元素与集合

集合

LeyuDame

2024 年 7 月 9 日

目录

目录

虽然集合是一个原始的概念, 但对一个具体的集合而言, 很多情况下我们还是可以采用列举法或描述法给出它的一个准确而清晰的表示.
用描述法表示一个集合基于下面的概括原则:
概括原则对任给的一个性质 P, 存在一个集合 S, 它的元素恰好是具有性质 P 的所有对象, 即

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

其中 $P(x)$ 表示 “x 具有性质 P”.
由此, 我们知道集合的元素是完全确定的, 同时它的元素之间具有互异性和无序性.
集合的元素个数为有限数的集合称为有限集, 元素个数为无限数的集合称为无限集.
如果有限集 A 的元素个数为 n, 则称 A 为 n 元集, 记作 $|A| = n$. 空集不含任何元素.

设集合 $M=\left\{x \,\middle|\, \frac{ax-5}{x^2-a}<0\,, x\in\mathbf{R}\right\}$. 若 $3\in M$, 且 $5\notin M$, 求实数 a 的取值范围.

设集合 $M=\left\{a \mid a=x^{2}-y^{2}, x, y \in \mathbf{Z}\right\}$, n 为整数. 分别判断数 $4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3$ 与集合 M 的关系.

设集合

$$S = \left\{ \frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}} \,\middle|\, m, n \in \mathbf{N}, m^2+n^2 \neq 0 \right\}$$

证明: 对一切 $x, y \in S$, 且 $x < y$, 总存在 $z \in S$, 使得 $x < z < y$.

目录

在两个集合的关系中，子集是一个重要的概念，它的两个特例是真子集和集合相等. 从下面“充分必要条件”的角度来理解子集，真子集和集合相等的概念无疑是十分有益的:

子集: $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 恒有 $x \in B$;

真子集: $A \subsetneqq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B, \\ \text{且存在} x' \in B, \text{ 但} x' \notin A; \end{cases}$

集合相等: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$.

容易证明两个集合之间关系的如下性质:

1. $\varnothing \subseteq A, \varnothing \subsetneqq A(A \neq \varnothing)$;
2. $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$;
3. n 元集 A 总共有 2^n 个不同的子集.

若集合 $\{1,2,\cdots,50\}$ 的子集中不包含形如 $\{x,3x\}$ 的子集, 则称该子集为 “特殊子集”, 含元素个数最多的特殊子集称为 “超特殊子集”. 求超特殊子集含有多少个元素, 且存在多少个不同的超特殊子集?

设 a, b, c 是互不相同的正整数, n 为正整数. 若集合

$$\{a+b, b+c, c+a\} = \{n^2, (n+1)^2, (n+2)^2\}$$

求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值.

对于非空数集 S, T, 定义

$$S+T=\{s+t \mid s\in S, t\in T\}, 2S=\{2s \mid s\in S\}$$

设 n 为正整数, A, B 均为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集, 证明: 存在 $A+B$ 的子集 D, 使得

$$D+D\subseteq 2(A+B),\ 且|D|\geqslant\frac{|A|\cdot|B|}{2n}$$

这里 $|X|$ 表示有限集 X 的元素个数.

用 $\sigma(S)$ 表示非空的整数集合 S 的所有元素的和. 设 $A=\{a_1,\ a_2,\cdots,a_{11}\}$ 是正整数的集合, 且 $a_1<a_2<\cdots<a_{11}$; 又设对每个正整数 $n\leqslant 1500$，都存在 A 的子集 S, 使得 $\sigma(S)=n$. 求 a_{10} 的最小可能值.

设 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 是一列集合, 满足: 对任意正整数 j, 只有有限多个正整数 i, 使得 $A_i \subseteq A_j$. 证明: 存在一列正整数 $a_1, a_2, a_3, \cdots$, 使得对任意正整数 i, j, $a_i \mid a_j$ 当且仅当 $A_i \subseteq A_j$.