平面几何选讲

LeyuDame

2024 年 9 月 30 日

目录

1 面积公式及其应用

- 利用图形的面积公式, 可以解决许多与面积相关的问题.
- 对于常见的特殊图形面积的计算, 一般直接使用公式或等积变换, 对于非常规图形面积的计算, 可通过图形的割补, 以及图形的运动 (平移, 旋转, 翻折) 来转换成特殊图形面积问题.
- 有时题目中并没有直接涉及面积, 但可以通过对同一图形面积的不同算法, 推出需要的代数或几何关系, 从而使问题获解.

公式 1.1: 海伦公式

若已知三角形三边长 a, b, c, 则三角形面积

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 $p = \frac{a+b+c}{2}$.

1.1 例题

题目 1.1

如图, 长方形 $ABCD$ 的面积是 2012 平方厘米, 梯形 $AEGF$ 的顶点 F 在 BC 上, D 是腰 EG 的中点, 试求梯形 $AEGF$ 的面积.

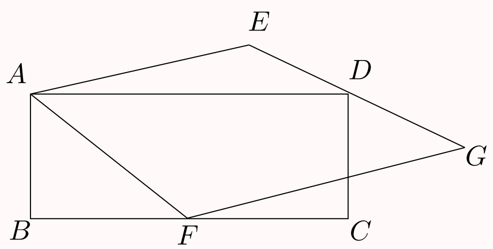

图 1.1

分析. 重点关注矩形 $ABCD, \triangle DFA$ 和梯形 $AEGF$ 的面积关系.

解. 取 AF 的中点 K, 连结 DK, DF.

由题意, DK 是梯形 $AEGF$ 的中位线, 因此,

$$DK \parallel AE \parallel FG, DK = \frac{1}{2}(AE + FG),$$

所以

$$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle AKD}} = \frac{AE}{DK}, \frac{S_{\triangle DFG}}{S_{\triangle DFK}} = \frac{FG}{DK}.$$

由 K 为 AF 中点, 知

$$S_{\triangle ADK} = S_{\triangle FDK}, S_{\triangle AED} + S_{\triangle DFG} = S_{\triangle AFD},$$

所以 $S_{梯形AEGF}=2S_{\triangle AFD}$. 结合 $S_{矩形ABCD}=2S_{\triangle AFD}$, 可得

$$S_{梯形AEGF}=S_{矩形ABCD}=2012.$$

注记. 通过本题可了解几种常见的面积变换. 也可延长 AE 和 FD 交于一点, 通过全等方法证明 $S_{梯形ABGF}=2S_{\triangle ADF}$.

题目 1.2

如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC, AD:BC=1:2, F$ 为线段 AB 上的点, E 为线段 FC 上的点, 且 $S_{\triangle AOF}:S_{\triangle DOE}=1:3, S_{\triangle BEF}=24$, 求 $\triangle AOF$ 的面积.

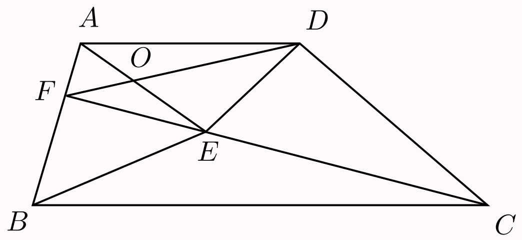

图 1.2

分析. 由于平行线间的距离处处相等, 可将其作为一些三角形的高之和, 进行面积的变换.

解. 过点 E 作 AD 的垂线, 分别交 AD , BC 于点 N, M. 过点 F 作 AD 的垂线, 分别交 DA 延长线及 BC 于点 Q, P. 由于 $AD\parallel BC$, 故 $PQ=MN$. 所以, $QF+FP=NE+EM$, 即 $FP-EM=NE-QF$. 从而

$$\begin{aligned}S_{\triangle AED}-S_{\triangle AFD}&=\frac{1}{2}(EN-FQ)\cdot AD\\&=\frac{1}{2}(PF-ME)\cdot\frac{1}{2}BC\\&=\frac{1}{2}\left(S_{\triangle BFC}-S_{\triangle BEC}\right)\\&=\frac{1}{2}S_{\triangle BFE}=12.\end{aligned}$$

由 $S_{\triangle AOF}:S_{\triangle DOE}=1:3$, 知

$$S_{\triangle AED}-S_{\triangle AFD}=S_{\triangle DOE}-S_{\triangle AOF}=2S_{\triangle AOF}=12,$$

所以 $S_{\triangle AOF}=6$.

注记. 本题虽然只用了最基本的面积公式 $S=\frac{1}{2}ah$, 但发现了三角形高的差不变的性质, 巧妙地转换成面积的差的关系. 在解题中要善于发现题中隐藏的不变量.

题目 1.3

如图, P 是 $\triangle ABC$ 内的一点, 连结 AP, BP, CP 并延长, 分别与 BC, AC, AB 交于点 D , E, F. 已知 $AP=6, BP=9, DP=6, EP=3, CF=20$. 求 $\triangle ABC$ 的面积.

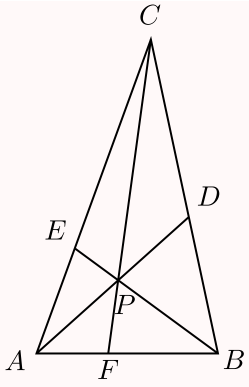

图 1.3

分析. 可围绕 P 为 AD 中点这个条件构造平行线, 求出其余未知线段的长度. 再利用海伦公式及面积关系求解.

解. 过点 D 作 AE 的平行线交 BP 于点 M, 过点 D 作 AB 的平行线交 CP 于点 N.

因为 $AP = PD = 6$ 且 $DM \mathbin{//} AE$, 得

$$EP = MP = 3,$$

进而, $EM = 6, BM = 6$, 即 M 为 BE 的中点, 所以 D 为 BC 的中点, 即 $CD = BD$.

因为 $DN \mathbin{//} AB$, 所以 N 为 CF 的中点, P 为 NF 的中点.

从而 $CN = FN = 10, NP = PF = 5, CP = 15$.

由中线长公式: $PD^2 = \frac{1}{2}CP^2 + \frac{1}{2}BP^2 - \frac{1}{4}BC^2$ 可得, $BC = 6\sqrt{13}$, $CD = 3\sqrt{13}$.

由海伦公式: $S_{\triangle CPD} = 27$, 故 $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle CPD} = 108$.

注记. 常见的三角形面积公式有:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\
&= \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B \\
&= \frac{abc}{4R} \\
&= 2R^2\sin A\sin B\sin C \\
&= pr \\
&= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.
\end{aligned}$$

其中 $\triangle ABC$ 三边为 a, b, c, 对应边上的高为 h_a, h_b, h_c, 外接圆, 内切圆半径分别为 R, r, 半周长 $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

题目 1.4

如图, 设凸四边形 $ABCD$ 内接于以 O 为中心的圆, 且两条对角线相互垂直. 求证: 折线 AOC 分该四边形面积相等的两部分.

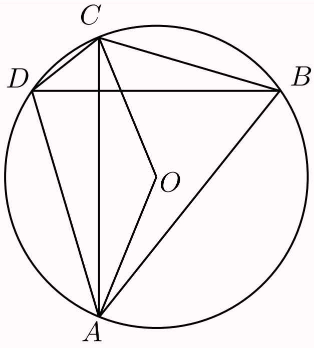

图 1.4

分析. 对角线互相垂直的四边形面积等于对角线乘积的一半.

证明. 过点 O 作 $OP \perp BD$, 垂足为点 P.

故 $S_{\text{四这形}AOCD} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot PD$.

因为 $OP \perp BD$, 故 $PD = \frac{1}{2}BD$, 所以

$$S_{\text{四边形}AOCD} = \frac{1}{4}AC \cdot BD.$$

因为 $AC \perp BD$, 所以 $S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

所以 $S_{\text{四边形}ABCD} = 2S_{\text{四边形}AOCD}$, 即折线 AOC 分该四边形面积相等的两部分. ∎

题目 1.5

设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, 延长 AP, BP, CP 与对边相交于点 D, E , F. 设 $AP = a, BP = b, CP = c$, 且 $a + b + c = 43$, $PD = PE = PF = d = 3$, 求 abc 的值.

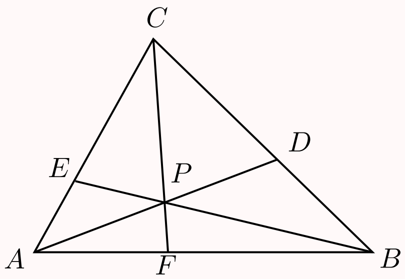

图 1.5

分析. 可将条件中相应线段比转换成面积比, 通过面积相等的关系入手解题.

解. 由共边比例定理可得: $\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{d}{c+d}$.

同理: $\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{d}{a+d}, \frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{d}{b+d}$.

故 $\frac{d}{a+d} + \frac{d}{b+d} + \frac{d}{c+d} = \frac{S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}} = 1$.

从而 $2d^3 + (a+b+c)d^2 - abc = 0$, 所以 $abc = 441$.

题目 1.6

如图, 设 $\triangle ABC$ 的三条中线 AD, BE, CF 交于点 G, 且 $\triangle AGF, \triangle CGD$ 和 $\triangle BGD$ 的内切圆半径都相同. 证明: $\triangle ABC$ 是正三角形.

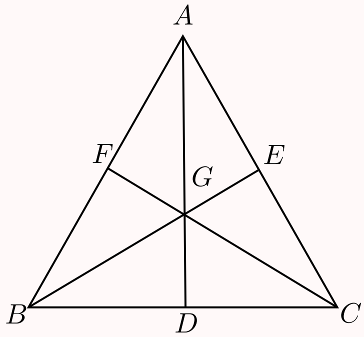

图 1.6

分析. 利用 $S = p \cdot r$, 及面积和内切圆半径相等的条件, 得到相应的边的关系, 再进行论证.

证明. 设 $\triangle AFG$ 和 $\triangle CDG$ 的内心分别为 I_1 和 I_2, 过 I_1 作 $I_1M_1 \perp FG$ 于点 M_1, 过 I_2 作 $I_2M_2 \perp GD$ 于点 M_2, 连结 I_1G 和 I_2G.

因为 D 为 BC 的中点, 所以 $BD = CD$, 从而 $S_{\triangle BDG} = S_{\triangle CDG}$.

故 $\frac{1}{2}(BD + DG + BG) \cdot r = \frac{1}{2}(CD + DG + GC) \cdot r$.

故 $BG = CG, GD \perp BC$.

进而 AD 垂直平分 BC, 所以 $AB = AC$.

在 $\mathrm{Rt}\ \triangle I_1M_1G$ 和 $\mathrm{Rt}\ \triangle I_2M_2G$ 中有: $I_1M_1 = I_2M_2$, 且有

$$\angle I_1GM_1 = \frac{1}{2}\angle AGF = \frac{1}{2}\angle DGC = \angle I_2GM_2.$$

从而 $\mathrm{Rt}\ \triangle I_1M_1G \cong \mathrm{Rt}\ \triangle I_2M_2G$, 所以 $GM_1 = GM_2$.

因为 $GM_1 = \frac{1}{2}(AG + GF - AF), GM_2 = \frac{1}{2}(GD + GC - CD)$, 故 $AG + GF - AF = GD + GC - CD$.

因为 $AF + FG + GA = GD + DC + CG$, 所以 $AF = CD$.

因而 $AB = BC$. 所以 $AB = AC = BC$, 即 $\triangle ABC$ 为正三角形. ■

注记. 利用三角形面积的不同表达式, 可以建立各种等量关系, 帮助我们从中发现规律, 得到解题思路.

题目 1.7

如图, $\triangle ABC$ 的三边上 $BC = a, CA = b, AB = c, a, b, c$ 都是整数, 且 a, b 的最大公约数为 2. 点 G 和点 I 分别为 $\triangle ABC$ 的重心和内心, 且 $\angle GIC = 90^\circ$. 求 $\triangle ABC$ 的周长.

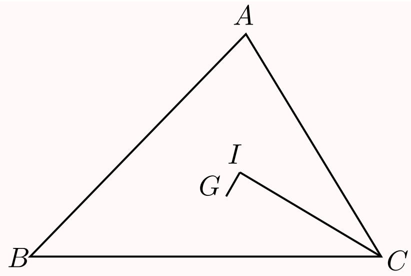

图 1.7

分析. 过 GI 的直线截得等腰 $\triangle PQC$, 利用重心和内心的性质将 $\triangle PQC$ 的面积算两次, 再. 进行分析.

解. 过 GI 的直线与边 BC,CA 分别交于点 P,Q. 过 G 作 $GE\perp BC,GF\perp AC$, 垂足分别为 E,F, 连结 GC.

设 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径为 r,BC,CA 边上的高的长分别为 h_a,h_b.

因为 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 所以 $\angle PCI=\angle QCI$.

由题意: $\angle QIC=\angle PIC=90^\circ$, 故 $\triangle PIC\cong\triangle QIC$, 所以 $PC=QC$.

一方面: $S_{\triangle PQC}=S_{\triangle PCC}+S_{\triangle QIC}=\frac{1}{2}\cdot PC\cdot r+\frac{1}{2}\cdot QC\cdot r$,

另一方面: $S_{\triangle PQC}=S_{\triangle GPC}+S_{\triangle GQC}=\frac{1}{2}\cdot PC\cdot(GE+GF)$,

故 $2r=GE+GF=\frac{1}{3}(h_a+h_b)$.

故 $\frac{4S_{\triangle ABC}}{a+b+c}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2S_{\triangle ABC}}{a}+\frac{2S_{\triangle ABC}}{b}\right)$, 所以 $a+b+c=\frac{6ab}{a+b}$.

因为 $\triangle ABC$ 的重心 G 和内心 I 不重合, 故 $\triangle ABC$ 不是正三角形.

若 $a=b$, 则 $a=b=2,c=2$, 矛盾!

从而 $a\neq b$, 不妨设 $a>b,a=2a_1,b=2b_1,(a_1,b_1)=1$. 由 $\frac{6ab}{a+b}=\frac{12a_1b_1}{a_1+b_1}$ 为整数知, $a_1+b_1\mid 12$, 即 $a+b\mid 24$. 因此 $a+b=6,8,12,24$.

经检验, 只有当 $a=14,b=10,c=11$ 时满足条件, 故 $a+b+c=35$, 即 $\triangle ABC$ 的周长为 35 .

注记. 本题虽然没有直接涉及面积, 但借助于图形面积知识解答, 往往事半功倍.

1.2 练习题

练习 1.1

如图, 已知正方形 $ABCD$ 的面积为 35 平方厘米, E,F 分别为边 AB,BC 上的点, AF 与 CE 相交于点 G, 并且 $\triangle ABF$ 的面积为 5 平方厘米, $\triangle BCE$ 的面积为 14 平方厘米. 求四边形 $BEGF$ 的面积.

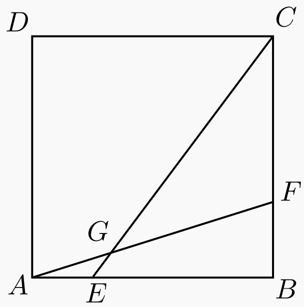

图 1.8

解. 连结 AC, BG.

故 $\frac{BF}{BC}=\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{5}{\frac{35}{2}}=\frac{2}{7}$.

同理: $\frac{BE}{BA}=\frac{4}{5}$.

设 $S_{\triangle AGE}=a, S_{\triangle EBG}=b, S_{\triangle BGF}=c, S_{\triangle FGC}=d$.

则 $a+b+c=5, b+c+d=14$.

$\frac{c}{c+d}=\frac{BF}{BC}=\frac{2}{7}, \frac{b}{a+b}=\frac{BE}{AB}=\frac{4}{5}$.

解得: $a=\frac{7}{27}, b=\frac{28}{27}, c=\frac{100}{27}, d=\frac{250}{27}$.

所以 $S_{BEGF}=b+c=4\frac{20}{27}$ (平方厘米).

练习 1.2

如图, 点 M 和 N 三等分 AC, 点 X 和 Y 三等分 BC, AY 与 BM, BN 分别交于点 S, R. 求四边形 $SRNM$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积之比.

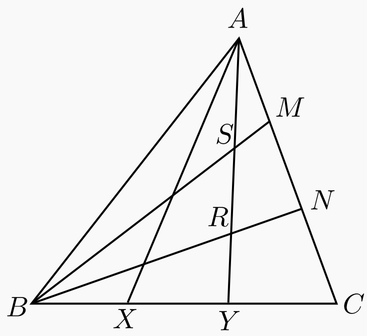

图 1.9

解. 连结 RC, RM, RX.

设

$$S_{\triangle RCN}=a, S_{\triangle RCY}=b.$$

则

$$S_{\triangle RAM}=S_{\triangle RMN}=S_{\triangle RCN}=a,$$
$$S_{\triangle RBX}=S_{\triangle RXY}=S_{\triangle RYC}=b.$$

故

$$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle AYC}=3(3a+b),$$
$$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle BNC}=3(3b+a).$$

所以 $a=b, S_{\triangle ABC}=12a$.

设 $S_{\triangle SMR}=x, S_{\triangle ASM}=y, S_{\triangle BSR}=x_1, S_{\triangle BSA}=y_1$.

故 $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y}{x}, \frac{x_1+y_1}{x_1}=\frac{x+y}{x}$, 故 $\frac{6a}{x_1}=\frac{a}{x}$, 故 $x_1=6x$, 故 $6x+x+a=4a$, 故 $x=\frac{3}{7}a$.

所以 $S_{SRNM}=x+a=\frac{10}{7}a$. 所以 $S_{SRNM}:S_{\triangle ABC}=\frac{10}{7}a:12a=5:42$.

练习 1.3

设 $\triangle ABC$ 三边上的三个内接正方形 (有两个顶点在三角形的一边上, 另两个顶点分别在三角形另两边上) 的面积都相等. 证明: $\triangle ABC$ 为正三角形.

证明. 如图, 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S, BC 边上的高为 h_a, 一边在 BC 边上的内接正方形的边长为 x.

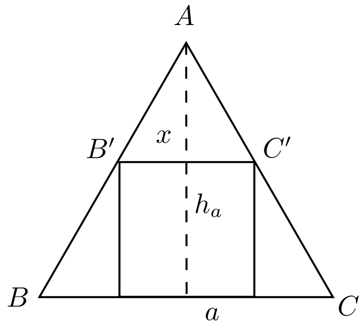

图 1.10

由题意: $B'C' \parallel BC$, 则 $\triangle AB'C' \backsim \triangle ABC$.
故 $\frac{x}{a} = \frac{h_a - x}{h_a}$, 所以 $x = \frac{ah_a}{a+h_a} = \frac{2S}{a+h_a}$.
同理可得另两种放法的内接正方形的边长. 由于三个内接正方形面积相等,
则 $a + h_a = b + h_b = c + h_c$.
则 $a + \frac{2S}{a} = b + \frac{2S}{b} = c + \frac{2S}{c}$, 记此值为 l.
所以正数 a, b, c 适合方程 $y + \frac{2S}{y} = l$.
当 $y \neq 0$ 时, 有 $y^2 - ly + 2S = 0$, 但任何二次方程至多有两个相异的根.
所以 a, b, c 中必有两数相同, 不妨设 $a = b$.
若 $a \neq c$, 则 $a - c = \frac{2S}{ac}(a - c)$.
所以 $ac = 2S = ah_a$, 所以 $c = h_a$, 所以 $\triangle ABC$ 是以 $\angle B$ 为直角的直角三角形, 且 b 为斜边.
因此 $b > a$, 矛盾!
故 $b = a = c$, 所以 $\triangle ABC$ 为正三角形. ■

2 平移, 旋转与翻折

与代数变换的重要性一样, 几何变换同样在几何问题的解决中也起着非常重要的作用. 通过几何变换, 可以把分散的线段, 角相对集中起来, 从而使已知条件集中在一个我们所熟知的基本图形之中, 然后利用新的图形的性质对原图形进行研究, 从而使问题得以转化.

2.1 例题

题目 2.1

如图, 设 I 是 $\triangle ABC$ 的垂心. 求证: $AI^2+BC^2=BI^2+AC^2=CI^2+AB^2$.

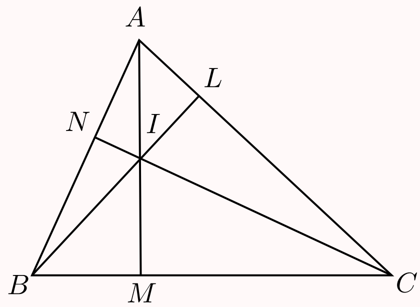

图 2.1

分析. 对于 $\triangle ABC$ 各边来说, 结论是轮换式, 于是只需证得某一个等式即可. 显然等式每边都是两线段的平方和, 故可考虑构造相应的直角三角形.

证明. 分别过点 B, I 作 AI, AB 的平行线, 两线交于 P 点, 连结 PC.

由条件可知: 四边形 $AIPB$ 为平行四边形, 从而 $BP=AI, \angle PBC=\angle ALB=90°$, 所以

$$PC^2=PB^2+BC^2=AI^2+BC^2;$$

同理: $PI=AB, \angle PIC=\angle BNC=90°$.

故 $PC^2=CI^2+PI^2=CI^2+AB^2$, 所以 $AI^2+BC^2=CI^2+AB^2$;

同理: $AI^2+BC^2=BI^2+AC^2$.

所以 $AI^2+BC^2=BI^2+AC^2=CI^2+AB^2$. ■

题目 2.2

已知 $\triangle ABC$ 的三条中线的长为 $3,4,5$. 求 $\triangle ABC$ 的面积.

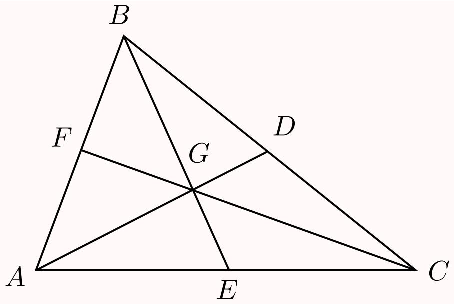

图 2.2

分析. 设 $\triangle ABC$ 的中线 $AD=3$, $BE=4, CF=5$. 现考虑通过平移使二条中线集中在一起, 构成一个确定的三角形, 再分析面积间的数量关系.

解 (法一)**.** 过 F 作 $FK \perp\!\!\!= EC$, 连结 KA , KE, KB, EF.

从而 $KF \perp\!\!\!= EC$, 所以四边形 $KFCE$ 为平行四边形, 进而 $KF=EC$.

又因为 $EC=AE$, 所以 $KF \perp\!\!\!= AE$, 从而四边形 $KAEF$ 为平行四边形, 所以 $KA \perp\!\!\!= EF$.

因此四边形 $BKAD$ 为平行四边形. 从而 $BK=AD$.

所以 $\triangle BKE$ 是以 $\triangle ABC$ 三边中线长为边长的三角形.

因为 $5^2=3^2+4^2$, 所以 $\triangle BKE$ 为直角三角形, $S_{\triangle BKE}=6$.

因为 $S_{\triangle BFK}=\frac{1}{4}S_{ADBK}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}, S_{\triangle BEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}, S_{\triangle EFK}=S_{\triangle AEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

从而 $S_{\triangle BKE}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ABC}=8$.

注记. 可将问题一般化, 设 $\triangle ABC$ 三边上中线的长度分别为 m_a, m_b, m_c, 则有:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{4}{3}\sqrt{p\left(p-m_a\right)\left(p-m_b\right)\left(p-m_c\right)},$$

其中 $p=\frac{1}{2}\left(m_a+m_b+m_c\right)$.

解 (法二)**.** 利用重心的性质, 构造出三角形, 结合以 AD, BE, CF 长为边的三角形与其相似, 再求解面积.

延长 GD 至点 H, 使 $GD=HD$, 连结 HC.

易证: $\triangle BDG \cong \triangle CDH$, 故 $BG=CH=\frac{2}{3}BE$.

因为 $CG=\frac{2}{3}CF, GH=2GD=\frac{2}{3}AD$, 故 $CG^2=HG^2+HC^2$, 因此 $S_{\triangle GHC}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times 6=\frac{8}{3}$, 所以 $S_{\triangle CDG}=\frac{4}{3}$.

又因为 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $S_{\triangle ABC}=8$.

注记. 由以上两个例题可知, 图形经过适当的平移可以使已知条件和结论中的图形元素得以延伸, 再通过某些桥梁得以联系和统一.

题目 2.3

如图, 在 $\triangle ABC$ 外作等腰 Rt $\triangle ABD$ 和等腰 Rt $\triangle ACE$, 且 $\angle BAD=\angle CAE=90^\circ, AM$ 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线, 连结 DE. 求证: $DE=2AM$.

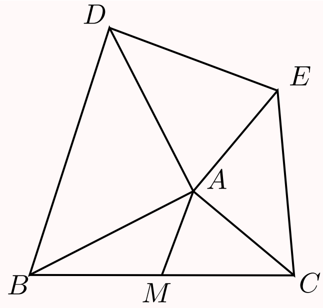

图 2.3

分析. 由 M 为 BC 中点, 可利用中线加倍得到 $AF = 2AM$, 再证 $AF = DE$. 注意到 $\triangle BMF$ 可通过 $\triangle CMA$ 旋转得到, 故可利用图形旋转相关性质思考:

证明. 延长 AM 至 F, 使 $AM = FM$, 连结 BF. 因为 $BM = CM, AM = FM, \angle AMC = \angle FMB$, 所以 $\triangle AMC \cong \triangle FMB$. 从而 $\angle F = \angle MAC, BF = AC$, 所以

$$\begin{aligned}\angle ABF &= 180^\circ - \angle BAF - \angle F \\ &= 180^\circ - \angle BAF - \angle MAC, \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \angle DAE) = \angle DAE.\end{aligned}$$

又因为 $AD = AB, AE = AC$, 故 $AE = BF$. 因而 $\triangle ADE \cong \triangle BAF, DE = AF = 2AM$. ■

注记. 图形的旋转可通过构造全等来实现, 旋转变换即全等变换的一种, 在几何证明题中, 常常以图形旋转的观点来研究, 是常用策略.

题目 2.4

如图, 正方形 $ABCD$ 内一点 E, E 到 A, B, C 三点的距离之和的最小值为 $\sqrt{2} + \sqrt{6}$, 求此正方形的边长.

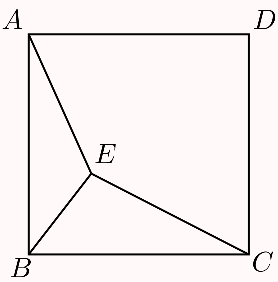

图 2.4

分析. 利用图形的旋转, 将三条线段转换为首尾顺次连接, 再利用两点间线段最短求最值问题.

解. 将 $\triangle ABE$ 绕 A 点顺时针旋转 60° 到 $\triangle AMN$, 连结 NE, MB. 过 M 作 $MP \perp BC$, 垂足为 P.

由题意: $AE = AN, \angle NAE = 60^\circ$, 从而 $\triangle ANE$ 为等边三角形. 故 $AE = NE$, 所以

$$AE + BE + CE = MN + NE + EC.$$

当 $AE+BE+CE$ 最小时, 折线 $MNEC$ 为线段, 且 $MC=\sqrt{2}+\sqrt{6}$; 同理: $\triangle AMB$ 为等边三角形. 所以 $AB=BC=BM, \angle MBA=60^\circ$. 设 $AB=x$, 则 $PM=\frac{1}{2}x, PB=\frac{\sqrt{3}}{2}x$, 在 Rt $\triangle MPC$ 中:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+x\right)^2,$$

解得: $x=2$, 即 $AB=2$, 正方形边长为 2.

题目 2.5

如图, 在正 $\triangle ABC$ 内有一点 P, P 到三个顶点 A, B, C 的距离分别为 a, b, c, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

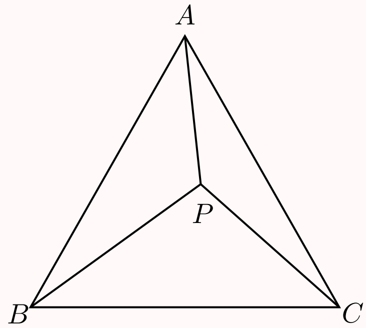

图 2.5

分析. 由于 AP, BP, CP 为已知, 故可将 AP, BP, CP 移至一个三角形. 为此可分别旋转 $\triangle ABP, \triangle BPC, \triangle PCA$, 通过求六边形 $AFBDCE$ 的面积求解 $\triangle ABC$ 的面积.

解. 分别将 $\triangle ABP, \triangle BCP, \triangle CAP$ 绕着 B, C, A 顺时针旋转 60°, 得到 $\triangle CBD, \triangle ACE$, $\triangle BAF$. 连结 PD, PE, PF. 故 $S_{\text{六边形}AFBDCE}=2S_{\triangle ABC}$.

因为 $AP=AF, \angle PAF=60^\circ$, 所以 $\triangle APF$ 为等边三角形, 边长为 a. 从而 $PF=AP$. 因为 $BF=PC$, 故 $\triangle BPF$ 的三边长分别为 a, b, c; 同理: $\triangle BPD$ 是边长为 b 的等边三角形, $\triangle CPE$ 是边长为 c 的等边三角形, 由于 $\triangle DPC$ 和 $\triangle EPA$ 的三边长都分别为 a, b, c. 因此 $S_{\text{六边形}AFBDCE}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2)+3\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{8}(a^2+b^2+c^2)+\frac{3}{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, 其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

注记. 利用图形的旋转可构造等边三角形或等腰直角三角形, 实现线段和角度的转换, 使原来分散的线段和角集中起来或有序地排列起来, 得到新的图形以方便研究.

题目 2.6

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是角平分线, $BE=CF$, 点 M, N 分别是 BC 和 EF 的中点. 求证: $MN \parallel AD$.

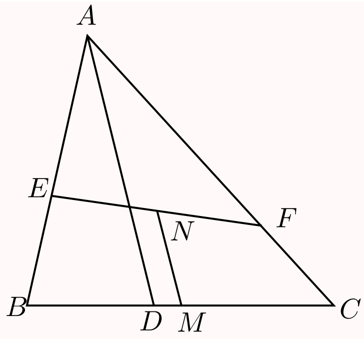

图 2.6

分析. 利用等腰三角形轴对称性构造中点, 再结合条件中的中点, 构造平行四边形来论证平行关系.

证明. 过 E 作 AD 的垂线, 交 AD 于点 G, 交 AC 于点 S. 过 B 作 AD 的垂线, 交 AD 于点 H, 交 AC 于点 T. 连结 GN, HM. 因为 AD 平分 $\angle BAC$, 所以 $\angle EAG = \angle SAG$. 因为 $AD \perp ES$, 故 $\angle AGE = \angle AGS = 90°$. 所以 $\triangle AEG \cong \triangle ASG$.

故 $AE = AS, EG = SG$. 同理: $AB = AT, BH = TH$. 又因为 N 为 EF 的中点, 故 $GN \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}SF$; 同理: $MH \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}CT$. 因为 $BE = FC$, 所以 $ST = FC$, 从而 $SF = CT$, 进而 $GN \perp\!\!\!\!= HM$. 故四边形 $GNMH$ 为平行四边形, 所以 $MN // AD$. ■

注记. 本题是把角平分线作为翻折轴来进行解题的. 用角平分线作为翻折轴, 可以使翻折图形落至原来图形的另一侧, 而且对应点的连线被角平分线垂直平分. 这样不仅可以增加图形的直观性, 而且增强条件与结论间的逻辑联系.

题目 2.7

如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 20, BC = 10$, 若在 AB, AC 上各取一点 N, M, 使得 $BM + MN$ 的值最小, 求这个最小值.

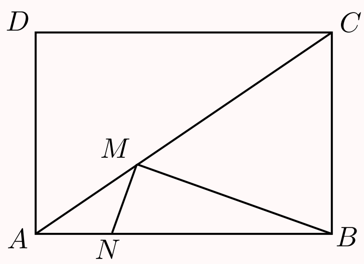

图 2.7

分析. 作 B 关于 AC 的对称点 E, 即求折线 EMN 的最小值, 这个最小值为点 E 到 AB 垂线段的距离.

解. 作 B 关于直线 AC 的对称点 E, 连结 AE, BE, ME. 过点 E 作 AB 的垂线, 交 AB, AC 于点 F, G.

由 $BM + MN = EM + MN \geqslant EF$, 所以 $BM + MN$ 的最小值为 EF.

因为 $2S_{\triangle ABC} = AB \cdot BC = AC \cdot BH$, 故 $BH = 4\sqrt{5}, BE = 2BH = 8\sqrt{5}$. 所以 $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 8\sqrt{5}$. 因为 $2S_{\triangle ABE} = AB \cdot EF = BE \cdot AH$, 故 $EF = 16$. 所以 $BM + MN$ 的最小值为 16 , 此时 N 和 F 重合, M 和 G 重合.

题目 2.8

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ, AB=BC, P$ 为三角形内一点, 分别作 P 关于 BC, CA, AB 的对称点 A', B', C'. 若所得 $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle B'A'C'=90^\circ, A'B'=A'C'$. 求: $S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}$ 的值.

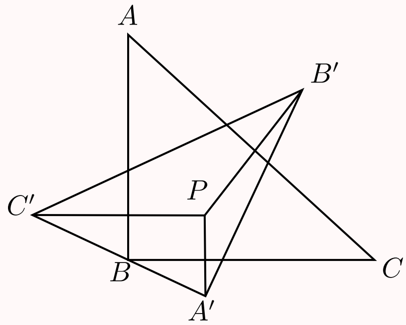

图 2.8

分析. 由对称性可得的五边形面积是 $\triangle ABC$ 面积的两倍, 并且 $AC'A'B'$ 是正方形. $\triangle A'B'C$ 为等腰直角三角形.

解. 连结 $PA, PB, PC, AC', AB', BA', BC', CA', CB'$. 由轴对称性知: $AC'=AP=AB'$. $\angle C'AB=\angle PAB, \angle B'AC=\angle PAC$.

因为 $\angle ABC=90^\circ, AB=BC$, 所以 $\angle BAC=45^\circ$. 故 $\angle B'AC'=90^\circ$; 同理: $\angle A'CB'=90^\circ, \angle A'BC'=180^\circ$, 故 C', B, A' 三点共线. 所以 $\triangle AB'C'$ 是等腰直角三角形. 因为 $\triangle A'B'C'$ 也是等腰直角三角形, 所以四边形 $AC'A'B'$ 为正方形; 同理: $\triangle A'B'C$ 为等腰直角三角形. 设 $A'B'=a$, 故 $S_{A'B'AC'}=a^2, S_{\triangle A'B'C}=\frac{1}{4}a^2$, 故 $S_{A'CB'AC'}=\frac{5}{4}a^2$. 由轴对称性质: $S_{A'CB'AC'}=2S_{\triangle ABC}$, 故 $S_{\triangle ABC}=\frac{5}{8}a^2$. 故 $S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a^2:\frac{5}{8}a^2=4:5$.

2.2 练习题

练习 2.1

证明: 如果七条直线两两相交, 那么所得的角中至少有一个角小于 26°.

证明. 在平面上任取一点 P, 过 P 分别作给定的七条直线的平行线. 形成以 P 为顶点的相邻的 14 个角. 如图: 设这 14 个角为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{13}, \alpha_{14}$. 这 14 个角分别等于七条直线两两相交所形成的 84 个角中的 14 个. 如果每个 $\alpha_i \geqslant 26^\circ (i=1,2,\cdots,14)$, 则

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{14} \geqslant 14\times 26^\circ=364^\circ>360^\circ,$$

矛盾! 故这 14 个角中至少有一个角小于 26°, 原命题成立. ■

练习 2.2

如图, 在 “风车三角形” 中, $AA'=BB'=CC'=2, \angle AOB'=\angle BOC'=\angle COA'=60^\circ$. 求证: $S_{\triangle AOB'}+S_{\triangle BOC'}+S_{\triangle COA'}<\sqrt{3}$.

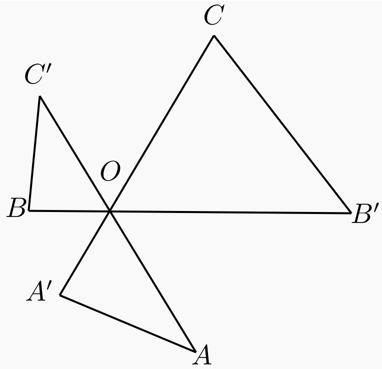

图 2.9

证明. 将 $\triangle BOC'$ 沿 BB' 方向平移 2 个单位, 所移成的三角形记为 $\triangle B'PR$; 将 $\triangle A'OC$ 沿 $A'A$ 方向平移 2 个单位, 所移成的三角形记为 $\triangle ARQ$. 因为

$$OQ = OA + AQ = OA + OA' = AA' = 2,$$
$$OP = OB' + B'P = OB' + OB = BB' = 2,$$

且 $\angle QOP = 60°$, 所以 $\triangle QOP$ 为正三角形. 所以 $PQ = OQ = OP = 2$. 因为 $QR + RP = OC + OC' = CC' = 2$, 故 Q, R, P 三点共线. 所以 $S_{\triangle OPQ} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$, 故 $S_{\triangle AOB'} + S_{\triangle PRB'} + S_{\triangle AQR} < \sqrt{3}$, 所以 $S_{\triangle AOB'} + S_{\triangle BOC'} + S_{\triangle COA'} < \sqrt{3}$. ■

练习 2.3

如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 由 A 向另两边作垂线 AP, AQ, 已知 $PQ = a, AC = b, H$ 为 $\triangle APQ$ 的垂心. 求 AH 的值.

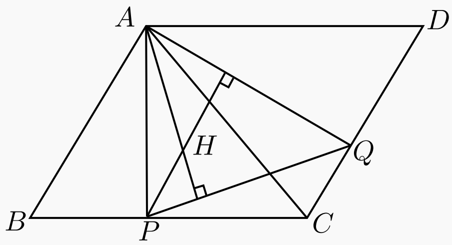

图 2.10

解. 取 AC 的中点 O, 连结 OP. 因为 $\triangle APC$ 和 $\triangle AQC$ 均为直角三角形, 所以

$$OP = OA = OQ = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}b.$$

故 O 为 $\triangle APQ$ 的外心. 过 O 作 $OR \perp PQ, OT \perp AQ$, 连结 HQ, 过 T 作 $TS//AH$ 交 HQ 于 S, 连结 RS, OR.

易知 R, T 分别为 PQ, AQ 的中点. 所以 $PR = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}a$. 因为 $TS//AH$, 故 $TS = \frac{1}{2}AH$ 且 S 为 HQ 的中点. 因为 $AH \perp PQ, OR \perp PQ$, 所以 $AH//OR$. 故 $OR//TS$. 同理: $OT//SR$. 因为四边形 $ORST$ 为平行四边形, 所以 $OR = TS = \frac{1}{2}AH$. 在 Rt $\triangle POR$ 中, $OR = \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$,

所以 $AH = 2OR = \sqrt{b^2 - a^2}$.