考试纪律承诺

本人自愿遵守学校考试纪律，保证以诚信认真的态度作答试卷。如有违纪，愿接受学校相关纪律处分。

本人签名：

学院 专业班级 学号 姓名

装 订 线

2022-2023-1 学期　北京工商大学

《概率论与数理统计》期末试题 （A）

题号	1	2	3	4	5	6	7	总分
得分								
题号	8	9	10	11	12	13	14	
得分								

考试纪律承诺：本人自愿遵守学校考试纪律，保证以诚信认真的态度作答试卷，独立完成，不与他人交流，如有雷同等违纪情况，接受学校相关纪律处分。

答题要求：

1.直接在 A4 纸上答题，不用抄题目，写清楚题目前的序号即可。

2. 务必保证每张答题纸都要写清楚姓名、学号，用黑色签字笔作答，字迹清楚。

3. 在指定时间内将答案拍照（清晰、正立、完整），把所有照片按照顺序粘到一个 word 文件里，文件命名格式为：**科目+学号+姓名**（例如：概率论与数理统计+ 2022111111+张三）。

4. 交卷: 将 word 文件发送到教师指定的邮箱。

一、简单计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 设 A, B, C 是三个随机事件. 已知 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ 且 $P(A\mid A\cup B)=\frac{3}{4}$. 求 $P(AB)$.

2. 设某工厂的 1 号至 4 号四个车间生产的产品混在同一个库房中. 各车间生产的产品数量之比为 9:3:2:1，各车间的次品率分别为 $\frac{1}{10},\frac{1}{15},\frac{1}{20},\frac{1}{20}$. 从库房中随机抽取 1 件产品. 求抽到次品的概率.

3. 设离散型随机变量 X 的概率分布如下表所示. 求 X 的分布函数.

X	-1	0	2
p_k	0.3	0.1	0.6

4. 设随机变量 X 在区间(0, 2)上服从均匀分布. 求 $Y=-\ln\left(\frac{X}{2}\right)$ 的概率密度.

5. 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求 $f_X(x), f_Y(y)$ 并判断两者是否独立；

(2) 求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

6. 设随机变量 X 的期望为-1，方差为 2，请根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X+1|\geqslant 2\}$ 的上界.

7. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ 是来自总体 $X\sim N(1,9)$ 的一个样本，问 $\overline{X}$ 服从的分布及参数.

8. 设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中参数 $\theta\ (0<\theta<1)$ 未知， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体X的简单随机样本. 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$.

二、计算题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

9. 设有来自 1 班、2 班和 3 班的各 10 名、15 名、25 名学生，其中女生分别有 4 名、3 名和 5 名. 随机选取一个班的学生，从中先后抽出 2 名学生（被抽到的学生不再作为被选对象）. 求已知第一次抽到女生的情况下，第二次也抽到女生的概率.

10. 设随机变量为 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, & -1<x<0\\ \frac{1}{2}, & 0<x<1\\ -\frac{1}{2}x+1, & 1<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

令 $Y=X^2$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

11. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2(2-x-y), & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

12. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{C}{k!}, k=0,1,2,\cdots$， 求 $E(X^2)$.

13. 设随机变量 $(X,Y)\sim N(0,1,1,4,{}^{1}\!/_{8})$. 求 $P\{|X-2Y|\leqslant 2\}$. (已知 $\Phi(1)=0.8413$.)

三、证明题（本大题共 1 小题，每小题 6 分，共 6 分）

14. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 令

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6), Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9), S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2.$$

试证明统计量 $t=\dfrac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$ 服从自由度为 2 的 t 分布.