BlackMath: 全国高中数学联赛真题集

LeyuDame

2024 年 10 月 12 日

2017 年全国高中数学联赛一试 (A 卷)

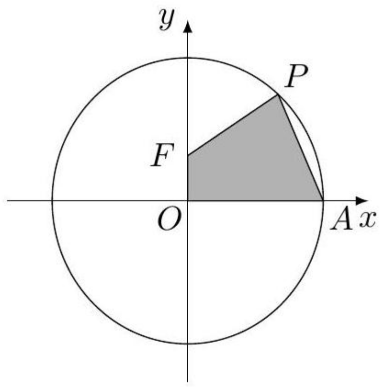
一试

一、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 对任意实数 x 有 $f(x+3)\cdot f(x-4)=-1$, 又当 $0\leqslant x<7$ 时, $f(x)=\log_2(9-x)$, 则 $f(-100)$ 的值为 _________ .

2. 若实数 x,y 满足 $x^2+2\cos y=1$, 则 $x-\cos y$ 的取值范围是 _________ .

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{10}=1, F$ 为 C 的上焦点，A 为 C 的右顶点，P 是 C 上位于第一象限内的动点，则四边形 $OAPF$ 的面积的最大值为 _________。

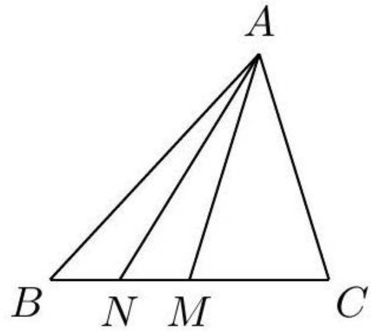


4. 若一个三位数中任意两个相邻数码的差均不超过 1 ，则称其为" 平稳数". 平稳数的个数是 _________ .

5. 正三棱雉 $P-ABC$ 中, $AB=1, AP=2$ ，过 AB 的平面 α 将其体积平分，则棱 PC 与平面 α 所成角的余弦值为 _________ .

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，点集 $K=\{(x,y)\mid x,y=-1,0,1\}$ 。在 K 中随机取出三个点，则这三点中存在两点之间距离为 $\sqrt{5}$ 的概率为 _________ .

7. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是边 BC 的中点, N 是线段 BM 的中点. 若 $A=\frac{\pi}{3}, \triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最小值为 _________ .



8. 设两个严格递增的正整数数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足：$a_{10}=b_{10}<2017$ ，对任意正整数 n ，有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, b_{n+1}=2b_n$ ，则 a_1+b_1 的所有可能值为 ________ .

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 其中第 9 题满分 16 分, 第 10 、11 题满分 20 分.

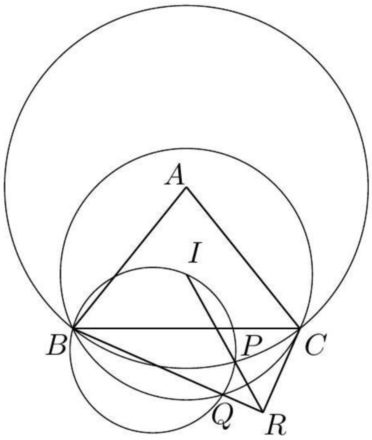
9. 设 k, m 为实数, 不等式 $\left|x^2-kx-m\right| \leqslant 1$ 对所有 $x \in[a, b]$ 成立. 证明: $b-a \leqslant 2\sqrt{2}$.

10. 设 x_1, x_2, x_3 是非负实数, 满足 $x_1+x_2+x_3=1$, 求 $\left(x_1+3x_2+5x_3\right)\left(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5}\right)$ 的最小值和最大值.

11. 设复数 z_1, z_2 满足 $\operatorname{Re}\left(z_1\right)>0, \operatorname{Re}\left(z_2\right)>0$, 且 $\operatorname{Re}\left(z_1^2\right)=\operatorname{Re}\left(z_2^2\right)=2$, 其中 $\operatorname{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部. (1) 求 $\operatorname{Re}\left(z_1 z_2\right)$ 的最小值;
(2) 求 $\left|z_1+2\right|+\left|\overline{z_2}+2\right|-\left|\overline{z_1}-z_2\right|$ 的最小值.

二试

一、如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC, I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心. 以 A 为圆心, AB 为半径作圆 Γ_1, 以 I 为圆心, IB 为半径作圆 Γ_2, 过点 B, I 的圆 Γ_3 与 Γ_1, Γ_2 分别交于点 P, Q (不同于点 B). 设 IP 与 BQ 交于点 R. 证明: $BR \perp CR$.



二、设数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1=1$ ，

求满足 $a_r<r \leqslant 3^{2017}$ 的正整数 r 的个数.

三、将 33×33 方格纸中每个小方格染三种颜色之一，使得每种颜色的小方格的个数相等. 若相邻两个小方格的颜色不同，则称它们的公共边为” 分隔边”. 试求分隔边条数的最小值.

四、设 m, n 均是大于 1 的整数, $m \geqslant n . a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个不超过 m 的互不相同的正整数, 且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互素。证明：对任意实数 x ，均存在一个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ ，使得 $\left\|a_i x\right\| \geqslant \frac{2}{m(m+1)}\|x\|$, 这里 $\|y\|$ 表示实数 y 到与它最近的整数的距离.