Chapter2 对偶理论

(Duality Theory)

本章主要内容:

- 线性规划的对偶模型
- 对偶性质
- 对偶问题的经济解释－影子价格
- 对偶单纯形法
- 灵敏度分析

对偶理论是线性规划的重要内容之一。每个线性规划问题都伴随一个相应的线性规划问题，称为对偶问题。

原问题和对偶问题有着密切的联系，它们有相同的最优目标函数值，并且在求得一个线性规划的最优解的同时，同时也得到对偶线性规划的最优解。

由对偶问题引伸出来的对偶解有着重要的经济意义，是研究经济学的重要概念和工具之一。

第一节　线性规划的对偶问题

1.1　对偶问题的提出

1.2　对称形式下对偶问题的一般形式

1.3　非对称形式的原 – 对偶问题关系

1.4　对偶关系对应表

1. 对偶问题的现实来源

设某工厂生产两种产品甲和乙，生产中需4种设备按A，B，C，D顺序加工，每件产品加工所需的机时数、每件产品的利润值及每种设备的可利用机时数列于下表：

产品数据表

设备 / 产品	*A*	*B*	*C*	*D*	产品利润（元 / 件）
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
设备可利用机时数（时）	12	8	16	12	

问：充分利用设备机时，工厂应生产甲和乙产品各多少件才能获得最大利润?

解：设甲、乙产品各生产x_1及x_2件，则数学模型为：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

反过来问：若厂长决定不生产甲和乙产品，决定出租机器用于接受外加工，只收加工费，那么 4 种机器的机时如何定价才是最佳决策?

在市场竞争的时代，厂长的最佳决策显然应符合两条：

（1）不吃亏原则。即机时定价所赚利润不能低于加工甲、乙型产品所获利润。

（2）竞争性原则。即在上述不吃亏原则下，尽量降低机时总收费，以便争取更多用户。

设y_1，y_2，y_3，y_4分别表示**A**、**B**、**C**、**D**设备的机时价（或单位增值价格，售价＝ 成本＋增值）。单位增值价格实际就是单位产品利润。

$$\min \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t.\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

把同种问题的两种提法所获得的数学模型用表2表示，将会发现一个有趣的现象。

原问题与对偶问题对比表

	A（y_1）	B（y_2）	C（y_3）	D（y_4）	
甲（x_1）	2	1	4	0	2
乙（x_2）	2	2	0	4	3
	12	8	16	12	min ω max z

2. 原问题与对偶问题的对应关系

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

原问题（对偶问题）

$$\min \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题（原问题）

原问题的模型与对偶问题的模型之间的对应关系如下：（1）最大与最小互换；（2）右端常数项与目标函数系数互换；（3）约束矩阵转置；（4）不等号反号。

注：称y_1，y_2，y_3,y_4为设备A、B、C、D的影子价格，是生产者宁愿停止生产而将设备转让出租的单位增值价格。影子价格并不是设备机时的实际价格，而是从制成产品的利润来估计所利用的设备机时的价值。

（1）对称形式下对偶问题的一般形式

$$LP: \quad \max Z = CX \qquad DP: \quad \min W = Y^T b$$

$$\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A^T Y \ge C^T \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

已知LP，写出DP

对称形式（或规范形式）的定义：

(1)目标函数求极大值时，所有约束条件为≤号，变量非负;

(2)目标函数求极小值时，所有约束条件为≥号，变量非负.

对称形式的线性规划的对偶问题还是对称形式。

例2 写出下列线性规划的对偶问题

$$\max Z = 4y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 \le 5 \\ y_1 - 7y_2 \le -2 \\ -y_1 + 5y_2 \le 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：其对偶问题为

$$\min Z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 \ge 4 \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

1.3 非对称形式的原一对偶问题关系

问题： 并非所有线性规划问题都具有对称形式, 那么一般线性规划问题如何写出其对偶问题？

思路： 化为对称形式，再转化。

例3 写出线性规划问题的对偶问题

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

例3　写出线性规划问题的对偶问题

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \ge 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \le 3 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 \ge 5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：首先将原问题变形为对称形式

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} -2x - 3x_2 + 5x_3 \le -2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \le 3 \\ x_1 - 4x_2 - 6x_3 \le -5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题： $\min W = -2y_1 + 3y_2 - 5y_3$

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 2 \\ -3y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -3 \\ 5y_1 + 7y_2 - 6y_3 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

注意：不要求等式右端项 $b \geq 0$，原因在对偶单纯形表中只保证 $\lambda_j \leq 0$ 而不保证 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$，故$b$可以是负数。

例4 写出下述线性规划问题的对偶问题

$$\max z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

$$\max z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

先化成对称形式的线性规划问题：

$$\max z = x_1 - 4x_2' + 3x_3' - 3x_3''$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 - 3x_2' - 5x_3' + 5x_3'' \le 2 \\ -3x_1 - x_2' - 6x_3' + 6x_3'' \le -1 \\ x_1 - x_2' + x_3' - x_3'' \le 4 \\ -x_1 + x_2' - x_3' + x_3'' \le -4 \\ x_1, x_2', x_3', x_3'' \ge 0 \end{cases}$$

写出其对偶问题为：

$$\min w = 2y_1 - y_2' + 4y_3' - 4y_3''$$

$$s.t.\begin{cases} 2y_1 - 3y_2' + y_3' - y_3'' \ge 1 \\ -3y_1 - y_2' - y_3' + y_3'' \ge -4 \\ -5y_1 - 6y_2' + y_3' - y_3'' \ge 3 \\ 5y_1 + 6y_2' - y_3' + y_3'' \ge -3 \\ y_1, y_2', y_3', y_3'' \ge 0 \end{cases}$$

写出其对偶问题为：

$$\min w = 2y_1 - y_2' + 4y_3' - 4y_3''$$

$$s.t.\begin{cases} 2y_1 - 3y_2' + y_3' - y_3'' \ge 1 \\ -3y_1 - y_2' - y_3' + y_3'' \ge -4 \\ -5y_1 - 6y_2' + y_3' - y_3'' \ge 3 \\ 5y_1 + 6y_2' - y_3' + y_3'' \ge -3 \\ y_1, y_2', y_3', y_3'' \ge 0 \end{cases}$$

令y_3=y_3'-y_3", y_2=- y_2' 得

$$\min z = 2y_1 + y_2 + 4y_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 1 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \le 4 \\ -5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

$$\max z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

1.4 对偶关系对应表

原问题（或对偶问题）		对偶问题（或原问题）	
约束条件右端项		目标函数变量的系数	
目标函数变量的系数		约束条件右端项	
约束条件系数矩阵$A(A^T)$		约束条件系数矩阵$A^T(A)$	
目标函数 max		目标函数 min	
约束条件	m个	m个	变量
	$\leq$	≥ 0	
	$\geq$	≤ 0	
	$=$	无约束	
变量	n个	n个	约束条件
	≥ 0	$\geq$	
	≤ 0	$\leq$	
	无约束	$=$	

例5 写出下列线性规划的对偶问题

$$\min Z = x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 8x_3 - x_4 \le 18 \\ \quad 6x_2 - \quad 5x_4 \ge 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = -14 \\ x_1\text{无约束}, x_2 \le 0, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

解：其对偶问题为：

$$\max w = 18y_1 + 10y_2 - 14y_3$$

$$\begin{cases} 7y_1 \quad + 2y_3 = 1 \\ -2y_1 + 6y_2 + 8y_3 \ge 5 \\ 8y_1 - \quad y_3 \le -4 \\ -y_1 - 5y_2 \quad \le 9 \\ y_1 \le 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3\text{无约束} \end{cases}$$

例6 写出下列线性规划的对偶问题

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - 4x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0,\ x_2、x_3 \geq 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

对偶问题：$\max W = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_3 \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -5 \\ y_1 - 4y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

练习：1. $\min Z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + \ x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ \ x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. $\min Z = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 0 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq -5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \leq 0,\ x_3\text{、}\ x_4\text{无约束} \end{cases}$$

答案：1. $\max W = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \le 2 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \le 2 \\ 5y_1 + 7y_2 + 6y_3 \le 4 \\ y_1 \ge 0, y_2 . y_3 \le 0 \end{cases}$$

2. $\max W = 3y_1 - 5y_2 + 2y_3$

$$\begin{cases} y_1 \qquad\qquad + 2y_3 \le 3 \\ -2y_1 + y_2 - 3y_3 \ge 2 \\ 3y_1 + 3y_2 - 7y_3 = -3 \\ 4y_1 + 4y_2 - 4y_3 = 4 \\ y_1 \le 0, y_2 \ge 0, y_3 \text{无约束} \end{cases}$$

作业:2.2(1)(4)