1.5.3 有关单纯形法的计算公式

设有线性规划

$$\max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

其中$A_{m\times n}$且$r(A)=m$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

$C=（c_1, c_2, \cdots c_n）$ $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$

$X\geq 0$应理解为X大于等于零向量，即$x_j\geq 0, j=1,2\ldots,n$。

不妨假设在标准型线性规划中，系数矩阵A的前m个列向量恰好构成一个可行基，即

A=（B，N）

$B=(P_1，P_2，…，P_m)$为基变量$x_1,x_2，…，x_m$的系数列向量构成的可行基；

N＝（$P_{m+1},…P_n$）非基变量为$x_{m+1},x_{m+2},…x_n$的系数列向量构成的矩阵

则X可表示成 $X=\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$，同理将$C$写成分块矩阵$C$=（$C_B, C_N$），

$C_B=(c_1, c_2, …, c_m)$, $C_N=(c_{m+1}, c_{m+2}，…，c_n)$

则$AX=b$可写成

$$(B,\ N)\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = BX_B + NX_N = b$$

因为r（B）$=m$（或$|B|\neq 0$）所以B^{-1}存在，因此可有

$$BX_B = b - NX_N$$

$$X_B = B^{-1}(b - NX_n)$$

$$= B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

令非基变量$X_N=0$, $X_B=B^{-1}b$,

则得到基本可行解 $X=(B^{-1}b,\ 0)^T$

将目标函数写成

$$Z=(C_B, C_N)\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}=C_B X_B + C_N X_N$$

$$=C_B(B^{-1}b-B^{-1}NX_N)+C_N X_N$$

$$=C_B B^{-1}b+(C_N-C_B B^{-1}N)X_N$$

$$Z=C_B B^{-1}b+(C_N-C_B B^{-1}N)X_N$$

单纯形的五个计算公式：

1. $X_B = B^{-1}b$

2. $\bar{N} = B^{-1}N$

非基变量的检验数

3. $\lambda_N = C_N - C_B B^{-1} N$

全体检验数

$\lambda = C - C_B B^{-1} A$

$\lambda_j = c_j - C_B B^{-1} P_j$

P_j 为A中第j列的列向量

4. $Z_0 = C_B B^{-1} b$

目标函数值

5. $\pi = C_B B^{-1}$

π称为单纯形算子

初始单纯形表：

	X_B	X_N	b
X_B	B	N	b
C_j-Z_j	C_B	C_N	0

用B^{-1}左乘表中第二行,得到

	X_B	X_N	b
X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
C_j-Z_j	C_B	C_N	0

用B^{-1}左乘表中第二行,得到

	X_B	X_N	b
X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
C_j-Z_j	C_B	C_N	0

再将第二行左乘$-C_B$后加到第三行,得到

	X_B	X_N	b
X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
$\lambda=C_j-Z_j$	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	$-C_BB^{-1}b$

$\boxed{\overline{N}}$ $\boxed{\lambda_N}$ $\boxed{X_B}$ $\boxed{-Z_0}$

例1-24　线性规划 $\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \geq 0, j = 1,\cdots,5 \end{cases}$$

已知可行基 $B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ \dfrac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$

求: (1)单纯形乘子π; (2)基可行解及目标值; (3)求λ_3;

(4)B_1是否是最优基,为什么;

(5)当可行基为 $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **时求λ_1及λ_3。**

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \ge 0, j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

已知可行基

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

求(1)单纯形乘子π;

解: (1) x_1、x_2为基变量，x_3、x_4、x_5为非基变量, 则

$C_B=(c_1,c_2)=(1,2)$

$C_N=(c_3,c_4,c_5)=(1,0,0)$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

故单纯形乘子

$$\pi = C_B B^{-1} = (1,2)\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = (\frac{1}{9}, \frac{7}{3})$$

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,\cdots,5 \end{cases}$$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & 1 \\ -\dfrac{1}{9} & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(2)基可行解及目标值;

---

(2)基变量的解为

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & 1 \\ -\dfrac{1}{9} & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ \dfrac{35}{3} \end{bmatrix}$$

故基本可行解为 $X = (25, \frac{35}{3,} 0,0,0,)^T,$

目标函数值为 $Z_0 = C_B B^{-1} b = C_B X_B = (1,2)\begin{bmatrix} 25 \\ \dfrac{35}{3} \end{bmatrix} = \dfrac{145}{3}$

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \ge 0, j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(3) 求λ$_3$

(3) 求λ$_3$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, C_B B^{-1} P_3 = \pi P_3 = (\frac{1}{9}, \frac{7}{3}) \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{107}{9}$$

$$\lambda_3 = c_3 - C_B B^{-1} P_3$$

$$= 1 - \frac{107}{9}$$

$$= -\frac{98}{9}$$

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

(4)B_1是否是最优基,为什么;

---

(4) 要求出所有检验数是否满足$\lambda_j \le 0$, j=1…,5。

x_1,x_2是基变量，故$\lambda_1=0,\lambda_2=0$，

而 $\lambda_3 = -\dfrac{98}{9} < 0,$ **剩下来求λ_4,λ_5，由λ_N计算公式得**

$$(\lambda_4, \lambda_5) = (c_4, c_5) - C_B B^{-1}(P_4 P_5)$$

$$= (0,0) - (\frac{1}{9}, \frac{7}{3})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-\frac{1}{9}, -\frac{7}{3})$$

因$\lambda_j \le 0$, j=1,…,5, 故B_1是最优基。

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\cdots,5 \end{cases}$$

(5)当可行基为 $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **时求λ_1及λ_3。**

---

(5) 因B_2是A中第四列与第二列组成的, x_4、x_2是基变量, x_1、x_3、x_5是非基变量,这时有

$$C_B = (c_4, c_2) = (0,2) \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_B B^{-1} = (0,2)$$

$$(\lambda_1, \lambda_3) = (c_1, c_3) - C_B B^{-1}(P_1, P_3) = (1,1) - (0,2)\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \dfrac{1}{3} & 5 \end{bmatrix} = (\frac{1}{3}, -9)$$

即 $\lambda_1 = \dfrac{1}{3}, \lambda_3 = -9$

1.5.4 退化与循环

退化基本可行解：如果一个基本可行解存在取零值的基变量，称为是退化的基本可行解，相应的基称为退化基。

非退化基本可行解：所有的基变量都大于零

在非退化的情形下，用单纯形法经过有限次迭代一定可以达到最优解，

在退化的情形下，用单纯形法进行迭代可能得不到最优解，

基迭代经过若干次后又回到先前的可行基

$B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_1$

循环

退化的原因：

在单纯形表中确定进基变量时，有时会出现两个以上相同的最小比值❑，从而使下一个表的基可行解出现一个或多个基变量等于零的退化解。

退化解出现的原因是模型中存在多余的约束，使多个基本可行解对应同一个极点。

当存在退化解时，就有可能出现迭代计算的循环。单纯形法迭代对于大多数退化解时是有效的，很少出现不收敛的情形.

为避免循环，1974年Bland（伯兰特）提出了一个简便有效的规则：

(1) 当存在多个λ_j >0时，始终选择下标值最小的变量作为进基变量；

(2) 当出现两个以上相同的最小比值□ 时，始终选择下标值最小的变量作为出基变量。

学习要点

1.将问题化为标准型，寻找一个初始可行基，列出初 始单纯形矩阵；

2.判断基本可行解。有3种情形：①已是最优解，②是无界解，③不能确定。

前2种情形计算结束，第3种情形需要继续迭代，先进基后出基，初等变换求下一个基本可行解，直到出现最优解或无界解为止。

3.人工变量是过度变量，当原问题有可行解时，人工变量最终会退出基变量。如果原问题没有可行解，人工变量就不会退出基变量。

4.处理人工变量的方法有两种，无论哪一种结果都是一样。

5.本节的5个公式是单纯形法的基本公式
6.只要已知基矩阵，利用公式就能计算我们所需要的结果
7.应用公式时注意数据的来源，即给定基矩阵B和C_B、C_N、N、b**都是标准型的数据，而**$\boldsymbol{\lambda}$、Z_0、$\boldsymbol{\pi}$、$\bar{N}$、$\bar{b}$ **是通过公式计算的结果。**

作业： 习题 1.14 1.17

The End of Chapter 1