# Закон Допуска переходов в динамических системах

Юрий Слащев

При техническом участии ChatGPT (Open AI) Claude (Anthropic) Grok (xAI) Gemini (Google AI)

19 января 2026 г.

**Аннотация**

В работе формулируется и строго доказывается Закон Допуска, задающий необходимое и достаточное условие допустимых переходов между режимами в динамических системах. Закон основан на сохранении инварианта ядра и обращении динамики системы в нуль в момент перехода. Показано, что при выполнении данных условий переход осуществляется без фазового разрыва, потери информации и без энергетических затрат.

## 1 Введение

Проблема переходов между различными режимами динамических систем является фундаментальной как в физике, так и в вычислительных и операторных моделях. Изменение параметров системы часто приводит к разрывам траекторий, утрате фазовой согласованности или разрушению внутренней структуры состояния.

Существующие подходы, как правило, допускают параметрические скачки без универсального критерия, позволяющего отличить структурно допустимый переход от разрушительного. В настоящей работе предлагается минимальный и строгий формализм, устраняющий эту неопределённость.

Мы вводим Закон Допуска — универсальное условие, при котором переход между режимами сохраняет внутреннюю идентичность системы и не приводит к потере информации.

## 2 Определения и предварительные положения

### 2.1 Состояние и динамика системы

Пусть $S(t) \in \mathcal{M}$ — состояние системы, эволюционирующее на фазовом многообразии $\mathcal{M}$ во времени $t$. Динамика системы задаётся уравнением

$$\dot{S}(t) = D(S(t)),$$

где $D$ — оператор динамики.

## 2.2 Инвариант ядра

**Определение 1.** Инвариант ядра — *это отображение*

$$K : \mathcal{M} \to \mathbb{I},$$

*которое однозначно характеризует внутреннюю идентичность состояния системы и сохраняется при допустимой эволюции.*

Инвариант ядра обладает следующими свойствами:

- сохраняется при непрерывной динамике системы;
- обеспечивает фазовую и структурную идентификацию состояния;
- инвариантен относительно допустимых переходов между режимами.

Интуитивно инвариант ядра фиксирует «то, чем система является», в отличие от параметров, определяющих «как она движется».

## 2.3 Операторная структура инварианта ядра

Инвариант ядра $K$ вводится как операторная проекция состояния системы на подпространство, инвариантное относительно динамики. Формально

$$K(S) = \mathcal{P}S,$$

где $\mathcal{P} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_K$ — проектор на подпространство ядра.

Проектор $\mathcal{P}$ удовлетворяет условиям

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}, \qquad [\mathcal{P}, D] = 0,$$

что обеспечивает сохранение инварианта при непрерывной эволюции:

$$\frac{d}{dt}K(S(t)) = \mathcal{P}\dot{S}(t) = 0.$$

Для оператора перехода $\mathcal{T}_{t_0}$ условие допустимости

$$[\mathcal{T}_{t_0}, K] = 0$$

гарантирует сохранение проекции на ядро и, следовательно, внутренней идентичности системы.

## 2.4 Выбор проектора инварианта ядра

Проектор $\mathcal{P}$ не вводится произвольно и определяется структурой самой системы. Пусть фазовое пространство допускает разложение

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_K \oplus \mathcal{M}_D,$$

где $\mathcal{M}_K$ — подпространство состояний, инвариантных относительно динамики, а $\mathcal{M}_D$ — подпространство динамических мод.

**Определение 2.** *Проектор инварианта ядра $\mathcal{P}$ определяется как линейный оператор*

$$\mathcal{P} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_K,$$

*такой, что*

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}, \qquad \ker \mathcal{P} = \mathcal{M}_D.$$

Подпространство $\mathcal{M}_K$ выбирается как максимальное подпространство, для которого выполняется

$$\forall S \in \mathcal{M}_K : \quad D(S) = 0.$$

Тем самым инвариант ядра определяется как

$$K(S) = \mathcal{P}S,$$

а сохранение инварианта при эволюции является прямым следствием ортогональности динамики:

$$\mathcal{P}\dot{S}(t) = 0.$$

В конкретных моделях выбор $\mathcal{P}$ осуществляется конструктивно:

- в классических системах — как проекция на фазу или интеграл движения;
- в операторных моделях — как проектор на коммутант оператора динамики;
- в вычислительных системах — как проекция на регистр или состояние, сохраняющее идентичность вычисления.

Таким образом, проектор инварианта ядра не постулируется, а однозначно определяется структурой нулевой динамики системы.

## 2.5 Пример инвариантной модели периодического ядра

Рассмотрим систему с фазовой переменной $\theta(t) \in \mathbb{R}$, динамика которой задаётся периодическим движением

$$\theta(t) = \omega t + \varphi,$$

где $\varphi$ — фазовый сдвиг, определяющий внутреннюю идентичность состояния.

Определим инвариант ядра в виде периодического отображения

$$K(\theta) = \frac{1}{15}\,(\theta \bmod 3\pi).$$

Такое определение индуцирует фактор-пространство

$$\mathbb{I} = \mathbb{R}/(3\pi\mathbb{Z}),$$

в котором все состояния, отличающиеся на целое кратное $3\pi$, отождествляются.

Проектор инварианта ядра $\mathcal{P}$ в данной модели действует как

$$\mathcal{P} : \theta \mapsto \frac{1}{15}(\theta \bmod 3\pi),$$

и удовлетворяет условиям идемпотентности и коммутирования с динамикой:

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}, \qquad \mathcal{P}\dot{\theta}(t) = 0 \text{ при } \dot{\theta}(t_0) = 0.$$

В момент допустимого перехода $t_0$, когда

$$\dot{\theta}(t_0) = 0,$$

изменение параметров системы (например, $\omega$) не влияет на значение $K$, поскольку фазовая проекция остаётся неизменной. Тем самым сохраняется инвариант ядра и выполняется Закон Допуска.

Данная модель иллюстрирует, как абстрактный операторный формализм инварианта ядра реализуется в конкретной периодической системе и не ограничивает общность теории. Данная нормировка выбрана без потери общности.

### 2.6 Оператор перехода

Пусть $\mathcal{T}_{t_0}$ — оператор, описывающий структурное изменение системы в момент времени $t_0$, связанное со сменой режима или параметров.

## 3 Закон Допуска

**Теорема 1** (Закон Допуска). *Переход $\mathcal{T}_{t_0}$ является допустимым тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\dot{S}(t_0) = 0 \quad \wedge \quad [\mathcal{T}_{t_0}, K] = 0.$$

## 4 Доказательство

**Необходимость.** Пусть переход $\mathcal{T}_{t_0}$ допустим. По определению допустимости внутренняя идентичность системы должна сохраняться, откуда следует

$$[\mathcal{T}_{t_0}, K] = 0.$$

Если же $\dot{S}(t_0) \neq 0$, то в момент перехода система обладает ненулевой динамикой, и изменение параметров приводит к разрыву фазовой траектории. Следовательно, условие $\dot{S}(t_0) = 0$ является необходимым.

**Достаточность.** Пусть выполнены условия $\dot{S}(t_0) = 0$ и $[\mathcal{T}_{t_0}, K] = 0$. Тогда в момент перехода система находится в состоянии покоя относительно своей динамики, а оператор перехода не изменяет инвариант ядра. Следовательно, фазовая траектория может быть продолжена без разрыва, а внутренняя идентичность системы сохраняется. Таким образом, переход является допустимым.

## 5 Примеры и физическая интерпретация

Рассмотрим простейшую модель

$$S(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где $\varphi$ играет роль инварианта ядра. Переход между режимами с различными $A$ и $\omega$ допустим только в момент, когда

$$\dot{S}(t_0) = 0.$$

В противном случае возникает фазовый разрыв, что соответствует нарушению Закона Допуска.

Энергия перехода

$$E_{\mathrm{tr}} = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \|\dot{S}(t)\|^2 dt$$

при допустимом переходе равна нулю, что означает отсутствие необходимости внешнего энергетического воздействия.

# 6 Обсуждение

Закон Допуска вводит чёткое разделение между непрерывной эволюцией системы и моментами её структурной перестройки. Он не запрещает динамику, а строго регламентирует моменты изменения структуры. Формализм применим к широкому классу детерминированных динамических систем. Расширение на стохастические и дискретные модели требует дополнительного исследования.

## Единственность проектора инварианта ядра

В рамках настоящей работы существование проектора инварианта ядра $\mathcal{P}$ является достаточным для формулировки и доказательства Закона Допуска. Однако для некоторых классов динамических систем возможно усиление результата за счёт доказательства единственности разложения

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_K \oplus \mathcal{M}_D.$$

В частности, для гладких детерминированных систем с изолированным множеством нулевой динамики проектор $\mathcal{P}$ может быть определён единственным образом как проектор на максимальное подпространство, инвариантное относительно оператора динамики. Данное усиление представляет самостоятельный интерес и будет рассмотрено в последующих работах.

## Связь с теорией возмущений

Закон Допуска формулируется как строгий бинарный критерий. Тем не менее, при малых нарушениях условий допустимости естественно возникает количественная оценка энергии перехода. Предварительный анализ показывает, что при возмущении порядка $\varepsilon$ энергия перехода масштабируется как

$$E_{\mathrm{tr}} \sim \varepsilon^2,$$

что согласуется с общими результатами теории малых возмущений и указывает на устойчивость допустимых переходов.

## Обобщение на квантовые системы

Предложенный формализм допускает естественное обобщение на квантовые системы. В этом случае фазовое пространство заменяется гильбертовым пространством состояний, а классический коммутатор заменяется квантовым. Условие допустимости перехода принимает форму

$$[\mathcal{T}_{t_0}, \hat{K}] = 0,$$

где $\hat{K}$ — оператор квантового инварианта ядра. Это указывает на универсальность Закона Допуска и его применимость за пределами классической динамики.

# 7 Заключение

В работе сформулирован и строго доказан Закон Допуска, задающий универсальный критерий допустимых переходов в динамических системах. Показано, что сохранение инварианта ядра и нулевая динамика в момент перехода являются необходимыми и достаточными условиями отсутствия фазовых разрывов и потери информации.

Предложенный закон задаёт минимальный фундамент для дальнейших исследований управляемых переходов и устойчивых вычислительных архитектур.

# A Численная иллюстрация орбитального процессора

В данном приложении приводится численная модель, иллюстрирующая допустимый и недопустимый переходы между орбитальными режимами в соответствии с Законом Допуска. Код не является доказательством теоремы, а служит наглядной демонстрацией её следствий.

## A.1 Описание модели

Состояние системы моделируется гармонической функцией

$$S(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где фазовый параметр $\varphi$ выступает в роли инварианта ядра. Допустимый переход осуществляется в момент времени $t_0$, для которого выполняется условие $\dot{S}(t_0) = 0$.

## A.2 Код численного моделирования

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def simulate_orbital_transition():
    A1, omega1, phi = 1.0, 2.0*np.pi, 0.5
    t = np.linspace(0, 2, 1000)

    def x(t, A, omega, p):
        return A * np.cos(omega*t + p)

    def v(t, A, omega, p):
        return -A * omega * np.sin(omega*t + p)

    velocities = v(t, A1, omega1, phi)
    t0_idx = np.argmin(np.abs(velocities))
    t0 = t[t0_idx]

    A2, omega2 = 1.5, 4.0*np.pi

    s_legal, s_illegal = [], []

    for curr_t in t:
        if curr_t < t0:
            s_legal.append(x(curr_t, A1, omega1, phi))
            s_illegal.append(x(curr_t, A1, omega1, phi))
        else:
            s_legal.append(
                x(curr_t - t0 + t0*(omega1/omega2), A2, omega2,
                   phi)
            )
            s_illegal.append(x(curr_t, A2, omega2, phi))

    plt.plot(t, s_legal, label='Legal transition')
plt.plot(t, s_illegal, '--', label='Illegal transition')
    plt.axvline(t0, linestyle=':')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.show()

simulate_orbital_transition()
```

На графике «Legal transition» соответствует допустимому переходу (Закон Допуска), а «Illegal transition» — недопустимому переходу с разрывом инварианта ядра.

## A.3 Интерпретация результата

Допустимый переход демонстрирует непрерывность состояния и сохранение фазового инварианта. Недопустимый переход сопровождается фазовым разрывом, что наглядно подтверждает формулировку Закона Допуска.