BlueMath: 高中数学竞赛一试讲义

YZDame

2024 年 10 月 10 日

目录

第一章　集合

1.1　元素与集合

1.1.1　集合的概念

虽然集合是一个原始的概念, 但对一个具体的集合而言, 很多情况下我们还是可以采用列举法或描述法给出它的一个准确而清晰的表示.

用描述法表示一个集合基于下面的概括原则:

概括原则　对任给的一个性质 P, 存在一个集合 S, 它的元素恰好是具有性质 P 的所有对象, 即

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

其中 $P(x)$ 表示"x 具有性质 P".

由此, 我们知道集合的元素是完全确定的, 同时它的元素之间具有互异性和无序性.

集合的元素个数为有限数的集合称为有限集, 元素个数为无限数的集合称为无限集. 如果有限集 A 的元素个数为 n, 则称 A 为 n 元集, 记作 $|A| = n$. 空集不含任何元素.

例 1.1.1. 设集合 $M = \left\{x \,\middle|\, \frac{ax-5}{x^2-a} < 0\,, x \in \mathbb{R}\right\}$. 若 $3 \in M$, 且 $5 \notin M$, 求实数 a 的取值范围.

解. 由 $3 \in M$, 得 $\frac{3a-5}{3^2-a} < 0$, 即

$$\left(a - \frac{5}{3}\right)(a-9) > 0,$$

$$a < \frac{5}{3} \text{ 或} a > 9. \tag{1}$$

所以

由 $5 \notin M$ 得, $\frac{5a-5}{5^2-a} \geqslant 0$ 或 $5^2 - a = 0$, 所以

$$1 \leqslant a \leqslant 25 \tag{2}$$

由 (1), (2) 得, $a \in \left[1, \frac{5}{3}\right) \cup (9, 25]$.

分析. $5 \notin M$ 隐含了条件 $5^2 - a = 0$, 这是容易被忽视的.

例 1.1.2. 设集合 $M = \left\{a \mid a = x^2 - y^2, x, y \in \mathbb{Z}\right\}, n$ 为整数. 分别判断数 $4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3$ 与集合 M 的关系.

分析. 当 $n=1$ 时, 易知 $4=2^2-0^2, 5=3^2-2^2, 7=4^2-3^2$; 而对任何整数 x,y, 由于 $x+y$ 与 $x-y$ 同奇偶, 故 $(x+y)(x-y)\neq 2\times 3=6\times\ 1=6$. 于是, 我们尝试将 $4n, 4n+1, 4n+3$ 分别表示成 x^2-y^2 的形式, 并证明不存在 $x,y\in\mathbb{Z}$, 使 $4n+2=x^2-y^2$.

解. 因为对任意的整数 n, 有

$$4n=(n+1)^2-(n-1)^2(n+1,n-1\in\mathbb{Z})$$
$$4n+1=(2n+1)^2-(2n)^2(2n+1,2n\in\mathbb{Z})$$
$$4n+3=(2n+2)^2-(2n+1)^2(2n+2,2n+1\in\mathbb{Z})$$

所以 $4n, 4n+1, 4n+3\in M$.

若 $4n+2$ 是 M 的元素, 则存在 $x,y\in\mathbb{Z}$ 满足 $4n+2=x^2-y^2$. 注意到 $x+y$ 与 $x-y$ 奇偶性相同, 若同为奇数, 则 $4n+2=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 不成立; 若同为偶数, 则 $(x+y)(x-y)$ 为 4 的倍数, 但 $4n+2$ 不是 4 的倍数, 故 $4n+2=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 不成立. 所以 $4n+2$ 不是 M 的元素.

注记. 由概括原则我们知道, 判断一个对象 x 是否为集合 S 的元素, 等价于判断 x 是否具有性质 P.

例 1.1.3. 设集合
$$S=\left\{\frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}}\,\middle|\, m,n\in\mathbb{N}, m^2+n^2\neq 0\right\}$$
证明: 对一切 $x,y\in S$, 且 $x<y$, 总存在 $z\in S$, 使得 $x<z<y$.

证明. 因 $\left(\frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)^2=1+2\times\frac{mn}{m^2+n^2}$, 所以, 原命题等价于: 设

$$S'=\left\{\frac{mn}{m^2+n^2}\,\middle|\, m,n\in\mathbb{N}\right\}$$

则对一切 $x,y\in S'$ 且 $x<y$, 总存在 $z\in S'$ 使得 $x<z<y$.

$$记x=\frac{mn}{m^2+n^2}, y=\frac{ab}{a^2+b^2}(x<y). 不妨设m\leqslant n, a\leqslant b.$$

考虑函数 $f(x)=\frac{-x}{1+x^2}$. 易证, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增. 所以, 对所有 $c,d\in[0,1]$, 有

$$f(c)<f(d)\Leftrightarrow c<d.$$
$$又f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{mm}{m^2+n^2}<\frac{ab}{a^2+b^2}=f\left(\frac{a}{b}\right), 则\frac{m}{n}<\frac{a}{b}.$$

因此, 可以选择有理数 $\frac{p}{q}(p,q\in\mathbb{N}, q\neq 0)$, 使得 $\frac{m}{n}<\frac{p}{q}<\frac{a}{b}$(如取 $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+\frac{a}{b}\right)$). 故

$$f\left(\frac{m}{n}\right)<f\left(\frac{p}{q}\right)<f\left(\frac{a}{b}\right)$$

令 $z=f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{pq}{p^2+q^2}$ 即可. ■

注记. 上述解法用等价命题代替原命题, 避免了根式运算, 使解答过程变得简洁.

1.1.2　集合与集合的关系

在两个集合的关系中, 子集是一个重要的概念, 它的两个特例是真子集和集合相等. 从下面“充分必要条件”的角度来理解子集, 真子集和集合相等的概念无疑是十分有益的:

子集: $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 恒有 $x \in B$;

真子集: $A \subsetneqq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B, \\ \text{且存在} x' \in B, \text{ 但} x' \notin A; \end{cases}$

集合相等: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$.

容易证明两个集合之间关系的如下性质:

1. $\varnothing \subseteq A, \varnothing \subsetneqq A (A \neq \varnothing)$;
2. $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$;
3. n 元集 A 总共有 2^n 个不同的子集.

例 1.1.4. 若集合 $\{1, 2, \cdots, 50\}$ 的子集中不包含形如 $\{x, 3x\}$ 的子集, 则称该子集为“特殊子集”, 含元素个数最多的特殊子集称为“超特殊子集”. 求超特殊子集含有多少个元素, 且存在多少个不同的超特殊子集?

分析. 一个自然的想法是, 先列出集合 $\{1, 2, \cdots, 50\}$ 的所有仅包含形如 $\left\{x, 3^k x\right\} (k \in \mathbb{N}^*)$ 的二元子集且元素尽可能多的子集, 以及 $\{1, 2, \cdots, 50\}$ 除去上述复合元素后余下元素构成的子集, 然后考虑如何从这些子集中选取元素组成超“特殊子集”.

解. 作集合 $\{1, 2, \cdots, 50\}$ 的子集:

$$\begin{aligned}
&E_1 = \{1, 3, 9, 27\}; \quad E_2 = \{2, 6, 18\}, \quad E_3 = \{4, 12, 36\}, \\
&E_4 = \{5, 15, 45\}; \quad E_5 = \{7, 21\}, \quad E_6 = \{8, 24\}, \\
&E_7 = \{10, 30\}, \quad E_8 = \{11, 33\}, \quad E_9 = \{13, 39\}, \\
&E_{10} = \{14, 42\}, \quad E_{11} = \{16, 48\}; \\
&E_{12} = \{17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 34, 35, 37, 38, \\
&40, 41, 43, 44, 46, 47, 49, 50\}.
\end{aligned}$$

显然, 这些集合两两的交集为空集, 它们的并集恰为集合 $\{1, 2, \cdots, 50\}$.

超特殊子集可以从集合 E_1, E_2, E_3, E_4 中各选两个元素, 同一个集合中选取的两个数没有一个是另一个的 3 倍; 从 $E_5, E_6, \cdots, E_{11}$ 中各取一个元素; 取集合 E_{12} 的全部元素. 故超特殊子集最多含有 $2 \times 4 + 7 + 23 = 38$ (个) 元素.

因为从 E_1 中选取两个元素的方法有 3 种; 从 E_2, E_3, E_4 中各选取两个元素的方法和从 E_{12} 中选取全部元素的方法各只有 1 种; 从 $E_5, E_6, \cdots, E_{11}$ 中各选取一个元素的方法各有 2 种, 所以, 共有 $3 \times 2^7 = 384$ (个) 不同的超特殊子集.

如果 A, B 是两个相等的数集, 那么可以得到 $A = B$ 的两个非常有用的必要条件:

(1) 两个集合的元素之和相等;

(2) 两个集合的元素之积相等.

例 1.1.5. 设 a,b,c 是互不相同的正整数, n 为正整数. 若集合

$$\{a+b,b+c,c+a\}=\left\{n^2,(n+1)^2,(n+2)^2\right\}$$

求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值.

解. 由题设, 显然 $n>1$. 由于

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=2(a+b+c)$$

这是一个偶数, 故 $n,n+1,n+2$ 中有两个奇数, 一个偶数, 所以 n 为奇数.

不妨设 $a<b<c$.

当 $n=3$ 时, 由 $a+b=9,a+c=16,b+c=25$ 得 $a+b+c=25$, 从而 $a=0$, 与题设矛盾. 所以 $n\geqslant 5$.

当 $n=5$ 时, 由 $a+b=25,a+c=36,b+c=49$ 解得 $a=6,b=19,\ c=30$. 这时, $a^2+b^2+c^2=1297$.

综上, 所求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值为 1297 .

注记. *元素之和 (积) 相等只是两个集合相等的必要条件, 以此求解集合时一般还要检查集合的元素是否互异.*

例 1.1.6. 对于非空数集 S,T, 定义

$$S+T=\{s+t\mid s\in S,t\in T\},2S=\{2s\mid s\in S\}$$

设 n 为正整数, A,B 均为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集, 证明: 存在 $A+B$ 的子集 D, 使得

$$D+D\subseteq 2(A+B),\text{ 且}|D|\geqslant\frac{|A|\cdot|B|}{2n}$$

这里 $|X|$ 表示有限集 X 的元素个数.

证明. 令 $S_y=\{(a,b)\mid a-b=y,a\in A,b\in B\}$.

由于 $\sum_{y=1-n}^{n-1}\left|S_y\right|=|A|\cdot|B|$, 故存在 $y_0,1-n\leqslant y_0\leqslant n-1$, 使

$$\left|S_{y_0}\right|\geqslant\frac{|A|\cdot|B|}{2n-1}>\frac{|A|\cdot|B|}{2n}$$

取 $D=\left\{2b+y_0\mid(a,b)\in S_{y_0}\right\}$, 由于对所有的 $(a,b)\in S_{y_0}$, 相应的 b 值两两不等, 进而 $2b+y_0$ 两两不同, 故

$$|D|=\left|S_{y_0}\right|>\frac{|A|\cdot|B|}{2n}$$

由 S_{y_0} 的定义知, 对 D 中的每个元素 d, 存在 $(a,b)\in S_{y_0}$ 使得

$$d=2b+y_0=a+b\in A+B$$

故 $D\subseteq A+B$.

对 $d_1,d_2\in D$, 设 $d_1=2b_1+y_0=2a_1-y_0,d_2=2b_2+y_0\,(b_1,b_2\in B,\ a_1\in A)$, 则

$$\begin{aligned}d_1+d_2&=2a_1-y_0+2b_2+y_0\\&=2\left(a_1+b_2\right)\in 2(A+B)\end{aligned}$$

综上可知集合 D 满足要求. ■

注记. 例 1.1.6定义了一种新的集合运算, 正确理解这个定义是顺利解题的关键.

例 1.1.7. 用 $\sigma(S)$ 表示非空的整数集合 S 的所有元素的和. 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{11}\}$ 是正整数的集合, 且 $a_1<a_2<\cdots<a_{11}$; 又设对每个正整数 $n \leqslant 1500$, 都存在 A 的子集 S, 使得 $\sigma(S)=n$. 求 a_{10} 的最小可能值.

分析. 要求 a_{10} 的最小值, 显然应使 $\sigma(A)=1500$. 又由题设, 应使 a_{11} 尽可能大, 且前 *10* 个数之和不小于 *750* , 故取 $a_{11}=750$. 考虑整数的二进制表示, 由 $1+2+\cdots+2^7=255$ 知, 前 *8* 个数应依次为 $1,2,4,8,16,32,64,128$. 这时 $a_9+a_{10}=495$, 从而有 $a_{10}=248$.

解. 取 $A_0=\{1,2,4,8,16,32,64,128,247,248,750\}$, 易知 A_0 满足题目要求, 且 $a_{10}=248$. 故 a_{10} 的最小可能值不超过 248 .

另一方面, a_{10} 不可能比 248 更小. 这是因为前 10 个数之和不能小于 750 , 否则设 $\sum_{i=1}^{10} a_i=m, m<750$, 则 $a_{11}=1500-m$, 对 $n \in(m, 1500-m)$, 显然不存在 A 的子集 S, 使 $\sigma(S)=n$. 因 $1+2+\cdots+2^7=255$, 由整数的二进制表示知, 其前 8 个数之和最大为 255. 故 a_9+a_{10} 的最小可能值为 495 , 从而 a_{10} 至少为 248.

综上知, a_{10} 的最小可能值为 248 .

注记. 本例采用了构造法. 直接构造一个符合题设的 A_0, 然后证明 A_0 具有所要求的性质. 这种方法在解有关集合和组合的问题中经常用到.

例 1.1.8. 设 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 是一列集合, 满足: 对任意正整数 j, 只有有限多个正整数 i, 使得 $A_i \subseteq A_j$. 证明: 存在一列正整数 $a_1, a_2, a_3, \cdots$, 使得对任意正整数 $i, j, a_i \mid a_j$ 当且仅当 $A_i \subseteq A_j$.

证明. 设 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ 是全体素数从小到大排列. 对 $i \in \mathbb{N}^*$, 记 $S_i=\left\{j \in \mathbb{N}^* \mid A_j \subseteq A_i\right\}$, 由题设知 S_i 是有限集, 且 $i \in S_i$. 令 $a_i=\prod_{j \in S_i} p_j$, 下面证明数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 满足条件.

对任意正整数 i, j, 若 $A_i \subseteq A_j$, 则 $S_i \subseteq S_j$, 从而 $a_i \mid a_j$; 若 $a_i \mid a_j$, 则 $S_i \subseteq S_j$, 由 $i \in S_i$ 可知 $i \in S_j$, 故 $A_i \subseteq A_j$. 因此 $a_i \mid a_j$ 当且仅当 $A_i \subseteq A_j$. ■

1.1.3　集合语言与集合方法

集合不仅是一个独立的数学分支, 而且还为其他数学领域提供了基本的语言和重要的方法.

例 1.1.9. 某地区网球俱乐部的 20 名成员举行 14 场单打比赛, 每人至少上场一次. 求证: 必有六场比赛, 其 12 个参赛者各不相同.

证明. 记参加第 j 场比赛的选手为 $\left(a_j, b_j\right)$, 并记

$$S=\left\{\left(a_j, b_j\right) \mid j=1,2, \cdots, 14\right\}$$

设 M 为 S 的一个子集. 如果 M 中所含选手对中出现的选手互不相同, 则称 M 为 S 的一个“好”子集.

显然, 这样的“好”子集只有有限个, 其中必有一个元素最多的, 设这个元素最多的“好”子集为 M_0, 它的元素个数为 r, 显然只需证明 $r \geqslant 6$.

如果 $r \leqslant 5$, 由于 M_0 是元素个数最多的“好”子集, 所以在 M_0 中未出现过的 $20-2r$ 名选手之间互相没有比赛, 否则与 M_0 的最大性矛盾. 这就意味着, 这 20- $2r$ 名选手所参加的比赛一定是同前 $2r$ 名选手进行的.

由于每名选手至少参加一场比赛, 所以除了 M_0 中的 r 场比赛之外, 至少还要进行 $20-2r$ 场比赛.

因此, 总比赛场数至少为

$$r + 20 - 2r = 20 - r \geqslant 15$$

与总比赛场次为 14 场矛盾.

于是 $r \geqslant 6$. 问题得证. ■

例 1.1.10. 设 S 是由 $2n$ 个人组成的集合. 求证: 其中必定有两个人, 他们的公共朋友的个数为偶数.

证明. 用反证法: 设 S 为一个由 $2n$ 个人组成的集合, S 中每两个人的公共朋友数为奇数.

对 S 中的任意一个人 A, 记 $M = \{F_1, F_2, \cdots, F_k\}$ 为 A 的朋友集, 可以证明: 对每个 A, k 都为偶数.

事实上, 对每个 $F_i \in M$, 考虑他在 M 中的朋友数, 所有这 k 个 F_i 的这些朋友数之和为偶数 (因为朋友是相互的), 而对 A F_i 而言, 其公共朋友数为奇数, 故每个 F_i 的这样的朋友数为奇数, 故 k 为偶数.

设 $k = 2m$, 现在考虑每个 $F_i \in M$, 他的所有朋友集不包括 A, 但不局限于 M 中, 他的这样的朋友数为奇数 (因为 F_i 的朋友数为偶数, 而 A 不算在内). 因此, 所有 $2m$ 个这样的朋友集的元素个数之和为偶数. 从而在 $2n-1$ 个人 (A 除外) 中, 必有一个人在偶数个这样的朋友集中出现, 他与 A 的公共朋友数为偶数.

这个矛盾表明: 有两个 S 中的人, 他们的公共朋友数为偶数. ■

注记. 上述解法采用了奇偶性分析来“制造”矛盾.

1.2　集合的运算

1.2.1　集合的交集、并集、补集

集合的交集、并集、补集三种基本沄算是通过元素与集合的关系来定义的:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A,\ \text{且} x \in B\},$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A,\ \text{或} x \in B\},$$

$$\complement_U A = \{x \mid A \subseteq U, x \in U,\ \text{且} x \notin A\}.$$

请注意这里的逻辑关联词“且”、“或”, 它们在集合运算的定义中起了决定性的作用.

记 U 为全集, 容易证明集合的运算满足如下法则:

(1) 等幂律 $A\cap A=A, A\cup A=A$;

(2) 同一律 $A\cap U=A, A\cup U=U$,

$A\cap\varnothing=\varnothing, A\cup\varnothing=A$

(3) 互补律 $A\cap\complement_U A=\varnothing, A\cup\complement_U A=U$;

(4) 交换律 $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$;

(5) 结合律 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

(6) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(7) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$;

(8) 反演律 (摩根律) $\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$,

$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

1.2.2 集合的差集、对称差

定义 1.2.1. 由属于集合 A 且不属于集合 B 的全体元素组成的集合叫做集合 A 对 B 的差集, 记作 $A\backslash B$ (或 $A-B$), 即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A, \text{且} x\notin B\}.$$

由这个定义可以看出, 补集只是差集的一种特殊情况.

记 U 为全集, 集合的差集满足如下法则:

(1) $A-A=\varnothing, A-\varnothing=A$;

(2) $A-U=\varnothing, U-A=\complement_U A$;

(3) $A-B\subseteq A, A-B=A-(A\cap B)$;

(4) $A\cup(B-A)=A\cup B, A\cap(B-C)=A\cap B-C$.

定义 1.2.2. 由属于集合 A 且不属于集合 B, 或属于集合 B 且不属于集合 A 的全体元素组成的集合叫做集合 A 和 B 的对称差, 记作 $A\triangle B$, 即

$$\begin{aligned}A\triangle B&=(A-B)\cup(B-A)\\&=\{x\mid x\in A\ \text{且} x\notin B,\ \text{或} x\in B\ \text{且} x\notin A\}.\end{aligned}$$

集合的对称差满足如下法则:

(1) $A\triangle\varnothing=A, A\triangle A=\varnothing$;

(2) $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$;

(3) 交换律: $A\triangle B=B\triangle A$;

(4) 结合律: $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$;

(5) 交集对对称差的分配律: $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$;

(6) 若 $A\triangle B=A\triangle C$, 则 $B=C$.

1.2.3 集合的笛卡尔积

定义 1.2.3. 设 A B 为两个集合, 以 A 中元素为第一元素, B 中元素为第二元素构成有序对, 所有这样的有序对组成的集合叫做集合 A 与 B 的笛卡尔积 (又称直积), 记作 $A\times B$, 即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

集合的笛卡尔积满足如下运算法则:

(1) $A\times\varnothing=\varnothing,\varnothing\times A=\varnothing$;

(2) 笛卡尔积对并集和交集的分配律:

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$,

$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$;

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$,

$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$.

一般地说, 笛卡尔积运算不满足交换律、结合律.

利用维恩图可以清晰地理解集合的交、并、补、差运算及其运算律. 维恩图为集合问题的解决提供了一个直观的工具.

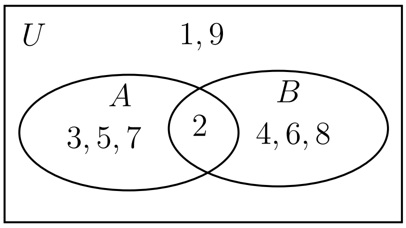

图 1.1

例 1.2.1. 设 A B 都是不超过 9 的正整数组成的全集 U 的子集, $A\cap B=\{2\}$, $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,9\}$, $(\complement_U A)\cap B=\{4,6,8\}$, 求 $A\backslash B$.

分析. 直接进行集合间的运算和推理似乎较难入手, 但我们可从 图 *1.1*中得到解题思路的提示.

解. 因为 $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,9\}$, 所以 $A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$.

又

$$A\cap B=\{2\},$$
$$(\complement_U A)\cap B=\{4,6,8\},$$

所以

$$\begin{aligned}B=U\cap B&=(A\cup\complement_U A)\cap B\\&=(A\cap B)\cup\Big((\complement_U A)\cap B\Big)\\&=\{2,4,6,8\}.\end{aligned}$$

所以, $A\backslash B=(A\cup B)\backslash B=\{3,5,7\}$.

例 1.2.2. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}, B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}, C=\big\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\big\}$. 问:

(1) 当 a 取何值时, $(A\cup B)\cap C$ 为含有两个元素的集合?

(2) 当 a 取何值时, $(A\cup B)\cap C$ 为含有三个元素的集合?

分析. 因为 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$, 故可从解 $A\cap C$ 及 $B\cap C$ 对应的方程组入手.

解. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组

$$\text{(i)}\begin{cases} ax+y=1, \\ x^2+y^2=1, \end{cases} \qquad \text{(ii)}\begin{cases} x+ay=1, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

的解集.

由 (i) 解得 $(x,y)=(0,1),\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$;

由 (ii) 解得 $(x,y)=(1,0),\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right)$.

(1) 使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素的情况只有两种可能:

$$① \begin{cases} \frac{2a}{1+a^2}=0, \\ \frac{1-a^2}{1+a^2}=1; \end{cases} \qquad ② \begin{cases} \frac{2a}{1+a^2}=1 \\ \frac{1-a^2}{1+a^2}=0. \end{cases}$$

由①得 $a=0$; 由②得 $a=1$.

故当 $a=0$ 或 1 时, $(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素.

(2) 使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素的情况是

$$\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2}$$

解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$.

故当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时, $(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素.

例 1.2.3. 设 $n\in\mathbb{N}$, 且 $n\geqslant 15, A\ B$ 都是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的真子集, $A\cap B=\varnothing$, 且 $\{1,2,\cdots,n\}=A\cup B$. 证明: A 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数.

证明. 由题设, $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任何元素必属于且只属于它的真子集 A 、B 之一. 假设结论不真, 则存在如题设的 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的真子集 $A\ B$, 使得无论是 A 还是 B 中的任何两个不同的数的和都不是完全平方数.

不妨设 $1\in A$, 则 $3\notin A$. 否则 $1+3=2^2$, 与假设矛盾, 所以 $3\in B$. 同样, $6\notin B$, 所以 $6\in A$. 这时 $10\notin A$, 即 $10\in B$. 因 $n\geqslant 15$, 而 15 或者在 A 中, 或者在 B 中, 但当 $15\in A$ 时, 因 $1\in A, 1+15=4^2$, 矛盾; 当 $15\in B$ 时, 因 $10\in B, 10+15=5^2$, 仍然矛盾. 因此假设不真, 即 A 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数. ■

注记. 由 $A\ B$ 地位对称, 在上面的解法中我们采用了“不妨设 $1\in A$ ”这种技巧, 有效简化了解题过程.

例 1.2.3实际上给出了一个关于集合的方程组:

$$\begin{cases} A\cup B=\{1,2,\cdots,n\} \\ A\cap B=\varnothing \end{cases}$$

如果交换 A B 算两组解 (有序解) , 那么这个方程组有多少组有序解呢?

设 $U=\{1,2,\cdots,n\}$, 由 $A\cup B=U, A\cap B=\varnothing$, 知 A 与 B 互补, 对于 $A\subseteq U$, 可取 $B=\complement_U A$. 故上述集合方程的有序解的个数为 2^n.

例 1.2.4. 设集合 S 含有 n 个元素, $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 S 的不同子集, 它们两两的交集非空, 而 S 的其他子集不能与 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 都相交. 求证: $k=2^{n-1}$.

分析. *S 有 2^n 个子集, 将两个互为补集的子集作为一组, 则可将 2^n 个子集分成 2^{n-1} 个组, 记为 $\{A_i',B_i'\}, i=1,2,\cdots,2^{n-1}$, 显然 A_i 只能选取每组中的一个子集.*

证明. 设 $a\in S$. 因为 $|S|=n$, 故 S 的子集中含 a 的子集有 2^{n-1} 个. 显然
它们两两的交非空. 所以, $k\geqslant 2^{n-1}$.

又可将 S 的 2^n 个子集分成 2^{n-1} 组, 每组有两个集合, 它们互为补集. 若 $k>2^{n-1}$, 则必有两个集合 A_i $A_j(i\neq j)$ 来自上述同一组, 但 $A_i\cap A_j=\varnothing$, 与题意不符. 所以, $k=2^{n-1}$. ∎

例 1.2.5. 已知集合 A 中包含 2016 个点且无四点共线. 证明: 在集合 A 中存在一个至少有 63 个点的子集 B, 使得 B 中无三点共线.

分析. *自然, 我们应该考虑集合 A 中无三点共线的元素个数最多的子集, 设 B 就是一个这样的子集, 那么集合 $A\backslash B$ 中任何一点都与集合 B 中某两点构成三点共线, 即 $A\backslash B$ 中任何一点对应集合 B 中一个与之组成三点共线的二元子集, 且 $A\backslash B$ 中不同点对应 B 中不同二元子集, 故 B 中二元子集的数量不少于 $A\backslash B$ 中元素的数量.*

证明. 令 $B\subseteq A$ 且 B 为无三点共线的最大的子集.

由于 B 为满足条件的最大集合, 于是, 集合 $A\backslash B$ 中任意一点与集合 B 中的某两个点共线.

又集合 A 中无四点共线, 则过集合 B 中的两个点的每条直线最多包含集合 $A\backslash B$ 中的一个点.

故集合 $A\backslash B$ 中的点的数目不大于集合 B 中的点对的数目.

记 $|B|=k$, 则集合 $A\backslash B$ 中点的数目为 $2016-k$, 集合 B 中点对的数目为 $\frac{k(k-1)}{2}$. 所以

$$2016-k\leqslant\frac{(k-1)k}{2}$$

解得 $k\geqslant 63$ 或 $k\leqslant -64$ (负值舍去).

因此, 集合 B 中至少有 63 个点. ∎

例 1.2.6. 令 $S=\{1,2,\cdots,2014\}$. 对于每个非空子集 $T\subseteq S$, 可选择 T 的一个元素作为该集合的代表元. 求将集合 S 的每个非空子集选取一个代表元的不同方式种数, 每种方式须满足对于每个子集 $D\subseteq S$, 若 D 为非空子集 A, $B,C\subseteq S$ 的无交并 (即子集 A B C 两两不交且并集为 D), 则集合 D 的代表元至少为 A B C 中的一个代表元.

解. 选取方式有 $108\times 2014!$ 种.

用 $r(A)$ 表示集合 A 的代表元, a_n 表示当 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 时符合题意的安排方式的种数.

先计算四元集的情形.

记 $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$. 则有四种不同方式选出 $r(Y)$, 不妨设 $y_1=r(Y)$.

由 $\{y_1,y_2,y_3,y_4\}=\{y_1,y_2\}\cup\{y_3\}\cup\{y_4\}$, 则只能 $r\left(\{y_1,y_2\}\right)=y_1$.

类似地, $r\left(\{y_1,y_3\}\right)=r\left(\{y_1,y_4\}\right)=y_1$.

此时, 只有

$$\{y_1,y_2,y_3\}\ \ \{y_1,y_2,y_4\}\ \ \{y_1,y_3,y_4\}$$
$$\{y_2,y_3,y_4\}\ \ \{y_2,y_3\}\ \ \{y_2,y_4\}\ \ \{y_3,y_4\}$$

的代表元无法确定, 且可以为集合内的任意一个元素, 故有 $3^4\times 2^3$ 种.

从而, $a_4=4\times 3^4\times 2^3=108\times 4!$.

对于 $n\geqslant 5$, 只要证明 $a_n=na_{n-1}$.

记全集 S 的代表元 $r(S)=k$, 则 k 有 n 种选择方式.

若 T 为含 k 的元素个数至多为 $n-2$ 的子集, 则集合 S 可写成 T 与另两个非空子集的无交并.

故 $r(T)=k$.

设 T 为含 k 的 $n-1$ 元子集.

若 $r(T)=m\neq k$, 则 T 可写成 $\{m,k\}$ 与另两个子集的无交并.

从而, $r(\{m,k\})=m$, 这与之前的含 k 的元素个数至多是 $n-2$ 的子集的代表元为 k 的结论矛盾.

故含 k 的所有子集代表元必为 k.

从而, 将 n 降为了 $n-1$ 的情形可得递推式 $a_n=na_{n-1}$.

注记. *正确理解集合 D 的代表元的特殊性是解本例的关键. 设 $D=\{y_1,\ y_2,y_3,y_4\},A=\{y_1,y_2\},B=\{y_3\},C=\{y_4\}$, 且 $r(A)=y_1$, 则 D 的代表元不能为 y_2; 当然, 若 $r(A)=y_2$, 则 D 的代表元不能为 y_1.*

例 1.2.7. 有 1987 个集合, 每个集合有 45 个元素, 任意两个集合的并集有 89 个元素, 问此 1987 个集合的并集有多少个元素?

分析. *由每个集合有 45 个元素, 且任意两个集合的并集有 89 个元素知, 任意两个集合有且只有一个公共元素.*

解. 显然可以由题设找到这样的 1987 个集合, 它们都含有一个公共元素 a, 而且每两个集合不含 a 以外的公共元素.

下面, 我们来排除其他可能性.

由任意两个集合的并集有 89 个元素可知, 1987 个集合中的任意两个集合有且只有一个公共元素, 则容易证明这 1987 个集合中必有一个集合 A 中的元素 a 出现在 A 以外的 45 个集合中, 设为 $A_1,A_2,\cdots,A_{45}$, 其余的设为 $A_{46},A_{47},\cdots,A_{1986}$.

设 B 为 $A_{46},A_{47},\cdots,A_{1986}$ 中的任一个集合, 且 $a\notin B$, 由题设 B 和 $A,A_1,A_2,\cdots,A_{45}$ 都有一个公共元素, 且此 46 个元素各不相同, 故 B 中有 46 个元素, 与题设矛盾. 所以这 1987 个集合中均含有 a.

故所求结果为 $1987\times 44+1=87429$, 即这 1987 个集合的并集有 87429 个元素.

注记. 在这里我们先设计一种符合题设的特殊情形，然后再排除其他可能的情形，从而达到解题目的. 这是一种"先猜后证"的解题策略.

例 1.2.8. 将集合 $M=\{1,2,\cdots,100\}$ 中任意 67 个数染成红色，另 33 个数染成蓝色. 若集合 M 存在形如

$$A_{i,k}=\{i,i+1,\cdots,i+3k-1\}(1\leqslant k\leqslant 33,1\leqslant i\leqslant 101-3k)$$

的子集恰有 $2k$ 个数被染成红色，另 k 个数被染成蓝色，求 k 的最大值.

解. 首先，若将集合 M 中从 $18\sim 84$ 这 67 个数染成红色，其他的数染成蓝色，则当 $17<k\leqslant 33$ 时，显然，不存在满足题设条件的子集 $A_{i,k}$. 故 $k_{\max}\leqslant 17$.

下面证明：$k_{\max}=17$.

事实上，当 $1\leqslant i\leqslant 49$ 时，集合

$$A_{i,17}=\{i,i+1,\cdots,i+50\}\text{ 与}A_{i+1,17}=\{i+1,i+2,\cdots,i+51\}$$

中红色数的个数至多相差 1.

(i) i 与 $i+51$ 同色.

则集合 $A_{i,17}$ $A_{i+1,17}$ 的红色数个数相等；

(ii) i 为红、$i+51$ 为蓝.

则集合 $A_{i,17}$ 的红色数个数比集合 $A_{i+1,17}$ 的红色数个数多 1；

(iii) i 为蓝、$i+51$ 为红.

则集合 $A_{i,17}$ 的红色数个数比集合 $A_{i+1,17}$ 的红色数个数少 1.

考虑下面两个集合

$$A_{1,17}=\{1,2,\cdots,51\}$$

$$A_{50,17}=\{50,51,\cdots,100\}$$

若 $A_{1,17}$ $A_{50,17}$ 中至少有一个集合恰好有 34 个数染成红色，则结论成立.

设集合 $A_{1,17}$ $A_{50,17}$ 的红色数个数不是 34.

记 $A=A_{1,17}\cap A_{50,17}=\{50,51\}$.

下面分三种情形讨论.

（1）当集合 A 中两个数均为红色时，由抽屉原则，知集合

$$A_{1,17}\backslash A=\{1,2,\cdots,49\}\text{ 与}A_{50,17}\backslash A=\{52,53,\cdots,100\}$$

中必有一个的红色数个数不少于 33.

由对称性，不妨设集合 $A_{1,17}\backslash A$ 中的红色数个数不少于 33，则集合 $A_{1,17}$ 中的红色数个数不少于 35，集合 $A_{50,17}$ 中的红色数个数不多于 33.

由前面证明，知集合 $A_{1.17},A_{2,17},\cdots,A_{50,17}$ 中至少有一个其红色数的个数恰为 33.

(2) 当集合 A 中两个数为 1 红 1 蓝时，则集合 $A_{1,17}\backslash A$ 与 $A_{50,17}\backslash A$ 中红色数的个数一个多于 33，一个少于 33. 同上可证.

(3) 当集合 A 中两个数都为蓝色时，则集合 $A_{1,17}\backslash A$ 与 $A_{50,17}\backslash A$ 中红色数的个数一个不少于 35，一个不多于 33. 同上可证.

综上，$k_{\max}=17$.

例 1.2.9. 设 $m,n\in\mathbb{Z}_+$, 已知有 n 堆金币, 第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 堆中含有 $a_i\,(a_i>0)$ 枚. 鲍勃和爱丽丝按照如下步骤进行游戏:

第一步：鲍勃选择集合 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的非空子集 $B_1,B_2,\cdots,B_n$;

第二步：在得知鲍勃第一步选择的集合 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 后, 爱丽丝选择集合 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的一个非空子集 S;

第三步：若 $B_i\cap S$ 的元素个数为偶数, 则第 i 堆的金币就归鲍勃所有, 否则, 归爱丽丝所有.

证明: 无论鲍勃如何选择集合 $B_1,B_2,\cdots,B_n$, 爱丽丝总能选择一个集合使得她得到的金币总数比鲍勃多.

证明. 游戏结束时, 爱丽丝获得的金币数多于鲍勃获得的金币数当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap S|}a_i<0$$

否则, 对任意的非空集合 S 有

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap S|}a_i>0$$

显然, 当 $S=\varnothing$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap s|}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i>0$$

故

$$\sum_{S\subseteq\{1,2,\cdots,m\}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap s|}a_i>0 \tag{1.1}$$

当 B 是 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的非空子集时, 考虑 $\sum_{S\subseteq\{1,2,\cdots,m\}}(-1)^{|B\cap S|}$. 记 $S=C\cup D$, 其中, $C=S\backslash B,D=S\cap B,C\cap D=\varnothing$. 则

$$\begin{aligned}&\sum_{S\subseteq\{1,2,\ldots,m\}}(-1)^{|B\cap S|}\\=&\sum_{C\subseteq\{1,2,\ldots,m\}\backslash B}\ \sum_{D\subseteq B}(-1)^{|B\cap(CUD)|}\\=&\sum_{C\subseteq\{1,2,\cdots,m\backslash B}\ \sum_{D\subseteq B}(-1)^{|D|}.\end{aligned}$$

因为 $|B|>0$, 所以,

$$\sum_{D\subseteq B}(-1)^{|D|}=\sum_{r=0}^{|B|}(-1)^r\mathrm{C}_{|B|}^r=0$$

则对每个非空子集 $B\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$ 有

$$\sum_{S\subseteq\{1,2,\ldots,m\}}(-1)^{|B\cap S|}=0$$

故

$$\sum_{S\subseteq\{1,2,\ldots,m\}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap S|}a_i=\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\sum_{S\subseteq\{1,2,\ldots,m\}}(-1)^{|B_i\cap S|}\right]=0$$

与 式 1.1矛盾. ■

例 1.2.10. 设 A 是集合 $S=\{1,2,\cdots,1000000\}$ 的一个恰有 101 个元素的子集. 证明: 在 S 中存在数 $t_1,t_2,\cdots,t_{100}$, 使得集合

$$A_j=\left\{x+t_j\mid x\in A\right\},j=1,2,\cdots,100$$

中, 每两个的交集为空集.

分析. 先弄清楚在什么情况下 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$. 设 $a\in A_i\cap A_j$, 则 $a=x+t_i=y+t_j,x,y\in A$. 于是 $t_i-t_j=y-x$. 这说明选取 $t_1,t_2,\cdots,t_{100}$ 时, 只要保证其中任意两个之差不等于 A 中任二元素之差即可.

证明. 考虑集合 $D=\{x-y\mid x,y\in A\}$, 则

$$|D|\leqslant 101\times 100+1=10101$$

若 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$, 设 $a\in A_i\cap A_i$, 则 $a=x+t_i,a=y+t_j$, 其中 $x,y\in A$, 则 $t_i-t_j=y-x\in D$.

若 $t_i-t_j\in D$, 即存在 $x,y\in A$, 使得 $t_i-t_j=y-x$, 从而 $x+t_i=y+t_j$, 即 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$.

所以, $A_i\cap A_j\neq\varnothing$ 的充要条件是 $t_i-t_j\in D$. 于是, 我们只需在集 S 中取出 100 个元素, 使得其中任意两个的差都不属于 D.

下面用递推方法来取出这 100 个元素.

先在 S 中任取一个元素 t_1, 再从 S 中取一个 t_2, 使得 $t_1\notin t_2+D=\{t_2+x\mid x\in D\}$, 这是因为取定 t_1 后, 至多有 10101 个 S 中的元素不能作为 t_2, 从而在 S 中存在这样的 t_2, 若已有 $k(\leqslant 99)$ 个 S 中的元素 $t_1,t_2,\cdots,t_k$ 满足要求, 再取 t_{k+1}, 使得 $t_1,t_2,\cdots,t_k$ 都不属于 $t_{k+1}+D=\left\{t_{k+1}+x\mid x\in D\right\}$. 这是因为 $t_1,t_2,\cdots,t_k$ 取定后, 至多有 $10101k\leqslant 999999$ 个 S 中的数不能作为 t_{k+1}, 故在 S 中存在满足条件的 t_{k+1}. 所以, 在 S 中存在 $t_1,t_2,\cdots,t_{100}$, 其中任意两个的差都不属于 D.

综上所述, 命题得证. ■

注记. 条件 $|S|=10^6$ 可以改小一些. 一般地, 我们有如下更强的结论:

若 A 是 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个 k 元子集, m 为正整数, 且 m 满足条件 $n>(m-1)\left(\mathrm{C}_k^2+1\right)$, 则存在 S 中的元素 $t_1,t_2,\cdots,t_m$, 使得 $A_j=\left\{x+t_j\mid x\in A\right\},j=1,2,\cdots,m$ 中任意两个的交集为空集.

有兴趣者可自己证明.

1.3 有限集的阶

我们知道集合可以分为有限集和无限集两类. 研究无限集元素的“数目”是一个困难而有趣的问题, 最出名的就是所谓“连续统假设”, 但它不是我们的话题. 我们要讨论的问题仅与有限集有关.

1.3.1　有限集的阶

有限集 A 的元素的数目叫做这个集合的阶, 记作 $|A|$ (或 $n(A)$).

例 1.3.1. 设集合 $A=\{a \mid 1\leqslant a\leqslant 2000, a=4k+1, k\in\mathbb{Z}\}$, 集合 $B=\{b \mid 1\leqslant b\leqslant 3000, b=3k-1, k\in\mathbb{Z}\}$. 求 $|A\cap B|$.

分析. 令 $4k+1=3m-1$, 得 $m=\frac{4k+2}{3}=k+1+\frac{k-1}{3}$. 因 $m\in\mathbb{Z}$, 所以 $3\mid k-1$. 令 $k-1=3r, r\in\mathbb{Z}$, 得 $m=4r+2$. 这时 $b=12r+5$, 故 $A\cap B$ 的元素是形如 $12r+5$ 的整数.

解. 形如 $4k+1$ 的数可分为 3 类:

$$12l+1, 12l+5, 12l+9(l\in\mathbb{Z})$$

其中只有形如 $12l+5$ 的数是形如 $3k-1$ 的数. 令

$$1\leqslant 12l+5\leqslant 2000(l\in\mathbb{Z})$$

得 $0\leqslant l\leqslant 166$. 所以, $A\cap B=\{5,17,\cdots,1997\}$.

所以, $|A\cap B|=167$.

注记. 上例, 我们是采用列举出集合的全部元素的办法来求其元素的数目. 对于一些较为复杂的集合, 这种方法是很难奏效的, 这时必须另辟蹊径.

例 1.3.2. 给定正整数 $n(n\geqslant 2)$. 称集合 $S(|S|=n)$ 的三个互不相同的子集 $S_i\ S_j\ S_k$ 为一个“三角形”. 定义

$$\left|\left(S_i\cap S_j\right)\cup\left(S_j\cap S_k\right)\cup\left(S_k\cap S_i\right)\right|$$

为这个三角形的“周长”. 试求周长为 n 的三角形的个数.

分析. 命题等价于集合 S 有多少组三个互不相同的子集 $S_i\ S_i\ S_k$, 使

$$\left(S_i\cap S_j\right)\cup\left(S_j\cap S_k\right)\cup\left(S_k\cap S_i\right)=S$$

解. 令 $T_1=\left(S_i\cap S_j\right)\backslash S_k, T_2=\left(S_i\cap S_j\right)\backslash S_i, T_3=\left(S_k\cap S_i\right)\backslash S_j$, $T_4=S_i\cap S_j\cap S_k$.

本题等价于求有多少种方式将数 $1,2,\cdots,n$ 放入集合 $T_1\ T_2\ T_3\ T_4$ 中, 使得 $S_i\ S_i\ S_k$ 互不相同.

首先, 将 $1,2,\cdots,n$ 放入集合 $T_1\ T_2\ T_3\ T_4$ 中, 共有 4^n 种方法.

其次, 若 $S_i=S_j$, 则 $S_i=S_i\cap S_j=S_j$. 从而, 将 $1,\ 2,\cdots,n$ 放入集合 $T_1\ T_4$ 中, 共有 $2''$ 种方法, 这不满足条件.

类似地, $S_j=S_k, S_k=S_i$ 都有 $2''$ 种方式不满足条件.

但是 $S_i=S_j=S_k$ 被多减了两次.

最后, 再考虑 $S_i\ S_j\ S_k$ 的次序.

故所求的周长为 n 的三角形的个数为 $\frac{1}{6}\left(4^n-3\times 2^n+2\right)$.

例 1.3.3. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, $f_k = \left|\{a_i \mid a_i < a_k, i > k\}\right|, g_k = \left|\{a_i \mid a_i > a_k, i < k$
其中 $k = 1, 2, \cdots, n$. 证明:

$$\sum_{k=1}^{n} g_k = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

分析. 一般来说 $f_k \neq g_k$, 且分别计算 f_k g_k 是困难的. 令 $A_k = \{a_i \mid a_i < a_k, i > k\}$, 对 A_k 换一种写法: $A_k = \{(a_i, a_k) \mid a_i < a_k, i > k\}$, 显然是合理的. 易知 $k \neq k'$ 时, $A_k \cap A_{k'} = \varnothing$. 所以,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f_k &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= \left|\left\{(a_i, a_j) \mid a_i < a_j, i > j\right\}\right|\end{aligned}$$

证明. 考虑集合 $A = \left\{(a_i, a_j) \mid a_i < a_j, i > j\right\}$ 的元素的数目 $|A|$.

一方面, 固定 a_j 时, a_i 的个数为 f_j. 所以 $|A| = \sum_{j=1}^{n} f_j$.

另一方面, 固定 a_i 时, a_j 的个数为 g_i, 所以 $|A| = \sum_{i=1}^{n} g_i$.

所以, $\sum_{k=1}^{n} g_k = \sum_{k=1}^{n} f_k$. ■

注记. 在这里, 我们没有直接证明 $\sum_{k=1}^{n} g_k = \sum_{k=1}^{n} f_k$, 而是引入一个中间量 $|A| = \left|\left\{(a_i, a_j) \mid a_i < a_j, i >\right.\right.$
来过渡.

例 1.3.4. 在集合 $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ 中选取其中 n 个数, 记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n\,(a_1 < a_2 < \cdots < a_n)$, 剩下 n 个数记为 $b_1, b_2, \cdots, b_n\,(b_1 > b_2 > \cdots > b_n)$. 证明:

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2$$

分析. 观察如下刻意排序的两组数:

$$\begin{gathered} a_1 < a_2 < \cdots < a_j < \cdots < a_n \\ b_1 > b_2 > \cdots > b_j > \cdots > b_n \end{gathered}$$

不难发现 a_j b_j 不能同时属于或不属于集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$. 否则, 不妨设 $a_j, b_j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 这时便有 $n+1$ 个不同的数属于集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$, 这是不可能的.

证明. 记 $L = \{1, 2, \cdots, n\}, H = \{n+1, n+2, \cdots, 2n\}$. 则 a_i $b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 不能同在集合 L 中, 也不能同在集合 H 中.

否则, 设 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}, a_j \in L, b_j \in L$. 因为 a_i 是按照从小到大的顺序排列, b_i 是按照从大到小的顺序排列, 所以, 当 $i \leqslant j$ 时, $a_i \in L$; 当 $i \geqslant j$ 时, $b_i \in L$. 又所有的数均不相同, 则集合 L 包含 j 个 a_i 和 $n-j+1$ 个 b_i. 于是, 集合 L 中的总元素有 $j + (n-j+1) = n+1$ (个). 矛盾.

同理, 假设 a_i b_i 同在集合 H 中时, 也导出矛盾.

因此, 对于每一个 $i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 均有

$$|a_i - b_i| = (h_i - l_i)\,(h_i \in H, l_i \in L)\,.$$

故

$$\begin{aligned}
&|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|\\
=&(h_1-l_1)+(h_2-l_2)+\cdots+(h_n-l_n)\\
=&(h_1+h_2+\cdots+h_n)-(l_1+l_2+\cdots+l_n)\\
=&(n+1+n+2+\cdots+2n)-(1+2+\cdots+n)\\
=&n^2.
\end{aligned}$$

■

注记. 上例看似与集合没有太多联系, 但蕴涵在题设条件中的关键事实: a_j b_j 不能同时属于或不属于集合 $\{1,2,\cdots,n\}$, 它是由集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的阶决定的.

例 1.3.5. 某国家有 N 座城市, 它们中的某些城市有双向的航班连接. 每个航班恰连接两座城市, 没有城市直接连接每个其他城市, 且对于任意两座城市 A B, 恰有一种至多存在两个航班从城市 A 到城市 B 的方式飞行. 证明: $N-1$ 为完全平方数.

证明. 设 a 为任意一座城市, 与它连接的城市为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$.

令 $B_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为异于城市 a 且连接 x_i 的所有城市的集合.

因为从城市 x_i 至城市 x_j 恰有一种方式飞行至多存在两个航班, 所以, 集合 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 两两无交集.

考虑两个角标 i j 和任意的城市 $y\in B_i$, 由于从城市 y 至 x_j 只有一种飞行方式至多存在两个航班且无直飞航班, 则存在唯一的城市 $z\in B_j$, 使得城市 y 与 z 有航班连接.

故每个集合 B_i 中的每个元素恰有 k 种上述连接方式, 且所有集合 B_i 的元素的个数相同.

令 m 为集合 B_i 中元素的个数, 则 $N=1+k+km$.

此外, 考虑某座城市 $b\in B_1$, 它与 x_1 相连, 恰有一座城市 $c_i\in B_i(i=2,3,\cdots,k)$ 与之相连.

注意到, 对于 $i=2,3,\cdots,k$, 城市 x_i 与城市 c_i 相连.

用同样的方法 (用 a 替换 b), 知城市 $x_i(i=2,3,\cdots,k)$ 有 k 种连接方式, 但已知城市 x_i 有 $m+1$ 种连接方式, 因此,

$$k=m+1,N-1=k+km=k^2.$$

■

注记. 本例我们是通过引入集合语言, 讨论有限集的阶来达到证明的目的的.

1.3.2　有关集合阶的不等式

有些集合虽然不能准确求出其元素的数目, 但是我们可以利用不等式来估计其阶的范围.

例 1.3.6. 设 $p\geqslant 5$ 是一个素数, $S=\{1,2,\cdots,p-1\},A=\left\{a\mid a\in S,\ a^{p-1}\not\equiv 1\left(\bmod p^2\right)\right\}$. 证明: $|A|\geqslant\frac{p-1}{2}$.

分析. 如果 $1 \leqslant a \leqslant p-1$, 显然 $1 \leqslant p-a \leqslant p-1$. 将 a 与 $p-a$ 配对, 如果 a^{p-1} 与 $(p-a)^{p-1}$ 模 p^2 不同余, 则结论成立.

证明. 设 $a \in S$, 则 $p-a \in S$. 由二项式定理, 有

$$(p-a)^{p-1} - a^{p-1} \equiv -(p-1)a^{p-2} \cdot p \not\equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$$

于是, a 和 $p-a$ 中至少有一个在 A 中, 从而有

$$|A| \geqslant \frac{p-1}{2}$$

■

例 1.3.7. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{30}$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, 2003\}$ 的子集，且 $|A_i| \geqslant 660, i = 1, 2, \cdots, 30$. 证明: 存在 $i \neq j, i, j \in \{1, 2, \cdots, 30\}$, 使得 $|\ A_i \cap\ A_j\ | \geqslant 203$.

证明. 不妨设每一个 A_i 的元素都为 660 个 (否则去掉一些元素). 作一个集合、元素的关系表：表中每一行 (除最上面的一行外) 分别表示 30 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_{30}$, 表的 n 列 (最左面一列除外) 分别表示 2003 个元素 1 , 2, $\cdots$, 2003. 若 $i \in A_j (i = 1, 2, \cdots, 2003, 1 \leqslant j \leqslant 30)$, 则在 i 所在的列与 A_j 所在行的交叉处写上 1 , 若 $i \notin A_j$, 则写上 0 .

	1	2	3	$\cdots$	2003
A_1	$\times$	$\times$	$\times$	$\cdots$	$\times$
A_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\cdots$	$\times$
$\cdots$	$\times$	$\times$	$\times$	$\cdots$	$\times$
A_{30}	$\times$	$\times$	$\times$	$\cdots$	$\times$

表中每一行有 660 个 1 , 因此共有 30×660 个 1 . 设第 j 列有 m_j 个 1 $(j = 1, 2, \cdots, 2003)$, 则

$$\sum_{j=1}^{2003} m_j = 30 \times 660$$

由于每个元素 j 属于 $\mathrm{C}_{m_j}^2$ 个交集 $A_s \cap A_t$, 因此

$$\sum_{j=1}^{2003} \mathrm{C}_{m_j}^2 = \sum_{1 \leqslant s < t \leqslant 30} |A_s \cap A_t|$$

由柯西不等式, 得

$$\sum_{j=1}^{2003} \mathrm{C}_{m_j}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{2003} m_j^2 - \sum_{j=1}^{2003} m_j\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003}\left(\sum_{j=1}^{2003} m_j\right)^2 - \sum_{j=1}^{2003} m_j\right)$$

所以, 必有 $i \neq j$, 满足

$$\begin{aligned} \left|A_i \cap A_j\right| &\geqslant \frac{1}{\mathrm{C}_{30}^2} \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003}\left(\sum_{j=1}^{2003} m_j\right)^2 - \sum_{j=1}^{2003} m_j\right) \\ &= \frac{660(30 \times 660 - 2003)}{29 \times 2003} > 202 \end{aligned}$$

从而

$$\left|A_i \cap A_j\right| \geqslant 203$$

■

注记. 本题中所作的表, 称为元素、集合从属关系表. 它在讨论涉及多个集合的问题时非常有用.

例 1.3.8. 设 $n, k \in \mathbb{N}^*$, 且 $k \leqslant n$. 并设 S 是含有 n 个互异实数的集合, $T = \left\{a \mid a = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, x_i\right.$
求证: $|T| \geqslant k(n-k)+1$.

分析. 设 $S_n = \{s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}, s_n\}$, 且 $s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n$. 作 S_n 的子集 $S_{n-1} = \{s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}\}$, 设 S_{n-1} S_n 分别对应 T_{n-1} T_n. 对固定的 k $(k \leqslant n-1)$, 由 $s_{n-1}+s_{n-2}+\cdots+s_{n-k} < s_n+s_{n-2}+\cdots+s_{n-k} < s_n+s_{n-1}+s_{n-3}+\cdots+s_{n-k} < \cdots < s_n+s_{n-1}+\cdots+s_{n-k+1}$, 知 $|T_n| \geqslant |T_{n-1}|+k$. 而 $k(n-k)+1 = k(n-1-k)+k+1$, 这提示我们对 n 进行归纳证明.

证明. 设 $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ 是 S 的 n 个元素. 对元素数目 n 使用数学归纳法.

首先, 当 $k=1$ 和 $k=n$ 时, 结论显然成立. 设 $k \leqslant n-1$, 且结论对 $S_0 = \{s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}\}$ 成立, 并设 T_0 是当把 S 换成 S_0 时与 T 相应的集合. 于是有

$$|T_0| \geqslant k(n-k-1)+1.$$

$$\text{令} x = s_n + s_{n-1} + \cdots + s_{n-k}, \text{并令} y_i = x - s_{n-i}, i = 0, 1, \cdots, k.$$

显然 $y_i \in T$, 且有 $y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_k$. 因为 y_0 是 T_0 中的最大元素, 所以

$$y_i \in T, y_i \notin T_0, i = 1, 2, \cdots, k$$

故有

$$|T| \geqslant |T_0| + k \geqslant k(n-k-1)+1+k = k(n-k)+1$$

这就完成了归纳证明. ■

例 1.3.9. 设集合 F 是一个非空有限的整数集, n 为正整数, 满足

(1) 对任意的 $x \in F$, 均有

$$x = y + z(y, z \in F);$$

(2) 若 $1 \leqslant k \leqslant n, x_1, x_2, \cdots, x_k \in F$, 则 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \neq 0$. 证明: 集合 F 中至少含有 $2n+2$ 个互异的元素.

证明. 由已知条件 (2) 得 $0 \notin F$.

假设集合 F 只包含正整数. 设 x 是集合 F 中最小的元素. 则由 $x = y + z(y, z > 0)$, 知 $y < x, z < x$, 矛盾. 因此, 集合 F 包含负整数. 同理, 集合 F 也不能只包含负整数.

假设已经从集合 F 中选出 k 个正整数, 记为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$. 所以, $0 < x_k = y+z(y, z \in F)$.

不妨设 $y > 0$, 则记为 y 为 x_{k+1}.

继续以这样的方式选出集合 F 中的正元素 $x_1, x_2, \cdots$ (允许相同).

由 F 是有限集, 知存在正整数 $i < j$, 使得 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}$ 互不相同, 且 $x_j = x_i$.

于是, 存在 $z_i, z_{i+1}, \cdots, z_{j-1} \in F$, 使得

$$
\begin{aligned}
&x_i = x_{i+1} + z_i, \\
&x_{i+1} = x_{i+2} + z_{i+1}, \\
&\cdots \\
&x_{j-1} = x_j + z_{j-1}.
\end{aligned}
$$

因为 $x_i = x_j$, 所以, $z_i + z_{i+1} + \cdots + z_{j-1} = 0$.

由题设得 $j - i > n$.

又因为 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}$ 互不相同, 所以, 集合 F 中包含至少 $j - i \geqslant n+1$ 个正整数.

同理, 集合 F 中包含至少 $n+1$ 个负整数.

从而, 集合 F 中至少含有 $2n+2$ 个互异的元素. ■

例 1.3.10. 设 A 是一个有限实数集, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 A 的非空子集, 满足下列条件:

(1) A 中所有元素之和为 0 ;

(2) 对任意 $x_i \in A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 都有 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 0$.

证明: 存在 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, 使得

$$\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right| < \frac{k}{n}|A|$$

这里 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

证明. 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}, a_1 > a_2 > \cdots > a_m$. 则由条件 (1) 知 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 0$. 考虑每个 A_i 中的最小数, 并设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中恰有 k_i 个集合的最小数为 $a_i, i = 1, 2, \cdots, m$. 则有

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$$

且由条件 (2) 知

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m > 0$$

对 $s = 1, 2, \cdots, m-1$, 共有 $k_1 + k_2 + \cdots + k_s$ 个集合, 其最小数 $\geqslant a_s$. 故这些集合的并集包含在 $\{a_1, a_2, \cdots, a_s\}$ 中, 元素个数不超过 s.

下证存在 $s \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$, 使得 $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_s > \frac{sn}{m}$.

用反证法, 设对于 $s = 1, 2, \cdots, m-1$, 都有

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_s \leqslant \frac{sn}{m}$$

由阿贝尔 (Abel) 变换可知 (注意 $a_s - a_{s+1} > 0, 1 \leqslant s \leqslant m-1$)

$$
\begin{aligned}
0 < \sum_{j=1}^{m} k_j a_j &= \sum_{s=1}^{m-1} \left(a_s - a_{s+1}\right)\left(k_1 + k_2 + \cdots + k_s\right) + a_m\left(k_1 + k_2 + \cdots + k_m\right) \\
&\leqslant \sum_{s=1}^{m-1} \left(a_s - a_{s+1}\right) \frac{sn}{m} + a_m n = \frac{n}{m} \sum_{j=1}^{m} a_j = 0,
\end{aligned}
$$

矛盾. 对于这一 s, 取 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中最小数 $\geqslant a_s$ 的那些集合, 记为 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$. 则由上述的结果可知, 这些子集共有 $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_s > \frac{sn}{m}$ 个, 且它们的并集的元素个数不超过 s, 即

$$\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}\right| \leqslant s < \frac{km}{n} = \frac{k}{n}|A|$$

■

1.4 子集族

我们可以将某些集合取来作为元素构成一个新的集合, 如 $A^* = \{\{1\}, \{0,1\}, \{0\}, \varnothing\}$ 就是一个含有 4 个元素 $\{1\}, \{0,1\}, \{0\}, \varnothing$ 的集合. 一般地, 将集合 M 的若干子集作为元素构成的集合 M^* 叫做原集合的一个子集族. 例如前面的 A^* 就是二元集 $A = \{0,1\}$ 的全部子集所构成的子集族. 子集族 M^* 中所含原来集合的子集的数目叫做该子集族的阶, 记作 $|M^*|$. 例如子集族 A^* 的阶为 4 , 即 $|A^*| = 4$.

根据已知条件求子集族的阶或包含子集族中所有子集的集合的阶, 是较常见的一类集合问题.

例 1.4.1. 已知集合 $A = \{1, 2, \cdots, 10\}$. 求集合 A 的具有下列性质的子集个数: 每个子集至少含有 2 个元素, 且每个子集中任何两个元素的差的绝对值大于 1 .

分析. 集合 A 有 $2^{10} - 1$ 个非空子集, 逐一考察的工作只有交给计算机. 我们先来看看比 A 的元素少一些的集合的情形. 记集合 A_i 符合条件的子集族为 $A_i^*, |A_i^*| = a_i$.

$$\begin{aligned}
&A_1 = \{1\}, A_1^* = \varnothing, a_1 = 0\\
&A_2 = \{1,2\}, A_2^* = \varnothing, a_2 = 0;\\
&A_3 = \{1,2,3\}, A_3^* = \{\{1,3\}\}, a_3 = 1\\
&A_4 = \{1,2,3,4\}, A_4^* = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}, a_4 = 3;\\
&A_5 = \{1,2,3,4,5\}, A_5^* = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,3,5\}\\
&\{1,5\}, \{2,5\}, \{3,5\}\}, a_5 = 7.
\end{aligned}$$

我们来考察写出 A_5^* 的过程, 这可以分作两步: 第一步写出 A_4^* 的全部元素, 它们都不含元素 5 ; 第二步写出含 5 的子集, 它们是在 A_3^* 的元素中添 5 所成, 或者是含 5 的二元子集, 即 $a_5 = a_4 + a_3 + 3$. 其实对 A_4^* A_3^* 有类似的
结论: $a_4 = a_3 + a_2 + 2, a_3 = a_2 + a_1 + 1$. 我们可以将这个作法推广到一般.

解. 设 a_n 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的具有题设性质的子集个数.

对于集合 $\{1, 2, \cdots, n, n+1, n+2\}$, 具有题设性质的子集可分为两类: 第一类子集不包含 $n+2$, 它们是集合 $\{1, 2, \cdots, n, n+1\}$ 的全部具有题设性质的子集, 共有 a_{n+1} 个; 第二类子集包含 $n+2$, 它们是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的每个具有题设性质的子集与 $\{n+2\}$ 的并集, 以及二元子集 $\{1, n+2\}, \{2, n+2\}, \cdots, \{n, n+2\}$, 共有 $a_n + n$ 个.

于是, 我们有 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n$.

易知, $a_1 = a_2 = 0$, 因此 $a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 7, a_6 = 14, a_7 = 26$, $a_8 = 46, a_9 = 79, a_{10} = 133$.

所以, 所求子集的个数为 133.

注记. 说明上述解法的特点是将问题一般化, 一般问题解决了, 特殊问题当然就解决了. 这里用到了递推方法, 递推也是解决组合问题的常用方法之一.

与上例相反, 我们来看一个已知子集族求恰好包含这些子集的集合的阶的问题.

例 1.4.2. 对于整数 $n(n \geqslant 2)$, 如果存在集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 A_1, $A_2, \cdots, A_n$ 满足:

(a) $i \notin A_i, i = 1, 2, \cdots, n$;

(b) 若 $i \neq j, i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 则 $i \in A_j$, 当且仅当 $j \notin A_i$;

(c) 任意 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}, A_i \cap A_j \neq \varnothing$.

则称 n 是“好数”.

证明: (1) 7 是好数;

（2）当且仅当 $n \geqslant 7$ 时, n 是好数.

分析. 对于 $n = 7$, 可以作出满足条件的子集族来验证; 当 $n \geqslant 7$ 时, 可考虑用数学归纳法证明.

证明.（1）当 $n = 7$ 时, 取

$$A_1 = \{2, 3, 4\}, A_2 = \{3, 5, 6\}, A_3 = \{4, 5, 7\}$$
$$A_4 = \{2, 6, 7\}, A_5 = \{1, 4, 6\}, A_6 = \{1, 3, 7\}, A_7 = \{1, 2, 5\}$$

即可.

(2) 先证当 $n \geqslant 7$ 时, n 是好数. 对 n 进行归纳.

由 (1) 知, 当 $n = 7$ 时, 结论成立.

假设 $n(n \geqslant 7)$ 是好数, 则存在子集族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足条件. 对于 $n + 1$, 取子集族 $B_1 = A_1, B_2 = A_2, \cdots, B_n = A_n, B_{n+1} = \{1, 2, \cdots, n\}$. 由归纳假设易知, 它们也是满足条件的.

下面证明每一个好数 n 都至少为 7.

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个 n 为好数的集合的子集族, 那么, 每一个 A_i 至少有三个元素. 事实上, 若 $A_i \subset \{j, k\}$, 则

$$A_i \cap A_j = \{k\}, A_i \cap A_k = \{j\}$$

所以, $k \in A_j, j \in A_k$. 矛盾.

考虑一个由元素 0 1 构成的 $n \times n$ 阶正方形表格, 当且仅当 $j \in A_i$ 其第 i 行第 j 列的元素为 1 . 表中对角线上的元素为 0 , 对于余下的元素, 因为 $i \neq j$, 当且仅当 $a_{ji} = 1$ 时 $a_{ij} = 0$, 所以 0 的个数等于 1 的个数. 因此, 表中元素的和为 $\frac{n^2-n}{2}$. 又每行元素的和大于等于 3 , 所以 $n^2 - n \geqslant 6n$, 故 $n \geqslant 7$. ■

例 1.4.3. 选择 n 元集 H 的一些 $k(3 \leqslant k \leqslant n)$ 元子集, H 中任两元素都恰在三个选定的子集中同时出现, H 中任三元素都恰在两个选定子集中出现. 求这样的 n 和 k.

分析. 由“H 中任两元素都恰在三个选定的子集中同时出现”, 我们着眼于计算集合 H 和选定的 K 元子集的二元子集的个数, 便有 $3\mathrm{C}_n^2 = m\mathrm{C}_k^2$. 根据另一条件可得另一类似的关系式. 然后可通过对这两个关系式的讨论来确定 n 和 k.

解. 设选定了 H 的 m 个 k 元子集, 每个 k 元集中由两元素组成的元素对个数是 C_k^2. 所有选定子集的这样的元素对个数是 $m\mathrm{C}_k^2$.

另一方面, H 中任两元素都恰在三个选定子集中出现, 故 $3\mathrm{C}_n^2 = m\mathrm{C}_k^2$, 即

$$3n(n-1) = mk(k-1) \tag{1}$$

同理, 由题中另一条件得 $2\mathrm{C}_n^3 = m\mathrm{C}_k^3$, 即

$$2n(n-1)(n-2) = mk(k-1)(k-2) \tag{2}$$

$(2) \div (1)$ 得

$$\frac{2(n-2)}{3} = k-2, \text{ 即} k = \frac{2n+2}{3}.$$

代入式 (1) 得

$$3n(n-1) = \frac{2}{9}(n+1)(2n-1)m$$

即

$$m = \frac{27n(n-1)}{2(n+1)(2n-1)}$$

由 $(2n-1, n) = (2n-1, n-1) = 1$, 得 $(2n-1) \mid 27$. 所以

$$2n-1 = 1, 3, 9, 27, n = 1, 2, 5, 14.$$

又 $n \geqslant 3$, 故 $n = 5$ 或 14.

当 $n = 14$ 时, m 不是整数;

当 $n = 5$ 时, $m = 5, k = 4$. 取 $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 其 5 个四元子集

$\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}$

满足题意.

综上, $n = 5, k = 4$.

下面我们来考察集合的一个重要的特殊子集族及其应用.

由有限集 M 的全体子集所构成的子集族, 简称为 C 族. C 族有如下基本的性质:

性质. 设 $|M| = n$, 则集合 M 的全部子集构成的集合 M^* 的阶为 2^n, 即

$$|M^*| = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$$

例 1.4.4. 试证: 任一有限集的全部子集可以排定次序, 使得任何相邻的两个子集都相差一个元素.

分析. 不妨设有限集 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$. 先来看一些简单情形:

当 $n=1$ 时, 显然可以排成: $\varnothing,\{1\}$;

当 $n=2$ 时, 共有 $2^2=4$ (个) 子集, 可排成: $\varnothing,\{1\},\{1,2\},\{2\}$;

当 $n=3$ 时, 共有 $2^3=8$ (个) 子集, 可排成: $\varnothing,\{1\},\{1,2\},\{2\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{1,3\},\{3\}$.

显然符合条件的排序方式不是唯一的. 请注意 $n=3$ 时的上述排法: 所有子集可分为两组, 前 *4* 个子集都不含元素 *3*; 后 *4* 个均含元素 *3*, 且去掉 *3* 后恰是前 *4* 个子集排列的逆序. 事实上, $n=2$ 时也如此. 这说明我们可以考虑用数学归纳法来证明.

证明. 设有限集为 $M_n=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$, 我们对 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时, $M_1=\{w_1\}$, 将它的两个子集排列成 $\varnothing,\{w_1\}$ 即可.

假设当 $n=k$ 时, 命题成立. 当 $n=k+1$ 时,

$$M_{k+1}=\{w_1,w_2,\cdots,w_k,w_{k+1}\}$$

它是由集合 $M_k=\{w_1,w_2,\cdots,w_k\}$ 添加元素 w_{k+1} 而形成的. M_k 的子集个数为 2^k. 由归纳假设知, 可将 M_k 的全体子集排成满足题设要求的一列, 不妨设

$$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{2^k}\left(A_i\subseteq M_k,i=1,2,3,\cdots,2^k\right)$$

就是这样的一个排列. 我们来看排列

$$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{2^k},A_{2^k}\bigcup\{w_{k+1}\},A_{2^k-1}\bigcup\{w_{k+1}\},\cdots,A_1\bigcup\{w_{k+1}\}$$

它恰好由 M_{k+1} 的 2^{k+1} 个不同子集排成, 且任意两个相邻集合的元素都仅相差 1 个. 可见当 $n=k+1$ 时, 命题也成立.

所以, 对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$, 所述命题成立. ■

注记. 例 *1.4.4* 实际上是 C 族的一个性质. 一个复杂的问题, 也许一时找不到解题的突破口, 这时可考虑"以退求进"的策略. 先解决一些简单的或特殊的情形, 从中发现规律和方法, 从而找到解决一般问题的办法. 这也就是从特殊到一般的思维方法.

例 1.4.5. 在某次竞选中各政党作出 n 种不同的诺言 $(n>0)$, 有些政党可以作某些相同的诺言. 现知其中每两个政党都至少作了一个相同的诺言, 但没有两个政党的诺言完全相同. 求证: 政党个数 $\leqslant 2^{n-1}$.

证明. 设有 m 个政党. 以 A 记所有诺言的集合, A_i 记第 i 个政党的诺言的集合 $(i=1,2,\cdots,m)$. 由题设知

$$|A|=n,A_i\cap A_j\neq\varnothing,A_i\neq A_j,1\leqslant i<j\leqslant m$$

因 $\left(\complement_A A_i\right)\cap A_i=\varnothing$, 故 $\complement_A A_i\neq A_j(i,j=1,2,\cdots,m)$, 即 $\complement_A A_i$ 不同于任何一个政党的诺言的集合. 所以

$$A_1,A_2,\cdots,A_m,\complement_A A_1,\complement_A A_2,\cdots,\complement_A A_m$$

各不相同, 而它们的个数不超过集合 A 的所有子集的数目 2^n, 即 $2m\leqslant 2^n$,

所以

$$m\leqslant 2^{n-1}$$

■

注记. 上述解法的特点是将一个趣味问题转化为集合问题, 然后借助集合的知识和方法来解决.

例 1.4.6. 任取 $n(n \geqslant 3)$ 元集的 $n+1$ 个奇数元子集. 证明: 其中必有两个集合的交集也为奇数元集.

证明. 设 n 元集为 A. 取出的 $n+1$ 个奇数元集中若有两个集相同, 其交集即为奇数元集合. 故可设 $n+1$ 个子集互不相同, 设 $M=\{B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}\}$.

对 M 的每个非空子集 P 及任意 x, 设 $n(x,p)$ 为集合 P 中含 x 的集合的
个数, 记

$$O(P)=\{x \in A \mid n(x,p) \text{ 为奇数}\}.$$

注意到, 集合 P 有 $2^{n+1}-1$ 种选法, 而 $O(P)$ 只有 2^n 种选法, 但 $2^{n+1}-1>2^n$. 由抽屉原理, 知必有 $P_1 \neq P_2$, 使得 $O(P_1)=O(P_2)$.

考虑 $Q=P_1 \Delta P_2$ (即 $(P_1 \cup P_2) \setminus (P_1 \cap P_2)\big)$.

对每个 $x \in A$, 设 $P_1 \backslash P_2$ $P_1 \cap P_2$ $P_2 \backslash P_1$ 中分别有 k_1 k_2 k_3 个集合含 x. 则

$$k_1+k_2 \equiv k_2+k_3 (\bmod 2)$$

所以 $k_1+k_3 \equiv 0(\bmod 2)$, 即集合 Q 中有偶数个集合含 x, 故 $O(Q)=\varnothing$.

设 $Q=\big\{C_1, C_2, \cdots, C_q\big\}$. 由于每个 $x \in A$ 在集合 Q 中偶数个子集中, 故每个 $x \in C_1$ 在 $\big\{C_2, C_3, \cdots, C_q\big\}$ 的奇数个集合中.

于是, $\sum_{i=2}^{q}|C_1 \cap C_i|$ 中每个 $x \in C_1$ 计数奇数次.

而 $|C_1|$ 为奇数, 故 $\sum_{i=2}^{q}|C_1 \cap C_i|$ 为奇数, 因此, 其中必有一项 $|C_1 \cap C_i|$ 为奇数. ■

例 1.4.7. 现有 $n\,(n \in \mathbb{Z}_+, n \geqslant 2)$ 盏灯, 每血灯只有开和关两种状态. 对这些灯的每一个非空子集 A, 有一个按钮可操作集合 A 中的灯, 在操作该按钮时, 每个集合 A 中的灯会改变它们各自的状态 (开的变为关的, 关的变为开的). 每个按钮均是相同的, 哪个按钮对应哪些灯组成的子集是未知的. 假设最开始所有灯是关闭的. 证明: 可以在至多 $2^{n-1}+1$ 次操作内让所有的灯全部打开.

证明. 令 L 为所有的灯的集合, L 的非空子集有 2^n-1 个.

令 $k=2^{n-1}-1$. 设 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 为任意 k 个不同的按钮, $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 依次为这 k 个按钮控制的灯的集合, B 为依次操作按钮 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 各一次后亮着的灯的集合.

对 $D \subseteq L$, 令 $\bar{D}$ 表示不在集合 D 中的灯的集合; 对于 $D \subseteq L, E \subseteq L$, 令

$$D+E=(D \cup E) \backslash (D \cap E),$$

即仅在集合 D 或 E 中出现的灯的集合. 则

$$B=A_1+A_2+\cdots+A_k$$

注意到,

$$D+D=\varnothing, \bar{D}=D+L, D+\bar{D}=L$$

考虑集合 $X=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$,

$$Y=\left\{\overline{B+A_1},\overline{B+A_2},\cdots,\overline{B+A_k}\right\}$$

若 $X\cap Y\neq\varnothing$, 则存在 $i,j\in\{1,2,\cdots,k\}$, 使得 $A_i=\overline{B+A_j}$. 此时, $B+A_j+A_i=L$. 因此, 在依次操作按钮 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 各一次 (共 k 次) 后, 再操作 $S_j\ S_i$ 各一次, 则所有的灯均会亮着. 操作的总次数为 $k+2=2^{n-1}+1$.

现在假设 $X\cap Y=\varnothing$.

若存在 $j\in\{1,2,\cdots,k\}$, 使得 $\overline{B+A_j}=\varnothing$, 则 $B+A_j=L$. 因此, 在依次操作 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 各一次后, 再操作 S_j 一次, 所有的灯均会亮着. 操作的总次数为 $k+1=2^{n-1}$ (次).

若对每个 $j\in\{1,2,\cdots,k\},\overline{B+A_j}\neq\varnothing$. 此时, $X\cup Y$ 是由 L 的

$$2k=2\left(2^{n-1}-1\right)=2^n-2$$

个不同的非空子集组成的子集族. 设 S_{k+1} 是不同于 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 的一个按钮. 令 A_{k+1} 为它控制的灯的集合. 显然, $A_{k+1}\notin X$.

若 $A_{k+1}\in Y$, 则存在 $j\in\{1,2,\cdots,k\}$, 使得 $A_{k+1}=\overline{B+A_j}$. 于是, $B+A_j+A_{k+1}=L$.

因此, 在依次操作 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 各一次后, 再操作 $S_j\ S_{k+1}$ 各一次, 所有的灯会亮着. 操作的总次数为 $k+2=2^{n-1}+1$.

若 $A_{k+1}\notin Y$, 则 $\{A_{k+1}\}\cup X\cup Y$ 是 L 的全部非空子集组成的子集族. 故

$$A_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}A_i+\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{B+A_j}\right)=\sum_{\substack{M=L\\M\neq\varnothing}}M \tag{1}$$

因为 L 中每个灯属于 L 的 2^{n-1} 个非空子集, 而 2^{n-1} 为偶数, 所以,

$$\sum_{\substack{M\subset L\\M\neq\varnothing}}M=\varnothing$$

而 $\overline{B+A_j}=B+A_j+L$, 故式 (1) 的左边为

$$kB+kL+A_{k+1}=B+L+A_{k+1}$$

即

$$B+L+A_{k+1}=\varnothing$$

所以

$$B+A_{k+1}=L$$

这表明, 在操作 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 各一次后, 再操作 S_{k+1} 一次, 所有的灯会亮着. 操作的总次数为 $k+1=2^{nn-1}$.

综上, 最多只需 $k+2=2^{nn-1}+1$ (次) 操作, 所有的灯会亮着. ■

注记. 说明这里的集合运算 “$+$” 就是集合的对称差 “$\triangle$ ”, 不要与普通数和式的加法运算混淆.

例 1.4.8. 若集合族平满足: 对于任意的三个集合 $X_1, X_2, X_3 \in \mathscr{F}$,

$$\left(X_1 \backslash X_2\right) \cap X_3, \left(X_2 \backslash X_1\right) \cap X_3$$

中至少有一个为空集, 则称此集合族为“完美”的. 证明: 若 $\mathscr{F}$ 是由一个给定的有限集 U 的一些子集构成的完美的集合族, 则 $|\mathscr{F}| \leqslant |U|+1$.

证明. 对 $|U|$ 应用数学归纳法证明.

当 $|U|=0$, 即 $U=\varnothing$ 时, U 只有一个子集, 则 $\left|\mathscr{F}_{|}\right| \leqslant 1$.

当 $|U|>0$ 时, 设 Z 是集合族 $\mathscr{F}$ 中元素个数最少的非空集合 (若 Z 不存在, 则 | 列 |$\leqslant 1$, 这种情形已经证明).

首先, 若 Y_1 Y_2 是集合族异中的两个非空集合, 且 $Y_1 \backslash Z = Y_2 \backslash Z$ (可能会有 $Y_1 = Z$ 或 $Y_2 = Z$), 则 $Y_1 = Y_2$. 否则, 存在非空集合 $Y_1, Y_2 \in \mathscr{F}$, 且 $Y_1 \neq Y_2$. 不妨设存在一个元素 $x_1 \in Y_1 \backslash Y_2$.

由于 $Y_1 \backslash Y_2 \subseteq Z$, 则 $x_1 \in Z \backslash Y_2$ (如 图 1.2).

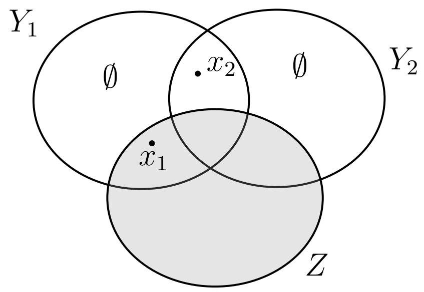

图 1.2

因为 Z 为元素最少的非空集合, 且 Y_2 不为空集, 所以, $|Z| \leqslant |Y_2|$.

又 $Z \not\subset Y_2$ (因 $x_1 \in Z \backslash Y_2$), 可推断 $Y_2 \backslash Z$ 不为空集.

因此, 存在元素 $x_2 \in Y_2 \backslash Z = Y_1 \backslash Z$.

故 $x_1 \in Z \backslash Y_2, x_2 \in Y_2 \backslash Z, \{x_1, x_2\} \subseteq Y_1$.

当 $X_1 = Z, X_2 = Y_2, X_3 = Y_1$ 时, 这与集合族 $\mathscr{F}$ 是完美的矛盾.

定义 $\mathscr{F}'$ 是 $U \backslash Z$ 的子集构成的集合族 $\mathscr{F}' = \{Y \backslash Z \mid Y \in \mathscr{F}, Y \neq \varnothing\}$. 显然, 集合族 $\mathscr{F}'$ 是一个由更小的子集构成的完美的集合族.

故由归纳假设, 有 $|\mathscr{F}'| \leqslant |U \backslash Z| + 1$.

此外, 由前知集合 $Y \backslash Z$ 是与 $Y \in \mathscr{F}$ 且 $Y \neq \varnothing$ 不同的.

因此, $|\mathscr{F}| \leqslant |\mathscr{F}'| + 1$ ($+1$ 是因为集合族 $\mathscr{F}$ 中有可能含有空集).

故 $|\mathscr{F}| \leqslant |\mathscr{F}'| + 1 \leqslant |U \backslash Z| + 1 + 1 \leqslant |U| - 1 + 1 + 1 = |U| + 1$. ■

例 1.4.9. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为有限集合 X 的 n 个非空子集, 且对任意正整数 i $j(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n), A_i \cap A_j$ 不为单元集. 证明: 可将集合 X 的元素分成两类, 使每个子集 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的元素不全在同一类中.

证明. 因为每个子集 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 非空, 且由条件知 $A_i = A_i \cap A_i$ 不为单元集, 所以, 集合 A_i 至少含两个元素.

在集合 X 的某种分类下, 若 A_i 的元素只出现在一类中, 则称 A_i 为"单类集"; 若 A_i 的元素出现在两类中, 则称 A_i 为"双类集".

记 t 为 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中双类集的数目, 若 t 能取到 n, 则命题得证.

因为 A_1 至少含两个元素, 所以, 先将集合 X 的元素分成两类, 且使 A_1 为双类集. 此时, $t \geqslant 1$.

下面证明: 对使 $t<n$ 的任意一种分类, 经适当调整必可使 t 的值增加.

设集合 X 中 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 在第一类 , $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_m$ 在第二类. 不妨设此时 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 为双类集, $A_{t+1},A_{t+2},\cdots,A_n$ 为单类集, 且 $A_{t+1}=\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$, 其中, A_{t+1} 至少含两个元素. 故 $2 \leqslant s \leqslant r$, 这表明, 第一类元素不少于两个.

现将集合 X 中的元素 x_1 调到第二类, 其余元素类别不变. 此时, 集合 X 仍有两类元素, 而 A_{t+1} 变为双类集.

若 $A_i(1 \leqslant i \leqslant t)$ 不含元素 x_1, 则 A_i 仍为双类集; 若 $A_i(1 \leqslant i \leqslant t)$ 含元素 x_1, 则根据条件, A_i 与 A_{t+1} 必有除 x_1 之外另一公共元素 $x_j(2 \leqslant j \leqslant s)$, 故 x_1 调到第二类后, A_i 中仍有第一类元素, 即 A_i 仍为双类集.

综上, 调整之后至少 $A_1,A_2,\cdots,A_{t+1}$ 为双类集.

因此, 双类集数目不小于 $t+1$.

从而, 经有限次这样的调整后必有 $t=n$. ■

最后, 我们来看一个集合族的例子.

例 1.4.10. 给定正整数 $k \geqslant 2$, 请构造一个集合簇 $\mathscr{A}$, 它包含无限多个由正整数构成的集合, 满足以下性质:

(1) 集合族 $\mathscr{A}$ 中任意 k 个集合的交集为一个单元素集合;

(2) 集合族 $\mathscr{A}$ 中任意 $k+1$ 个集合的交集为空集.

解. 将正整数集合中任意 k 个数构成的集合无重复无遗漏地排成一排, 记这些集合依次为 $S_1,S_2,\cdots$. 对每个正整数 m, 取 $A_m=\big\{n \mid m \in S_n\big\}$, 集合族 $\mathscr{A}$ 由 $A_1,A_2,\cdots$ 构成.

接下来证明集合簇 $\mathscr{A}$ 符合题意.

首先证明: 集合簇 $\mathscr{A}$ 确为一个无限集.

对于不同的两个正整数 $m\ m'$, 由构造法则, 知存在不同的正整数 $n\ n'$, 使得 $m \in S_n, m \notin S_{n'}$, 但 $m' \in S_{n'}, m' \notin S_n$.

故 $n \in A_m \backslash A_{m'}, n' \in A_{m'} \backslash A_m$. 从而, $A_m \neq A_{m'}$.

其次证明: 子集簇 $\mathscr{A}$ 满足性质 (1).

若 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 为不同的正整数, 则

$$A_{m_1} \cap A_{m_2} \cap \cdots \cap A_{m_k}=\{i\}$$

其中, i 为集合 $\{m_1,m_2,\cdots,m_k\}$ 在排列 $S_1,S_2,\cdots$ 中所在集合的下标.

最后证明: 子集簇 $\mathscr{A}$ 满足性质 (2).

若 $m_1,m_2,\cdots,m_{k+1}$ 为不同的正整数, 则 $\{m_1,m_2,\cdots,m_k\}$ $\{m_2,\cdots,m_k,m_{k+1}\}$ 在排列 $S_1,S_2,\cdots$ 中处于不同位置.

故 $A_{m_1} \cap A_{m_2} \cap \cdots \cap A_{m_k} \cap A_{m_{k+1}}=\varnothing$.

1.5　集合的性质

很多集合问题实际上是研究集合的性质的问题. 由集合的概括原则, 我们知道集合 $\{x \mid P(x)\}$ 是由满足性质 P 的元素组成的, 因此除了研究一般集合的性质外, 我们更多地是研究具体的集合所满足的性质 P 的等价形式或推论, 如对特定整数的集合、有理数的集合等的研究.

在这里, 我们无意于也无此必要介绍太多集合论的知识, 利用中学已有的集合知识和解题中体悟的逻辑方法, 我们就能理解本书中的全部内容.

1.5.1　集合的整体性质

已知集合 $S=\{x \mid P(x)\}$. 如果由性质 P 能推出 S 中每个元素都满足的性质 P', 那么 P' 就是 P 的一个必要条件. 设 $S'=\left\{x \mid P'(x)\right\}$, 显然有 $S\subseteq S'$.

例 1.5.1. 已知数集 M 至少有 3 个元素, 且对 M 中任何两个不同的元素 a 、b, 数 $a^2+b\sqrt{2}$ 都是有理数, 证明: 对于 M 中任何数 a, 数 $a\sqrt{2}$ 都是有理数.

分析. 设 $a,b\in M$ 且 $a\neq b$, 则 $a^2+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}, b^2+a\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. 于是有 $a^2+b\sqrt{2}-\left(b^2+a\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}(a\sqrt{2}-b\sqrt{2})(a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-2)\in\mathbb{Q}$. 若能证明 $a\sqrt{2}-b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ 或 $a\sqrt{2}+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, 则问题迎刃而解. 但已给条件似乎不够用! 不过另设 $c\in M, c\neq a, c\neq b$, 则 $c^2+a\sqrt{2}\in\mathbb{Q}, c^2+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, 便得到

$$c^2+a\sqrt{2}-\left(c^2+b\sqrt{2}\right)=a\sqrt{2}-b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$$

证明. 任取 $a,b,c\in M$, 且 $a\ b\ c$ 互不相等, 则 $a^2+b\sqrt{2}, b^2+a\sqrt{2}, c^2+a\sqrt{2}, c^2+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. 因此

$$a^2+b\sqrt{2}-\left(b^2+a\sqrt{2}\right)=(a-b)(a+b-\sqrt{2})$$
$$=\frac{1}{2}(a\sqrt{2}-b\sqrt{2})(a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-2)\in\mathbb{Q}$$
$$c^2+a\sqrt{2}-\left(c^2+b\sqrt{2}\right)=(a\sqrt{2}-b\sqrt{2})\in\mathbb{Q}$$

从而 $a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-2\in\mathbb{Q}$, 所以 $a\sqrt{2}+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$.

所以

$$a\sqrt{2}=\frac{1}{2}(a\sqrt{2}+b\sqrt{2}+a\sqrt{2}-b\sqrt{2})\in\mathbb{Q}$$

■

例 1.5.2. 在平面上给定无穷多个点, 已知它们之间的距离都是整数, 求证这些点都在一条直线上.

分析. "无穷"和"整数"是两个关键词, 去其一, 则结论不成立. 下面我们就是利用这两点"制造"矛盾来反证结论成立.

证明. 若不然, 则存在三点 A B C 使三点不共线且 $AB=r$ 和 $AC=s$ 都是整数. 设点 P 是任一给定点, 则由三角不等式有

$$|PA-PB| \leqslant AB=r$$

即 $|PA-PB|$ 是整数 $0,1,2,\cdots,r$ 中之一. 因此, 点 P 或位于直线

$$\begin{aligned} H_0 = &\ \text{直线}AB \text{ 的垂直平分线}, \\ H_r = &\ \text{直线}AB \end{aligned}$$

之一上, 或落在双曲线

$$H_i=\{X||XA-XB|=i\}, i=1,2,\cdots,r-1$$

之一上. 同理, 点 P 又或者位于直线

$$\begin{aligned} K_0 = &\ \text{线段}AC \text{ 的垂直平分线}, \\ K_s = &\ \text{直线}AC \end{aligned}$$

之一上, 或者落在双曲线

$$K_j=\{X||XA-XC|=j\}, j=1,2,\cdots,s-1$$

之一上. 由此可知, 任一给定点必落在集合

$$H_i \cap K_j, i=0,1,\cdots,r, j=0,1,\cdots,s \tag{1}$$

之一上. 由于直线 AB 与 AC 不重合, 所以任一 H_i 与任一 K_j 都不相同. 从而知 (1) 中每个集合都不多于 4 点, 故知集合

$$M=\bigcup_{i,j}\left(H_i \cap K_j\right)$$

的点数不多于 $4(r+1)(s+1)$, 此与给定点有无穷多个矛盾. ■

例 1.5.3. 设 M 为一个无限的有理数集, 满足: M 的任意一个 2009 元子集的元素之积为一个整数, 且这个整数不能被任何质数的 2009 次幂整除. 证明: M 的元素均为整数.

分析. *这里的"2009"并不是一个关键的数字, 与上例一样, 我们还是得围绕"无限"做文章.*

证明. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2008} \in M$. 记

$$A=a_1a_2\cdots a_{2008}=\frac{p}{q},(p,q)=1$$

假设 M 中包含了无数多个形如

$$\alpha_i=\frac{p_i}{q_i},(p_i,q_i)=1,q_i>1$$

的数, 且 $\alpha_i \neq a_1, a_2, \cdots, a_{2008}$. 由于

$$\alpha_i \cdot A = \alpha_i a_1 a_2 \cdots a_{2008} = \frac{p_i}{q_i} \cdot \frac{p}{q}$$

为整数, 所以 $q \mid p$ 由于 p 只有有限个因子, 故有无数个分母为 q_i' 的既约分数属于 M. 这些分数中的任意 2009 个的乘积都不是整数. 这与题设矛盾. 这说明 M 中包含了无限多个整数, 记这些整数的集合为 M'.

假设有 $\frac{a}{b} \in M, (a,b) = 1, b > 1$.

设 p 为 b 的一个质因子. 由于 $\frac{a}{b}$ 与 M' 中任意 2008 个整数的乘积为整数, 故 p 为 M' 中无数多个整数的质因子. 而 M' 中任意 2009 个含有因数 p 的数的乘积可被 p^{2009} 整除. 这又与题设矛盾.

这就证明了 M 的元素均为整数. 而这样的整数集是存在的, 如全部质数的集合. ■

例 1.5.4. 设七元素集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_7\}$ 的元素均为不大于 26 的正整数. 证明: 存在正整数 $t\ m (1 \leqslant t < m \leqslant 7)$, 使得方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_t = x_{t+1} + x_{t+2} + \cdots + x_m$$

在集合 A 上有解, 且 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 互不相等.

分析. 如能证明集合 A 有两个互不包含的子集的元素和相等, 则求证结论成立.

证明. 首先证明: 在集合 A 的最多含有四个元素的子集中, 有两个集合的元素之和是相等的.

易知, 集合 A 的最多含有四个元素的非空子集有 $\mathrm{C}_7^1 + \mathrm{C}_7^2 + \mathrm{C}_7^3 + \mathrm{C}_7^1 = 98$ (个). 这些子集的元素之和的最小可能值为 1 , 最大可能值为 $26 + 25 + 24 + 23 = 98$.

假设在这些子集中没有两个的元素之和是相等的. 则 $1 \sim 98$ 的每个整数恰分别是上述 98 个子集的元素之和.

特别地, 98 是子集 $\{23, 24, 25, 26\}$ 的元素之和.

故 $\{23, 24, 25, 26\} \subset A$.

所以, $\{23, 26\} \subset A$, 且 $\{24, 25\} \subset A$.

而 $\{23, 26\}$ 与 $\{24, 25\}$ 的元素之和相等. 矛盾.

设 $B_1\ B_2$ 是集合 A 的两个元素之和相等的子集, $B_1 \cap B_2 = C$. 则 $B_1' = B_1 \backslash C, B'_2 = B_2 \backslash C$ 也是集合 A 的非空子集.

设 $|B_1'| = t, |B_2| = m - t$. 记 B_1' 的元素分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_t, B_2'$ 的元素分别为 $x_{t+1}, x_{t+2}, \cdots, x_m$, 即得方程的一组解. ■

1.5.2 集合的局部性质

设集合 $S = \{x \mid P(x)\}$. 如果条件 P^* 是条件 P 的充分条件, 那么集合

$$S^* = \big\{x \mid P^*(x), x \in S\big\}$$

是集合 S 的子集, 即 $S^* \subseteq S$. 这里 P^* 是集合 S 中部分元素的性质.

我们还可以通过增加 S 的“内涵”的方式来缩小它的“外延”: S 是所有具备性质 P 的元素 x 的集合, 增加新的性质 P^*, 得到集合

$$S^*=\left\{x \mid P(x) \text{ 且} P^*(x), x\in S\right\},$$

显然 $S^*=\left\{x \mid P^*(x), x\in S\right\}$, 它是 S 的子集, 即 $S^*\subseteq S$.

一类典型的问题就是从集合 S 中分离出所有满足性质 P^* 的元素, 从而得到所求的 S^*.

例 1.5.5. 设 $A\subset\mathbb{N}^*$ 是无限集, A 中每个数 a 是至多 1990 个质数的乘积. 证明: 必有 A 的无限子集 B, 使得 B 中任何两个不同数的最大公因数都相同.

分析. *如果 A 中含有无限多个两两互质的整数, 则结论显然成立. 否则, 存在质数 p_1 为 A 的无限多个数的因数, 故 $A_1=\left\{\frac{a}{p_1}\,\middle|\,\frac{a}{p_1}\in\mathbb{Z}\,, a\in A\right\}$ 为无限集. 若 A_1 中含有无限多个两两互质的整数, 则结论亦成立. 否则, 继续上面的步骤.*

证明. 如果 A 中含有无限多个两两互质的正整数, 将它们全部选出作成子集 B, 则结论成立.

若存在质数 p_1 为 A 中无限多个数的因数, 则集合

$$A_1=\left\{\frac{a}{p_1}\,\middle|\,\frac{a}{p_1}\in\mathbb{Z}\,, a\in A\right\}$$

为无限集. 依此类推 (用 A_1 代替 A). 由于 A 中每个数的质因数个数 $\leqslant 1990$, 所以必有无限集

$$A_k=\left\{\frac{a}{p_1p_2\cdots p_k}\,\middle|\,\frac{a}{p_1p_2\cdots p_k}\in\mathbb{Z}\,, \frac{a}{p_1p_2\cdots p_{k-1}}\in A_{k-1}\right\},$$

每个质数 p_i 都仅是 A_k 中有限多个数的因数.

任取 $a_1\in A_k$. 在取定 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两互质后, 由于每个质数都仅是 A_k 中有限多个数的因数, 在 A_k 中存在 a_{n+1}, 它与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均互质. 这样就得到 A_k 的一个无穷子集 B_k, B_k 中的元素两两互质.

将 B_k 中每个元素乘以 $p_1p_2\cdots p_k$, 得到 A 的无穷子集, 其中每两个数的最大公因数均为 $p_1p_2\cdots p_k$. ■

例 1.5.6. 记 $\mathbb{Q}$ 为有理数集合, $\mathbb{Q}$ 的非空子集 S 具有以下性质:

(1) $0\notin S$;

(2) 若 $s_1\in S, s_2\in S$, 则 $\frac{s_1}{s_2}\in S$;

(3) 存在一非零有理数 $q, q\notin S$, 且每一个不在 S 中的非零有理数都可写成 qs 的形式, 其中 $s\in S$.

证明: 若 $x\in S$, 则存在 $y,z\in S$, 使 $x=y+z$.

分析. *设 $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$, 且 $\alpha+\beta=1$, 则*

$$x=x(\alpha+\beta)=x\alpha+x\beta$$

我们希望出现: $x\alpha\in S$ 且 $x\beta\in S$. 由 (3) 似乎应该有 $\alpha,\beta\in S$. 于是我们要解决两个问题: (1) 怎样的 α,β 必定属于 S; (2) 如 $x_1\in S, x_2\in S$, 则 $x_1x_2\in S$.

证明. 假设 $s \in S$. 令 $s_1 = s_2 \in S$, 则 $\frac{s_1}{s_2} = 1 \in S$. 令 $s_1 = 1, s_2 = s$, 则 $\frac{1}{s} \in S$.

若 $t \in S$, 令 $s_1 = t, s_2 = \frac{1}{s}$, 则 $\frac{s_1}{s_2} = \frac{t}{\frac{1}{s}} = st \in S$ (这样 s 就是乘法意义下的解).
假设 u 是一个非零有理数, 若 $u \notin S$, 则 $u = qs$, 其中 $s \in S$, 于是我们有 $u^2 = q^2 s^2$.

若 $q^2 \notin S$, 则可设 $q^2 = qt(t \in S)$, 则 $q = t \in S$, 矛盾. 所以 $q^2 \in S$, $u^2 \in S$.

假如 $x \in S$, 则由 $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ 为平方数可知,

$$x\left(\frac{3}{5}\right)^2 \in S, x\left(\frac{4}{5}\right)^2 \in S$$

又 $x = x\left(\frac{3}{5}\right)^2 + x\left(\frac{4}{5}\right)^2$, 取 $y = x\left(\frac{3}{5}\right)^2, z = x\left(\frac{4}{5}\right)^2$, 则命题得证. ■

例 1.5.7. 平面上整点的集合 $M = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}$, 且 $1 \leqslant x \leqslant 12, 1 \leqslant y \leqslant 13\}$. 证明: 不少于 49 个点的 M 的每一个子集, 必包含一个矩形的 4 个顶点, 且此矩形的边平行于坐标轴.

分析. *设 S 为 M 的任一个 49 元子集. 其中纵坐标相同的点的横坐标的集合为:*

$$X_i = \{x \mid (x, i) \in S\}, i = 1, 2, \cdots, 13$$

若存在关于整点横坐标的二元集 (r, s) 同时是 X_i $X_j (i \neq j)$ 的子集, 则原题得证.

证明. 设 S 为 M 的任一个 49 元子集. 令

$$X_i = \{x \mid (x, i) \in S\}, i = 1, 2, \cdots, 13$$

则 $|X_i| = x_i, \sum_{i=1}^{13} x_i = 49, 0 \leqslant x_i \leqslant 12$. 记

$$P_i = \{\{r, s\} \mid r \neq s, (r, i), (s, i) \in S\}, i = 1, 2, \cdots, 13$$

显然, 全体 P_i 中只有 $\mathrm{C}_{12}^2 = 66$ (种) 不同的二元集.

又 $\sum_{i=1}^{13} |P_i| = \sum_{i=1}^{13} \mathrm{C}_{x_i}^2$, 考虑其最小值.

利用局部调整: 当 $x_1 + x_2 = c$ 时,

$$\mathrm{C}_{x_1}^2 + \mathrm{C}_{x_2}^2 = \frac{c^2 - c}{2} - x_1 x_2 \geqslant \frac{c^2 - c}{2} - \frac{c^2}{4},$$

$x_1 = \left[\frac{c}{2}\right], x_2 = c - \left[\frac{c}{2}\right]$ 时, $\mathrm{C}_{x_1}^2 + \mathrm{C}_{x_2}^2$ 取得最小值. 由此知, $\sum_{i=1}^{13} \mathrm{C}_{x_i}^2$ 取得最小值必须是将 $49 = \sum_{i=1}^{13} x_i$ 尽可能地平均到 $\{x_i\}$ 中, 即 $\{x_i\}$ 中有 j 个 $\left[\frac{49}{13}\right] = 3$,
$(13 - j)$ 个 $\left[\frac{49}{13}\right] + 1 = 4$, 从而得 $j = 3$. 所以

$$\left(\sum_{i=1}^{13} \mathrm{C}_{x_i}^2\right)_{\min} = 3\mathrm{C}_3^2 + 10\mathrm{C}_4^2 = 69$$

从而, 有

$$\sum_{i=1}^{13} |P_i| = \sum_{i=1}^{13} \mathrm{C}_{x_i}^2 \geqslant 69 > 66$$

由此推知存在 $i \neq j$, 使得 $(r, s) \in P_i, (r, s) \in P_j$. 故有 $(r, i), (s, i), (r, j), (s, j) \in S$, 结论成立. ■

1.5.3 集合间的相关性质

例 1.5.8. 记 A 为含有 $t\,(t\in\mathbb{R}_+)$ 的实数集, 使得存在一个实数集 B (与 A 有关), $|B|\geqslant 4, AB=\{ab\mid a\in A,b\in B\}$ 的元素构成一个有限长等差数列. 求集合 A 所有可能的情形.

分析. 若 $|A|\geqslant 2$, 设 $x,x'\in A\,(x\neq x'),y,y'\in B\,(y\neq y')$, 数列公差为 d, 则 $xy-xy'=nd(n\in\mathbb{Z})$, 即 $x=n\cdot\frac{d}{y-y}$. 这说明将集合 A 中的元素同时乘以 $\frac{y-y'}{d}$, 即可将集合 A 转化为一个整数集来讨论.

解. 所求的集合为 $\{t\}$ $\{-t,t\}$ $\{0,t\}$ $\{-t,0,t\}$.

只需取 $B=\{-1,0,1,2\}$ 即可验证.

下面假设集合 A B 符合题意且 $|A|\geqslant 2$.

显然, A B 元素个数均必须有限.

记 d 为集合 AB 中等差数列的公差, 任取 $x,x'\in A,x\neq x',y,y'\in B$, $y\neq y'$.

由于 xy xy' 为等差数列中的项, 于是,

$$xy-xy'=nd(n\in\mathbb{Z}),$$

则 $x=n\cdot\frac{d}{y-y'}$.

这表明, 集合 A 中的任意元素均为 $\frac{d}{y-y}$ 的整数倍.

从而, 将集合 A 中每个元素除以 $\frac{d}{y-y}$, 使得 A 中每个元素均可化为整数.

类似地, 对集合 B 中的元素作除以 $\frac{d}{x-x}$ 的处理使得均化为整数.

接下来, 可将集合 A 中元素除以整体的公约数, 使得整体互质, 对集合 B 也作类似处理.

记集合 A 中绝对值最大的元素为 a', 不妨设 $a'>0$. 否则, 将所有元素乘以 -1 即可.

类似地, 记集合 B 中绝对值最大的元素为 $b'>0$.

下面证明: $A=\{-1,1\},\{0,1\},\{-1,0,1\}$.

因为集合 B 中元素整体互质, 而

$$d\mid\left(x-x'\right)y\quad\left(x,x'\in A,x\neq x',y\in B\right)$$

所以, $d\mid(x-x')$.

类似地, $d\mid(y-y')$.

而 $|B|\geqslant 4$ 故 $b'>d$.

由于 $a'b'-d\in AB$, 可设 $a'b'-d=ab(a\in A,b\in B)$.

而 $ab=a'b'-d\geqslant b'-d>0$, 若 $|a|\neq a'$, 则

$$a'b'-d=ab=|a||b|\leqslant\left(a'-1\right)b'<a'b'-d$$

矛盾.

故 $|a|=a',d=a'b'-|a||b|=\left(b'-|b|\right)a'\geqslant a'$.

又集合 A 中所有元素模 d 相同, 则

$$A=\{-d,0,d\},\left\{a',a'-d\right\}\left(d\geqslant a'>\left|a'-d\right|\right)$$

对于前一种情形, 有 $A=\{-t,0,t\}$.

对于后一种情形, 若为 $\{0,d\}$, 则对应的 $A=\{0,t\}$. 除此以外, 由 $|a|=a'>|a'-d|$, 则

$$a=a', d=a'\left(b'-|b|\right)$$

从而 $a'\mid d$, 则 $a'\leqslant \frac{d}{2}$.

若 d 为偶数, 则可取 $\left\{-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right\}$, 对应的 $A=\{t,-t\}$; 若 $a'<\frac{d}{2}$, 则 $|a'-d|>a'$, 矛盾.

例 1.5.9. 在一次数学竞赛中, 一些同学间是朋友关系, 且朋友关系是相互的. 证明: 存在由学生组成的一个子集 M, 使得集合 M 中的每名同学在此集合中至多有三位朋友, 不属于集合 M 的每名同学在集合 M 中至少有四位朋友.

证明. 设 $M_0=\varnothing$. 给出如下构造:

(1) 若学生 $x\in M$, 其在集合 M 中至少有四位朋友, 则将其从集合 M 中移出;

(2) 若学生 $y\notin M$, 其在集合 M 中最多有三位朋友, 则将其移人集合 M 中.

利用如上两种方法, 可构造满足题意的状态.

对于集合 M, 若 $x\ y$ 为集合 M 中的朋友, 记 $p(M)$ 表示 $(x,y)\in M\times M$ 的对数. 设

$$f(M)=7|M|-p(M)$$

注意到, $f(M)$ 仅能取到整数, 且不大于 $7|M|$, 初值为 $f\left(M_0\right)=0$.

由 (1) 对于 $x\in M, x$ 在集合 M 中至少有四位朋友, 知 $(x,y),(y,x)\in M\times M$ 至少有八对. 因此, 若从集合 M 中移出 x, 则 $p(M)$ 至少减少 $8,|M|$ 减少 1 . 此时, $f(M)$ 增加了.

接下来, 由 (2) 对于 $y\notin M, y$ 在集合 M 中最多有三位朋友, 将 y 添人集合 M 中, 则 $p(M)$ 至多增加 $6,|M|$ 增加 1 . 此时, $f(M)$ 也增加了.

操作 (1) 、(2) 均使 $f(M)$ 增加, 而 $f(M)$ 有上界, 故操作一定会停止, 此时的 M 即为所要的子集. ■

例 1.5.10. 已知集合 $X=\{1,2,\cdots,8\}$. 现有 k 种颜色给 X 的三元子集染色, 要求任意两个没有公共元素的三元子集有不同颜色. 证明:

(1) 四种颜色可以完成染色;

(2) 三种颜色无法完成染色.

证明. (1) 设四种颜色分别为 1 2 3 4, A 为 X 的一个子集, m_A 为其中最大元素值.

规定: 给子集 A 染的颜色为 $\max\{1,m_A-4\}$.

若两个子集 $A\ B$ 无公共元素, 则至少在 $m_A\ m_B$ 中有一个大于或等于 6 . 于是, 两个集合不能全染为 1 号色. 相反, 若两个集合均染一种大于 1 的颜色, 则 $m_A=m_B$, 与两集合不存在公共元素矛盾.

所以, 用四种颜色可以完成染色.

(2) 将自然数 $1,2,\cdots,8$ 分别标记为一个立方体的八个顶点, 同时, 标出三元集合 $\{a,b,c\}$ 所对应的三角形的重心. 以下将用各个三角形的重心来代替三元集合.

接下来证明: 无法用三种颜色完成染色.

只考虑立方体表面上的点.

若两个三元子集在立方体中分别表示两个相对平面的顶点, 则其必无公共元素. 所以, 立方体一个面上的所有点的颜色必与其对面上点的颜色不同.

假设三种颜色能够完成染色任务. 故在一组对面中, 必有一个面中所有点的颜色相同, 也就是说在立方体表面上必有三个面为单染色面, 设为 F_1 、F_2 F_3.

因为三个面中任意两个面都不平行, 所以, 每两个面都有一个公共的边, 且三边交于一点. 设这三个面的顶点分别为

$$\{a,b,c,d\},\{a,b,e,f\},\{a,c,e,g\}$$

因为在三个面中, 每两个面都含有一组不共点的三角形, 所以, 三个面的颜色必为三种不同颜色.

设 h 为点 a 的对顶点. 则以 $\{f,g,h\}$ 为顶点的三角形颜色与以 $\{a,b,\ c\}$ $\{a,b,e\}$ $\{a,c,e\}$ 为顶点的三角形颜色不同. 而此三个三角形又分别在面 F_1 F_2 F_3 上. 于是, 需要第四种颜色.

综上, 三种颜色无法完成染色任务. ■

第二章　三角函数

2.1　三角函数图象与性质

例 2.1.1. (1) 将函数 $f(x)=2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到 $g(x)$ 的图象. 若函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{a}{3}\right],\left[2a,\frac{7\pi}{6}\right]$ 上单调增, 求实数 a 的取值范围. (2017 年清华大学 THUSSAT 测试题)

(2) 已知函数 $f(x)=\sin(\pi x), g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2-2x}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 求函数 $h(x)=f(x)-g(x), x\in(-2,4]$ 的所有零点的和.

解. (1) 根据题意,

$$g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

它的单调递增区间为

$$\cdots,\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right],\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right],\cdots,\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbb{N}_+$$

于是 $\begin{cases}0<\frac{a}{3}\leqslant\frac{\pi}{6},\\ -\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant 2a\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi, \quad k\in\mathbb{N}_+\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}0<a\leqslant\frac{\pi}{2},\\ -\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, \quad k\in\mathbb{N}_+,\end{cases}$ 所以

$$\frac{\pi}{3}\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{2}$$

所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

(2) 如图 2.2,

函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象均关于点 $(1,0)$ 对称, 且

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

于是函数 $h(x)$ 的零点共有 9 个, 因此所有零点的和为 9 .

注记. 第 *(1)* 小题也可以直接由 $0<\frac{a}{3}\leqslant\frac{\pi}{6}$, 及 $\frac{2\pi}{3}\leqslant 2a\leqslant\frac{7\pi}{6}$ 得出结论. 第 *(2)* 小题对于零点的个数常结合图象求之. 本题关键是注意到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均关于点 $(1,0)$ 对称.

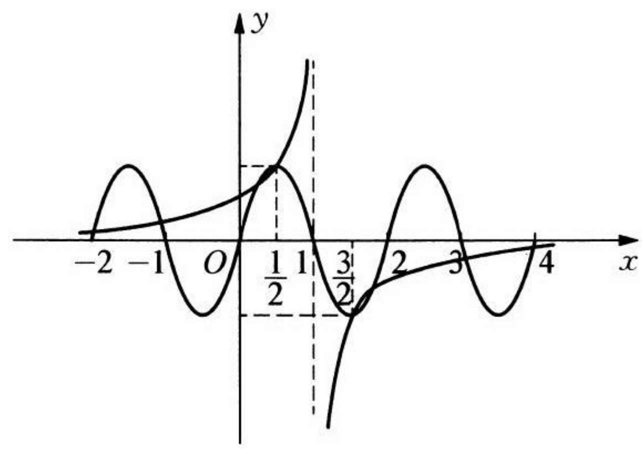

图 2.1

例 2.1.2. 设函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$.

(1) 试讨论函数的性质 (有界性, 奇偶性, 单调性, 周期性), 求出其最值, 并作出其在 $[0,2\pi]$ 上的图象;

(2) 求函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的值域. (2007 年上海交大自主招生)

解. (1) 因为

$$f(-x)=|\sin(-x)|+|\cos(-x)|=|\sin x|+|\cos x|=f(x)$$

所以这是一个偶函数.

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| \\ &= |\cos x|+|\sin x|=f(x) \end{aligned}$$

所以这是一个周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的周期函数.

$$2=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\geqslant f^2(x)\geqslant \sin^2 x+\cos^2 x=1$$

所以 $1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{2}$, 所以 $f(x)$ 有上下界. 而当 $x=0$, 或 $\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)=1$; $x=\frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)=\sqrt{2}$. 所以 $f(x)$ 的最小值为 1 , 最大值为 $\sqrt{2}$.

由于 $f(x)$ 是一个周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的周期函数, 所以我们只需要考查它在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性即可.

此时 $f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, 那么 $f(x)$ 在 $\left(\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbb{Z})$ 上递增, 在 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbb{Z})$ 上递减.

图像如图 2.2所示.

(2) 因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $0\leqslant\sin x\leqslant 1, 0\leqslant\cos x\leqslant 1$.

所以 $\sqrt{\sin x}\geqslant\sin x\geqslant\sin^2 x, \sqrt{\cos x}\geqslant\cos x\geqslant\cos^2 x$.

所以 $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\geqslant\sin x+\cos x\geqslant\sin^2 x+\cos^2 x\geqslant 1$.

且当 $x=0$, 或 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}=1$.

另一方面, 由

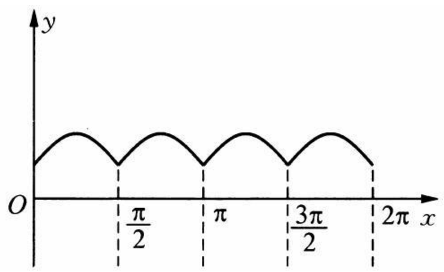

图 2.2

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x})^2 &= \sin x+\cos x+2\sqrt{\sin x\cos x}\\
&=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2\sin 2x}\\
&\leqslant 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

所以

$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\leqslant 2^{\frac{3}{4}}$.

且当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时, $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}=2^{\frac{3}{4}}$.

所以函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的值域为 $\left[1,2^{\frac{3}{4}}\right]$.

注记. 这两道题都是考查三角函数的基本性质. 第 *(1)* 小题关键是如何看出 $\frac{\pi}{2}$ 是函数的周期, 实际上可用图象分析出来, 或者取特殊点观察可得. 第 *(2)* 小题求值域方法很多, 关键是细心谨慎, 小心放缩. 本小题还可用均值不等式, 柯西不等式来求解.

例 2.1.3. 已知函数 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域和值域;

(2) 在 $(-\pi,\pi)$ 中, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 判定方程 $f(x)=\tan\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上解的个数.

解. (1) 因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, 所以 $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

又因为函数 $y=\tan x$ 在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$ 处无定义, 且

$$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\subsetneqq\left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}},\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]\subsetneqq(-\pi,\pi)$$

所以令 $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x=\pm\frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, 解之得: $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$.

所以 $f(x)$ 的定义域是 $A=\left\{x\mid x\in\mathbb{R},\text{且 }x\neq k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

因为 $\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的值域为 $(-\infty,+\infty)$, 而当 $x\in A$ 时, 函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x\right)$ 的值域 B 满足 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\subsetneqq B$, 所以 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 由 $f(x)$ 的定义域知, $f(x)$ 在 $[0,\pi)$ 中的 $x=\frac{\pi}{3}$ 和 $x=\frac{2\pi}{3}$ 处无定义. 设 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$, 则当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 时, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$, 且以 t 为自变量的函数 $y=\tan t$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$ 上分别单调递增.

又因为当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时, 函数 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 单调递增, 且 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$; 当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 时, 函数 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 单调递增, 且 $t\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$;

当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ 时, 函数 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 单调递减, 且 $t\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$;
当 $x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 时, 函数 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 单调递减, 且 $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

所以 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{13}}\sin x\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right),\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上分别是单调递增函数; 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right),\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 上是单调递减函数.

又 $f(x)$ 是奇函数, 所以区间 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right],\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$ 也是 $f(x)$ 的单调递增区间, $\left(-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right),\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2}\right]$ 是 $f(x)$ 的单调递减区间.

故在 $(-\pi,\pi)$ 中, $f(x)$ 的单调递增区间为:

$$\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right),\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right),\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$$

单调递减区间为:

$$\left(-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right),\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right),\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$$

(3) 由 $f(x)=\tan\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$, 得 $\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x\right)=\tan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x=k\pi+\frac{\sqrt{2}}{3}\pi(k\in\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow \sin x=k\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}(k\in\mathbb{Z}) \tag{1}$$

又因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, $\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$, 所以 $k=0$ 或 $k=-1$. 当 $k=0$ 时, 从 (1) 得方程 $\sin x=\frac{\sqrt{6}}{3}$;

当 $k=1$ 时, 从 (1) 得方程 $\sin x=-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$.

显然方程 $\sin x=\frac{\sqrt{6}}{3},\sin x=-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$, 在 $(-\pi,\pi)$ 上各有两个解, 故 $f(x)=\tan\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上共有 4 个解.

注记. 本题是正弦函数与正切函数的复合. *(1)* 求 $f(x)$ 的定义域和值域, 应当先搞清楚 $y=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 的值域与 $y=\tan x$ 的定义域的交集; *(2)* 求 $f(x)$
的单调区间, 必须先搞清 $f(x)$ 的基本性质, 如奇偶性, 周期性, 复合函数单调性等.

例 2.1.4. 设 ω 为正实数, 若存在 $a,b(\pi\leqslant a<b\leqslant 2\pi)$, 使得 $\sin\omega a+\sin\omega b=2$. 求 ω 的取值范围. (2015 年全国高中数学联赛)

解. 由 $\sin\omega a+\sin\omega b=2$ 知, $\sin\omega a=\sin\omega b=1$, 而 $[\omega a,\omega b]\subseteq[\omega\pi,\ 2\omega\pi]$, 故题目条件等价于: 存在整数 $k,l(k<l)$, 使得

$$\omega\pi\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}<2l\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi \tag{1}$$

当 $\omega\geqslant 4$ 时, 区间 $[\omega\pi,2\omega\pi]$ 的长度不小于 4π, 故必存在 k,l 满足 (1) 式.

当 $0<\omega<4$ 时, 注意到 $[\omega\pi,2\omega\pi]\subseteq(0,8\pi)$, 故仅需考虑如下几种情况:

(1) $\omega\pi\leqslant\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi$, 此时有 $\omega\leqslant\frac{1}{2}$, 且 $\omega\geqslant\frac{5}{4}$, 无解;

(2) $\omega\pi\leqslant\frac{5\pi}{2}<\frac{9\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi$, 此时有 $\frac{9}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{2}$;

(3) $\omega\pi\leqslant\frac{9\pi}{2}<\frac{13\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi$, 此时有 $\frac{13}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{9}{2}$, 得 $\frac{13}{4}\leqslant\omega<4$.

综合 (1), (2), (3) 及 $\omega\geqslant 4$ 得, ω 的取值范围是

$$\left\{\omega\,\middle|\,\frac{9}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{2}\text{ , 或}\omega\geqslant\frac{13}{4}\right\}.$$

注记. 本题难点在于分类讨论. 首先注意到 $\omega\geqslant 4$ 时, 区间 $[\omega\pi,2\omega\pi]$ 的长度大于或等于 4π, 在两个周期之内. 一定存在两个最大值, 其次逐步对取得 *1* 时, $\omega a,\omega b$ 的相应值加以讨论.

例 2.1.5. 设函数 $f(x)=\sin^2 x+(2a-1)\sin x+a^2+\frac{1}{4}$, 已知 $x\in\left[\frac{5}{6}\pi,\frac{3}{2}\pi\right]$, 求 $f(x)$ 的最值.

解. 设 $\sin x=t$, 则 $t\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

$f(x)=g(t)=t^2+(2a-1)t+a^2+\frac{1}{4}$, 对称轴为 $t=\frac{1-2a}{2}$.

当 $\frac{1-2a}{2}\leqslant -1$ 即 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时, $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 为 $g(t)$ 的单调增区间, 所以

$$f_{\min}=g(-1)=a^2-2a+\frac{9}{4},f_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=a^2+a$$

当 $-1<\frac{1-2a}{2}\leqslant-\frac{1}{4}$ 即 $\frac{3}{4}\leqslant a<\frac{3}{2}$ 时, $g(-1)\leqslant g\left(\frac{1}{2}\right)$, 所以

$$f_{\min}=g\left(\frac{1-2a}{2}\right)=a,f_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=a^2+a$$

当 $-\frac{1}{4}<\frac{1-2a}{2}\leqslant\frac{1}{2}$ 即 $0\leqslant a<\frac{3}{4}$ 时, $g(-1)>g\left(\frac{1}{2}\right)$, 所以

$$f_{\min}=g\left(\frac{1-2a}{2}\right)=a,f_{\max}=g(-1)=a^2-2a+\frac{9}{4}$$

当 $\frac{1-2a}{2}>\frac{1}{2}$ 即 $a<0$ 时, $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 为 $g(t)$ 的单调减区间, 所以

$$f_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=a^2+a,f_{\max}=g(-1)=a^2-2a+\frac{9}{4}$$

注记. 求形如 $f(x)=A\sin^2 x+B\sin x+C$ 形式的最值, 通常用换元法, 化成二次函数在区间的最值问题.

例 2.1.6. 已知函数 $f(x)=\frac{a-2\cos x}{3\sin x}$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数, 求 a 的取值范围.

分析. 根据增函数的定义, 列出不等式, 求 a 的取值范围.

解. 解法一: 由条件得: 当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\frac{a-2\cos x_1}{3\sin x_1}-\frac{a-2\cos x_2}{3\sin x_2}<0$$

因为 $\sin x_2>\sin x_1>0$, 所以去分母得

$$a\sin x_2-2\cos x_1\sin x_2-a\sin x_1+2\cos x_2\sin x_1<0,$$

整理得

$$a(\sin x_2 - \sin x_1) - 2\sin(x_2 - x_1) < 0,$$

故 $a < \frac{2\sin(x_2-x_1)}{\sin x_2 - \sin x_1} = \frac{4\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2-x_1}{2}}{2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}} = \frac{2\cos\frac{x_2-x_1}{2}}{\cos\frac{x_2+x_1}{2}}$

由于

$$\begin{aligned}\cos\frac{x_2-x_1}{2} &= \cos\frac{x_2}{2}\cos\frac{x_1}{2} + \sin\frac{x_2}{2}\sin\frac{x_1}{2} &(2.1)\\ &> \cos\frac{x_2}{2}\cos\frac{x_1}{2} - \sin\frac{x_2}{2}\sin\frac{x_1}{2} &(2.2)\\ &= \cos\frac{x_1+x_2}{2} > 0 &(2.3)\end{aligned}$$

所以 $\frac{\cos\frac{x_2-x_1}{2}}{\cos\frac{x_1+x_2}{2}} > 1$, 从而 $a \leqslant 2$, 即 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

解法二：记 $\tan\frac{x}{2} = t$, 则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, 且 $t \in (0,1)$,

所以

$$\begin{aligned} g(t) = f(x) &= \frac{a - 2\times\frac{1-t^2}{1+t^2}}{3\times\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{(a-2)+(a+2)t^2}{6t}\\ &= \frac{a-2}{6t} + \frac{a+2}{6}\cdot t\end{aligned}$$

设 $0 < t_1 < t_2 < 1$, 则

$$g(t_1) - g(t_2) = \left(\frac{a-2}{6t_1} + \frac{a+2}{6}t_1\right) - \left(\frac{a-2}{6t_2} + \frac{a+2}{6}t_2\right) < 0$$

去分母得

$$(a-2)t_2 + (a+2)t_1^2 t_2 - (a-2)t_1 - (a+2)t_1 t_2^2 < 0$$

整理得

$$(t_2 - t_1)(a - a t_1 t_2 - 2 - 2t_1 t_2) < 0$$

而 $0 < t_1 < t_2 < 1$, 所以 $a < \frac{2(1+t_1t_2)}{1-t_1t_2}$.

显然 $\frac{1+t_1t_2}{1-t_1t_2} > 1$, 故 $a \leqslant 2$, 即 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

注记. 对于含参数不等式的问题, 如 $a < f(t)$ 恒成立, 则应取 $f(t)$ 的最小值后得 a 的取值范围; 如 $a > f(t)$, 则取 $f(t)$ 的最大值后得 a 的取值范围, 如 $f(t)$ 无最值, 则取它的变化趋势的最值.

例 2.1.7. 设函数 $f(x), g(x)$ 对任意实数 x 均有 $-\frac{\pi}{2} < f(x) + g(x) < \frac{\pi}{2}$, 并且 $-\frac{\pi}{2} < f(x) - g(x) < \frac{\pi}{2}$. 求证: 对任意实数 x 均有 $\cos f(x) > \sin g(x)$, 并由此证明: 对任意实数 x 均有 $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$.

证明. 由条件可得 $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{\pi}{2}$.

若 $0 \leqslant f(x) < \frac{\pi}{2}$, 得到 $-\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{\pi}{2} - f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$, 由于 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为单调增函数, 故 $\sin g(x) < \sin\left[\frac{\pi}{2} - f(x)\right] = \cos f(x)$.

若 $-\frac{\pi}{2} < f(x) < 0$, 则由条件 $-\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{\pi}{2} + f(x) < \frac{\pi}{2}$, 同样由 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为单调增函数, 故

$$\sin g(x) < \sin\left[\frac{\pi}{2} + f(x)\right] = \cos f(x)$$

对任意实数 x, 均有

$$|\cos x \pm \sin x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right)\right| \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$$

根据已证的不等式, 就有 $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$. ∎

注记. 利用正, 余弦函数的单调性, 结合正, 余弦函数的有界性以及上述结论, 我们还有如下的一些结论: $\sin(\cos x) < \cos(\sin x), \sin(\sin(\sin x)) < \sin(\cos(\cos x)) < \cos(\cos(\cos x))$ 等.

例 2.1.8. 已知 $f(x) = ax + \sin x$ 表示的图象上有两条切线相互垂直, 求 a 的值. (2010 北大保送生考试)

解. $f(x) = ax + \sin x \Rightarrow f'(x) = a + \cos x$, 从而如果有两条切线垂直, 那么存在这样的 x_1, x_2 使得 $(a + \cos x_1)(a + \cos x_2) = -1$, 从函数图象来看, 一个二次函数的两个根都在 $(-1, 1)$ 上, 首项系数为 1 , 并且开口朝上, 可以感觉到能取到的最小值只有在尽量的往下移动, 也就是在两个根分别是 $-1, 1$ 的时候最小值可以尽可能的小, 此时刚好等于 -1 , 因此可以感觉到这道题实际上卡得很死 (指的中间的放缩), 我们具体的操作如下:

不妨设 $\cos x_1 \leqslant \cos x_2, (a + \cos x_1)(a + \cos x_2) < 0$, 从而 $a \in (-\cos x_2, -\cos x_1)$, 此时可以得到 $0 < a + \cos x_2 \leqslant a + 1, a - 1 \leqslant a + \cos x_1 < 0$, 那么

$$-1 = (a + \cos x_1)(a + \cos x_2) \geqslant (a+1)(a-1) = a^2 - 1 \geqslant -1$$

所以中间不等号必须全部取等号, 此时只能 $a = 0$, 并且在 $x_1 = \pi, x_2 = 0$ 的时候两个点的切线互相垂直.

注记. 本题是挺不错的一道题, 考查学生对函数基本性质的理解. 实际上在得出结论之前, 如果能够想象出图象是最好了, 这样会对最后结果的把握很有帮助, 具体的分析都比较常规, 没必要细讲. 但是要注意一个陷阱, 有些学生的做法会存在逻辑问题, 并没有真的得出 $a = 0$, 可以给学生强调这一点, 这种题每一步的逻辑要对.

例 2.1.9. 证明函数 $g(x) = \cos\sqrt[3]{x}$ 不是周期函数.

分析. 当结论出现否定的形式时, 宜采用反证法.

证明. 假设 $g(x)$ 是周期函数, 非零常数 T 是它的一个周期, 则 $\cos\sqrt[3]{x+T} = \cos\sqrt[3]{x}$ 对一切实数 x 都成立. 取 $x = 0$, 得 $\cos\sqrt[3]{T} = 1$, 从而 $\sqrt[3]{T} = 2k\pi (k \neq 0, k \in \mathbb{Z})$.

取 $x = T$, 得 $\cos\sqrt[3]{2T} = \cos\sqrt[3]{T} = 1$, 有 $\sqrt[3]{2T} = 2e\pi (e \neq 0, e \in \mathbb{Z})$. 于是 $\frac{\sqrt[3]{2T}}{\sqrt[3]{T}} = \frac{2e\pi}{2k\pi} = \frac{e}{k}$, 即 $\sqrt[3]{2} = \frac{e}{k}$, 从而 $\sqrt[3]{2}$ 是有理数, 这与 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数相矛盾, 故函数 $g(x) = \cos\sqrt[3]{x}$ 不是周期函数. ∎

注记. 当结论是肯定或否定形式, 含有"至多", "至少"等字样时, 可利用反证法证明问题. 又如: 求证函数 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

易知 $\frac{\pi}{2}$ 是它的周期, 再证 $\frac{\pi}{2}$ 是它的最小正周期. 假设 $0 < T < \frac{\pi}{2}$ 是 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 的周期, 则 $|\sin(x+T)| + |\cos(x+T)| = |\sin x| + |\cos x|$ 对任意 x 都成立, 于是取 $x = 0$, 得 $|\sin T| + |\cos T| = |\sin 0| + |\cos 0| = 1$, 但 $|\sin T| + |\cos T| = \sin T + \cos T = \sqrt{2}\sin\left(T + \frac{\pi}{4}\right) > 1$, 故矛盾, 所以 T 不存在, 原命题正确.

例 2.1.10. 如果圆 $x^2+y^2=k^2$ 至少覆盖函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{k}$ 的一个最大值点和一个最小值点. 试求 k 的取值范围.

解. 因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{k}$ 为奇函数, 图象关于原点对称, 故只需要已知圆 $x^2+y^2=k^2$ 覆盖 $f(x)$ 的一个最值点即可. 令 $\frac{\pi x}{k}=\frac{\pi}{2}$, 解得 $f(x)$ 的距原点最近的一个最大值点为 $P\left(\frac{k}{2},\sqrt{3}\right)$, 依题意

$$k^2 \geqslant \left(\frac{k}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2$$

解得 $|k|\geqslant 2$.

所以 k 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

注记. 本题巧妙运用函数的奇偶性, 将问题简化为覆盖一个最大点, 这种利用三角函数的奇偶性简化解题的方法是解三角函数性质题的常用
方法.

例 2.1.11. 求函数 $y=(a+\cos x)(a+\sin x)$ 的值域.

分析. 对于含参数的函数, 应对 a 进行分类讨论.

解.

$$y=a^2+a(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x$$

设 $\sin x+\cos x=t$, 则 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}, -\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$, 所以

$$y=a^2+at+\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)=\frac{1}{2}(t+a)^2+\frac{a^2-1}{2}$$

(1) 当 $a\geqslant\sqrt{2}$ 时, 当 $t=\sqrt{2}$ 时, $y_{\max}=a^2+\sqrt{2}a+\frac{1}{2}=\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$; 当 $t=-\sqrt{2}$ 时, $y_{\min}=a^2-\sqrt{2}a+\frac{1}{2}=\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

所以函数的值域为 $\left[\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$.

(2) 当 $0\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ 时, 当 $t=\sqrt{2}$ 时, $y_{\max}=\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;

当 $t=-a$ 时, $y_{\min}=\frac{a^2-1}{2}$.

所以函数的值域为 $\left[\frac{a^2-1}{2},\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$.

(3) 当 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 0$ 时, 当 $t=-\sqrt{2}$ 时, $y_{\max}=\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;

当 $t=-a$ 时, $y_{\min}=\frac{a^2-1}{2}$.

所以函数的值域为 $\left[\frac{a^2-1}{2},\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$.

(4) 当 $a<-\sqrt{2}$ 时, 当 $t=-\sqrt{2}$ 时, $y_{\max}=\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;

当 $t=\sqrt{2}$ 时, $y_{\min}=\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

所以函数的值域为 $\left[\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$.

注记. 有关含 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的二次函数值域问题, 必须注意隐含条件 $|\sin x|\leqslant 1$ 和 $|\cos x|\leqslant 1$.

例 2.1.12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 对任意实数 α,β 有

$$f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)f\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \text{且} f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

(1) 求证: $f(-x)=f(x)=-f(\pi-x)$;

(2) 若 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)>0$, 求证: $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减;

(3) 求 $f(x)$ 的最小周期并加以证明.

分析. *正确理解所给等式, 通过赋值法, 定义法解答本题.*

解. (1) 因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2f\left(\frac{\pi}{3}\right)f(0)$, 且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, 所以 $f(0)=1$.

又 $f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)$, 故 $f(x)=f(-x)$.

又由于 $f(x)+f(\pi-x)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, 故有

$$f(x)=f(-x)=-f(\pi-x)$$

(2) 由 $f(-x)=f(x)$ 且 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)>0$, 得当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)>0$.

设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$, 则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=f(x_1)+f(\pi-x_2)\\&=2f\left(\frac{x_1+\pi-x_2}{2}\right)f\left(\frac{x_1+x_2-\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

因为 $0\leqslant\frac{x_1-x_2+\pi}{2}<\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2-\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$, 所以

$$f\left(\frac{x_1+\pi-x_2}{2}\right)>0, f\left(\frac{x_1+x_2-\pi}{2}\right)>0$$

从而 $f(x_1)>f(x_2)$, 即 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减.

(3) 由 (1) $f(-x)=-f(\pi-x)$, 得

$$f(x)=-f(\pi+x), f(\pi+x)=-f(2\pi+x)$$

所以 $f(2\pi+x)=f(x)$, 说明 2π 是原函数的一个周期.

假设 T_0 也是原函数的一个周期, 且 $T_0\in(0,2\pi)$, 则由 $f(T_0+x)=f(x)$, 得 $f(0)=f(T_0)$.

但若 $T_0\in(0,\pi]$ 时, 因原函数是单调递减函数, 所以 $f(0)>f(T_0)$, 两者矛盾;

若 $T_0\in(\pi,2\pi)$ 时, $2\pi-T_0\in(0,\pi)$, 从而 $f(0)>f(2\pi-T_0)=f(-T_0)=f(T_0)$, 两者矛盾, 所以 T_0 不是原函数的一个周期, 即 2π 是原函数的最小正周期.

注记. *有关周期函数有下面几个结论:*

(1) 若 $f(x)$ 的图象有两条对称轴 $x=a$ 和 $x=b$, 则 $f(x)$ 是周期函数, 且 $2|b-a|$ 是它的一个周期;

(2) 若 $f(x)$ 的图象有两个对称中心 $(a,0)$ 和 $(b,0)$, 则 $f(x)$ 是周期函数, 且 $2|b-a|$ 是它的一个周期;

(3) 若 $f(x)$ 的图象有一个对称中心 $(a,0)$ 和一条对称轴 $x=b$, 则 $f(x)$ 是周期函数, 且 $4|b-a|$ 是它的一个周期.

上述结论中, 不妨证明结论 (1):

因为

$$f(2a-x)=f(x)\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x),$$
$$f(2b-x)=f(x)\Leftrightarrow f(b+x)=f(b-x),$$

则

$$f[2b-(2a-x)]=f(2a-x)=f(x).$$

即 $f[x+2(b-a)]=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是以 $2|b-a|$ 为周期的周期函数. 读者不妨对结论 (2) 和 (3) 加以证明.

例 2.1.13. 设函数 $f(x)=\sin\left(\frac{11}{6}\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 对于任意的正数 α, 是否总能找到不小于 α, 且不大于 $(\alpha+1)$ 的两个数 a 和 b, 使 $f(a)=1$ 而 $f(b)=-1$? 请回答并论证;

(3) 若 α 限定为任意自然数, 请重新回答和论证上述问题.

分析. *本题的第 (2), (3) 题实际上说的是能否找到一个长度为 1 的区间, 使在此区间上, $f(x)$ 既取得最大值, 又能取得最小值.*

解. (1) $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{11}{6}\pi}=\frac{12}{11}$.

(2) 由于 $T>1$, 因此在长为 1 的区间上, $f(x)$ 不能得出一段完整周期的图形.

现任取一使 $f(x)$ 取最大值 1 的 x 值为 a, 如取 $a=\frac{1}{11}$, 则 $f\left(\frac{1}{11}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=1$, 令 $\alpha=a-\frac{5.5}{11}=-\frac{9}{22}$, 则 $\alpha+1=-\frac{9}{22}+1=\frac{13}{22}$, 则对于 $\alpha=-\frac{9}{22}$, 就不能在区间 $\left(-\frac{9}{22},\frac{13}{22}\right)$ 上找到 b, 使 $f(b)=-1$.

(3) 使 $f(x)$ 取最大值 1 的 x 集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\,,k\in\mathbb{Z}\right\}$ (只需令 $\frac{11}{6}\pi x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 即可解出这些值).

使 $f(x)$ 取最小值 -1 的 x 集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\,,k\in\mathbb{Z}\right\}$, 由于

$$\left(\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right)-\left(\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right)=\frac{6}{11}$$
$$\left[\frac{12}{11}(k+1)+\frac{1}{11}\right]-\left(\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right)=\frac{12}{11}$$

故若 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=n(n\in\mathbb{Z})$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 则 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right]=n$ 或 $n+1$, 且 $\left[\frac{12}{11}(k+1)+\frac{1}{11}\right]=n+1$ 或 $n+2$, 而 $k=0$ 时, $\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=0$, 这说明对于任一自然数 n, 必存在 k, 使 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=n$ 或 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right]=n$.

若对某一自然数 n, 有 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=n$, 令 $\alpha=\left(\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right)-n$, 则当 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{5}{11}$ 时, $\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\in(n,n+1]$. 当 $\frac{6}{11}\leqslant\alpha\leqslant\frac{10}{11}$ 时, $\frac{12}{11}(k-1)+\frac{7}{11}\in[n,n+1)$, 总之, 在 $[n,n+1]$ 中, 存在二数 a,b, 使 $f(a)=1$ 且 $f(b)=-1$.

若对某一自然数 n, 有 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right]=n$, 且 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=n-1$, 则令 $\alpha'=\left(\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right)-n$, 显然 $\alpha'<\frac{6}{11}$, 即 $0\leqslant\alpha'\leqslant\frac{5}{11}$, 此时 $\left[\frac{12}{11}(k+1)+\frac{1}{11}\right]\in(n,\ n+1]$, 即在 $[n,n+1]$ 中仍可找到二数 a,b, 使 $f(a)=1$ 且 $f(b)=-1$.

综上所述, 对于任意自然数 n, 总能找到不小于 n 且不大于 $(n+1)$ 的两个数 a,b, 使 $f(a)=1$ 且 $f(b)=-1$.

注记. *对于存在性问题的探索, 通常以举出反例来说明其不存在, 而必须通过严密论证来说明其存在.*

例 2.1.14. 试求满足 $\sin xy=\sin x+\sin y$ 的所有 $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

解. 不存在这样的数对.

事实上, 如果 $x\in(0,1]$, 则 $\sin xy\leqslant\sin y<\sin x+\sin y$, 所以 $x\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right]$

同理可知, $y\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right]$.

而当 $x,y\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,

$$\sin x+\sin y>2\sin 1>2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}>1,$$

这与 $\sin xy\leqslant 1$ 矛盾.

所以这样的 x,y 不存在.

例 2.1.15. 设函数 $f(x)=3\sin x+2\cos x+1$. 若实数 a,b,c 使 $af(x)+bf(x-c)=1$ 对任意实数 x 恒成立, 求 $\frac{b\cos c}{a}$ 的值. (2007 年全国高中数学联赛)

解. 由题设可得

$$f(x)=\sqrt{13}\sin(x+\varphi)+1, f(x-c)=\sqrt{13}\sin(x+\varphi-c)+1$$

其中 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 且 $\tan\varphi=\frac{2}{3}$. 于是,

$$af(x)+bf(x-c)=1$$

可化为

$$\sqrt{13}a\sin(x+\varphi)+\sqrt{13}b\sin(x+\varphi-c)+a+b=1$$

即

$$\begin{gathered}\sqrt{13}a\sin(x+\varphi)+\sqrt{13}b\sin(x+\varphi)\cos c\\ -\sqrt{13}b\cos(x+\varphi)\sin c+(a+b-1)=0\end{gathered}$$

所以

$$\sqrt{13}(a+b\cos c)\sin(x+\varphi)-\sqrt{13}b\sin c\cos(x+\varphi)+(a+b-1)=0$$

由条件, 上式对任意 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立, 故必有

$$\begin{cases}a+b\cos c=0\\ b\sin c=0\\ a+b-1=0\end{cases}\tag{1}$$

由 (2) 可知 $b=0$, 或 $\sin c=0$.

若 $b=0$, 则由 (1) 知 $a=0$, 显然不满足 (3) 式, 故 $b\neq 0$, 所以 $\sin c=0$, 故 $c=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

当 k 为偶数时, $\cos c=1$, 则 (1)(3) 两式矛盾;

当 k 为奇数时, $\cos c=-1$, 由 (1)(3) 知 $a=b=\frac{1}{2}$.

所以 $\frac{b\cos c}{a}=-1$.

注记. 恒等式 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 在解题中常常用到. 本题将 $3\sin x+2\cos x=\sqrt{13}\sin(x+\varphi)$ 看成整体, 简化了解题. 其次, 对于 $f(x)=a\sin x+b\cos x+c, x\in\mathbb{R}$ 恒为常数的充分必要条件为 $a=b=0$. 本题如果改作填空题或选择题, 也可从特殊值人手, 因为 $x\in\mathbb{R}, f(x)+f(x-\pi)=2$, 于是取 $a=b=\frac{1}{2}, c=\pi$, 则对任意 $x\in\mathbb{R}, af(x)+bf(x-c)=1$, 由此得 $\frac{b\cos c}{a}=-1$.

例 2.1.16. 函数 $F(x)=\left|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B\right|$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A,B 有关, 问 A,B 取什么值时, M 为最小? 证明你的结论. (1983 年全国高中数学联赛)

分析. 对 $F(x)$ 变形

$$\left|\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x-\sin^2 x+Ax+B\right|=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|$$

故 $F(x)$ 是一个三角函数与一个一次函数之和, 因为三角函数是一个周期函数, 而 $Ax+B$ 是一个一次或零次函数, 所以不管怎样, 只要 A,B 中有一个不为 $0, F(x)$ 最大值显然增大. 故猜想 M 的最小值在 $A=B=0$ 时取得.

解. 解法一 $F(x)=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|$.

取 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$, 则 $g\left(\frac{\pi}{8}\right)=g\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\sqrt{2}, g\left(\frac{5\pi}{8}\right)=-\sqrt{2}$.

取 $h(x)=Ax+B$, 若 $A=0, B\neq 0$, 则当 $B>0$ 时, $F\left(\frac{\pi}{8}\right)>\sqrt{2}$, 当 $B<0$ 时, $F\left(\frac{5\pi}{8}\right)<\sqrt{2}$. 从而 $M>\sqrt{2}$.

若 $A\neq 0$, 则当 $h\left(\frac{5\pi}{8}\right)<0$ 时, $F\left(\frac{5\pi}{8}\right)>\sqrt{2}$, 当 $h\left(\frac{5\pi}{8}\right)\geqslant 0$ 时, 由于 $h(x)$ 是一次函数, 当 $A>0$ 时, $h(x)$ 递增, $h\left(\frac{9\pi}{8}\right)>h\left(\frac{5\pi}{8}\right)>0$, 此时 $F\left(\frac{9\pi}{8}\right)>\sqrt{2}$; 当 $A<0$ 时, $h(x)$ 递减, $h\left(\frac{\pi}{8}\right)>h\left(\frac{5\pi}{8}\right)>0$, 此时 $F\left(\frac{\pi}{8}\right)>\sqrt{2}$. 故此时 $M>\sqrt{2}$.

若 $A=B=0$, 显然有 $M=\sqrt{2}$.

从而 M 的最小值为 $\sqrt{2}$, 这个最小值在 $A=B=0$ 时取得.

解法二 (反证法) 假设存在 A,B 使 $M<\sqrt{2}$, 则

$$\left\{\begin{array}{l}F(\frac{\pi}{8})<\sqrt{2},\\ F(\frac{5\pi}{8})<\sqrt{2},\\ F(\frac{9\pi}{8})<\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}|\sqrt{2}+A\cdot\frac{\pi}{8}+B|<\sqrt{2},\\ |-\sqrt{2}+A\cdot\frac{5\pi}{8}+B|<\sqrt{2}\\ |\sqrt{2}+A\cdot\frac{9\pi}{8}+B|<\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-2\sqrt{2}<A\cdot\frac{\pi}{8}+B<0\\ 0<A\cdot\frac{5\pi}{8}+B<2\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2}<A\cdot\frac{9\pi}{8}+B<0\end{array}\right. \tag{1}$$

(1) + (3) 得

$$-2\sqrt{2}<A\times\frac{5\pi}{8}+B<0 \tag{4}$$

显然 (4) 与 (2) 矛盾. 所以 $M \geqslant \sqrt{2}$.

又因为当 $A=B=0$ 时, $M=\sqrt{2}$.

从而 M 的最小值为 $\sqrt{2}$, 此时 $A=B=0$.

注记. 对于一类恒成立问题 (或最大值与最小值问题), 我们常考虑其关键点时成立, 然后让其一般情况下也成立. 本题抓住 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的两个最大值点 $\left(\frac{\pi}{8},\sqrt{2}\right),\left(\frac{9\pi}{8},\sqrt{2}\right)$ 与一个最小值点 $\left(\frac{5\pi}{8},-\sqrt{2}\right)$. 从图象就可以知道 $M\geqslant\sqrt{2}$, 然后证明满足. 以上两种证明方法均依据特殊点性质进行论证.

例 2.1.17. 已知 $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=\pi,\theta_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$, 求 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_n$ 的最大值. (第 18 届俄罗斯中学生数学竞赛)

解. 因为 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$

$$\begin{aligned}
&=(\sin\theta_1+\sin\theta_2)^2-2\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\\
&=4\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+\cos(\theta_1+\theta_2)-\cos(\theta_1-\theta_2)\\
&=2\cos^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\left(2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1\right)+1+\cos(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned}$$

当 $\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$ 时, $2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1<0$;

当 $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ 时, $2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1=0$;

当 $\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$ 时, $2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1>0$.

由此可得出, 当 $\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$ 时, θ_1 与 θ_2 有一个为零时, $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$ 有最大值; 当 $\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$, 且 $|\theta_1-\theta_2|$ 越小时, $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$ 值越大.

当 $n=3$ 时, 即 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$ 时, 容易证明

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3\leqslant\frac{9}{4}$$

而当 $n\geqslant 4$ 时, 可知 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 中必有两个角不超过 $\frac{\pi}{2}$.

由前面结论知, $\theta_1+\theta_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时, 当 θ_1 与 θ_2 有一个为零时, $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$ 有最大值. 于是所求的最大值可转化成三个角的和为 π, 其正弦值的平方的最大值问题.

另一方面 $n=2$ 时, $\theta_1+\theta_2=\pi,\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2\leqslant 2$.

综上所述, 当 $n=2$ 时, $\left(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2\right)_{\max}=2$.

当 $n\geqslant 3$ 时, $\left(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3+\cdots+\sin^2\theta_n\right)_{\max}=\frac{9}{4}$, 且当 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\frac{\pi}{3},\theta_4=\theta_5=\cdots=\theta_n=0$ 时, 取等号.

注记. 从简单情况推出一般情况是解竞赛题的常用策略. 本题先考虑 $n=2,3$ 的情况, 然后将 $n\geqslant 4$ 的情况转化为 $n=3$ 的情况.

例 2.1.18. 求所有的实数 α 的值, 使数列 $a_n=\cos 2^n\alpha(n=1,2,\cdots)$ 中每一项都为负数. (2003 年日本数学竞赛)

证明. 首先, 若 α 是满足条件的实数, 则 $\cos\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$.

事实上: 若 $\cos\alpha \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, 则

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 < -\frac{7}{8}$$

$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 > 0$, 矛盾.

由上述推导可知: 对于任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 均有 $\cos 2^n\alpha \leqslant -\frac{1}{4}$, 于是

$$\left|\cos 2^n\alpha - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{3}{4}$$

注意到 $\left|\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right| = \left|2\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right| = 2\left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right|\left|\cos\alpha - \frac{1}{2}\right|$,

有

$$\begin{aligned}\left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right| &\leqslant \frac{2}{3}\left|\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\right) \leqslant \cdots \\ &\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n\left|\cos 2^n\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$, 故 $\cos\alpha + \frac{1}{2} = 0$.

所以 $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, 即 $\alpha = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

另一方面, 当 $\alpha = 2k\pi \pm \frac{2}{3}\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, 对于任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 均有 $\cos 2^n\alpha = -\frac{1}{2}$ 满足条件.

综上所述, $\alpha = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. ■

注记. 本题也可这样思考, 对于 $\cos\alpha = \cos 2\alpha < 0$ 的值, 能满足题设条件. 由 $\cos\alpha = \cos 2\alpha < 0$, 得 $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, 所以 $\alpha = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

例 2.1.19. 设 $F_n = x^n\sin(n\alpha) + y^n\sin(n\beta) + z^n\sin(n\gamma)$, 其中 $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_+, \alpha + \beta + \gamma = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 试证若 $F_1 = F_2 = 0$, 则对一切正整数 n, 有 $F_n = 0$.

分析. 由 F_n 的形式, 联想到复数的方幂 $z^n = \gamma^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$. 故可设 $z_1 = x(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha), z_2 = y(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta), z_3 = z(\cos\gamma + \mathrm{i}\sin\gamma)$. 这样 F_n 是 $z_1^n + z_2^n + z_3^n$ 的虚部, 所以只要证明 $z_1^n + z_2^n + z_3^n$ 为实数.

解. 设复数 $z_1 = x(\cos\alpha + i\sin\alpha), z_2 = y(\cos\beta + i\sin\beta), z_3 = z(\cos\gamma + \mathrm{i}\sin\gamma)$, 则 $z_1 + z_2 + z_3 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + \mathrm{i}F_1 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2 + z_2\cdot z_3 + z_3\cdot z_1 =& \frac{1}{2}\left[(z_1 + z_2 + z_3)^2 - \left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right)\right] \\ =& \frac{1}{2}\left[(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 - x^2(\cos 2\alpha + \right. \\ & \left. i\sin 2\alpha) - y^2(\cos 2\beta + i\sin 2\beta) - z^2(\cos 2\gamma + i\sin 2\gamma)\right] \\ =& \frac{1}{2}\left[(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 - \right. \\ & \left.\left(x^2\cos 2\alpha + y^2\cos 2\beta + z^2\cos 2\gamma\right) - \mathrm{i}F_2\right] \\ =& \frac{1}{2}\left[(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 - \right. \\ & \left.\left(x^2\cos 2\alpha + y^2\cos 2\beta + z^2\cos 2\gamma\right)\right] \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = xyz[\cos(\alpha+\beta+\gamma) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma)] = \pm xyz \in \mathbb{R}.$$

不妨令

$$a = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

$$b = \frac{1}{2}\left[(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 - \left(x^2\cos 2\alpha + y^2\cos 2\beta + z^2\cos 2\gamma\right)\right],$$

$c = \pm xyz$, 则 z_1, z_2, z_3 是实系数方程

$$u^3 - au^2 + bu - c = 0$$

的三个根.

设 $S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n$, 则 $S_{n+3} = aS_{n+2} - bS_{n+1} + cS_n$.

下面用数学归纳法证明 $S_n \in \mathbb{R}$.

(i) 当 $n = 0$ 时, $S_0 = 3 \in \mathbb{R}$;

当 $n = 1$ 时, $S_1 = z_1 + z_2 + z_3 = a \in \mathbb{R}$;

当 $n = 2$ 时,

$$\begin{aligned} S_2 &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \\ &= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1) \\ &= a^2 - 2b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(ii) 假设 $n = k-2, k-1, k$ 时, 命题成立, 即 $S_{k-2}, S_{k-1}, S_k \in \mathbb{R}$.

则当 $n = k+1$ 时, $S_{k+1} = aS_k - bS_{k-1} + cS_{k-2} \in \mathbb{R}$.

由 (i) (ii) 可知, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $S_n \in \mathbb{R}$.

又因为 F_n 是 S_n 的虚部, 所以 $F_n = 0, n \in \mathbb{N}_+$ 恒成立.

注记. 由特殊推一般, 数学归纳法是常用的好方法.

2.2 三角函数恒等变换

2.3 三角形中的三角函数

2.4 反三角函数与简单的三角方程

2.5 三角不等式

2.6 三角函数的综合应用

第三章　复数与向量

3.1　向量补充知识

3.1.1　外积的定义及基本性质

两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的外积是一个新的向量 $\vec{a}\times\vec{b}$, 其模长为 $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$, 方向垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 且 $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 构成右手系. 从定义易知, $\vec{a}\times\vec{a}=\overrightarrow{0}$. 设 $\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, 则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=2S_{\triangle OAB}$. 外积满足下列运算法则:

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$;

(3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})\quad(\lambda\in\mathbb{R})$.

设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\,,\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, 则

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\vec{k}\\&=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

3.1.2　向量的混合积

三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 作运算 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 称为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积, 记为 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. 设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\,,\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\,,\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, 则

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

由行列式的运算性质可知:

$$\begin{aligned}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})&=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})\\&=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a}).\end{aligned}$$

混合积可用来判断三个向量共面: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面当且仅当 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

3.1.3　空间平面方程

过点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 且与非零向量 $\vec{n} = (A, B, C)$ 垂直的平面 Π 的方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

这称为 Π 的点法式方程, $\vec{n}$ 称为 Π 的法向量. 由点法式方程可将 Π 的方程化为 $Ax + By + Cz + D = 0$, 称之为 Π 的一般式方程. 给定 $\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, 则两平面的夹角 θ 即两平面法向量 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 的夹角 (取非钝角), 故

$$\cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

3.1.4　空间直线方程

过点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 且平行于非零向量 $\vec{s} = (m, n, p)$ 的直线方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

称之为直线的点向式方程, $\vec{s}$ 称为其方向向量, 其参数式方程可表示为

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

需要说明的是, 点向式方程中, 允许 m, n, p 中的一个或两个为 0 , 此时就意味着其所对应的分子为 0 .

直线方程的另一种表示方法为 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ 其意义为将直线表示为两个平面的交线, 我们称之为直线的交面式方程.

两条直线的夹角 θ 即为两直线方向向量 $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ 的夹角 (取非针角), 故

$$\cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}\right|}{\left|\vec{s}_1\right| \cdot \left|\overrightarrow{s_2}\right|}.$$

给定平面 $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ 和直线 $l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$, 当 Π 与 l 垂直时, 定义它们的夹角为 $\frac{\pi}{2}$, 当 Π 与 l 不垂直时, 定义它们的夹角 θ 为 l 与其在平面 Π 上的投影直线 l' 的夹角 (取锐角), 故

$$\sin\theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

其中 $\vec{s}$ 为 l 的方向向量, $\vec{n}$ 为 Π 的法向量.

过直线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的平面束方程为 $\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$, 其中 λ_1,λ_2 不全为零. 通常我们固定 $\lambda_1=1$, 记 $\lambda_2=\lambda$, 得到简化写法

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

例 3.1.1. 设点 $A(1,2,3),B(3,4,5),C(2,4,7)$. 求三角形 ABC 的面积.

解.

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\angle BAC \\
&= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| \\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}|(4,-6,2)| \\
&= \sqrt{14}.
\end{aligned}$$

例 3.1.2. 求过三点 $M_1(2,-1,4),M_2(-1,3,-2),M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.

解. 解法 1: 设 Π 的法向量为 $\vec{n}$. 由于 $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2},\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_3}$, 故可取

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(14,9,-1),$$

又 $M_1\in\Pi$, 故 Π 的方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$, 即 $14x+9y-z-15=0$.

解法 2: 设 $M(x,y,z)$ 为 Π 上任意一点, 由 $\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}$ 共面知, $\left(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}\right)=0$, 即 $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$, 将行列式展开, 即得 $14x+9y-z-15=0$.

注记. 一般地, 过三点 $M_k(x_k,y_k,z_k)\,(k=1,2,3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

例 3.1.3. 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点, 求 P_0 到平面的距离 d.

解. 平面的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$, 在平面上取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 则 P_0 到平面的距离为

$$\begin{aligned}
d=\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\cdot\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{P_1P_0}\right\rangle\right| &= \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} \\
&= \frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},
\end{aligned}$$

由 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ 可知,

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

例 3.1.4. 用点向式表示直线 $\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

解. 先在直线上找一点. 令 $x=1$, 解方程组 $\begin{cases} y+z=-2, \\ y-3z=6 \end{cases}$, 得 $y=0, z=-2$, 故 $(1,0,-2)$ 为直线上一点. 再求直线的方向向量 $\vec{s}$. 由 $\vec{s}$ 与平面 $x+y+z+1=0$ 的法向量 $\vec{n}_1=(1,1,1)$ 垂直, 且与平面 $2x-y+3z+4=0$ 的法向量 $\vec{n}_2=(2,-1,3)$ 垂直, 故可取

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(4,-1,-3).$$

因此所给直线的点向式方程为 $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}$.

例 3.1.5. 求过点 $P(2,1,3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解. 设已知直线为 l, 则 l 的方向向量为 $\vec{s}=(3,2,-1)$. 设过点 P 且垂直于 l 的平面为 Π, 则 Π 的法向量 $\vec{n}$ 即为 $\vec{s}$, 故 Π 的方程为 $3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$. 易知 l 与 Π 的交点在所求直线上, 我们先求 l 与 Π 的交点 Q.

将 l 化为参数方程 $\begin{cases} x=3t-1, \\ y=2t+1, \\ z=-t, \end{cases}$ 代入 Π 的方程, 即

$$3(3t-1-2)+2(2t+1-1)-(-t-3)=0,$$

解得 $t=\frac{3}{7}$, 故 $Q\left(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7}\right)$. 取 $\overrightarrow{QP}=\left(\frac{12}{7},-\frac{6}{7},\frac{24}{7}\right)$ 为所求直线的方向向量, 即得所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

例 3.1.6. 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

解. 过已知直线的平面束方程为 $x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$, 即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0,$$

其法向量为 $\vec{n}_1=(1+\lambda,1-\lambda,-1+\lambda)$.

已知平面的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,1)$, 令 $\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{n_2}=0$, 解得 $\lambda=-1$, 即得与已知平面垂直且过已知直线的平面方程: $y-z-1=0$, 由此得到所求投影直线的方程为 $\begin{cases} y-z-1=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

注记. 作为一个练习, 可尝试再将所求直线方程化为点向式.

例 3.1.7. 求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y=2x, \\ z=x-1, \end{cases}$ $L_2:\begin{cases} y=3x-4, \\ z=2x-1 \end{cases}$ 均相交的直线 L 的方程.

解. L_1, L_2 的参数方程分别为 $L_1:\begin{cases} x=t, \\ y=2t, \\ z=t-1, \end{cases}$ $L_2:\begin{cases} x=t, \\ y=3t-4, \\ z=2t-1, \end{cases}$

设 L 与它们的交点分别为 $M_1\left(t_1, 2t_1, t_1-1\right), M_2\left(t_2, 3t_2-4, 2t_2-1\right)$. 由 M_0, M_1, M_2 三点共线知: $\overrightarrow{M_0M_1}//\overrightarrow{M_0M_2}$, 故

$$\overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} = \vec{0}.$$

即

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t_1-1 & 2t_1-1 & t_1-2 \\ t_2-1 & 3t_2-5 & 2t_2-2 \end{vmatrix} = \vec{0},$$

解得 $t_1=0, t_2=2$.

故 $M_1(0,0,-1), M_2(2,2,3)$, 由此得 L 的方向向量 $\vec{s}=(2,2,4)$, 故 L 的方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$.

最后是习题中可能会用到的几个简单的结论, 请自行证明.

1. 过点 $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ 且与非零向量 $\vec{n}=(A,B,C)$ 垂直的平面方程为

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0.$$

2. 过点 $P\left(x_0, y_0, z_0\right)$ 且平行于非零向量 $\vec{s}=(m,n,p)$ 的直线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

3. 点 P 到过 A, B 的直线的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

4. 过点 A, B 与过点 C, D 的两异面直线之间的距离

$$d=\frac{|(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|}.$$

3.1.5　习题

练习 3.1.1. 求垂直于平面 $z=0$ 且通过点 $M_0(1,-1,1)$ 到直线 $L:\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$ 垂线的平面方程.

解. 直线 L 的方向向量 $\vec{l}=\{0,-1,-1\}$, 故过点 M_0 且与直线 L 垂直的平面 N 的方程为

$$-(y+1)-(z-1)=0,$$

即 $y+z=0$. 解方程组 $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0, \\ y+z=0, \end{cases}$ 得直线 L 与平面 N 的交点 $M_1\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. 由题意, 设所求平面方程为 $Ax+By+D=0$, 将 M_0,M_1 坐标代人, 得 $\begin{cases} A-B+D=0, \\ -\frac{B}{2}+D=0, \end{cases}$ 解得 $A=D,B=2D$. 故所求的平面方程为: $x+2y+1=0$.

练习 3.1.2. 证明两直线

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2} \text{ 与} \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$$

共面, 并求该平面方程.

解. 记 $M_1(2,-2,3),\vec{l_1}=(1,-1,2),M_2(1,-1,1),\vec{l_2}=(-1,2,1)$. 则 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,-2)$.

因为

$$\left(\vec{l_1}\times\vec{l_2}\right)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0,$$

所以两直线共面. 取 $\vec{n}=\vec{l_1}\times\vec{l_2}=(-5,-3,1)$, 则所求平面方程为

$$-5(x-2)-3(y+2)+(z-3)=0,$$

即 $5x+3y-z-1=0$.

练习 3.1.3. 在平面 $N:x+y+z=1$ 上求一直线 L, 使其与直线 $L_1:\begin{cases} y=1, \\ z=-1 \end{cases}$ 垂直且相交.

解. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ y=1, \\ z=-1, \end{cases}$ 解得交点 $D(1,1,-1)$. 过点 D 与直线 L_1 垂直的平面方程为 $x-1=0$, 所求的直线 L 的方程为 $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x-1=0. \end{cases}$

练习 3.1.4. 求两异面直线

$$L_1: x+1=y=\frac{z-1}{2} \text{ 与} L_2: x=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$$

之间的最短距离.

解. 在 L_1 上找点 $A(-1,0,1), B(0,1,3)$, 在 L_2 上找点 $C(0,-1,2)$, $D(1,2,6)$.

则 $\overrightarrow{AC}=(1,-1,1), \overrightarrow{AB}=(1,1,2), \overrightarrow{CD}=(1,3,4)$. 由混合积的几何意义可知：

$$d=\frac{\left\|\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}\right\|}{\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}\right\|}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3.2 单位根

对于方程

$$x^n-1=0,(n\in\mathbb{N}^*, n\geqslant 2)$$

由复数开方法则得到它的 n 个根

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}.(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

它们显然是 1 的 n 次方根, 称为 n 次单位根.

利用复数乘方公式, 有

$$\varepsilon_k=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=\varepsilon_1^k.$$

这说明, n 个 n 次单位根可以表示为

$$1,\varepsilon_1,\varepsilon_1^2,\cdots,\varepsilon_1^{n-1}.$$

关于 n 次单位根, 有如下一些性质：

(1) $|\varepsilon_k|=1.(k\in\mathbb{N})$

(2) $\varepsilon_j\varepsilon_k=\varepsilon_{j+k}.\quad(j,k\in\mathbb{N})$

(3) $1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}=0.\quad(n\geqslant 2)$

(4) 设 m 是整数, 则

$$1+\varepsilon_1^m+\varepsilon_2^m+\cdots+\varepsilon_{n-1}^m=\begin{cases}n, \text{ 当}m\text{ 是}n\text{ 的倍数时;}\\ 0, \text{ 当}m\text{ 不是}n\text{ 的倍数时.}\end{cases}$$

例 3.2.1. 已知单位圆的内接正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 及圆周上一点 P, 求证：

$$\sum_{k=1}^{n}\left|PA_k\right|^2=2n.$$

证明. 设 $\zeta=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}n}{n}}, A_1,\cdots,A_n$ 对应的复数是 $1,\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^{-1}$. 又设 P 点 (对应的复数) 为 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$. 则我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left|PA_k\right|^2&=\sum_{k=0}^{n-1}\left|z-\zeta^k\right|^2=\sum_{k=0}^{n-1}\left(z-\zeta^k\right)\left(\bar{z}-\zeta^{-k}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(|z|^2-\zeta^k\bar{z}-\zeta^{-k}z+1\right)\\&=2n-\bar{z}\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^k-z\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{-k}=2n,\end{aligned}$$

(最后一步应用了 $1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{-1}=0$). ■

注记. 更多有关单位圆内接正 n 边形的类似问题请参见练习.

例 3.2.2. 设 $P(x),Q(x),R(x)$ 及 $S(x)$ 都是多项式, 且

$$P\left(x^5\right)+xQ\left(x^5\right)+x^2R\left(x^5\right)=\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)S(x),$$

求证：$x-1$ 是 $P(x),Q(x),R(x)$ 及 $S(x)$ 的公因式.

证明. 设 ζ 是一个 5 次单位根 $(\zeta\neq1)$, 在 (1) 中取 $x=\zeta,\zeta^2,\zeta^3,\zeta^4$, 得出

$$\left(\zeta^k\right)^2R(1)+\zeta^kQ(1)+P(1)=0(k=1,2,3,4),$$

这意味着多项式 $x^2R(1)+xQ(1)+P(1)$ 有四个不同的零点.
从而必须 $R(1)=Q(1)=P(1)=0$.
再将 $x=1$ 代入 (1), 得 $S(1)=0$.
于是 $P(x),Q(x),R(x)$ 及 $S(x)$ 都有因式 $x-1$. ■

例 3.2.3. 求最小的正整数 n, 使 $n\times n$ 格纸可以划分为若干 40×40 和 49×49 格纸 (这两种格纸都要有).

解. $n=2000$ 时, 将 2000×2000 分出一个 1960×1960 (用 49×49 铺满), 别的部分用 40×40 铺满, 故 $n=2000$ 满足.

设用 a 块 $40\times40, b$ 块 49×49 铺满 $n\times n$ 格纸, 则 $40^2a+49^2b=n^2$.

将从上往下第 k 行, 从左往右第 j 列的交叉格内填上 z^kw^j , 其中 $z=\cos\frac{2\pi}{40}+i\sin\frac{2\pi}{40}, w=\cos\frac{2\pi}{49}+i\sin\frac{2\pi}{49}$, 则每个 $40\times40, 49\times49$ 盖住的格子内数之和均为 0 , 故方格表内所有数之和均为 0 , 即

$$0=\left(z+z^2+\cdots+z^n\right)\left(w+w^2+\cdots+w^n\right)=zw\frac{z^n-1}{z-1}\cdot\frac{w^n-1}{w-1},$$

故 $z^n=1$ 或 $w^n=1$, 因此 $40\mid n$ 或 $49\mid n$.

若 $40\mid n$, 则 $40^2\mid b$, 即 $b\geqslant 40^2$, 故 $n^2>49^2b\geqslant(40\times 49)^2$, 因此 $n>1960$, 故 $n\geqslant 2000$.

若 $49\mid n$, 与上述方法类似可得 $n\geqslant 2009$.

因此 n 最小为 2000 .

例 3.2.4. 设 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$, 求证:

(1) $(1-\varepsilon)\left(1-\varepsilon^2\right)\cdots\left(1-\varepsilon^{n-1}\right)=n$;

(2) $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

证明. 方程 $x^n-1=0$ 的 n 个单位根是

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},(k=0,1,\cdots,n-1)$$

注意到 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$, 从而有 $\varepsilon_k=\varepsilon^k$.

于是, 由

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)\left(x-\varepsilon^2\right)\cdots\left(x-\varepsilon^{n-1}\right)$$

得

$$(x-\varepsilon)\left(x-\varepsilon^2\right)\cdots\left(x-\varepsilon^{n-1}\right)=\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1.$$

即有

$$(x-\varepsilon)\left(x-\varepsilon^2\right)\cdots\left(x-\varepsilon^{n-1}\right)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1. \tag{3.1}$$

(1) 在式 3.1中, 令 $x=1$, 立得

$$(1-\varepsilon)\left(1-\varepsilon^2\right)\cdots\left(1-\varepsilon^{n-1}\right)=n. \tag{3.2}$$

(2) 对式 3.2的两边取模, 并注意到

$$\left|1-\varepsilon^k\right|=2\sin\frac{k\pi}{n},$$

立得

$$2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=n,$$

即有

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

■

例 3.2.5. 求证：不存在四个整系数多项式 $f_k(x)(k=1,2,3,4)$, 使得恒等式

$$9x+4=f_1^3(x)+f_2^3(x)+f_3^3(x)+f_4^3(x) \tag{3.3}$$

成立.

证明. 记 ω 是三次单位根 $(\omega \neq 1)$, 则对任意整系数多项式 $f(x)$, 利用 $\omega^3=1$ 及 $\omega^2=-1-\omega$ 可将 $f(\omega)$ 化为 $a+b\omega$ (a,b 是整数), 于是 (注意 $1+\omega+\omega^2=0$)

$$f^3(\omega)=(a+b\omega)^3=a^3+b^3-3ab^2+3ab(a-b)\omega.$$

由于 $ab(a-b)$ 总是偶数, 故若存在形如式 3.3的恒等式, 以 $x=\omega$ 代入, 即得

$$9\omega+4=A+B\omega. \tag{3.4}$$

这里 A,B 都是整数, 且 B 是偶数. 但由式 3.4易知 $B=9$, 这显然不可能. ■

例 3.2.6. 设 $z_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 是 $z^n-1=0$ 的 n 个根, 定义

$$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0,$$

其中 m 为小于 n 的正整数, 求证: $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)=a_0$.

证明. 令 $z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}=z_1^k(k=0,1,\cdots,n-1)$, 则由 $m<n$ 时, $z_1^m\neq 1, z_1^n=1$, 知

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_1^{km}=\frac{1-(z_1^m)^n}{1-z_1^m}=0 \tag{3.5}$$

所以 $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)=a_0$(式 3.5用到了性质 4). ■

3.2.1 习题

练习 3.2.1. 求证: $\sin 1+\sin 2+\cdots+\sin n \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$.

证明.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right| &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\right|=\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\right)}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}\right|=\left|\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}\right|\\ &=\frac{\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\right|}{2\sin\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1+\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\right|}{2\sin\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

■

练习 3.2.2. 设 $f(x)$ 是复系数多项式, n 是正整数, 求证: 如果 $(x-1)\mid f(x^n)$, 则 $(x^n-1)\mid f(x^n)$.

证明. $f(x^n)=(x-1)g(x)$. 取 $\zeta=\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}}$ 是一个 n 次单位根, 由 $f(1)=0$ 知, $f\left(\zeta^{kn}\right)=0(k=1,\cdots,n)$. 故 $f(x^n)$ 被 $(x-\zeta)\left(x-\zeta^2\right)\cdots(x-\zeta^n)=x^n-1$ 整除. ■

练习 3.2.3. 设 $g(\theta)=\lambda_1\cos\theta+\lambda_2\cos 2\theta+\cdots+\lambda_n\cos n\theta$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\theta$ 均为实数. 若对一切实数 θ, 恒有 $g(\theta)\geqslant -1$. 求证: $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\leqslant n$.

证明. 令 $\theta_k=\frac{2k\pi}{n+1}, k=0,1,2,\cdots,n$, 则有

$$\sum_{k=0}^{n}\cos m\theta_k=\sum_{k=0}^{n}\sin m\theta_k=0, m=1,2,\cdots,n. \tag{3.6}$$

(事实上, $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta_k}=\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot 2\pi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\frac{2\pi}{n+1}}}=0$, 于是式 3.6成立), 因此

$$\begin{aligned}
&g(0)+g\left(\theta_1\right)+g\left(\theta_2\right)+\cdots+g\left(\theta_n\right)\\
=&\lambda_1\left(\cos 0+\cos\theta_1+\cdots+\cos\theta_n\right)+\lambda_2\left(\cos 0+\cos 2\theta_1+\cdots+\cos 2\theta_n\right)\\
&+\cdots+\lambda_n\left(\cos 0+\cos n\theta_1+\cdots+\cos n\theta_n\right)=0.
\end{aligned}$$

故由 $g\left(\theta_1\right)\geqslant -1, g\left(\theta_2\right)\geqslant -1,\cdots,g\left(\theta_n\right)\geqslant -1$ 得

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=g(0)=-\left[g\left(\theta_1\right)+g\left(\theta_2\right)+\cdots+g\left(\theta_n\right)\right]\leqslant n,$$

■

练习 3.2.4. 有 m 个男孩与 n 个女孩围坐在一个圆周上 $(m>0, n>0, m+n\geqslant 3)$, 将顺序相邻的 3 人中恰有 1 个男孩的组数记作 a, 顺序相邻的 3 人中恰有 1 个女孩的组数记作 b, 求证: $a-b$ 是 3 的倍数.

证明. 用 a_k 表示小孩, 且将 a_k 赋值为 $a_k=\begin{cases}\omega, a_k \text{ 表示男孩时},\\ \bar{\omega}, a_k \text{ 表示女孩时}.\end{cases}$ 其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 有 $\omega^{3m}=1$, 并且

$$a_k a_{k+1} a_{k+2}=\begin{cases}\omega^{-1}, & \left(a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \text{ 中恰有一个男孩}\right)\\ \omega, & \left(a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \text{ 中恰有一个女孩}\right)\\ 1, & \left(a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \text{ 全是男 (女) 孩}\right)\end{cases}$$

从而得

$$\begin{aligned}
1&=\left(a_1 a_2\cdots a_{m+n}\right)^3\\
&=\left(a_1 a_2 a_3\right)\left(a_2 a_3 a_4\right)\cdots\left(a_{m+n} a_1 a_2\right)\\
&=\omega^{b-a},
\end{aligned}$$

故 $a-b$ 是 3 的倍数. ■

注记. 本题相当于一个复数赋值问题.

练习 3.2.5. 已知单位圆的内接正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 及圆周上一点 P, 求证:

(a) $\sum_{k=1}^{n}\left|PA_k\right|^2=2n.$ (b) $\sum_{k=1}^{n}\left|PA_k\right|^4=6n.$

(c) $\sum_{j,k=1}^{n}\left|A_jA_k\right|^2=2n^2$.

(d) $\prod_{k=2}^{n}|A_1A_k|=n$.

(e) $\max\prod_{k=1}^{n}|PA_k|=2$.

证明. 以圆心 O 为原点, 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 分别为 $1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{n-1}$, 这里 ε 为 n 次单位根 $\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$. 又设 P 为 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(a) 见例 3.2.1. 关键在于应用了以下两个等式:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k=0, \tag{3.7}$$

$$z\bar{z}=|z|^2. \tag{3.8}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|PA_k|^4&=\sum_{k=0}^{n-1}\left|z-\varepsilon^k\right|^4\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(z^2-2z\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}\right)\left(\bar{z}^2-2\bar{z}\varepsilon^{-k}+\varepsilon^{-2k}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(6-4z\varepsilon^{-k}-4\bar{z}\varepsilon^k+z^2\varepsilon^{-2k}+\bar{z}^2\varepsilon^{2k}\right)\\&=6n\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n}\left|A_jA_k\right|^2&=\sum_{j,k=1}^{n}\left(\varepsilon^j-\varepsilon^k\right)\left(\varepsilon^{-j}-\varepsilon^{-k}\right)\\&=\sum_{j,k=1}^{n}\left(2-\varepsilon^{j-k}-\varepsilon^{k-j}\right)\\&=2n^2.\end{aligned}$$

(d) 其实就是例 3.2.4中的 (1), 首先

$$\prod_{k=2}^{n}|A_1A_k|=\left|(1-\varepsilon)\left(1-\varepsilon^2\right)\cdots\left(1-\varepsilon^{n-1}\right)\right|.$$

因为

$$z^n-1=(z-1)(z-\varepsilon)\left(z-\varepsilon^2\right)\cdots\left(z-\varepsilon^{n-1}\right), \tag{3.9}$$

所以

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1=(z-\varepsilon)\left(z-\varepsilon^2\right)\cdots\left(z-\varepsilon^{n-1}\right). \tag{3.10}$$

令 $z=1$ 得

$$n=(1-\varepsilon)\left(1-\varepsilon^2\right)\cdots\left(1-\varepsilon^{n-1}\right).$$

从而

$$\prod_{k=2}^{n}|A_1A_k|=n.$$

(e) 在式 3.9两边取模得

$$\left|(z-1)(z-\varepsilon)\cdots\left(z-\varepsilon^{n-1}\right)\right|=|z^n-1|\leqslant|z|^n+1=2,$$

即 $\prod\limits_{k=1}^{n}|PA_k|\leqslant 2$,

等号在 z 为 -1 的 n 次根, 即 P 为 $A_k\overset{\frown}{A}_{k+1}(k=1,2,\cdots,n;\ A_{n+1}=A_1)$ 中点时成立. ■

3.3 复数的模与辐角

例 3.3.1. 对于给定的角 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 试讨论方程

$$x^n+x^{n-1}\sin\alpha_1+x^{n-2}\sin\alpha_2+\cdots+x\sin\alpha_{n-1}+\sin\alpha_n=0$$

是否有模大于 2 的复数根?

解. 答案是否定的. 可以考虑从反面入手去解决. 假定存在 x_0 是原方程的复数解, 并且 $|x_0|>2$, 则有

$$x_0^n=-x_0^{n-1}\sin\alpha_1-\cdots-x_0\sin\alpha_{n-1}-\sin\alpha_n,$$

从而对上式两边取模, 并应用模的不等式, 得

$$\begin{aligned}|x_0|^n&\leqslant|x_0|^{n-1}|\sin\alpha_1|+\cdots+|x_0||\sin\alpha_{n-1}|+|\sin\alpha_n|\\&\leqslant|x_0|^{n-1}+|x_0|^{n-2}+\cdots+|x_0|+1\\&=\frac{|x_0|^n-1}{|x_0|-1}<\frac{|x_0|^n}{|x_0|-1}<\frac{|x_0|^n}{2-1}=|x_0|^n.\end{aligned}$$

这显然产生矛盾, 由此说明原方程没有模大于 2 的复数根.

注记. *将一个等于 0 的式子中起主要作用的项移到 0 的那边, 再两边取模, 用不等式放缩, 是一个重要的技巧.*

例 3.3.2. 是否存在 2002 个不同的正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2002}$, 使得对任意正整数 $k,1\leqslant k\leqslant 2002$, 多项式 $a_{k+2001}x^{2001}+a_{k+2000}x^{2000}+\cdots+a_{k+1}x+a_k$ 的每个复根 z 都满足 $|\operatorname{Im}z|\leqslant|\operatorname{Re}z|$? (约定 $a_{2002+i}=a_i,i=1,2,\cdots,2001$)

解. 不存在.

用反证法. 若存在正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2002}$ 满足题设要求, 对一固定的 k , 设 $a_{k+2001}x^{2001} + a_{k+2000}x^{2000} + \cdots + a_{k+1}x + a_k = 0$ 的复根为 $z_1, z_2, \cdots, z_{2001}$, 那么由于 $\left|\operatorname{Im} z_j\right| \leqslant \left|\operatorname{Re} z_j\right| (1 \leqslant j \leqslant 2001)$, 而

$$\begin{aligned} z_j^2 &= \left(\operatorname{Re} z_j + \mathrm{i} \operatorname{Im} z_j\right)^2 \\ &= \left(\operatorname{Re} z_j\right)^2 - \left(\operatorname{Im} z_j\right)^2 + 2\left(\operatorname{Re} z_j\right)\left(\operatorname{Im} z_j\right) \mathrm{i}, \end{aligned}$$

即 z_j^2 的实部 $\operatorname{Re}\left(z_j^2\right) = \left(\operatorname{Re} z_j\right)^2 - \left(\operatorname{Im} z_j\right)^2 \geqslant 0 (1 \leqslant j \leqslant 2001)$, 所以

$$\operatorname{Re}\left(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{2001}^2\right) = \operatorname{Re}\left(z_1^2\right) + \operatorname{Re}\left(z_2^2\right) + \cdots + \operatorname{Re}\left(z_{2001}^2\right) \geqslant 0. \tag{3.11}$$

而由韦达定理

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_{2001} = \frac{-a_{k+2000}}{a_{k+2001}},$$

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant l \leqslant 2001} z_j z_l = \frac{a_{k+1999}}{a_{k+2001}}$$

所以

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{2001}^2 &= \left(z_1 + z_2 + \cdots + z_{2001}\right)^2 - 2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant 1 \leqslant 2001} z_j z_l \\ &= \frac{a_{k+2000}^2 - 2a_{k+1999}a_{k+2001}}{a_{k+2001}^2}, \end{aligned}$$

即 $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{2001}^2$ 是一个实数. 又由式 3.11知, 其实部 $\geqslant 0$, 所以它是一个非负实数, 即

$$\frac{a_{k+2000}^2 - 2a_{k+1999}a_{k+2001}}{a_{k+2001}^2} \geqslant 0 \Rightarrow a_{k+2000}^2 - 2a_{k+1999}a_{k+2001} \geqslant 0.$$

上式对每个 $1 \leqslant k \leqslant 2002$ 均成立, 即当 $1 \leqslant j \leqslant 2002$, 均有 $a_j^2 - 2a_{j-1}a_{j+1} \geqslant 0$. 但这是不可能的, 事实上: 设 a_{j_0} 是 $a_1, a_2, \cdots, a_{2002}$ 中最小的一个, 那么

$$a_{j_0}^2 - 2a_{j_0-1}a_{j_0+1} \leqslant a_{j_0}^2 - 2a_{j_0}a_{j_0} = -a_{j_0}^2 < 0,$$

矛盾.

注记 (韦达定理)**.** 对称多项式的研究来源于一元 n 次多项式根与系数的关系. 设 x 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的未定元, 代数基本定理告诉我们, $\mathbb{C}[x]$ 中的任意一个 n 次首 *1* 多项式 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 在 $\mathbb{C}$ 中有 n 个根 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, *(*允许有重根*)*. 于是

$$f(x) = \left(x - c_1\right)\left(x - c_2\right) \cdots \left(x - c_n\right). \tag{3.12}$$

将式 *3.12*右端展开, 比较两端 x 同次方幂的系数, 就得到了 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 通过根 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的表达式:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\left(c_1 + c_2 + \cdots + c_n\right) \\ &\cdots\cdots \\ a_k &= (-1)^k \textstyle\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k} \\ &\cdots\cdots \\ a_n &= (-1)^n c_1c_2\cdots c_n. \end{aligned} \tag{3.13}$$

式 3.13叫作韦达公式 (F. Viete, 法国数学家, 1540—1603). 当 $n=2$ 时, 设 $f(x)=x^2+a_1x+a_2$ 的根为 c_1,c_2, 那么

$$c_1+c_2=-a_1$$
$$c_1c_2=a_2$$

就是我们在中学学习过的韦达定理. 如果多项式 $f(x)$ 不是首 1 的, 即首项系数 $a_0\neq 1$, 那么韦达公式给出了比值 $\frac{a_i}{a_0}$ 的表达式.

3.4　赛题选讲

例 3.4.1. 给定一个凸六边形, 其任意两条对边具有如下性质: 它们的中点之间的距离等于它们的长度和的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍. 证明：该六边形的所有内角相等 (一个凸六边形 $ABCDEF$ 有 3 组对边: AB 和 DE,BC 和 EF,CD 和 FA).

解. 引理: $\triangle PQR$ 中, $\angle QPR\geqslant 60^\circ,L$ 为 QR 中点. 则 $PL\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}QR$, 等号当且仅当 $\triangle PQR$ 为正三角形时取到.

引理的证明: 设 S 为平面上一点, 使得 P 与 S 在 QR 的同侧, 而 $\triangle QRS$ 为正三角形. 则由于 $\angle QPR\geqslant 60^\circ$, 故 P 在 $\triangle QRS$ 的外接圆的内部 (包括边界). 而 $\triangle QRS$ 的外接圆落在以 L 为圆心, $\frac{\sqrt{3}}{2}QR$ 为半径的圆内. 所以引理获证.

设 $ABCDEF$ 为给定的凸六边形, 记 $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{BC},\cdots,\vec{f}=\overrightarrow{FA}$. 并设 M N 分别为 AB 和 DE 的中点. 则

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d},$$
$$\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{f}-\vec{e}-\frac{1}{2}\vec{d}.$$

于是

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{e}-\vec{f}). \tag{3.14}$$

由条件, 我们有

$$\left|\overrightarrow{MN}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}(|\vec{a}|+|\vec{d}|)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{a}-\vec{d}|. \tag{3.15}$$

记 $\vec{x}=\vec{a}-\vec{d},\vec{y}=\vec{c}-\vec{f},\vec{z}=\vec{e}-\vec{b}$, 由式 3.14式 3.15可得

$$|\vec{y}-\vec{z}|\geqslant\sqrt{3}|\vec{x}|. \tag{3.16}$$
$$|\vec{z}-\vec{x}|\geqslant\sqrt{3}|\vec{y}|, \tag{3.17}$$
$$|\vec{x}-\vec{y}|\geqslant\sqrt{3}|\vec{z}|. \tag{3.18}$$

上式可写成

$$|\vec{y}|^2-2\vec{y}\cdot\vec{z}+|\vec{z}|^2\geqslant 3|\vec{x}|^2;$$
$$|\vec{z}|^2-2\vec{z}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2\geqslant 3|\vec{y}|^2;$$
$$|\vec{x}|^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{y}|^2\geqslant 3|\vec{z}|^2.$$

上述 3 式相加, 得

$$-|\vec{x}|^2-|\vec{y}|^2-|\vec{z}|^2-2\vec{y}\cdot\vec{z}-2\vec{z}\cdot\vec{x}-2\vec{x}\cdot\vec{y}\geqslant 0.$$

即 $-|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}|\geqslant 0$. 因此 $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=0$, 并且上述所有不等式全部取等号. 于是

$$\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=0,$$

$$\begin{aligned}|\vec{y}-\vec{z}|&=\sqrt{3}|\vec{x}|,\vec{a}//\vec{d}//\vec{x},\\|\vec{z}-\vec{x}|&=\sqrt{3}|\vec{y}|,\vec{c}//\vec{f}//\vec{y},\\|\vec{x}-\vec{y}|&=\sqrt{3}|\vec{z}|,\vec{e}//\vec{b}//\vec{z}.\end{aligned}$$

现在设 $\triangle PQR$ 中, $\overrightarrow{PQ}=\vec{x},\overrightarrow{QR}=\vec{y},\overrightarrow{RP}=\vec{z}$, 并不妨设 $\angle QPR\geqslant 60^\circ$. L 为 QR 中点, 则 $PL=\frac{1}{2}|\vec{z}-\vec{x}|=\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{y}|=\frac{\sqrt{3}}{2}QR$. 利用引理可知, $\triangle PQR$ 为正三角形. 于是, $\angle ABC=\angle BCD=\cdots=\angle FAB=120^\circ$, 证毕.

例 3.4.2. 设实数 $a\ b\ c\ d$ 满足 $b-d\geqslant 5$, 实数 $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ 为多项式 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 的零点, 求 $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)\left(x_4^2+1\right)$ 的最小值.

解.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{4}\left(x_k^2+1\right)&=\prod_{k=1}^{4}\left(x_k-\mathrm{i}\right)\left(x_k+\mathrm{i}\right)\\&=\left[\prod_{k=1}^{4}\left(\mathrm{i}-x_k\right)\right]\left[\prod_{k=1}^{4}\left(-\mathrm{i}-x_k\right)\right]=P(\mathrm{i})\cdot P(-\mathrm{i})\\&=\left(\mathrm{i}^4+a\mathrm{i}^3+b\mathrm{i}^2+c\mathrm{i}+d\right)\left(\mathrm{i}^4-a\mathrm{i}^3+b\mathrm{i}^2-c\mathrm{i}+d\right)\\&=[(1+d-b)+\mathrm{i}(c-a)][(1+d-b)-\mathrm{i}(c-a)]\\&=(b-d-1)^2+(c-a)^2,\end{aligned}$$

由 $b-d\geqslant 5$ 知, $(b-d-1)^2+(c-a)^2\geqslant 4^2+0^2=16$, 当

$$P(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1=(x+1)^4$$

时, $b-d=5,x_1=x_2=x_3=x_4=-1,\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)\left(x_4^2+1\right)$ 取到最小值 16.

例 3.4.3. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n$ 均为模等于 1 的复数, 设

$$z_i=xy_i+yx_i-x_iy_i(i=1,2,\cdots,n),$$

其中 $x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$.

证明: $\sum_{i=1}^{n}|z_i|\leqslant n$.

解. 因为

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n}|z_i| &= \sum_{i=1}^{n}\left|(2xy_i - x_iy_i) + (2yx_i - x_iy_i)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}|2xy_i - x_iy_i| + \sum_{i=1}^{n}|2yx_i - x_iy_i| \qquad (3.19)\\
&= \sum_{i=1}^{n}|2x - x_i| + \sum_{i=1}^{n}|2y - y_i|\,.
\end{aligned}
$$

由柯西不等式知

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}|2x - x_i|\right)^2 &\leqslant n\sum_{i=1}^{n}|2x - x_i|^2 \\
&= n\sum_{i=1}^{n}(2x - x_i)\left(2\bar{x} - \overline{x_i}\right) \\
&= n\cdot\left(4n|x|^2 + n - 2x\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i} - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i\right) \\
&= n^2.
\end{aligned}
$$

即

$$
\sum_{i=1}^{n}|2x - x_i| \leqslant n, \tag{3.20}
$$

同理

$$
\sum_{i=1}^{n}|2y - y_i| \leqslant n. \tag{3.21}
$$

由式 3.19式 3.20式 3.21即得 $\sum_{i=1}^{n}|z_i| \leqslant n$, 得证.

第四章　均值不等式与柯西不等式

4.1　平均值不等式及其证明

平均值不等式是最基本的重要不等式之一, 在不等式理论研究和证明中占有重要的位置. 平均值不等式的证明有许多种方法. 这里, 我们选了部分具有代表意义的证明方法, 其中用来证明平均值不等式的许多结论, 其本身又具有重要的意义. 特别是, 在许多竞赛的书籍中, 都有专门的章节介绍和讨论, 如数学归纳法、变量替换、恒等变形和分析综合方法等, 这些也是证明不等式的常用方法和技巧. 希望大家能认真思考和好好掌握, 熟悉不等式的证明.

4.1.1　平均值不等式

对任意非负实数 a b, 有

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$$

于是, 得

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

一般地, 假设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个非负实数, 它们的算术平均值记为

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

几何平均值记为

$$G_n = (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

算术平均值与几何平均值之间有如下的关系

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

即

$$A_n \geqslant G_n$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时, 等号成立.

上述不等式称为平均值不等式, 或简称为均值不等式.

平均值不等式的表达形式简单, 容易记住, 但它的证明和应用非常灵活、广泛, 其证明有多种不同的方法. 为使大家理解和掌握, 这里我们选择了其中的几种典型的证明方法. 当然, 有些方法是几个知识点的结合, 很难将它们归类, 有些大体相同或相似, 但选择的变量不同, 或处理的方式不同, 导致证明的难易不同, 所以, 我们将它们看作是不同的方法.

4.1.2　平均值不等式的证明

证法一 (归纳法)

(1) 当 $n=2$ 时, 已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$ (正整数 $k\geqslant 2$) 时命题成立, 即对于 $a_i>0, i=1,2,\cdots,k$, 有

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$$

那么, 当 $n=k+1$ 时, 由于

$$A_{k+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}, G_{k+1}=\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}$$

关于 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 是对称的, 任意对调 a_i 与 $a_j(i\neq j)$, 即将 a_i 写成 a_j, a_j 写成 a_i, A_{k+1} 和 G_{k+1} 的值不改变, 因此不妨设 $a_1=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}\}$, $a_{k+1}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}\}$, 显然 $a_1\leqslant A_{k+1}\leqslant a_{k+1}$, 以及

$$A_{k+1}\left(a_1+a_{k+1}-A_{k+1}\right)-a_1a_{k+1}=\left(a_1-A_{k+1}\right)\left(A_{k+1}-a_{k+1}\right)\geqslant 0$$

即

$$A_{k+1}\left(a_1+a_{k+1}-A_{k+1}\right)\geqslant a_1a_{k+1}$$

对 k 个正数 $a_2,a_3,\cdots,a_k,a_1+a_{k+1}-A_{k+1}$, 由归纳假设, 得

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_k+\left(a_1+a_{k+1}-A_{k+1}\right)}{k}\geqslant\sqrt[k]{a_2a_3\cdots a_k\left(a_1+a_{k+1}-A_{k+1}\right)}$$

而

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_k+\left(a_1+a_{k+1}-A_{k+1}\right)}{k}=\frac{(k+1)A_{k+1}-A_{k+1}}{k}=A_{k+1},$$

于是

$$A_{k+1}^k\geqslant a_2a_3\cdots a_k\left(a_1+a_{k+1}-A_{k+1}\right)$$

两边乘以 A_{k+1}, 得

$$\begin{aligned}A_{k+1}^{k+1}&\geqslant a_2a_3\cdots a_kA_{k+1}\left(a_1+a_{k+1}-A_{k+1}\right)\\&\geqslant a_2a_3\cdots a_k\left(a_1a_{k+1}\right)=G_{k+1}^{k+1}\end{aligned}$$

从而, 有 $A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$.

直接验证可知, 当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立, 故命题成立.

注记. *说明利用了证明与正整数有关的命题的常用方法, 即数学归纳法. 数学归纳法证题技巧的应用, 可以说是五彩缤纷, 千姿百态. 应用数学归纳法, 除了需要验证当 $n=1$ 或 $n=n_0$ (这里 n_0 为某个固定的正整数) 外, 其关键是要在 $n=k$ 时成立的假设之下, 导出当 $n=k+1$ 时命题也成立, 要完成这一步, 需要一定的技巧和处理问题的能力, 只有通过多做练习来实现理解和掌握.*

证法二 (归纳法, 与证法一的不同处理)

(1) 当 $n=2$ 时, 已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$ (正整数 $k\geqslant 2$) 时命题成立, 即对于 $a_i>0, i=1,2,\cdots,k$, 有

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$$

那么, 当 $n=k+1$ 时, 由归纳假设得

$$\begin{aligned}
&a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} &(1)\\
&=a_1+a_2+\cdots+a_k+(a_{k+1}+\overbrace{G_{k+1}+\cdots+G_{k+1}}^{(k-1)\text{个}G_{k+1}})-(k-1)G_{k+1} &(2)\\
&\geqslant k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+k\sqrt[k]{a_{k+1}G_{k+1}^{k-1}}-(k-1)G_{k+1} &(3)\\
&\geqslant 2k\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}G_{k+1}^{k-1}}}-(k-1)G_{k+1} &(4)\\
&=2k\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{k+1}G_{k+1}^{k-1}}-(k-1)G_{k+1} &(5)\\
&=2k\sqrt[2k]{G_{k+1}^{k+1}G_{k+1}^{k-1}}-(k-1)G_{k+1} &(6)\\
&=(k+1)G_{k+1} &(7)
\end{aligned}$$

于是 $A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$.

不难看出, 当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立, 故命题成立.

注记. *在这个证明中, 为了利用归纳假设, 将 (1) 写成 (2) 的形式. 由归纳假设, 从 (2) 得到 (3), 由于当 $n=2$ 时, 不等式成立, 则由 (3) 得到了 (4).*

证法三 (归纳法, 另一种处理方式)

(1) 当 $n=2$ 时, 已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$ (正整数 $k\geqslant 2$) 时命题成立, 即对于 $a_i>0, i=1,2,\cdots,k$, 有

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$$

那么, 当 $n=k+1$ 时, 由归纳假设得

$$\begin{aligned}
A_{k+1}&=\frac{1}{2k}\left[(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}\right]\\
&=\frac{1}{2k}(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+\underbrace{A_{k+1}+A_{k+1}+\cdots+A_{k+1}}_{\text{共 k-1}})\\
&\geqslant\frac{1}{2k}\left(k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+k\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}\right)\\
&\geqslant\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}
\end{aligned}$$

所以 $A_{k+1}^{2k}\geqslant a_1a_2\cdots a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}$, 故得 $A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$.

注记. *(1)* 在上面的证明中, 将 A_{k+1} 表示为 $A_{k+1}=\frac{1}{2k}\left[(k+1)A_{k+1}+\ (k-1)A_{k+1}\right]$ 是一步较为关键和重要的变形技巧.

(2) 我们也可以从 G_{n+1} 出发进行处理, 由归纳假设, 得到

$$\begin{aligned}
G_{n+1}=&\left[(G_{n+1})^{\frac{n+1}{n}}(G_{n+1})^{\frac{n-1}{n}}\right]^{\frac{1}{2}}\\
=&\left[(a_1\cdots a_n a_{n+1})^{\frac{1}{n}}(G_{n+1})^{\frac{n-1}{n}}\right]^{\frac{1}{2}}\\
=&G_n^{\frac{1}{2}}\left(a_{n+1}^{\frac{1}{n}+1}G_{n+1}^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}\left(G_n+a_{n^{\frac{1}{n}+1}}^{\frac{n}{2}G_{n+1}^{n}}\right)\\
\leqslant&\frac{1}{2}\left(G_n+\frac{a_{n+1}+(n-1)G_n}{n}\right)\\
\leqslant&\frac{1}{2}\left(A_n+\frac{a_{n+1}+(n-1)G_n}{n}\right)\\
=&\frac{nA_n+a_{n+1}}{2n}+\frac{(n-1)G_{n+1}}{2n}\\
=&\frac{(n+1)A_{n+1}}{2n}+\frac{(n-1)G_{n+1}}{2n}
\end{aligned}$$

即

$$\frac{(n+1)A_{n+1}}{2n}\geqslant\frac{(n+1)G_{n+1}}{2n}\tag{4.1}$$

故 $A_{n+1}\geqslant G_{n+1}$.

证法四 (归纳法和变换)

在证明原命题之前, 首先令

$$y_1=\frac{a_1}{G_n},y_2=\frac{a_2}{G_n},\cdots,y_n=\frac{a_n}{G_n}$$

其中 $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$, 则 $y_1y_2\cdots y_n=1\,(y_i>0)$, 且平均值不等式等价于

$$y_1+y_2+\cdots+y_n\geqslant n$$

即在条件 $y_1y_2\cdots y_n=1\,(y_i>0)$ 之下, 证明 $y_1+y_2+\cdots+y_n\geqslant n$.

我们用归纳法证明上述不等式.

(1) 当 $n=1$ 时, $y_1=1\geqslant 1$, 显然成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时不等式成立, 则对于 $n=k+1$, 由于 $y_1y_2\cdots y_n=1\ (y_i>0)$, 那么 y_i 中必有大于或等于 1 者, 也有小于或等于 1 者, 不妨设 $y_k\geqslant 1, y_{k+1}\leqslant 1$, 并令 $y=y_ky_{k+1}$, 则 $y_1y_2\cdots y_{k-1}y=1$, 从而由归纳假设, 得

$$y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+y\geqslant k$$

于是

$$\begin{aligned}
&y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+y_k+y_{k+1}\\
\geqslant&k+y_k+y_{k+1}-y_ky_{k+1}\\
=&k+1+(y_k-1)(1-y_{k+1})\\
\geqslant&k+1.
\end{aligned}$$

不难看出, 当且仅当 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$, 从而 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时, 等号成立.

故当 $n = k + 1$ 时, 命题也成立.

说明通过变量替换, 将原问题化为一个与正整数有关的形式简单的不等式, 在证明中运用了我们比较熟悉的手段和技巧.

证法五 (归纳法和二项展开式)

(1) 当 $n = 2$ 时, 已知结论成立.

(2) 假设对 $n = k$ (正整数 $k \geqslant 2$) 时命题成立, 即对于 $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, k$, 有

$$(a_1 a_2 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$$

那么, 当 $n = k + 1$ 时, 不妨假设 $a_{k+1} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\}$, 于是由归纳假设, 得

$$a_{k+1} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} = A_k \geqslant G_k = \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

从而, 得

$$\begin{aligned}
A_{k+1}^{k+1} &= \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \\
&= \left(\frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} = \left(A_k + \frac{a_{k+1} - A_k}{k+1}\right)^{k+1} && (8) \\
&= A_k^{k+1} + (k+1)A_k^k \left(\frac{a_{k+1} - A_k}{k+1}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{k+1} - A_k}{k+1}\right)^{k+1} && (9) \\
&\geqslant A_k^{k+1} + (k+1)A_k^k \left(\frac{a_{k+1} - A_k}{k+1}\right) = A_k^{k+1} + A_k^k (a_{k+1} - A_k) && (1) \\
&= A_k^k a_{k+1} \geqslant G_k^k a_{k+1} = a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} && (1) \\
&= G_{k+1}^{k+1} && (12)
\end{aligned}$$

所以 $A_{k+1} \geqslant G_{k+1}$.

不难看出, 当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立, 故命题成立.

说明在证明过程中, 考虑 A_{k+1}^{k+1}, 并通过一定的处理和运算, 导出所需要的结果. 有时候可能利用到其他的有用结论.

证法六 (归纳法和函数)

(1) 当 $n = 2$ 时, 易知结论成立.

(2) 假设 $n = k$ (正整数 $k \geqslant 2$) 时命题成立, 即 $A_k \geqslant G_k$. 那么, 当 $n = k+ 1$ 时, 作函数 $f(x) = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + x}{n+1}\right)^{n+1} - a_1 \cdots a_n x, x \in \mathbf{R}$, 并令

$$f'(x) = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + x}{n+1}\right)^n - a_1 \cdots a_n = 0$$

解之得 $x_0 = -(a_1 + \cdots + a_n) + (n+1)\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$

$$= -nA_n + (n+1)G_n$$

不难验证, x_0 为 $f(x)$ 的唯一极小值点, 且为最小值点, 以及

$$f(x_0) = n(G_n)^n(A_n - G_n)$$

由归纳假设, 得 $f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant 0$, 即

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + x}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant a_1 \cdots a_n x$$

令 $x = a_{n+1} \geqslant 0$, 则 $A_{n+1}^{n+1} \geqslant G_{n+1}^{n+1}$.
故 $A_{n+1} \geqslant G_{n+1}$.

证法七 (归纳法与 Jacobsthai 不等式)

为了证明平均值不等式, 需要证明一个引理.

引理 4.1.1. 假设 $x\ y$ 为正实数, n 为正整数, 则

$$x^{n+1} + ny^{n+1} \geqslant (n+1)y^n x$$

证明. 由于 $x\ y$ 与 $x^k\ y^k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 同序, 所以

$$(x-y)\left(x^k - y^k\right) \geqslant 0$$

于是

$$\begin{aligned}
&x^{n+1} + ny^{n+1} - (n+1)xy^n \\
=&x(x^n - y^n) - ny^n(x-y) \\
=&(x-y)\left[x\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}\right) - ny^n\right] \\
=&(x-y)\left[(x^n - y^n) + \left(x^{n-1} - y^{n-1}\right)y + \cdots + (x-y)y^{n-1}\right] \\
\geqslant&0
\end{aligned}$$

故引理4.1.1成立. 现在, 我们利用引理4.1.1和数学归纳法证明平均值不等式. ■

(1) 当 $n = 2$ 时, 已知结论成立.

(2) 假设对 $n = k$ (正整数 $k \geqslant 2$) 时命题成立. 那么, 当 $n = k+1$ 时, 令 $a_1 a_2 \cdots a_k = y^{k(k+1)}, a_{k+1} = x^{k+1}, x, y \geqslant 0$, 则由归纳假设和引理4.1.1 , 得

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} - (k+1)G_{k+1} \\
\geqslant&k\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} + a_{k+1} - (k+1)G_{k+1} \\
=&ky^{k+1} + x^{k+1} - (k+1)y^k x \geqslant 0.
\end{aligned}$$

不难看出, 当且仅当所有的 a_i 相等时等式成立, 故命题成立.

注记. *(1) 引理4.1.1 中的不等式称为 Jacobsthai 不等式.*

(2) 在 Jacobsthai 不等式中, 取 $y = 1$, 得到

伯努利不等式

$x^n \geqslant 1+n(x-1), x>0, n\geqslant 1.$

关于伯努利 (Bernoulli) 不等式和平均值不等式, 我们有如下的结论.

定理 4.1.1. 伯努利不等式与平均值不等式等价.

事实上, 如果假设伯努利不等式成立, 则对 $\frac{A_n}{A_{n-1}}>0$, 有

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \geqslant 1+n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}-1\right)=\frac{nA_n-(n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}}=\frac{a_n}{A_{n-1}}, n\geqslant 2$$

于是

$$A_n^n \geqslant a_nA_{n-1}^{n-1}, \quad n\geqslant 2$$

从而, $A_n^n \geqslant a_nA_{n-1}^{n-1} \geqslant a_na_{n-1}A_{n-2}^{n-2} \geqslant \cdots \geqslant a_na_{n-1}\cdots a_2a_1 = G_n^n$. 故 $A_n \geqslant G_n$.

反之, 如果平均值不等式成立, 则当 $n=1$ 时, 伯努利不等式成立.

当 $n\geqslant 2$ 时, 若 $0<x\leqslant 1-\frac{1}{n}$, 则伯努利不等式成立.

若 $x>1-\frac{1}{n}$, 则 $1+n(x-1)>0$, 由平均值不等式, 得

$$\begin{aligned} x^n &= \Big(\frac{(1+n(x-1))+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-1\uparrow 1}}{n}\Big)^n \\ &\geqslant (1+n(x-1))\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1 = 1+n(x-1) \end{aligned}$$

从而, 伯努利不等式成立.

注记. 伯努利不等式的一般形式:

设 $x>-1$, 则实数 $r\leqslant 0$ 或 $r\geqslant 1$ 时, $(1+x)^r \geqslant 1+rx$;

若 $0\leqslant r\leqslant 1$, 则 $(1+x)^r \leqslant 1+rx$;

设 $x_i \geqslant -1, 1\leqslant i\leqslant n$, 且 x_i 与 x_j 同号 $, 1\leqslant i,j\leqslant n$, 则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+\cdots+x_n$$

证法八 (数列与 Jacobsthai 不等式)

令 $f(n)=n\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)$, 如果能证明 $f(n)$ 关于 n 单调不减, 即 $f(n)\leqslant f(n+1), n\geqslant 2$. 那么, 由 $f(2)\geqslant 0$, 得到 $f(n)\geqslant f(2)\geqslant 0$, 则平均值不等式成立.

下面利用 Jacobsthai 不等式证明 $f(n)$ 的单调性.

令 $a_1a_2\cdots a_n = y^{n(n+1)}, a_{n+1}=x^{n+1}, x,y\geqslant 0$, 则由引理4.1.1 , 得

$$\begin{aligned} & f(n+1)-f(n) \\ =&(n+1)\left(\frac{a_1+\cdots+a_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_{n+1}}\right) \\ &-n\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\right) \\ =&a_{n+1}-(n+1)\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_{n+1}}+n\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \\ =&x^{n+1}-(n+1)y^nx+ny^{n+1}\geqslant 0. \end{aligned}$$

这表明 $f(n+1) \geqslant f(n)$.

另外, 由于 $f(2) \geqslant 0$, 则对任意 $n \geqslant 2$, 得

$$f(n) \geqslant f(n-1) \geqslant \cdots \geqslant f(2) \geqslant 0$$

不难看出, 当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立, 故平均值不等式成立.

证法九 (倒向归纳法)

倒向归纳法, 也称"留空回填"法. 基本思想是先对自然数的一个子列 $\{n_m\}$ 证明命题成立, 然后再回过来证明 $\{n\} \backslash \{n_m\}$ 相应的命题成立.

首先证明当 $n=2^m$ (m 为正整数) 时, 平均值不等式成立. 为此, 对 m 用数学归纳法.

当 $m=1$ 时, 显然有 $\sqrt{a_1a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2}$.

假设 $m=k$ 时命题成立, 则当 $m=k+1$ 时,

$$\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^k}a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}$$

此处有图片

$$\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \\
&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}
\end{aligned}$$

所以对于具有 $n=2^m$ 形式的正整数 n, 平均值不等式成立, 即对无穷多个正整数 $2,4,8,\cdots,2^m,\cdots$, 平均值不等式成立.

现假设 $n=k+1$ 时, 平均值不等式成立.

当 $n=k$ 时, $A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$, 则由假设, 得

$$\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_kA_k} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+A_k}{k+1}=\frac{kA_k+A_k}{k+1}=A_k,$$

所以 $G_k \leqslant A_k$, 也就是说当 $n=k$ 时命题也成立.

综上可知, 对一切正整数 n, 平均值不等式成立. 不难看出, 当且仅当所有的 a_i 相等时等号成立, 故命题成立.

注由上述证明知, 对任意整数 $n \geqslant 1$, 有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n} \geqslant \sqrt[2^n]{a_1a_2\cdots a_{2^n}}$$

如果取 $a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_{2^n}=A_n$, 则

$$\begin{aligned}
A_n=\frac{nA_n+\left(2^n-n\right)A_n}{2^n} &\geqslant \sqrt[2^n]{a_1a_2\cdots a_nA_n^{2^n-n}} \\
&=\left(a_1a_2\cdots a_n\right)^{\frac{1}{2^n}}\cdot A_n^{1-\frac{n}{2^n}}
\end{aligned}$$

从而 $A_n \geqslant G_n$. 故平均值不等式成立.

证法十 (利用排序不等式)

为了利用与上面不同的方法证明平均值不等式, 我们首先介绍和证明另一个重要的结论, 即排序不等式.

引理 4.1.2 (排序不等式). 设两个实数组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 满足

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n; b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$$

则

$$\begin{aligned}
&a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n (\text{ 同序乘积之和})\\
\geqslant &a_1b_{j_1} + a_2b_{j_2} + \cdots + a_nb_{j_n} \ (\text{乱序乘积之和})\\
\geqslant &a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \ (\text{反序乘积之和})
\end{aligned}$$

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, 并且等号同时成立的充分必要条件是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 成立.

证明. 令 $A = a_1b_{j_1} + a_2b_{j_2} + \cdots + a_nb_{j_n}$. 如果 $j_n \neq n$, 且假设此时 b_n 所在的项是 $a_{j_m}b_n$, 则由 $\left(b_n - b_{j_n}\right)\left(a_n - a_{j_m}\right) \geqslant 0$, 得

$$a_nb_n + a_{j_m}b_{j_n} \geqslant a_{j_m}b_n + a_nb_{j_n}$$

也就是说, $j_n \neq n$ 时, 调换 A 中 b_n 与 b_{j_n} 的位置, 其余都不动, 则得到 a_nb_n 项，并使 A 变为 A_1, 且 $A_1 \geqslant A$. 用同样的方法, 可以再得到 $a_{n-1}b_{n-1}$ 项, 并使 A_1 变为 A_2, 且 $A_2 \geqslant A_1$.

继续这个过程, 至多经过 $n-1$ 次调换, 得 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, 故

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant A$$

同样可以证明 $A \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$.

显然当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时, 两个等号同时成立. 反之, 如果 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 及 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 中的数都不全相同时, 则必有 $a_1 \neq a_n, b_1 \neq b_n$. 于是 $a_1b_1 + a_nb_n > a_1b_n + a_nb_1$, 且

$$a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} \geqslant a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2$$

从而有

$$a_1b_n + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n > a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

故这两个等式中至少有一个不成立. ∎

现在, 利用引理4.1.2 证明平均值不等式.

令 $y_k = \frac{a_1a_2\cdots a_k}{G_n^k}, k = 1, 2, \cdots, n$. 由排序不等式, 得

$$\begin{aligned}
&y_1 \times \frac{1}{y_1} + y_2 \times \frac{1}{y_2} + \cdots + y_n \times \frac{1}{y_n}\\
\leqslant &y_1 \times \frac{1}{y_n} + y_2 \times \frac{1}{y_1} + \cdots + y_n \times \frac{1}{y_{n-1}}\\
= &\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{G_n},
\end{aligned}$$

所以 $A_n \geqslant G_n$.

显然当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时, $A_n = G_n$. 如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全相等, 不妨设 $a_1 \neq a_2$, 令 $b = \frac{a_1+a_2}{2}$, 则 $a_1a_2 < b^2$, 且 $b + b = a_1 + a_2$,

$$G_n < \sqrt[n]{b \cdot b \cdot a_3 \cdots a_n} \leqslant \frac{b+b+a_3+\cdots+a_n}{n} = A_n$$

故当 $A_n = G_n$ 时必有 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. 反之亦然.

注 (1) 我们可以类似于证法四, 由 $G_n = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$, 令

$$y_1 = \frac{a_1}{G_n}, y_2 = \frac{a_2}{G_n}, \cdots, y_n = \frac{a_n}{G_n}$$

则 $y_1y_2\cdots y_n = 1\,(y_i > 0)$, 且平均值不等式等价于

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geqslant n$$

下面利用排序不等式证明这个不等式.

任取 $x_1 > 0$, 再取 $x_2 > 0$, 使得 $y_1 = \frac{x_1}{x_2}$, 再取 $x_3 > 0$, 使得 $y_2 = \frac{x_2}{x_3}, \cdots$, 最后取 $x_n > 0$, 使得 $y_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}$. 所以

$$y_n = \frac{1}{y_1y_2\cdots y_{n-1}} = \frac{1}{\frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}} = \frac{x_n}{x_1}$$

由引理4.1.2 , 得

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时等号成立, 从而当且仅当 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$ 时等号成立, 所以当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

(2) 排序不等式是一个重要的基本的不等式, 可以利用排序不等式直接证明许多其他有关的不等式. 例如:

切比雪夫 (Chebyshev) 不等式 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, 则

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时等号成立.

证明. 显然

$$\begin{aligned}
&n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \\
=&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_kb_k - a_kb_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_jb_j - a_jb_k\right) \\
=&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_kb_k + a_jb_j - a_kb_j - a_jb_k\right) \\
=&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_k - a_j\right)\left(b_k - b_j\right) \geqslant 0
\end{aligned}$$

故命题成立. ■

证法十一 (调整法)

(1) 首先, 如果 $a_1=a_2=\cdots=a_n$, 那么必有 $A_n=G_n$. 下设这些数不全等, 不妨设 $a_1=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}, a_2=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 则 $a_1<A_n<a_2, a_1<G_n<a_2$. 令 $b_1=A_n, b_2=a_1+a_2-A_n, b_i=a_i, i\geqslant 3$. 并记 $A_n^1=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 则 $A_n^1=A_n$, 且由于

$$\begin{aligned}
b_1b_2-a_1a_2&=A_n\left(a_1+a_2-A_n\right)-a_1a_2\\
&=\left(A_n-a_1\right)\left(a_2-A_n\right)>0
\end{aligned}$$

则 $G_n\leqslant G_n^1=\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$.

(2) 如果 $b_1=b_2=\cdots=b_n$, 则命题成立. 若不全等, 则必有最大和最小者, 而且它们都不等于 A_n, 仿照上面作法, 可以得到 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 这组数中, 有两个数为 A_n, 且 $A_n^2=\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=A_n^1=A_n$, $G_n^2=\sqrt[n]{c_1c_2\cdots c_n}\geqslant G_n^1\geqslant G_n$. 如果 $c_1=c_2=\cdots=c_n$, 那么 $A_n^2=G_n^2$, 从而 $A_n=A_n^2\geqslant G_n$. 如果 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 仍然不全相等, 再按上述方法, 进行第三次变换, 所得到的新的数组中必有 3 个数都为 A_n. 这样下去, 一定存在某个数 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 使得

$$A_n=A_n^1=\cdots=A_n^m, G_n\leqslant G_n^1\leqslant G_n^2\leqslant\cdots\leqslant G_n^m, A_n^m=G_n^m,$$

从而得 $A_n\geqslant G_n$, 且只要 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全相等, 必有 $A_n>G_n$. 故命题成立.

注调整法是证明不等式或求最值的一种有效方法, 特别是对那些当变量相等时取等号或取到最值的有关问题.

证法十二 (利用辅助命题)

为了证明平均值不等式, 首先证明另一个不等式, 即

引理 3 如果 $x_k\geqslant 0$, 且 $x_k\geqslant x_{k-1}(k=2,3,\cdots,n)$, 则

$$x_n^n\geqslant x_1\left(2x_2-x_1\right)\left(3x_3-2x_2\right)\cdots\left[nx_n-(n-1)x_{n-1}\right]$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立.

引理的证明: 因为 $x_k\geqslant x_{k-1}$, 则

$$x_k^{k-1}+x_k^{k-2}x_{k-1}+\cdots+x_{k-1}^{k-1}\geqslant kx_{k-1}^{k-1},$$

所以

$$\begin{aligned}
x_k^k-x_{k-1}^k&=\left(x_k-x_{k-1}\right)\left(x_k^{k-1}+x_k^{k-2}x_{k-1}+\cdots+x_{k-1}^{k-1}\right)\\
&\geqslant kx_{k-1}^{k-1}\left(x_k-x_{k-1}\right)
\end{aligned}$$

即

$$x_k^k\geqslant x_{k-1}^{k-1}\left[kx_k-(k-1)x_{k-1}\right]\left(k=1,2,\cdots,n\right)$$

当且仅当 $x_k=x_{k-1}$ 时等号成立.

所以

$$x_n^n=x_1\frac{x_2^2}{x_1}\frac{x_3^3}{x_2^2}\cdots\frac{x_n^n}{x_{n-1}^{n-1}}\geqslant x_1\left(2x_2-x_1\right)\left(3x_3-2x_2\right)\cdots\left[nx_n-(n-1)x_{n-1}\right]$$

现在利用引理 3 证明平均值不等式.

不妨假设 $a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_2 \geqslant a_1 > 0$. 由 $A_k = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$, 则 $A_k \geqslant A_{k-1} > 0(k = 2,3,\cdots,n)$, 且 $kA_k - (k-1)A_{k-1} = a_k$. 由引理 3 , 得

$$A_n^n \geqslant a_1 a_2 \cdots a_n$$

即 $A_n \geqslant G_n$. 当且仅当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$, 即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

证法十三 (函数方法)

引理 4 如果函数 $f(x):(a,b) \to \mathbf{R}$ 满足

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, x, y \in (a,b) \tag{13}$$

那么

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \tag{14}$$

其中 $x_i \in (a,b)$.

引理的证明: 对 n 用归纳法.

当 $n=1,2$ 时, 结论显然成立.

设当 $n=k$ 时结论成立. 对于 $n=k+1$, 有

并记

$$A_{k+1} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{2k} + \frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k}$$
$$B = \frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}$$

则

$$\begin{aligned} f(A_{k+1}) =& f\left(\frac{A_k+B}{2}\right) \\ \geqslant& \frac{1}{2}\left[f(A_k)+f(B)\right] \\ \geqslant& \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k}\left[f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_k)\right]\right. \\ &\left.+\frac{1}{k}\left[f(a_{k+1})+(k-1)f(A_{k+1})\right]\right\} \end{aligned}$$

所以

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\right) \geqslant \frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{k+1})}{k+1}$$

我们称满足 (13) 式的函数为凹函数 (可以证明, 如果函数 f 二阶可导, 则当 $f''(x) \leqslant 0$ 时, f 为凹函数). 特别的, 不难验证函数 $f(x) = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凹函数, 于是, 对 $a_i \in (0,+\infty), i=1,2,\cdots,n$, 我们有

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n}$$

从而

$$\ln \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \ln\left(a_1 a_2 \cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

由对数函数的单调性, 得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant\left(a_1 a_2 \cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

故命题成立.

下面验证 $\ln x$ 为凹函数. 对任意 x, y, 要使得:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

即

$$\ln \frac{x+y}{2} \geqslant \frac{\ln (x)+\ln (y)}{2}$$

等价于

$$\ln \frac{x+y}{2} \geqslant \ln (x y)^{\frac{1}{2}}$$

由函数的单调性, 等价于

$$\frac{x+y}{2} \geqslant(x y)^{\frac{1}{2}}$$

这个可以由 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2>0$ 直接导出.

另外, 设 $p>0, q>0$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 由于函数 $f(x)=\ln x, x \in \mathbf{R}_{+}$ 为凹函数, 则对 $x, y>0$, 有

即

$$\frac{1}{p} \ln x+\frac{1}{q} \ln y \leqslant \ln \left(\frac{1}{p} x+\frac{1}{q} y\right)$$

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p} x+\frac{1}{q} y$$

等号成立的充分必要条件是 $x=y$.

这个不等式称为 Young 不等式.

注记. 引理 *4* 中的不等式 *(44,* 称为琴生 *(Jensen)* 不等式, 它的一般形式为设 $y=f(x), x \in (a, b)$ 为凹函数, 则对任意 $x_i \in(a, b)(i=1,2, \cdots, n)$, 我们有加权的琴生不等式

$$\frac{1}{p_1} f\left(x_1\right)+\frac{1}{p_2} f\left(x_2\right)+\cdots+\frac{1}{p_n} f\left(x_n\right) \leqslant f\left(\frac{x_1}{p_1}+\frac{x_2}{p_2}+\cdots+\frac{x_n}{p_n}\right),$$

其中 $p_i>0(i=1,2, \cdots, n)$ 且 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}=1$.

证法十四 (平均值不等式与函数不等式)

利用函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x$ 的性质, 不难得到

引理 5$\mathrm{e}^x \geqslant 1+x, x \in \mathbf{R}$, 当且仅当 $x=0$ 时, 等号成立.

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geqslant 0$. 令 $a_k=\left(1+x_k\right) A_n$, 其中 $\sum_{i=1}^n x_i=0$.

由引理 5, $\mathrm{e}^{x_k} \geqslant 1 + x_k$, 于是

$$\begin{aligned} G_n &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) A_n\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= A_n \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant A_n \left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x_k}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= A_n \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k} = A_n \end{aligned}$$

从而 $A_n \geqslant G_n$, 故平均值不等式成立.

证法十五 (几何方法)

作函数 $y = \mathrm{e}^{\frac{x}{G_n}}$ 的图象, 并过点 (G_n, e) 作该曲线的切线 $y = \frac{\mathrm{e}}{G_n}x$. 易知 $\mathrm{e}^{\frac{x}{G_n}} \geqslant \frac{\mathrm{e}}{G_n}x, x \geqslant 0$ 当且仅当 $x = G_n$ 时, 等号成立.

对 $a_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant n$, 有 $\mathrm{e}^{\frac{a_i}{G_n}} \geqslant \frac{\mathrm{e}}{G_n}a_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, 将这 n 个不等式相乘, 得 $\mathrm{e}^{\frac{a_1+\cdots+a_n}{G_n}} \geqslant \frac{\mathrm{e}^n}{G_n^n}a_1 a_2 \cdots a_n$, 即 $\mathrm{e}^{\frac{a_1+\cdots+a_n}{G_n}} \geqslant \mathrm{e}^n$.

由函数 $y = \mathrm{e}^x$ 的单调性, 得 $\frac{a_1+\cdots+a_n}{G_n} \geqslant n$.

从而 $A_n \geqslant G_n$, 且当且仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立. 故平均值不等式成立.

在这部分, 我们利用不同的方法证明了平均值不等式成立. 在证明过程中, 利用了各种技巧和方法.