

因式分解 II

珠海一中创美营 (数学)

2024 年 12 月 6 日

目录

① 分组分解

② 十字相乘

- 二次三项式
- 二次齐次式
- 系数和为零
- 综合运用

③ 多项式的因式分解

- 余数定理
- 有理根的求法
- 首 1 多项式

④ 既约多项式

- 艾氏判别法
- 奇与偶

目录

1 分组分解

2 十字相乘

- 二次三项式
- 二次齐次式
- 系数和为零
- 综合运用

3 多项式的因式分解

- 余数定理
- 有理根的求法
- 首 1 多项式

4 既约多项式

- 艾氏判别法
- 奇与偶

例 1 (分组分解三部曲)

分解因式: $ax - by - bx + ay$.

分组分解三部曲

一般地, 分组分解大致分为三步:

- ① 将原式的项适当分组;
- ② 对每一组进行处理 (“提” 或 “代”);
- ③ 将经过处理后的每一组当作一项, 再采用 “提” 或 “代” 进行分解.

一位高明的棋手, 在下棋时, 决不会只看一步. 同样, 在进行分组时, 不仅要看到第二步, 而且要看到第三步.

一个整式的项有许多种分组的方法, 初学者往往需要经过尝试才能找到适当的分组方法, 但是只要努力实践, 多加练习, 就会成为有经验的 “行家” .

例 2 (殊途同归)

分解因式: $x^2 + ax^2 + x + ax - 1 - a$.

例 3 (瞄准公式)

分解因式: $-1 - 2x - x^2 + y^2$.

例 4 (瞄准公式)

分解因式: $ax^3 + x + a + 1$.

例 5 (从零开始)

分解因式: $ab(c^2 - d^2) - (a^2 - b^2)cd.$

目录

1 分组分解

2 十字相乘

- 二次三项式
- 二次齐次式
- 系数和为零
- 综合运用

3 多项式的因式分解

- 余数定理
- 有理根的求法
- 首 1 多项式

4 既约多项式

- 艾氏判别法
- 奇与偶

例 6

分解因式: $x^2 - 7x + 6$.

例 7

分解因式: $x^2 + 7x - 8$.

例 8

分解因式: $x + 12 - x^2$.

例 9 (二次项系数不为 1)

分解因式: $6x^2 - 7x + 2$.

二次齐次式

形如 $ax^2 + bxy + cy^2$ 的多项式, 每一项都是 x 与 y 的二次式 (xy 中 x 与 y 的次数都是 1 , 所以 xy 的次数是 $1 + 1 = 2$), 称为 x 与 y 的二次齐次式. 它的分解与 x 的二次三项式一样, 采用十字相乘.

例 10

分解因式： $6x^2 - 7xy + 2y^2$.

系数和为零

如果二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 的系数和

$$a + b + c = 0,$$

那么

$$ax^2 + bx + c = (x - 1)(ax - c).$$

记住这个结论, 下面的例题就能迎刃而解了.

例 11

分解因式: $3x^2 + 5x - 8$.

例 12

分解因式: $12x^2 - 19xy + 7y^2$.

例 13 (换元)

分解因式: $x^6 - 28x^3 + 27$.

例 14

分解因式： $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$.

例 15

证明：四个连续整数的乘积加 1 是整数的平方.

例 16

分解因式： $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2$.

目录

① 分组分解

② 十字相乘

- 二次三项式
- 二次齐次式
- 系数和为零
- 综合运用

③ 多项式的因式分解

- 余数定理
- 有理根的求法
- 首 1 多项式

④ 既约多项式

- 艾氏判别法
- 奇与偶

多项式的一次因式

设 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为 x 的 n 次多项式, 本节介绍求它的一次因式的方法. 我们用 $f(x)$ 表示多项式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 用 $f(a)$ 表示这个多项式在 $x = a$ 时的值. 例如, 在 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ 时, 可得

$$f(1) = 1 + 6 + 11 + 6 = 24$$

$$f(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$$

$$f(+2) = 8 + 24 + 22 + 6 = 60$$

如果我们用一次多项式 $x - c$ 作除式去除多项式 $f(x)$ ，那么余式是一个数. 设这时商式为多项式 $g(x)$ ，余式 (余数) 为 r ，则

$$f(x) = (x - c)Q(x) + r, \quad (1)$$

即被除式等于除式乘以商式再加余式.
在1式中令 $x = c$ ，便得到

$$f(c) = 0 + r = r,$$

余数定理

因此, 我们有

$x - c$ 除 $f(x)$ 时, 所得的余数为 $f(c)$.

这个结论称为**余数定理**.

如果 $f(c) = 0$, 那么 $x - c$ 是 $f(x)$ 的因式. 反过来, 如果 $x - c$ 是 $f(x)$ 的因式, 那么 $f(c) = 0$.

例 17

分解因式: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

例 18

设 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$, 计算 $f(1), f(-1), f(\frac{3}{2})$, 并把 $f(x)$ 分解.

如果 $f(c) = 0$, 那么就说 c 是多项式 $f(x)$ 的根. 因此, 在 c 是 $f(x)$ 的根时, $x - c$ 是 $f(x)$ 的因式. 问题是怎样求出 $f(x)$ 的根?

我们假定 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式, 也就是说 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 都是整数. 又设有理数 $c = \frac{p}{q}$ 是 $f(x)$ 的根, 这里 p, q 是两个互质的整数. 由于 $f(c) = 0$, 即

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

两边同乘 q^n 得

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad (2)$$

2式右边被 p 整除 (0 被任何一个不等于 0 的数整除), 所以它的左边也被 p 整除. 显然, 左边的前 n 项都被 p 整除, 所以最后一项 $a_0 q^n$ 也被 p 整除, 但 p 与 q 互质, 所以 p 整除 a_0 , 即 p 是 a_0 的因数 (约数). 同样地, q 应当整除 $a_n p^n$, 从而 q 是 a_n 的因数 (约数). 于是, 可得

有理根 $c = \frac{p}{q}$ 的分子 p 是常数项 a_0 的因数, 分母 q 是首项系数 a_n 的因数.

例 19

分解因式: $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$.

例 20

分解因式: $f(x) = 3x^3 + x^2 + x - 2$.

例 21

分解因式: $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

首 1 多项式

对于首项系数为 1 的整系数多项式 $f(x)$ ，问题更加简单. 这时 $q = 1$ ，有理根都是整数根.

例 22

分解因式: $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

例 23

分解因式: $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$.

例 24

分解因式： $x^3 - 9x^2y + 26xy^2 - 24y^3$.

例 25

分解因式： $-24y^3 + 26y^2 - 9y + 1$.

例 26

分解因式: $x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{11}{3}x - 1$.

目录

① 分组分解

② 十字相乘

- 二次三项式
- 二次齐次式
- 系数和为零
- 综合运用

③ 多项式的因式分解

- 余数定理
- 有理根的求法
- 首 1 多项式

④ 既约多项式

- 艾氏判别法
- 奇与偶

定理 27 (艾森斯坦判别法)

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式.

如果存在一个质数 p 满足以下条件:

- ① p 不整除 a_n ;
- ② p 整除其余的系数 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$;
- ③ p^2 不整除 a_0 .

那么, $f(x)$ 在有理数集内不可约.

例 1

证明：对于任意的自然数 n , $x^n - 2$ 在有理数集内不可约.

例 2

证明: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 在有理数集内不可约.

例 3

$x^6 + x^3 + 1$ 在有理数集内不可约.

奇与偶

如果把所有的奇数用 1 表示, 偶数用 0 表示, 那么就得到一种奇怪的算术:

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$$

它们表示两个偶数的和是偶数; 一个偶数与一个奇数的和是奇数; 两个奇数的和是偶数.
(在数论中, 这是以 2 为模的算术)

采用这种算术, 可以使问题大为简化, 不但整数只有两个 (0 与 1), 而且多项式的个数也大大减少. 一次多项式只有两个, 即

$$x, x + 1$$

实际上, 如 $3x + 4$ 可以归为第一种, $3x + 5$ 可以归为第 2 种, 而 $2x + 4 = 0$ 不是一次多项式. 二次多项式只有 4 个, 即

$$x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^2 + x + 1,$$

其中, $x^2 = x \cdot x$, $x^2 + x = x(x + 1)$, $x^2 + 1 = (x + 1)^2$, 都不是既约多项式, 只有 $x^2 + x + 1$ 是既约多项式.

例 4

证明：当 $(b+c)d$ 为奇数时，整系数的三次多项式 $x^3 + bx^2 + cx + d$ 在有理数集内不可约。

例 5

证明: $x^5 + x^2 - 1$ 在有理数集内不可约.

例 6

证明 $x^6 + x^3 - 1$ 在有理数集内不可约.

例 7

证明 $x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5$ 在有理数集内不可约.

TO BE CONTINUED...