初等数论

整除，同余和不定方程

LeyuDame

2024 年 11 月 1 日

整除的概念与基本性质

定义

对任给的两个整数 $a, b(a \neq 0)$, 如果存在整数 q, 使得 $b = aq$, 那么称 b 能被 a 整除 (或称 a 能整除 b), 记作 $a \mid b$. 否则, 称 b 不能被 a 整除, 记作 $a \nmid b$.
如果 $a \mid b$, 那么称 a 为 b 的因数, b 为 a 的倍数.

整除的概念与基本性质

性质

如果 $a \mid b$, 那么 $a \mid (-b)$ ，反过来也成立; 进一步, 如果 $a \mid b$, 那么 $(-a) \mid b$ ，反过来也成立.

性质

如果 $a|b, b|c$, 那么 $a \mid c$. (传递性)

性质

若 $a|b, a|c$, 则对任意整数 x, y, 都有 $a \mid bx + cy$. (即 a 能整除 b, c 的任意一个“线性组合”)

例

若 $a|n, b|n$, 且存在整数 x, y, 使得 $ax + by = 1$, 证明: $ab \mid n$.

例

证明：无论在数 12008 的两个 0 之间添加多少个 3 ，所得的数都是 19 的倍数.

例

已知一个 1000 位正整数的任意连续 10 个数码形成的 10 位数是 2^{10} 的倍数. 证明：该正整数为 2^{1000} 的倍数.

例

设 m 是一个大于 2 的正整数，证明：对任意正整数 n ，都有 $2^m - 1 \nmid 2^n + 1$.

素数与合数

性质

设 n 为大于 1 的正整数, p 是 n 的大于 1 的因数中最小的正整数, 则 p 为素数.

性质

如果对任意 1 到 $\sqrt{n}$ 之间的素数 p, 都有 $p \nmid n$, 那么 n 为素数. 这里 $n(>1)$ 为正整数.

证明.

事实上, 若 n 为合数, 则可写 $n = pq, 2 \leqslant p \leqslant q$. 因此 $p^2 \leqslant n$, 即 $p \leqslant \sqrt{n}$.
这表明 p 的素因子 $\leqslant \sqrt{n}$, 且它是 n 的因数, 与条件矛盾. 因此 n 为素数. □

素数与合数

性质

素数有无穷多个.

证明.

若只有有限个素数, 设它们是 $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. 考虑数

$$x = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

其最小的大于 1 的因数 p, 它是一个素数, 因此, p 应为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 中的某个数. 设 $p = p_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, 并且 $x = p_i y$, 则 $p_1 p_2 \cdots p_n + 1 = p_i y$, 即

$$p_i(y - p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_n) = 1.$$

这导致 $p_i \mid 1$. 矛盾.
所以, 素数有无穷多个. $\square$

例

设 n 为大于 1 的正整数. 证明: 数 $n^5 + n^4 + 1$ 不是素数.

例

考察下面的数列:

$$101, 10101, 1010101, \cdots$$

问: 该数列中有多少个素数?

例

求所有的正整数 n, 使得 $\frac{n(n+1)}{2}-1$ 是一个素数.

例

对任意正整数 n , 证明: 存在连续 n 个正整数, 它们都是合数.

例

设 n 为大于 2 的正整数. 证明: 存在一个素数 p , 满足 $n < p < n!$.

例

设 a, b, c, d, e, f 都是正整数, $S = a + b + c + d + e + f$ 是 $abc +\ def$ 和 $ab + bc + ca - de - ef - ed$ 的因数. 证明: S 为合数.