y = f(u)$  为减， $u = g(x)$  为增，则  $y = f[g(x)]$  为减