

CYANMATH: 创美营讲义（数学）

LeyuDame

2024 年 11 月 28 日

目录

第一章 因式分解技巧	2
1.1 提公因式	2
1.2 应用公式	6
1.2.1 平方差	6
1.2.2 立方和与立方差	7
1.2.3 完全平方	7
1.2.4 完全立方	8
1.2.5 $2^{1984} + 1$ 不是质数	10
1.3 分组分解	12
1.4 十字相乘	14
1.4.1 二次三项式	14
1.4.2 二次齐次式	14
1.4.3 系数和为零	15
1.4.4 综合运用	15
1.5 多项式的因式分解	17
1.5.1 余数定理	17
1.5.2 有理根的求法	19
1.5.3 首 1 多项式	20
1.6 艾森斯坦判别法	22

第一章 因式分解技巧

什么是因式分解

在小学里, 我们学过整数的因数分解. 由乘法, 得

$$3 \times 4 = 12$$

反过来, 12 可以分解: $12 = 3 \times 4$.

当然, 4 还可以继续分解为 2×2 . 于是得

$$12 = 3 \times 2 \times 2$$

这时 12 已经分解成质因数的乘积了.

同样地, 由整式乘法, 得

$$(1 + 2x)(1 - x^2) = 1 + 2x - x^2 - 2x^3$$

反过来, $1 + 2x - x^2 - 2x^3$ 可以分解为两个因式 $1 + 2x$ 与 $1 - x^2$ 的乘积, 即

$$1 + 2x - x^2 - 2x^3 = (1 + 2x)(1 - x^2)$$

$1 - x^2$ 还可以继续分解为 $(1 + x)(1 - x)$. 于是

$$1 + 2x - x^2 - 2x^3 = (1 + 2x)(1 + x)(1 - x)$$

这里 x 的一次多项式 $1 + 2x, 1 + x, 1 - x$ 都不能继续分解, 它们是不可约多项式, 也就是既约多项式. 所以, $1 + 2x - x^2 - 2x^3$ 已经分解成质因式的乘积了.

把一个整式写成几个整式的乘积, 称为因式分解, 每一个乘式称为积的因式.

在因式分解中, 通常要求各个乘式 (因式) 都是既约多项式, 这样的因式称为质因式. 因式分解的方法, 我们将逐一介绍.

1.1 提公因式

学过因式分解的人爱说: “一提、二代、三分组.”

“提”是指“提取公因式”. 在因式分解时, 首先应当想到的是有没有公因式可提. 几个整式都含有的因式称为它们的公因式.

例如 $ma, mb, -mc$ 都含有因式 m , m 就是它们的公因式.

由乘法分配律, 我们知道

$$m(a + b - c) = ma + mb - mc,$$

因此

$$ma + mb - mc = m(a + b - c).$$

这表明上式左边三项的公因式 m 可以提取出来, 作为整式 $ma + mb - mc$ 的因式. $ma + mb - mc$ 的另一个因式 $a + b - c$ 仍由三项组成, 每一项等于 $ma + mb - mc$ 中对应的项除以公因式 m :

$$a = ma \div m, b = mb \div m, c = mc \div m$$

例 1.1.1 (一次提净). 分解因式: $12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2$

解. $12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2$ 由

$$12a^2x^3, 6abx^2y, -15acx^2$$

这三项组成, 它们的数系数 12, 6, -15 的最大公约数是 3, 各项都含有因式 a 和 x^2 , 所以 $3ax^2$ 是上述三项的公因式, 可以提取出来作为 $12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2$ 的因式, 即有

$$\begin{aligned} & 12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2 \\ &= 3ax^2(4ax + 2by - 5c). \end{aligned}$$

注记. 在例 1.1.1 中, 如果只将因式 $3a$ 或 $3ax$ 提出, 那么留下的式子仍有公因式可以提取, 这增添了麻烦, 不如一次提净为好. 因此, 应当先检查数系数, 然后再一个个字母逐一检查, 将各项的公因式提出来, 使留下的式子没有公因式可以直接提取.

还需注意原式如果由三项组成, 那么提取公因式后留下的式子仍由三项组成. 在例 1 中, 这三项分别为 $12a^2x^3, 6abx^2y, -15acx^2$ 除以公因式 $3ax^2$ 所得的商. 初学的同学为了防止产生错误, 可以采取两点措施:

1. 在提公因式前, 先将原式的三项都写成公因式 $3ax^2$ 与另一个式子的积, 然后再提取公因式, 即

$$\begin{aligned} & 12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2 \\ &= 3ax^2 \cdot 4ax + 3ax^2 \cdot 2by + 3ax^2 \cdot (-5c) \\ &= 3ax^2 \cdot (4ax + 2by - 5c). \end{aligned}$$

在熟练之后应当省去中间过程, 直接写出结果.

2. 用乘法分配律进行验算. 由乘法得出

$$\begin{aligned} & 3ax^2(4ax + 2by - 5c) \\ &= 12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2. \end{aligned}$$

例 1.1.2 (视“多”为一). 分解因式: $2a^2b(x+y)^2(b+c) - 6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$

解. 原式由

$$2a^2b(x+y)^2(b+c), -6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$$

这两项组成. 它们的数系数的最大公约数是 2, 两项都含有因式 a^2 和 b , 而且都含有因式 $x+y$ 与 $b+c$, 因此 $2a^2b(x+y)(b+c)$ 是它们的公因式. 于是有

$$\begin{aligned} & 2a^2b(x+y)^2(b+c) - 6a^3b^3(x+y)(b+c)^2 \\ &= 2a^2b(x+y)(b+c) \cdot (x+y) - 2a^2b(x+y)(b+c) \cdot 3ab^2(b+c) \\ &= 2a^2b(x+y)(b+c) [(x+y) - 3ab^2(b+c)] \\ &= 2a^2b(x+y)(b+c) (x+y - 3ab^3 - 3ab^2c). \end{aligned}$$

在本例中, 我们把多项式 $x+y, b+c$ 分别整个看成是一个字母, 这种观点在因式分解时是很有用的.

例 1.1.3 (切勿漏 1). 分解因式: $(2x+y)^3 - (2x+y)^2 + (2x+y)$.

解. 我们把多项式 $2x+y$ 看成是一个字母, 因此原式由

$$(2x+y)^3, -(2x+y)^2, 2x+y$$

这三项组成, $2x+y$ 是这三项的公因式, 于是

$$\begin{aligned} & (2x+y)^3 - (2x+y)^2 + (2x+y) \\ &= (2x+y) \cdot (2x+y)^2 - (2x+y) \cdot (2x+y) + (2x+y) \cdot 1 \\ &= (2x+y) [(2x+y)^2 - (2x+y) + 1]. \end{aligned}$$

请注意, 中括号内的式子仍由三项组成, 千万不要忽略最后一项 1. 在省去中间过程时, 尤需加倍留心.

例 1.1.4 (注意符号). 分解因式: $-3ab(2x+3y)^4 + ac(2x+3y)^3 - a(2x+3y)$.

$$\begin{aligned} \text{解.} \quad & -3ab(2x+3y)^4 + ac(2x+3y)^3 - a(2x+3y) \\ &= a(2x+3y) \cdot (-3b) \cdot (2x+3y)^3 + a(2x+3y) \cdot c(2x+3y)^2 + a(2x+3y) \cdot (-1) \\ &= a(2x+3y) [-3b(2x+3y)^3 + c(2x+3y)^2 - 1]. \end{aligned}$$

注记. 注意中括号内的最后一项是 -1 , 千万别漏掉. 本例中, 原式的第一项有个因数 -1 , 它也可以作为因数提取出来, 即

$$\begin{aligned} & -3ab(2x+3y)^4 + ac(2x+3y)^3 - a(2x+3y) \\ &= -a(2x+3y) \cdot 3b(2x+3y)^3 - a(2x+3y) \cdot (-c)(2x+3y)^2 - \\ & \quad a(2x+3y) \cdot 1 \\ &= -a(2x+3y) [3b(2x+3y)^3 - c(2x+3y)^2 + 1]. \end{aligned}$$

这样做也是正确的. 但必须注意各项的符号, 提出因数 -1 后各项都应改变符号, 所以上式的中括号内三项的符号恰与原式中相应的三项相反.

例 1.1.5 (仔细观察). 分解因式: $(2x - 3y)(3x - 2y) + (2y - 3x)(2x + 3y)$.

解. 初看起来, 原式所含的第一项 $(2x - 3y)(3x - 2y)$ 与第二项 $(2y - 3x)(2x + 3y)$ 没有公因式, 但进一步观察便会发现

$$2y - 3x = -(3x - 2y),$$

因此 $3x - 2y$ 是两项的公因式. 于是有

$$\begin{aligned} & (2x - 3y)(3x - 2y) + (2y - 3x)(2x + 3y) \\ &= (3x - 2y)[(2x - 3y) - (2x + 3y)] \\ &= -6y(3x - 2y). \end{aligned}$$

提出公因式后, 留下的式子如果可以化简, 就应当化简.

例 1.1.6 (化“分”为整). 分解因式: $3a^3b^2 - 6a^2b^3 + \frac{27}{4}ab$.

解. 这里的第三项 $\frac{27}{4}ab$ 的系数是分数, 为了避免分数运算, 我们把 $\frac{1}{4}$ 先提取出来, 这时每项都除以 $\frac{1}{4}$ (也就是乘以 4), 即

$$\begin{aligned} & 3a^3b^2 - 6a^2b^3 + \frac{27}{4}ab \\ &= \frac{1}{4} (12a^3b^2 - 24a^2b^3 + 27ab) \\ &= \frac{3}{4}ab (4a^2b - 8ab^2 + 9). \end{aligned}$$

熟练以后可以将以上两步并作一步, “一次提净”.

在提出一个分数因数 (它的分母是各项系数的公分母) 后, 我们总可以使各项系数都化为整数 (这个过程实质上就是通分). 并且, 还可以假定第一项系数是正整数, 否则可用前面说过的方法, 把 -1 作为公因数提出, 使第一项系数成为正整数.

注记. 提公因式是因式分解的基本方法之一. 在因式分解时, 首先应该想到是否有公因式可提. 在与其他方法配合时, 即使开始已经提出公因式, 但是经过分组或应用公式后还有可能再出现公因式. 凡有公因式应立即提净. 提公因式时, 应注意各项的符号, 千万不要漏掉一项.

习题 1

将以下各式分解因式:

1. $5x^2y - 10xyz + 5xy$.
2. $2a(x - a) + b(a - x) - (x - a)$.
3. $3 - 2x(x + 1) + a(x + 1) + (x + 1)$.
4. $\frac{3}{2}b^{3n-1} + \frac{1}{6}b^{2n-1}$ (n 是正整数).
5. $2(p - 1)^2 - 4q(p - 1)$.

6. $mn(m^2 + n^2) - n^2(m^2 + n^2)$.
7. $(5a - 2b)(2m + 3p) - (2a - 7b)(2m + 3p)$.
8. $2(x + y) + 6(x + y)^2 - 4(x + y)^3$.
9. $(x + y)^2(b + c) - (x + y)(b + c)^2$.
10. $6p(x - 1)^3 - 8p^2(x - 1)^2 - 2p(1 - x)^2$.

1.2 应用公式

将乘法公式反过来写就得到因式分解中所用的公式, 常见的有七个公式:

1. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
2. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
3. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
4. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.
5. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.
6. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$.
7. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$.

以上公式必须熟记, 牢牢掌握各自的特点.

1.2.1 平方差

七个公式中, 平方差公式应用得最多.

例 1.2.1. 分解因式: $9(m - n)^2 - 4(m + n)^2$.

解. 原式由两项组成, 这两项符号相反, 并且

$$\begin{aligned} 9(m - n)^2 &= [3(m - n)]^2, \\ 4(m + n)^2 &= [2(m + n)]^2, \end{aligned}$$

因此可以应用平方差公式, 得

$$\begin{aligned} &9(m - n)^2 - 4(m + n)^2 \\ &= [3(m - n)]^2 - [2(m + n)]^2 \\ &= [3(m - n) + 2(m + n)][3(m - n) - 2(m + n)] \\ &= (5m - n)(m - 5n). \end{aligned}$$

例 1.2.2. 分解因式: $75x^6y - 12x^2y^5$.

解.

$$\begin{aligned}75x^6y - 12x^2y^5 &= 3x^2y(25x^4 - 4y^4) \\&= 3x^2y \left[(5x^2)^2 - (2y^2)^2 \right] \\&= 3x^2y(5x^2 + 2y^2)(5x^2 - 2y^2)\end{aligned}$$

例 1.2.3. 分解因式: $-(3a^2 - 5b^2)^2 + (5a^2 - 3b^2)^2$.

解.

$$\begin{aligned}&-(3a^2 - 5b^2)^2 + (5a^2 - 3b^2)^2 \\&= (5a^2 - 3b^2)^2 - (3a^2 - 5b^2)^2 \\&= \left[(5a^2 - 3b^2) + (3a^2 - 5b^2) \right] \left[(5a^2 - 3b^2) - (3a^2 - 5b^2) \right] \\&= (8a^2 - 8b^2)(2a^2 + 2b^2) \\&= 16(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \\&= 16(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)\end{aligned}$$

注记. 例 1.2.3 表明在因式公解中可能需要多次应用公式或提公因式, 直到不能继续分解为止.

1.2.2 立方和与立方差

例 1.2.4. 分解因式: $9x^5 - 72x^2y^3$.

解.

$$\begin{aligned}9x^5 - 72x^2y^3 &= 9x^2(x^3 - 8y^3) \\&= 9x^2[x^3 - (2y)^3] \\&= 9x^2(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)\end{aligned}$$

例 1.2.5. 分解因式: $a^6 + b^6$.

解.

$$\begin{aligned}a^6 + b^6 &= (a^2)^3 + (b^2)^3 \\&= (a^2 + b^2) \left[(a^2)^2 - a^2b^2 + (b^2)^2 \right] \\&= (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)\end{aligned}$$

1.2.3 完全平方

例 1.2.6. 分解因式: $9x^2 - 24xy + 16y^2$.

解. 原式由三项组成, 第一项 $9x^2 = (3x)^2$, 第三项 $16y^2 = (4y)^2$, 而

$$2 \cdot 3x \cdot 4y = 24xy$$

与中间一项只差一个符号, 因此可以利用 (完全) 平方式, 得

$$\begin{aligned} & 9x^2 - 24xy + 16y^2 \\ &= (3x - 4y)^2. \end{aligned}$$

不是平方式的二次三项式, 通常用十字相乘法分解 (后面会讲).

例 1.2.7. 分解因式: $8a - 4a^2 - 4$.

解. 首先把原式“理顺”, 也就是将它的各项按字母 a 降幂 (或升幂) 排列, 从而有

$$\begin{aligned} & 8a - 4a^2 - 4 \\ &= -4a^2 + 8a - 4 \\ &= -4(a^2 - 2a + 1) \\ &= -4(a - 1)^2. \end{aligned}$$

注记. 按某个字母降幂排列是一个简单而有用的措施 (简单的往往是有用的), 值得注意.

例 1.2.8. 分解因式: $4a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 18bc - 12ca + 12ab$.

解. 我们需要引入一个公式. 由乘法可得

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca,$$

即若干项的和平方的平方等于各项的平方与每两项乘积的 2 倍的和. 上面的式子可写成

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ &= (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

这也是一个因式分解的公式.

联系到例 1.2.8 就有

$$\begin{aligned} & 4a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 18bc - 12ca + 12ab \\ &= (2a)^2 + (3b)^2 + (-3c)^2 + 2(3b)(-3c) + 2(2a)(-3c) + 2(2a)(3b) \\ &= (2a + 3b - 3c)^2. \end{aligned}$$

1.2.4 完全立方

例 1.2.9. 分解因式: $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$.

解.

$$\begin{aligned} & 8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2 \\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 \\ &= (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3x \\ &= (2x + 3y)^3. \end{aligned}$$

例 1.2.10. 分解因式: $729a^6 - 243a^4 + 27a^2 - 1$.

解.

$$\begin{aligned} & 729a^6 - 243a^4 + 27a^2 - 1 \\ &= (9a^2)^3 - 3 \cdot (9a^2)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (9a^2) \cdot 1^2 - 1^3 \\ &= (9a^2 - 1)^3 \\ &= (3a + 1)^3(3a - 1)^3 \end{aligned}$$

例 1.2.11. 分解因式: $a^6 - b^6$.

解. a^6 可以看成平方:

$$a^6 = (a^3)^2,$$

也可以看成立方:

$$a^6 = (a^2)^3,$$

于是 $a^6 - b^6$ 的分解就有两条路可走.

第一条路是先应用平方差公式:

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^3)^2 - (b^3)^2 \\ &= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

第二条路是从立方差公式入手:

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^2)^3 - (b^2)^3 \\ &= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \\ &= (a + b)(a - b)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \end{aligned}$$

注记. 采用两种方法分解, 获得的结果应当相同. 因此比较

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

与

$$(a + b)(a - b)(a^4 + a^2b^2 + b^4),$$

我们知道 $a^4 + a^2b^2 + b^4$ 不是既约多项式, 并且有

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \quad (1.1)$$

及

$$a^6 - b^6 = (a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2). \quad (1.2)$$

于是, 从 $a^6 - b^6$ 的分解出发, 不但得到 1.2 式, 而且知道 $a^4 + a^2b^2 + b^4$ 不是既约多项式, 导出了 1.1 式, 可谓问一知三.

后面我们还要介绍导出 1.1 式的另一种方法.

1.2.5 $2^{1984} + 1$ 不是质数

例 1.2.12. 求证 $2^{1984} + 1$ 不是质数.

解. 为了将 $2^{1984} + 1$ 分解因数, 我们需要知道一个新的公式, 即在 n 为正奇数时

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

上式不难用乘法验证, 将右边的两个因式相乘便得到 $a^n + b^n$. 现在我们有

$$\begin{aligned} 2^{1984} + 1 &= (2^{64})^{31} + 1^{31} \\ &= (2^{64} + 1)(2^{64 \times 30} - 2^{64 \times 29} + \cdots - 2^{64} + 1). \end{aligned}$$

$2^{64} + 1$ 是 $2^{1984} + 1$ 的真因数, 它大于 1, 小于 $2^{1984} + 1$, 所以 $2^{1984} + 1$ 不是质数. 用这个方法可以证明: 当 n 有大于 1 的奇数因数时, $2^n + 1$ 不是质数.

注记. 类似地, 由乘法可以得到在 n 为正整数时

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \quad (12)$$

这也是一个有用的公式.

例 1.2.13. 分解因式: $x^5 - 1$.

解.

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

习题 2

将以下各式分解因式:

1. $16 - (3a + 2b)^2$.
2. $4y^2 - (2z - x)^2$.
3. $a^4 - b^4$.
4. $-81a^4b^4 + 16c^4$.
5. $20a^3x^3 - 45axy^2$.
6. $(3a^2 - b^2)^2 - (a^2 - 3b^2)^2$.
7. $x^8 - y^8$.
8. $16x^5 - x$.
9. $(5x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2$.
10. $32a^3b^3 - 4b^9$.

11. $8a^3b^3c^3 - 1.$

12. $64x^6y^3 + y^{15}.$

13. $x^2(a+b)^2 - 2xy(a^2 - b^2) + y^2(a-b)^2.$

14. $a^{n+2} + 8a^n + 16a^{n-2}.$

15. $9a^2 + x^{2n} + 6a + 2x^n + 6ax^n + 1.$

16. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc.$

17. $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 6xy + 4xz - 12yz.$

18. $(p+q)^3 - 3(p+q)^2(p-q) + 3(p+q)(p-q)^2 - (p-q)^3.$

19. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2.$

20. $(a+x)^4 - (a-x)^4.$

1.3 分组分解

例 1.3.1 (分组分解三部曲). 分解因式: $ax - by - bx + ay$.

解.

$$\begin{aligned} & ax - by - bx + ay \\ &= (ax - bx) + (ay - by) \\ &= x(a - b) + y(a - b) \\ &= (x + y)(a - b). \end{aligned}$$

分组的方法并不是唯一的, 对于上面的整式 $ax - by - bx + ay$, 也可以采用下面的做法:

$$\begin{aligned} & ax - by - bx + ay \\ &= (ax + ay) - (bx + by) \\ &= a(x + y) - b(x + y) \\ &= (x + y)(a - b) \end{aligned}$$

两种做法的效果是一样的, 殊途同归! 可以说, 一种是按照 x 与 y 来分组 (含 x 的项在一组, 含 y 的项在另一组); 另一种是按 a 与 b 来分组.

一般地, 分组分解大致分为三步:

1. 将原式的项适当分组;
2. 对每一组进行处理 (“提” 或 “代”);
3. 将经过处理后的每一组当作一项, 再采用 “提” 或 “代” 进行分解.

一位高明的棋手, 在下棋时, 决不会只看一步. 同样, 在进行分组时, 不仅要看到第二步, 而且要看到第三步.

一个整式的项有许多种分组的方法, 初学者往往需要经过尝试才能找到适当的分组方法, 但是只要努力实践, 多加练习, 就会成为有经验的 “行家”.

例 1.3.2 (殊途同归). 分解因式: $x^2 + ax^2 + x + ax - 1 - a$.

解. 解法一: 按字母 x 的幂来分组.

$$\begin{aligned} & x^2 + ax^2 + x + ax - 1 - a \\ &= (x^2 + ax^2) + (x + ax) - (1 + a) \\ &= x^2(1 + a) + x(1 + a) - (1 + a) \\ &= (1 + a)(x^2 + x - 1). \end{aligned}$$

解法二: 按字母 a 的幂来分组.

$$\begin{aligned} & x^2 + ax^2 + x + ax - 1 - a \\ &= (ax^2 + ax - a) + (x^2 + x - 1) \\ &= a(x^2 + x - 1) + (x^2 + x - 1) \\ &= (a + 1)(x^2 + x - 1). \end{aligned}$$

例 1.3.3 (瞄准公式). 分解因式: $-1 - 2x - x^2 + y^2$.

解.

$$\begin{aligned} & -1 - 2x - x^2 + y^2 \\ &= y^2 - (x^2 + 2x + 1) \\ &= y^2 - (x + 1)^2 \\ &= (y + x + 1)(y - x - 1) \end{aligned}$$

例 1.3.4 (瞄准公式). 分解因式: $ax^3 + x + a + 1$.

解.

$$\begin{aligned} & ax^3 + x + a + 1 \\ &= (ax^3 + a) + (x + 1) \\ &= a(x + 1)(x^2 - x + 1) + (x + 1) \\ &= (x + 1)(ax^2 - ax + a + 1) \end{aligned}$$

例 1.3.5 (从零开始). 分解因式: $ab(c^2 - d^2) - (a^2 - b^2)cd$.

解. 此式无法直接进行分解, 必须先用乘法分配律将原式变为四项, 再进行分组.

$$\begin{aligned} & ab(c^2 - d^2) - (a^2 - b^2)cd \\ &= abc^2 - abd^2 - a^2cd + b^2cd \\ &= (abc^2 - a^2cd) + (b^2cd - abd^2) \\ &= ac(bc - ad) + bd(bc - ad) \\ &= (ac + bd)(bc - ad). \end{aligned}$$

从这个例子可以看出, 错误的分组还不如不分组. 聪明的人并不是不犯错误的人, 而是善于改正错误的人.

如果“一提、二代”都不能奏效, 就应当采用分组分解. 分组分解应依照前面所说的三步进行. 这三步是密切联系的, 不仅要看到第二步, 而且要看到第三步. 在第二步与第三步都是提取公因式时, 各组的项数相等 (平均分配). 否则, 应当瞄准公式来进行分组. 应当注意, 分组需要尝试, 失败了, 从零开始. 只要反复实践, 就能掌握分组的技巧, 运用自如.

习题 3

将以下各式分解因式 (对应书本第 14~24 题):

1. $x^3 + bx^2 + ax + ab$.

2. $acx^3 + bcx^2 + adx + bd$.

3. $a^4 + a^3b - ab^3 - b^4$.

4. $a^4 - a^3b - ab^3 + b^4$.

5. $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$.

6. $x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 + z^4$.

7. $x^2y^2z^2 - x^2z - y^2z + 1$.

8. $x^4 + x^3y + xz^3 + yz^3$.

9. $(a+b)^2 + (a+c)^2 - (c+d)^2 - (b+d)^2$.

10. $ax(y^3 + b^3) + by(bx^2 + a^2y)$.

11. $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 + a^3 + b^3 + c^3$.

1.4 十字相乘

1.4.1 二次三项式

例 1.4.1. 分解因式: $x^2 - 7x + 6$.

解.

$$x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6).$$

例 1.4.2. 分解因式: $x^2 + 7x - 8$.

解.

$$x^2 + 7x - 8 = (x + 8)(x - 1).$$

例 1.4.3. 分解因式: $x + 12 - x^2$.

解.

$$x + 12 - x^2 = -x^2 + x + 12 = -(x^2 - x - 12) = -(x + 3)(x - 4).$$

例 1.4.4 (二次项系数不为 1). 分解因式: $6x^2 - 7x + 2$.

解.

$$6x^2 - 7x + 2 = (2x - 1)(3x - 2).$$

1.4.2 二次齐次式

形如 $ax^2 + bxy + cy^2$ 的多项式, 每一项都是 x 与 y 的二次式 (xy 中 x 与 y 的次数都是 1, 所以 xy 的次数是 $1 + 1 = 2$), 称为 x 与 y 的二次齐次式. 它的分解与 x 的二次三项式一样, 采用十字相乘.

例 1.4.5. 分解因式: $6x^2 - 7xy + 2y^2$.

解.

$$6x^2 - 7xy + 2y^2 = (2x - y)(3x - 2y).$$

1.4.3 系数和为零

如果二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 的系数和

$$a + b + c = 0,$$

那么

$$ax^2 + bx + c = (x - 1)(ax - c).$$

事实上, 因为

$$b = -(a + c),$$

这时

$$\begin{aligned} & (x - 1)(ax - c) \\ &= ax^2 - (a + c)x + c \\ &= ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

记住这个结论, 下面的例题就能迎刃而解了.

例 1.4.6. 分解因式: $3x^2 + 5x - 8$.

解.

$$3x^2 + 5x - 8 = (x - 1)(3x + 8)$$

例 1.4.7. 分解因式: $12x^2 - 19xy + 7y^2$.

解.

$$12x^2 - 19xy + 7y^2 = (x - y)(12x - 7y).$$

注记. x 的二次三项式 (或 x 与 y 的二次齐次式) 应该用十字相乘来分解因式. 方法是把 x^2 的系数分解为两个因数的积, 把常数项 (或 y^2 的系数) 也分解为两个因数的积, 再把这些因数交叉相乘, 如果所得乘积的和等于 x 的一次项的系数, 那么就产生出多项式的两个一次因式. 在系数和为零时, 必有一个因式是 $x - 1$ (或 $x - y$), 这样, 分解的结果可以直接写出来.

1.4.4 综合运用

例 1.4.8 (换元). 分解因式: $x^6 - 28x^3 + 27$.

解. 设 $x^3 = u$, 则原式变为 $u^2 - 28u + 27$, 这是一个二次三项式, 可以分解为 $(u - 1)(u - 27)$, 所以

$$x^6 - 28x^3 + 27 = (x^3 - 1)(x^3 - 27) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x - 3)(x^2 + 3x + 9).$$

例 1.4.9. 分解因式: $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$.

解. 把 $x^2 + 4x + 8$ 看成一个字母, 得

$$\begin{aligned} & (x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 \\ &= (x^2 + 4x + 8 + x)(x^2 + 4x + 8 + 2x) \\ &= (x^2 + 5x + 8)(x^2 + 6x + 8) \\ &= (x + 2)(x + 4)(x^2 + 5x + 8). \end{aligned}$$

这里对 $x^2 + 6x + 8$ 再次用十字相乘分解因式, 而 $x^2 + 5x + 8$ 在有理数集内不能分解.

例 1.4.10. 证明: 四个连续整数的乘积加 1 是整数的平方.

证明. 设这四个连续整数为

$$x + 1, x + 2, x + 3, x + 4,$$

则

$$\begin{aligned} & (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 \\ &= [(x + 1)(x + 4)][(x + 2)(x + 3)] + 1 \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1. \end{aligned}$$

我们把 $x + 1$ 与 $x + 4$ 相乘, $x + 2$ 与 $x + 3$ 相乘, 好处是两个乘积不但二次项相同, 而且一次项也是相同的.

把 $x^2 + 5x + 5$ 看成 u , 这时

$$u = x^2 + 5x + \frac{4 + 6}{2}$$

得

$$\begin{aligned} & (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 \\ &= \left[(x^2 + 5x + 5) - 1 \right] \left[(x^2 + 5x + 5) + 1 \right] + 1 \\ &= (x^2 + 5x + 5)^2 - 1 + 1 \\ &= (x^2 + 5x + 5)^2, \end{aligned}$$

这是一个平方数. □

注记. 在本题中把 $x^2 + 5x$ 或 $x^2 + 5x + 4$ 看成一个字母也是可以的, 但切勿把 $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ 全部乘出来写成 x 的四次式, 那样做的结果是破坏了规律性, 难以下手.

例 1.4.11. 分解因式: $4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) - 3x^2$.

解. 第一项的四个因式以将 $x+5$ 与 $x+12$ 相乘、 $x+6$ 与 $x+10$ 相乘为好, 这时不仅二次项相同, 而且常数项也相同, 于是

$$\begin{aligned}
 & 4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2 \\
 &= 4(x^2 + 17x + 60)(x^2 + 16x + 60) - 3x^2 \\
 &= 4[(x^2 + 16x + 60) + x](x^2 + 16x + 60) - 3x^2 \\
 &= 4(x^2 + 16x + 60)^2 + 4x(x^2 + 16x + 60) - 3x^2 \\
 &= [2(x^2 + 16x + 60) - x][2(x^2 + 16x + 60) + 3x] \\
 &= (2x^2 + 31x + 120)(2x^2 + 35x + 120)
 \end{aligned}$$

习题 5

将以下各式分解因式:

1. $x^2 + 12x + 20$.
2. $x^2 - 12x + 20$.
3. $x^2 - 4x - 5$.
4. $x^2 - 9x - 22$.
5. $12x^2 - 11xy - 15y^2$.
6. $6x^2 - 13x + 6$.
7. $2x^2 + 7x + 3$.
8. $2x^2 - 5x + 3$.
9. $-20xy + 64y^2 + x^2$.
10. $-x^2 + x + 56$.

1.5 多项式的因式分解

设 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为 x 的 n 次多项式, 本节介绍求它的一次因式的方法.

1.5.1 余数定理

我们用 $f(x)$ 表示多项式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 用 $f(a)$ 表示这个多项式在 $x=a$ 时的值. 例如, 在 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ 时, 可得

$$f(1) = 1 + 6 + 11 + 6 = 24$$

$$f(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$$

$$f(+2) = 8 + 24 + 22 + 6 = 60$$

如果我们用一次多项式 $x - c$ 作除式去除多项式 $f(x)$, 那么余式是一个数. 设这时商式为多项式 $g(x)$, 余式 (余数) 为 r , 则

$$f(x) = (x - c)Q(x) + r, \quad (1.3)$$

即被除式等于除式乘以商式再加余式.

在1.3式中令 $x = c$, 便得到

$$f(c) = 0 + r = r,$$

因此, 我们有

$x - c$ 除 $f(x)$ 时, 所得的余数为 $f(c)$.

这个结论称为**余数定理**.

如果余数为 0, 那么 $f(x)$ 被 $x - c$ 整除, 也就是 $x - c$ 是 $f(x)$ 的因式. 反过来, 如果 $x - c$ 是 $f(x)$ 的因式, 那么 $f(x)$ 被 $x - c$ 整除, 余数为 0. 因此, 我们有

如果 $f(c) = 0$, 那么 $x - c$ 是 $f(x)$ 的因式. 反过来, 如果 $x - c$ 是 $f(x)$ 的因式, 那么 $f(c) = 0$.

例 1.5.1. 分解因式: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

解. 因为 $f(-1) = 0$, 根据上面的结论 $x - (-1) = x + 1$ 是它的一次因式. 知道这个因式后, 施行除法就可以把商式求出来. 不过, 我们也可以不用除法, 直接去分组分解. 这里分组是“有的放矢”的, 每一组都有一个因式 $x + 1$, 即

$$\begin{aligned} & x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\ &= (x^3 + x^2) + (5x^2 + 5x) + (6x + 6) \\ &= x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 + 5x + 6) \\ &= (x + 1)(x + 2)(x + 3). \end{aligned}$$

例 1.5.2. 设 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$, 计算 $f(1), f(-1), f(\frac{3}{2})$, 并把 $f(x)$ 分解.

解.

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 - 5 + 5 - 3 = -1 \\ f(-1) &= -2 - 5 - 5 - 3 = -15 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 3 \\ &= \frac{27}{4} - \frac{45}{4} + \frac{15}{2} - 3 = 0 \end{aligned}$$

可知 $x - \frac{3}{2}$ 是 $f(x)$ 的一次因式. 为了避免分数运算, 我们把 $x - \frac{3}{2}$ 乘以 2 得 $2x - 3$, $2x - 3$ 仍然是 $f(x)$ 的一次因式.

现在把 $f(x)$ 分组分解, 注意使每组都有因式 $2x - 3$ (也就是同一组中两项的系数比为 $2 : (-3)$):

$$\begin{aligned} & 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3 \\ &= (2x^3 - 3x^2) - (2x^2 - 3x) + (2x - 3) \\ &= x^2(2x - 3) - x(2x - 3) + (2x - 3) \\ &= (2x - 3)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

1.5.2 有理根的求法

如果 $f(c) = 0$, 那么就说 c 是多项式 $f(x)$ 的根. 因此, 在 c 是 $f(x)$ 的根时, $x - c$ 是 $f(x)$ 的因式. 问题是怎样求出 $f(x)$ 的根?

我们假定 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式, 也就是说 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 都是整数. 又设有理数 $c = \frac{p}{q}$ 是 $f(x)$ 的根, 这里 p, q 是两个互质的整数.

由于 $f(c) = 0$, 即

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

两边同乘 q^n 得

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad (1.4)$$

1.4式右边被 p 整除 (0 被任何一个不等于 0 的数整除), 所以它的左边也被 p 整除. 显然, 左边的前 n 项都被 p 整除, 所以最后一项 $a_0 q^n$ 也被 p 整除, 但 p 与 q 互质, 所以 p 整除 a_0 , 即 p 是 a_0 的因数 (约数). 同样地, q 应当整除 $a_n p^n$, 从而 q 是 a_n 的因数 (约数). 于是, 可得

有理根 $c = \frac{p}{q}$ 的分子 p 是常数项 a_0 的因数, 分母 q 是首项系数 a_n 的因数.

例 1.5.3. 分解因式: $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$.

解. $a_0 = -2$ 的因数是 $\pm 1, \pm 2$, $a_n = 2$ 的因数是 $\pm 1, \pm 2$. 因此, $f(x)$ 的有理根只可能是 $\pm 1, \pm 2$ (分母为 1), $\pm \frac{1}{2}$. 因为

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 - 1 - 5 - 2 = -6 \\ f(-1) &= -2 - 1 + 5 - 2 = 0 \end{aligned}$$

于是 -1 是 $f(x)$ 的一个根, 从而 $x + 1$ 是 $f(x)$ 的因式, 可得

$$\begin{aligned} & 2x^3 - x^2 - 5x - 2 \\ &= (2x^3 + 2x^2) - (3x^2 + 3x) - (2x + 2) \\ &= 2x^2(x + 1) - 3x(x + 1) - 2(x + 1) \\ &= (2x^2 - 3x - 2)(x + 1) \\ &= (x - 2)(2x + 1)(x + 1). \end{aligned}$$

例 1.5.4. 分解因式: $f(x) = 3x^3 + x^2 + x - 2$.

解. $a_0 = -2$ 的因数为 $\pm 1, \pm 2$, $a_n = 3$ 的正因数为 $+1, +3$ (我们可以认为 $\frac{p}{q}$ 的分母 q 是正的, 因此 a_0 的因数有正有负, a_n 的因数可只取正的). 所以, $f(x)$ 的有理根只可能是 $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$.

由于

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right) - 2 \\ &= \frac{8}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{3} - 2 = 0 \end{aligned}$$

所以 $x - \frac{2}{3}$ 是 $f(x)$ 的因式, 从而 $3x - 2$ 是 $f(x)$ 的因式, 可得

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 + x^2 + x - 2 \\ &= (3x^3 - 2x^2) + (3x^2 - 2x) + (3x - 2) \\ &= x^2(3x - 2) + x(3x - 2) + (3x - 2) \\ &= (3x - 2)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

例 1.5.5. 分解因式: $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

解. $a_0 = -2$ 的因数为 $\pm 1, \pm 2$, $a_n = 6$ 的正因数为 $1, 2, 3, 6$. 所以, $f(x)$ 的有理根只可能为

$$\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{6}$$

经检验 $c = -\frac{1}{2}$ 是一个根, 所以 $2x + 1$ 是 $f(x)$ 的因式, 可得

$$\begin{aligned} &6x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \\ &= (6x^4 + 3x^3) + (2x^3 + x^2) + (2x^2 + x) - (4x + 2) \\ &= (2x + 1)(3x^3 + x^2 + x - 2) \\ &= (2x + 1)(3x - 2)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

1.5.3 首 1 多项式

对于首项系数为 1 的整系数多项式 $f(x)$, 问题更加简单. 这时 $q = 1$, 有理根都是整数根.

例 1.5.6. 分解因式: $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

解. 本题有理根只可能为 ± 1 . $+1$ 当然不可能为根 (因为多项式的系数全是正的), 经检验 -1 是根, 所以原式有因式 $x + 1$, 并且

$$\begin{aligned} &x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ &= (x^6 + x^5) + (x^5 + x^4) + (2x^4 + 2x^3) + (2x^3 + 2x^2) + (x^2 + x) + (x + 1) \\ &= (x + 1)(x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

容易验证 -1 也是 $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ 的根, 并且

$$\begin{aligned} & x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ &= (x^5 + x^4) + (2x^3 + 2x^2) + (x + 1) \\ &= (x + 1)(x^4 + 2x^2 + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 + 1)^2, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ &= (x + 1)^2 (x^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

例 1.5.7. 分解因式: $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$.

解. 有理根只可能为

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

经检验, 2 是根, 所以原式有因式 $x - 2$, 并且

$$\begin{aligned} & x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \\ &= (x^3 - 2x^2) - (7x^2 - 14x) + (12x - 24) \\ &= (x - 2)(x^2 - 7x + 12) \\ &= (x - 2)(x - 3)(x - 4). \end{aligned}$$

例 1.5.8. 分解因式: $x^3 - 9x^2y + 26xy^2 - 24y^3$.

解.

$$\begin{aligned} & x^3 - 9x^2y + 26xy^2 - 24y^3 \\ &= (x - 2y)(x - 3y)(x - 4y). \end{aligned}$$

这只不过是在上题的解答上添上几个 y 而已.

例 1.5.9. 分解因式: $-24y^3 + 26y^2 - 9y + 1$.

解. $a_n = -24$, 但 $a_0 = 1$. 为了避免分数计算的麻烦, 我们把原式改为升幂排列

$$1 - 9y + 26y^2 - 24y^3$$

如果与上例比较一下, 就会发现两者实质上是相同的, 即在上例中令 $x = 1$, 便得到

$$\begin{aligned} & 1 - 9y + 26y^2 - 24y^3 \\ &= (1 - 2y)(1 - 3y)(1 - 4y). \end{aligned}$$

例 1.5.10. 分解因式: $x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{11}{3}x - 1$.

解. 原式不是整系数多项式, 但可以先提取 $\frac{1}{3}$, 然后再按上面的办法分解, 得

$$\begin{aligned} & x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{11}{3}x - 1 \\ &= \frac{1}{3}(3x^3 - 5x^2 - 11x - 3) \\ &= \frac{1}{3}(x + 1)(x - 3)(3x + 1) \end{aligned}$$

习题 8

将以下各式分解因式：

1. $x^3 + 4x^2 - 5$.
2. $2x^5 + 7x^4 + 12x^3 + 14x^2 + 10x + 3$.
3. $(x - 2y)x^3 - (y - 2x)y^3$.
4. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.
5. $2x^4 + x^3 + 7x^2 + 4x - 4$.
6. $3x^3 - 5x^2y + xy^2 + y^3$.
7. $6x^3 - 5x^2y - 3xy^2 + 2y^3$.
8. $3x^3 + 6x^2 + 4x + 8$.
9. $8x^3 + 4(a + b + c)x^2 + 2(ab + bc + ca)x + abc$.
10. $(a - 1)x^3 - ax^2 - (a - 3)x + (a - 2)$.
11. $5x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 9x - 7$.
12. $x^3 + px^2 + px + p - 1$.

1.6 艾森斯坦判别法