LP当前解已是最优的四大特征：

(1) 存在一组(初始)可行基（其系数矩阵为单位阵）。

(2) 检验数行的基变量系数=0。

(3) 检验行的非基变量系数≤0。$\begin{cases} \text{全部} < 0 \Rightarrow \text{唯一解。} \\ \text{存在} = 0 \Rightarrow \text{无穷多个解。} \end{cases}$

(4) 常数列向量≥0。

Q:所给LP的标准型中约束矩阵中没有现成的可行基怎么办?

1.5.2 单纯形的进一步讨论

例 解下列线性规划

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1、x_2、x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解: 先化为标准形式

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$s.t.\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

系数矩阵中不存在单位矩阵，无法建立初始单纯形表。

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$s.t.\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

x_5可作为一个基变量，第一、三约束中分别加入人工变量x_6、x_7，得

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 7 \end{cases}$$

说明：①不易接受。因为 x_6, x_7 是强行引进，称为人工变量。它们与 x_4, x_5 不一样。x_4, x_5 称为松弛变量和剩余变量，是为了将不等式改写为等式而引进的，而改写前后两个约束是等价的。

②人工变量的引入一般来说是前后不等价的。只有当最优解中，人工变量都取值零时（此时人工变量实质上就不存在了）才可认为两个问题的最优解是相同的。

处理办法：把人工变量从基变量中“赶”出去使其变为非基变量，以求出原问题的初始基本可行解。

结　论

1. 若新LP的最优解中，人工变量都处在非基变量位置（即取零值）时，原LP有最优解。

2.若新LP的最优解中，包含有非零的人工变量，则原LP无可行解。

3.若新LP的最优解的基变量中，包含有人工变量，但该人工变量取值为零。这时可将某个非基变量引入基变量中来替换该人工变量，从而得到原LP的最优解。

以 $X^{(0)}$作初始基本可行解进行迭代时，怎样才能较快地将所有的人工变量从基变量中全部“赶”出去（如果能全部“赶”出去的话）。这会影响到得到最优解的迭代次数。

——大M法与两阶段法

1. 大M 法

例1-20 用大M法解下列线性规划

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1、x_2、x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解: 先化为标准形式

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$s.t.\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

系数矩阵中不存在单位矩阵，无法建立初始单纯形表。

目标函数修改为：

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 7 \end{cases}$$

其中**M**为任意大的实数，“**-M**”称为“罚因子”。

C_j		3	2	−1	0	0	−M	−M	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
−M	x_6	−4	3	1	−1	0	1	0	4
0	x_5	1	−1	2	0	1	0	0	10
−M	x_7	2	−2	[1]	0	0	0	1	1→
λ_j		3-2M	2+M	-1+2M↑	−M	0	0	0	
−M	x_6	−6	[5]	0	−1	0	1		3→
0	x_5	−3	3	0	0	1	0		8
−1	x_3	2	−2	1	0	0	0		1
λ_j		5-6M	5M↑	0	−M	0	0		
2	x_2	−6/5	1	0	−1/5	0			3/5
0	x_5	[3/5]	0	0	3/5	1			31/5
−1	x_3	−2/5	0	1	−2/5	0			→11/5
λ_j		5↑	0	0	0	0			
2	x_2	0	1	0	1	2			13
3	x_1	1	0	0	1	5/3			31/3
−1	x_3	0	0	1	0	2/3			19/3
λ_j		0	0	0	−5	-25/3			

最优解X＝（31/3，13，19/3，0，0)^T；最优值Z＝152/3

例1-21 求解线性规划 $\min Z = 5x_1 - 8x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解: 化为标准型 $\min Z = 5x_1 - 8x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 4 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,4 \end{cases}$$

加入人工变量x_5，得

$$\min Z = 5x_1 - 8x_2 + Mx_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

$$\min Z = 5x_1 - 8x_2 + Mx_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

用单纯形法计算如下表所示。

C_j		5	−8	0	0	M	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0 M	x_3 x_5	[3] 1	1 −2	1 0	0 −1	0 1	6→ 4
λ_j		$5-M$↑	$-8+2M$	0	M	0	
5 M	x_1 x_5	1 0	1/3 −7/3	1/3 −1/3	0 −1	0 1	2 2
λ_j		0	$-29/3+7/3M$	$-5/3+1/3M$	M	0	

最优解X=（2，0，0，0，2）， Z=10+2M。

最优解中含有人工变量$x_5 \neq 0$说明这个解不是最优解，是不可行的，因此原问题无可行解。

大M法小结：

（1）求极大值时，目标函数变为 $\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} R_i$

（2）求极小值时，目标函数变为 $\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} R_i$

不足：

用计算机求解时，不容易确定M的取值，且M过大容易引起计算误差。

2. 两阶段法

用大**M** 法处理人工变量，在计算机求解时，对**M**只能在计算机内输入一个机器最大字长的数字。这有时可能使计算结果发生错误。为克服这个困难，可以对添加人工变量的线性规划问题分两阶段来求解——称为**两阶段法**。

将LP的求解过程分成两个阶段：

第一阶段：求解第一个LP：

$$\min w = \sum_{i=1}^{m} R_i$$

约束条件是加入人工变量后的约束方程。

第一个LP的结果有三种可能情形：

1. 最优值 $w^* = 0$,且人工变量皆为非基变量。

从第一阶段的最优解中去掉人工变量后，即为原LP的一个基本可行解。作为原LP的一个初始基本可行解，再求原问题，从而进入第二阶段。

2. 最优值 $w^* \neq 0$,说明至少有一个人工变量不为零。

原LP无可行解。不再需要进入第二个阶段计算。

3. 最优值 $w^* = 0$, 且存在人工变量为基变量，但取值为零，把某个非基变量与该人工变量进行调换。

两阶段法的第一阶段求解的目的：

1.判断原LP有无可行解。

2.若有，则可得原LP的一个初始基本可行解，再对原LP进行第二阶段的计算。

例1-22 用两阶段单纯形法求解例20的线性规划。

解：标准型为 $\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

第一阶段问题为

$$\min w = x_6 + x_7$$

目标函数为人工变量之和

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,7 \end{cases}$$

加入人工变量的约束条件

用单纯形法求解，得到第一阶段问题的计算表如下：

C_j		0	0	0	0	0	1	1	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	−4	3	1	−1	0	1	0	4
0	x_5	1	−1	2	0	1	0	0	10
1	x_7	2	−2	[1]	0	0	0	1	1→
λ_j		2	−1	−2↑	1	0	0	0	
1	x_6	−6	[5]	0	−1	0	1		3→
0	x_5	−3	3	0	0	1	0		8
0	x_3	2	−2	1	0	0	0		1
λ_j		6	−5↑	0	1	0	0		
0	x_2	−6/5	1	0	−1/5	0			3/5
0	x_5	3/5	0	0	3/5	1			31/5
0	x_3	−2/5	0	1	−2/5	0			11/5
λ_j		0	0	0	0	0			

最优解为 $X=(0,\frac{3}{5},\frac{11}{5},0\frac{31}{5})$ ，最优值**w=0**。

说明找到了原问题的一组基本可行解，将它作为初始基可行解，进行第二阶段的计算。

第二阶段问题为

$$\max Z=3x_1+2x_2-x_3$$

原问题目标函数

$$\begin{cases} -\frac{6}{5}x_1+x_2-\frac{1}{5}x_4=\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5}x_1+\frac{3}{5}x_4+x_5=\frac{31}{5} \\ -\frac{2}{5}x_1+x_3-\frac{2}{5}x_4=\frac{11}{5} \\ x_j\ge 0, j=1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

用单纯形法计算得到下表

C_j		3	2	－1	0	0	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2 0 －1	x_2 x_5 x_3	－6/5 [3/5] －2/5	1 0 0	0 0 1	－1/5 3/5 －2/5	0 1 0	3/5 31/5 → 11/5
λ_j		5 ↑	0	0	0	0	
2 3 －1	x_2 x_1 x_3	0 1 0	1 0 0	0 0 1	1 1 0	2 5/3 2/3	13 31/3 19/3
λ_j		0	0	0	－5	－25/3	

最优解X＝（31/3，13，19/3，0，0)^T；最优值Z＝152/3

例1-23 用两阶段法求解

$$\min Z = 5x_1 - 8x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解: 第一阶段问题为

$$\min w = x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

用单纯形法计算如下表:

C_j		0	0	0	0	1	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0 1	x_3 x_5	[3] 1	1 -2	1 0	0 -1	0 1	6→ 4
λ_j		-1↑	2	0	1	0	
0 1	x_1 x_5	1 0	1/3 $-7/3$	1/3 $-1/3$	0 -1	0 1	2 2
λ_j		0	7/3	1/3	1	0	

第一阶段的最优解$X=(2,0,0,0,2)^T$, 最优目标值$w=2\neq0$, x_5仍在基变量中, 从而原问题无可行解。

解的判断

唯一最优解的判断：最优表中所有非基变量的检验数非零,则线规划具有唯一最优解

多重最优解的判断:最优表中存在非基变量的检验数为零,则线性规划具有多重最优解。

无界解的判断: 某个λ_k>0且$a_{ik}\leq 0$ （i=1，2,…,m）则线性规划具有无界解。

无可行解的判断：(1)当用大M单纯形法计算得到最优解并且存在R_i>0时，则表明原线性规划无可行解。
(2) 当第一阶段的最优值$w\neq 0$时，则原问题无可行解。

作业：1.12 (1)