CyanMath: 创美营讲义（数学）

LeyuDame

2024 年 11 月 20 日

目录

第一章　因式分解技巧

什么是因式分解

在小学里, 我们学过整数的因数分解. 由乘法, 得

$$3 \times 4 = 12$$

反过来, 12 可以分解: $12 = 3 \times 4$.

当然, 4 还可以继续分解为 2×2 . 于是得

$$12 = 3 \times 2 \times 2$$

这时 12 已经分解成质因数的乘积了.

同样地, 由整式乘法, 得

$$(1+2x)\left(1-x^2\right) = 1+2x-x^2-2x^3$$

反过来, $1+2x-x^2-2x^3$ 可以分解为两个因式 $1+2x$ 与 $1-x^2$ 的乘积, 即

$$1+2x-x^2-2x^3 = (1+2x)\left(1-x^2\right)$$

$1-x^2$ 还可以继续分解为 $(1+x)(1-x)$. 于是

$$1+2x-x^2-2x^3 = (1+2x)(1+x)(1-x)$$

这里 x 的一次多项式 $1+2x, 1+x, 1-x$ 都不能继续分解, 它们是不可约多项式, 也就是既约多项式. 所以, $1+2x-x^2-2x^3$ 已经分解成质因式的乘积了.

把一个整式写成几个整式的乘积, 称为因式分解, 每一个乘式称为积的因式.

在因式分解中, 通常要求各个乘式 (因式) 都是既约多项式, 这样的因式称为质因式.

因式分解的方法, 我们将逐一介绍.

1.1　提公因式

学过因式分解的人爱说: “一提、二代、三分组.”

“提”是指“提取公因式”. 在因式分解时, 首先应当想到的是有没有公因式可提.

几个整式都含有的因式称为它们的公因式.

例如 $ma, mb, -mc$ 都含有因式 m, m 就是它们的公因式.

由乘法分配律, 我们知道

$$m(a+b-c)=ma+mb-mc,$$

因此

$$ma+mb-mc=m(a+b-c).$$

这表明上式左边三项的公因式 m 可以提取出来, 作为整式 $ma+mb-mc$ 的因式. $ma+mb-mc$ 的另一个因式 $a+b-c$ 仍由三项组成, 每一项等于 $ma+mb-mc$ 中对应的项除以公因式 m :

$$a=ma\div m, b=mb\div m, c=mc\div m$$

例 1.1.1 (一次提净)**.** 分解因式: $12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2$

解. $12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2$ 由

$$12a^2x^3, 6abx^2y, -15acx^2$$

这三项组成, 它们的数系数 $12, 6, -15$ 的最大公约数是 3 , 各项都含有因式 a 和 x^2, 所以 $3ax^2$ 是上述三项的公因式, 可以提取出来作为 $12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2$ 的因式, 即有

$$\begin{aligned}&12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2\\=&3ax^2(4ax+2by-5c).\end{aligned}$$

注记. *在例 1.1.1中, 如果只将因式 $3a$ 或 $3ax$ 提出, 那么留下的式子仍有公因式可以提取, 这增添了麻烦, 不如一次提净为好. 因此, 应当先检查数系数, 然后再一个个字母逐一检查, 将各项的公因式提出来, 使留下的式子没有公因式可以直接提取.*

还需注意原式如果由三项组成, 那么提取公因式后留下的式子仍由三项组成. 在例 1 中, 这三项分别为 $12a^2x^3, 6abx^2y, -15acx^2$ 除以公因式 $3ax^2$ 所得的商. 初学的同学为了防止产生错误, 可以采取两点措施:

1. *在提公因式前, 先将原式的三项都写成公因式 $3ax^2$ 与另一个式子的积, 然后再提取公因式, 即*

$$\begin{aligned}&12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2\\=&3ax^2\cdot 4ax+3ax^2\cdot 2by+3ax^2\cdot(-5c)\\=&3ax^2\cdot(4ax+2by-5c).\end{aligned}$$

   在熟练之后应当省去中间过程, 直接写出结果.

2. *用乘法分配律进行验算. 由乘法得出*

$$\begin{aligned}&3ax^2(4ax+2by-5c)\\=&12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2.\end{aligned}$$

例 1.1.2 (视“多”为一). 分解因式: $2a^2b(x+y)^2(b+c)-6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$

解. 原式由

$$2a^2b(x+y)^2(b+c),-6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$$

这两项组成. 它们的数系数的最大公约数是 2 , 两项都含有因式 a^2 和 b, 而且都含有因式 $x+y$ 与 $b+c$, 因此 $2a^2b(x+y)(b+c)$ 是它们的公因式. 于是有

$$\begin{aligned}
&2a^2b(x+y)^2(b+c)-6a^3b^3(x+y)(b+c)^2\\
=&2a^2b(x+y)(b+c)\cdot(x+y)-2a^2b(x+y)(b+c)\cdot 3ab^2(b+c)\\
=&2a^2b(x+y)(b+c)\left[(x+y)-3ab^2(b+c)\right]\\
=&2a^2b(x+y)(b+c)\left(x+y-3ab^3-3ab^2c\right).
\end{aligned}$$

在本例中, 我们把多项式 $x+y,b+c$ 分别整个看成是一个字母, 这种观点在因式分解时是很有用的.

例 1.1.3 (切勿漏 1). 分解因式: $(2x+y)^3-(2x+y)^2+(2x+y)$.

解. 我们把多项式 $2x+y$ 看成是一个字母, 因此原式由

$$(2x+y)^3,-(2x+y)^2,2x+y$$

这三项组成, $2x+y$ 是这三项的公因式, 于是

$$\begin{aligned}
&(2x+y)^3-(2x+y)^2+(2x+y)\\
=&(2x+y)\cdot(2x+y)^2-(2x+y)\cdot(2x+y)+(2x+y)\cdot 1\\
=&(2x+y)\left[(2x+y)^2-(2x+y)+1\right].
\end{aligned}$$

请注意, 中括号内的式子仍由三项组成, 千万不要忽略最后一项 1. 在省去中间过程时, 尤需加倍留心.

例 1.1.4 (注意符号). 分解因式: $-3ab(2x+3y)^4+ac(2x+3y)^3-a(2x+3y)$.

解. $-3ab(2x+3y)^4+ac(2x+3y)^3-a(2x+3y)$
$=a(2x+3y)\cdot(-3b)\cdot(2x+3y)^3+a(2x+3y)\cdot c(2x+3y)^2+a(2x+3y)\cdot(-1)$

$$=a(2x+3y)\left[-3b(2x+3y)^3+c(2x+3y)^2-1\right].$$

注记. 注意中括号内的最后一项是 *-1* , 千万别漏掉. 本例中, 原式的第一项有个因数 *-1* , 它也可以作为因数提取出来, 即

$$\begin{aligned}
&-3ab(2x+3y)^4+ac(2x+3y)^3-a(2x+3y)\\
=&-a(2x+3y)\cdot 3b(2x+3y)^3-a(2x+3y)\cdot(-c)(2x+3y)^2-\\
&a(2x+3y)\cdot 1\\
=&-a(2x+3y)\left[3b(2x+3y)^3-c(2x+3y)^2+1\right].
\end{aligned}$$

这样做也是正确的. 但必须注意各项的符号, 提出因数 *-1* 后各项都应改变符号, 所以上式的中括号内三项的符号恰与原式中相应的三项相反.

例 1.1.5 (仔细观察)**.** 分解因式：$(2x-3y)(3x-2y)+(2y-3x)(2x+3y)$.

解. 初看起来, 原式所含的第一项 $(2x-3y)(3x-2y)$ 与第二项 $(2y-3x)(2x+3y)$ 没有公因式, 但进一步观察便会发现

$$2y-3x=-(3x-2y),$$

因此 $3x-2y$ 是两项的公因式. 于是有

$$\begin{aligned}&(2x-3y)(3x-2y)+(2y-3x)(2x+3y)\\=&(3x-2y)[(2x-3y)-(2x+3y)]\\=&-6y(3x-2y).\end{aligned}$$

提出公因式后, 留下的式子如果可以化简, 就应当化简.

例 1.1.6 (化“分”为整)**.** 分解因式: $3a^3b^2-6a^2b^3+\frac{27}{4}ab$.

解. 这里的第三项 $\frac{27}{4}ab$ 的系数是分数, 为了避免分数运算, 我们把 $\frac{1}{4}$ 先提取出来, 这时每项都除以 $\frac{1}{4}$ (也就是乘以 4), 即

$$\begin{aligned}&3a^3b^2-6a^2b^3+\frac{27}{4}ab\\=&\frac{1}{4}\left(12a^3b^2-24a^2b^3+27ab\right)\\=&\frac{3}{4}ab\left(4a^2b-8ab^2+9\right).\end{aligned}$$

熟练以后可以将以上两步并作一步, “一次提净”.

在提出一个分数因数 (它的分母是各项系数的公分母) 后, 我们总可以使各项系数都化为整数 (这个过程实质上就是通分). 并且, 还可以假定第一项系数是正整数, 否则可用前面说过的方法, 把 -1 作为公因数提出, 使第一项系数成为正整数.

注记. 提公因式是因式分解的基本方法之一. 在因式分解时, 首先应该想到是否有公因式可提. 在与其他方法配合时, 即使开始已经提出公因式, 但是经过分组或应用公式后还有可能再出现公因式. 凡有公因式应立即提净. 提公因式时, 应注意各项的符号, 千万不要漏掉一项.

习题 1

将以下各式分解因式：

1. $5x^2y-10xyz+5xy$.

2. $2a(x-a)+b(a-x)-(x-a)$.

3. $3-2x(x+1)+a(x+1)+(x+1)$.

4. $\frac{3}{2}b^{3n-1}+\frac{1}{6}b^{2n-1}$ (n 是正整数).

5. $2(p-1)^2-4q(p-1)$.

6. $mn\left(m^2+n^2\right)-n^2\left(m^2+n^2\right)$.
7. $(5a-2b)(2m+3p)-(2a-7b)(2m+3p)$.
8. $2(x+y)+6(x+y)^2-4(x+y)^3$.
9. $(x+y)^2(b+c)-(x+y)(b+c)^2$.
10. $6p(x-1)^3-8p^2(x-1)^2-2p(1-x)^2$.

1.2　应用公式

将乘法公式反过来写就得到因式分解中所用的公式, 常见的有七个公式：

1. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
2. $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$.
3. $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.
4. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.
5. $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.
6. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$.
7. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$.

以上公式必须熟记, 牢牢掌握各自的特点.

1.2.1　平方差

七个公式中, 平方差公式应用得最多.

例 1.2.1. 分解因式: $9(m-n)^2-4(m+n)^2$.

解. 原式由两项组成, 这两项符号相反, 并且

$$\begin{aligned}9(m-n)^2&=[3(m-n)]^2,\\4(m+n)^2&=[2(m+n)]^2,\end{aligned}$$

因此可以应用平方差公式, 得

$$\begin{aligned}&9(m-n)^2-4(m+n)^2\\=&[3(m-n)]^2-[2(m+n)]^2\\=&[3(m-n)+2(m+n)][3(m-n)-2(m+n)]\\=&(5m-n)(m-5n).\end{aligned}$$

例 1.2.2. 分解因式: $75x^6y-12x^2y^5$.

解.

$$
\begin{aligned}
75x^6y-12x^2y^5 =&3x^2y\left(25x^4-4y^4\right)\\
=&3x^2y\left[\left(5x^2\right)^2-\left(2y^2\right)^2\right]\\
=&3x^2y\left(5x^2+2y^2\right)\left(5x^2-2y^2\right)
\end{aligned}
$$

例 1.2.3. 分解因式: $-\left(3a^2-5b^2\right)^2+\left(5a^2-3b^2\right)^2$.

解.

$$
\begin{aligned}
&-\left(3a^2-5b^2\right)^2+\left(5a^2-3b^2\right)^2\\
=&\left(5a^2-3b^2\right)^2-\left(3a^2-5b^2\right)^2\\
=&\left[\left(5a^2-3b^2\right)+\left(3a^2-5b^2\right)\right]\left[\left(5a^2-3b^2\right)-\left(3a^2-5b^2\right)\right]\\
=&\left(8a^2-8b^2\right)\left(2a^2+2b^2\right)\\
=&16\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)\\
=&16(a+b)(a-b)\left(a^2+b^2\right)
\end{aligned}
$$

注记. 例 *1.2.3*表明在因式公解中可能需要多次应用公式或提公因式, 直到不能继续分解为止.

1.2.2　立方和与立方差

例 1.2.4. 分解因式：$9x^5-72x^2y^3$.

解.

$$
\begin{aligned}
9x^5-72x^2y^3 &= 9x^2\left(x^3-8y^3\right)\\
&= 9x^2\left[x^3-(2y)^3\right]\\
&= 9x^2(x-2y)\left(x^2+2xy+4y^2\right)
\end{aligned}
$$

例 1.2.5. 分解因式：a^6+b^6 .

解.

$$
\begin{aligned}
a^6+b^6 &= \left(a^2\right)^3+\left(b^2\right)^3\\
&= \left(a^2+b^2\right)\left[\left(a^2\right)^2-a^2b^2+\left(b^2\right)^2\right]\\
&= \left(a^2+b^2\right)\left(a^4-a^2b^2+b^4\right)
\end{aligned}
$$

1.2.3　完全平方

例 1.2.6. 分解因式：$9x^2-24xy+16y^2$.

解. 原式由三项组成, 第一项 $9x^2=(3x)^2$, 第三项 $16y^2=(4y)^2$, 而

$$2\cdot 3x\cdot 4y=24xy$$

与中间一项只差一个符号, 因此可以利用 (完全) 平方式, 得

$$\begin{aligned}&9x^2-24xy+16y^2\\=&(3x-4y)^2.\end{aligned}$$

不是平方式的二次三项式, 通常用十字相乘法分解 (后面会讲).

例 1.2.7. 分解因式：$8a-4a^2-4$.

解. 首先把原式“理顺”, 也就是将它的各项按字母 a 降幂 (或升幂) 排列, 从而有

$$\begin{aligned}&8a-4a^2-4\\=&-4a^2+8a-4\\=&-4\left(a^2-2a+1\right)\\=&-4(a-1)^2.\end{aligned}$$

注记. *按某个字母降幂排列是一个简单而有用的措施 (简单的往往是有用的), 值得注意.*

例 1.2.8. 分解因式：$4a^2+9b^2+9c^2-18bc-12ca+12ab$.

解. 我们需要引入一个公式. 由乘法可得

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca,$$

即若干项的和的平方等于各项的平方与每两项乘积的 2 倍的和. 上面的式子可写成

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\\=&(a+b+c)^2.\end{aligned}$$

这也是一个因式分解的公式.

联系到例 1.2.8就有

$$\begin{aligned}&4a^2+9b^2+9c^2-18bc-12ca+12ab\\=&(2a)^2+(3b)^2+(-3c)^2+2(3b)(-3c)+2(2a)(-3c)+2(2a)(3b)\\=&(2a+3b-3c)^2.\end{aligned}$$

1.2.4　完全立方

例 1.2.9. 分解因式：$8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2$.

解.

$$\begin{aligned}&8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2\\=&8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3\\=&(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3x\\=&(2x+3y)^3.\end{aligned}$$

例 1.2.10. 分解因式: $729a^6-243a^4+27a^2-1$.

解.

$$
\begin{aligned}
&729a^6-243a^4+27a^2-1\\
=&\left(9a^2\right)^3-3\cdot\left(9a^2\right)^2\cdot 1+3\cdot\left(9a^2\right)\cdot 1^2-1^3\\
=&\left(9a^2-1\right)^3\\
=&(3a+1)^3(3a-1)^3
\end{aligned}
$$

例 1.2.11. 分解因式：a^6-b^6 .

解. a^6 可以看成平方：

$$a^6=\left(a^3\right)^2,$$

也可以看成立方：

$$a^6=\left(a^2\right)^3,$$

于是 a^6-b^6 的分解就有两条路可走.
第一条路是先应用平方差公式：

$$
\begin{aligned}
a^6-b^6&=\left(a^3\right)^2-\left(b^3\right)^2\\
&=\left(a^3+b^3\right)\left(a^3-b^3\right)\\
&=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)
\end{aligned}
$$

第二条路是从立方差公式入手:

$$
\begin{aligned}
a^6-b^6&=\left(a^2\right)^3-\left(b^2\right)^3\\
&=\left(a^2-b^2\right)\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)\\
&=(a+b)(a-b)\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)
\end{aligned}
$$

注记. 采用两种方法分解, 获得的结果应当相同. 因此比较

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

与

$$(a+b)(a-b)\left(a^4+a^2b^2+b^4\right),$$

我们知道 $a^4+a^2b^2+b^4$ 不是既约多项式, 并且有

$$a^4+a^2b^2+b^4=\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right)\tag{1.1}$$

及

$$a^6-b^6=(a+b)(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right).\tag{1.2}$$

于是, 从 a^6-b^6 的分解出发, 不但得到1.2式, 而且知道 $a^4+a^2b^2+b^4$ 不是既约多项式, 导出了1.1式, 可谓问一知三.

　　后面我们还要介绍导出1.1式的另一种方法.

1.2.5　$2^{1984}+1$ 不是质数

例 1.2.12. 求证 $2^{1984}+1$ 不是质数.

解. 为了将 $2^{1984}+1$ 分解因数, 我们需要知道一个新的公式, 即在 n 为正奇数时

$$a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right).$$

上式不难用乘法验证, 将右边的两个因式相乘便得到 a^n+b^n . 现在我们有

$$\begin{aligned}2^{1984}+1&=\left(2^{64}\right)^{31}+1^{31}\\&=\left(2^{64}+1\right)\left(2^{64\times 30}-2^{64\times 29}+\cdots-2^{64}+1\right).\end{aligned}$$

$2^{64}+1$ 是 $2^{1984}+1$ 的真因数, 它大于 1 , 小于 $2^{1984}+1$, 所以 $2^{1984}+1$ 不是质数. 用这个方法可以证明：当 n 有大于 1 的奇数因数时, 2^n+1 不是质数.

注记. 类似地, 由乘法可以得到在 n 为正整数时

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right). \tag{12}$$

这也是一个有用的公式.

例 1.2.13. 分解因式: x^5-1.

解.

$$x^5-1=(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)$$

习题 2

将以下各式分解因式：

1. $16-(3a+2b)^2$.
2. $4y^2-(2z-x)^2$.
3. a^4-b^4.
4. $-81a^4b^4+16c^4$.
5. $20a^3x^3-45axy^2$.
6. $\left(3a^2-b^2\right)^2-\left(a^2-3b^2\right)^2$.
7. x^8-y^8.
8. $16x^5-x$.
9. $\left(5x^2+2x-3\right)^2-\left(x^2-2x-3\right)^2$.
10. $32a^3b^3-4b^9$.

11. $8a^3b^3c^3-1$.

12. $64x^6y^3+y^{15}$.

13. $x^2(a+b)^2-2xy\left(a^2-b^2\right)+y^2(a-b)^2$.

14. $a^{n+2}+8a^n+16a^{n-2}$.

15. $9a^2+x^{2n}+6a+2x^n+6ax^n+1$.

16. $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$.

17. $x^2+9y^2+4z^2-6xy+4xz-12yz$.

18. $(p+q)^3-3(p+q)^2(p-q)+3(p+q)(p-q)^2-(p-q)^3$.

19. $4a^2b^2-\left(a^2+b^2\right)^2$.

20. $(a+x)^4-(a-x)^4$.

1.3　分组分解

例 1.3.1 (分组分解三部曲). 分解因式：$ax-by-bx+ay$.

解.

$$\begin{aligned}&ax-by-bx+ay\\=&(ax-bx)+(ay-by)\\=&x(a-b)+y(a-b)\\=&(x+y)(a-b).\end{aligned}$$

分组的方法并不是唯一的, 对于上面的整式 $ax-by-bx+ay$, 也可以采用下面的做法：

$$\begin{aligned}&ax-by-bx+ay\\=&(ax+ay)-(bx+by)\\=&a(x+y)-b(x+y)\\=&(x+y)(a-b)\end{aligned}$$

两种做法的效果是一样的, 殊途同归！可以说, 一种是按照 x 与 y 来分组 (含 x 的项在一组, 含 y 的项在另一组)；另一种是按 a 与 b 来分组.

一般地, 分组分解大致分为三步：

1. 将原式的项适当分组；
2. 对每一组进行处理 (“提”或“代”)；
3. 将经过处理后的每一组当作一项, 再采用“提”或“代”进行分解.

一位高明的棋手, 在下棋时, 决不会只看一步. 同样, 在进行分组时, 不仅要看到第二步, 而且要看到第三步.

一个整式的项有许多种分组的方法, 初学者往往需要经过尝试才能找到适当的分组方法, 但是只要努力实践, 多加练习, 就会成为有经验的“行家”.

例 1.3.2 (殊途同归). 分解因式：$x^2+ax^2+x+ax-1-a$.

解. 解法一：按字母 x 的幂来分组.

$$\begin{aligned}&x^2+ax^2+x+ax-1-a\\=&\left(x^2+ax^2\right)+(x+ax)-(1+a)\\=&x^2(1+a)+x(1+a)-(1+a)\\=&(1+a)\left(x^2+x-1\right).\end{aligned}$$

解法二：按字母 a 的幂来分组.

$$\begin{aligned}&x^2+ax^2+x+ax-1-a\\=&\left(ax^2+ax-a\right)+\left(x^2+x-1\right)\\=&a\left(x^2+x-1\right)+\left(x^2+x-1\right)\\=&(a+1)\left(x^2+x-1\right).\end{aligned}$$

例 1.3.3 (瞄准公式). 分解因式: $-1-2x-x^2+y^2$.

解.

$$
\begin{aligned}
&-1-2x-x^2+y^2\\
=&y^2-\left(x^2+2x+1\right)\\
=&y^2-(x+1)^2\\
=&(y+x+1)(y-x-1)
\end{aligned}
$$

例 1.3.4 (瞄准公式). 分解因式：$ax^3+x+a+1$.

解.

$$
\begin{aligned}
&ax^3+x+a+1\\
=&\left(ax^3+a\right)+(x+1)\\
=&a(x+1)\left(x^2-x+1\right)+(x+1)\\
=&(x+1)\left(ax^2-ax+a+1\right)
\end{aligned}
$$

例 1.3.5 (从零开始). 分解因式：$ab\left(c^2-d^2\right)-\left(a^2-d^2\right)cd$.

解. 此式无法直接进行分解, 必须先用乘法分配律将原式变为四项, 再进行分组.

$$
\begin{aligned}
&ab\left(c^2-d^2\right)-\left(a^2-b^2\right)cd\\
=&abc^2-abd^2-a^2cd+b^2cd\\
=&\left(abc^2-a^2cd\right)+\left(b^2cd-abd^2\right)\\
=&ac(bc-ad)+bd(bc-ad)\\
=&(ac+bd)(bc-ad).
\end{aligned}
$$

从这个例子可以看出, 错误的分组还不如不分组. 聪明的人并不是不犯错误的人, 而是善于改正错误的人.

如果“一提、二代”都不能奏效, 就应当采用分组分解. 分组分解应依照前面所说的三步进行. 这三步是密切联系的, 不仅要看到第二步, 而且要看到第三步. 在第二步与第三步都是提取公因式时, 各组的项数相等 (平均分配). 否则, 应当瞄准公式来进行分组. 应当注意, 分组需要尝试, 失败了, 从零开始. 只要反复实践, 就能掌握分组的技巧, 运用自如.

习题 3

将以下各式分解因式 (对应书本第 14~24 题)：

1. $x^3+bx^2+ax+ab$.

2. $acx^3+bcx^2+adx+bd$.

3. $a^4+a^3b-ab^3-b^4$.

4. $a^4 - a^3b - ab^3 + b^4$.

5. $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$.

6. $x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 + z^4$.

7. $x^2y^2z^2 - x^2z - y^2z + 1$.

8. $x^4 + x^3y + xz^3 + yz^3$.

9. $(a+b)^2 + (a+c)^2 - (c+d)^2 - (b+d)^2$.

10. $ax\left(y^3 + b^3\right) + by\left(bx^2 + a^2y\right)$.

11. $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 + a^3 + b^3 + c^3$.

1.4　十字相乘

1.4.1　二次三项式

例 1.4.1. 分解因式：$x^2 - 7x + 6$.

解.

$$x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6).$$

例 1.4.2. 分解因式: $x^2 + 7x - 8$.

解.

$$x^2 + 7x - 8 = (x+8)(x-1).$$

例 1.4.3. 分解因式：$x + 12 - x^2$.

解.

$$x + 12 - x^2 = -x^2 + x + 12 = -\left(x^2 - x - 12\right) = -(x+3)(x-4).$$

例 1.4.4 (二次项系数不为 1)**.** 分解因式: $6x^2 - 7x + 2$.

解.

$$6x^2 - 7x + 2 = (2x-1)(3x-2).$$

1.4.2　二次齐次式

形如 $ax^2 + bxy + cy^2$ 的多项式, 每一项都是 x 与 y 的二次式 (xy 中 x 与 y 的次数都是 1 , 所以 xy 的次数是 $1+1=2$), 称为 x 与 y 的二次齐次式. 它的分解与 x 的二次三项式一样, 采用十字相乘.

例 1.4.5. 分解因式：$6x^2 - 7xy + 2y^2$.

解.

$$6x^2 - 7xy + 2y^2 = (2x-y)(3x-2y).$$

1.4.3　系数和为零

如果二次三项式 ax^2+bx+c 的系数和

$$a+b+c=0,$$

那么

$$ax^2+bx+c=(x-1)(ax-c).$$

事实上, 因为

$$b=-(a+c),$$

这时

$$\begin{aligned}&(x-1)(ax-c)\\=&ax^2-(a+c)x+c\\=&ax^2+bx+c.\end{aligned}$$

记住这个结论, 下面的例题就能迎刃而解了.

例 1.4.6. 分解因式: $3x^2+5x-8$.

解.

$$3x^2+5x-8=(x-1)(3x+8)$$

例 1.4.7. 分解因式: $12x^2-19xy+7y^2$.

解.

$$12x^2-19xy+7y^2=(x-y)(12x-7y).$$

注记. x 的二次三项式 *(或 x 与 y 的二次齐次式)* 应该用十字相乘来分解因式. 方法是把 x^2 的系数分解为两个因数的积, 把常数项 *(或 y^2 的系数)* 也分解为两个因数的积, 再把这些因数交叉相乘, 如果所得乘积的和等于 x 的一次项的系数, 那么就产生出多项式的两个一次因式. 在系数和为零时, 必有一个因式是 $x-1$ *(或 $x-y$)*, 这样, 分解的结果可以直接写出来.

1.4.4　综合运用

例 1.4.8 (换元)**.** 分解因式：x^6-28x^3+27.

解. 设 $x^3=u$, 则原式变为 $u^2-28u+27$, 这是一个二次三项式, 可以分解为 $(u-1)(u-27)$, 所以

$$x^6-28x^3+27=(x^3-1)(x^3-27)=(x-1)(x^2+x+1)(x-3)(x^2+3x+9).$$

例 1.4.9. 分解因式：$\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2$.

解. 把 x^2+4x+8 看成一个字母, 得

$$\begin{aligned}&\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2\\=&\left(x^2+4x+8+x\right)\left(x^2+4x+8+2x\right)\\=&\left(x^2+5x+8\right)\left(x^2+6x+8\right)\\=&(x+2)(x+4)\left(x^2+5x+8\right).\end{aligned}$$

这里对 x^2+6x+8 再次用十字相乘分解因式, 而 x^2+5x+8 在有理数集内不能分解.

例 1.4.10. 证明：四个连续整数的乘积加 1 是整数的平方.

证明. 设这四个连续整数为

$$x+1,x+2,x+3,x+4,$$

则

$$\begin{aligned}&(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1\\=&[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+1\\=&\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)+1.\end{aligned}$$

我们把 $x+1$ 与 $x+4$ 相乘, $x+2$ 与 $x+3$ 相乘, 好处是两个乘积不但二次项相同, 而且一次项也是相同的.

把 x^2+5x+5 看成 u , 这时

$$u=x^2+5x+\frac{4+6}{2}$$

得

$$\begin{aligned}&(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1\\=&\left[\left(x^2+5x+5\right)-1\right]\left[\left(x^2+5x+5\right)+1\right]+1\\=&\left(x^2+5x+5\right)^2-1+1\\=&\left(x^2+5x+5\right)^2,\end{aligned}$$

这是一个平方数. □

注记. 在本题中把 x^2+5x 或 x^2+5x+4 看成一个字母也是可以的, 但切勿把 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ 全部乘出来写成 x 的四次式, 那样做的结果是破坏了规律性, 难以下手.

例 1.4.11. 分解因式：$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$.

解. 第一项的四个因式以将 $x+5$ 与 $x+12$ 相乘、$x+6$ 与 $x+10$ 相乘为好, 这时不仅二次项相同, 而且常数项也相同, 于是

$$\begin{aligned}
&4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2\\
=&4\left(x^2+17x+60\right)\left(x^2+16x+60\right)-3x^2\\
=&4\left[\left(x^2+16x+60\right)+x\right]\left(x^2+16x+60\right)-3x^2\\
=&4\left(x^2+16x+60\right)^2+4x\left(x^2+16x+60\right)-3x^2\\
=&\left[2\left(x^2+16x+60\right)-x\right]\left[2\left(x^2+16x+60\right)+3x\right]\\
=&\left(2x^2+31x+120\right)\left(2x^2+35x+120\right)
\end{aligned}$$

习题 5

将以下各式分解因式:

1. $x^2+12x+20$.
2. $x^2-12x+20$.
3. x^2-4x-5.
4. $x^2-9x-22$.
5. $12x^2-11xy-15y^2$.
6. $6x^2-13x+6$.
7. $2x^2+7x+3$.
8. $2x^2-5x+3$.
9. $-20xy+64y^2+x^2$.
10. $-x^2+x+56$.

1.5　多项式的因式分解

设 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为 x 的 n 次多项式, 本节介绍求它的一次因式的方法.

1.5.1　余数定理

我们用 $f(x)$ 表示多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 用 $f(a)$ 表示这个多项式在 $x=a$ 时的值. 例如, 在 $f(x)=x^3+6x^2+11x+6$ 时, 可得

$$\begin{aligned}
f(1)&=1+6+11+6=24\\
f(-1)&=-1+6-11+6=0\\
f(+2)&=8+24+22+6=60
\end{aligned}$$

如果我们用一次多项式 $x-c$ 作除式去除多项式 $f(x)$, 那么余式是一个数. 设这时商式为多项式 $g(x)$, 余式 (余数) 为 r , 则

$$f(x)=(x-c)Q(x)+r, \tag{1.3}$$

即被除式等于除式乘以商式再加余式.

在1.3式中令 $x=c$, 便得到

$$f(c)=0+r=r,$$

因此, 我们有

$$x-c \text{ 除 } f(x) \text{ 时, 所得的余数为 } f(c) \text{ .}$$

这个结论称为**余数定理**.

如果余数为 0 , 那么 $f(x)$ 被 $x-c$ 整除, 也就是 $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式. 反过来, 如果 $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式, 那么 $f(x)$ 被 $x-c$ 整除, 余数为 0 . 因此, 我们有

如果 $f(c)=0$, 那么 $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式. 反过来, 如果 $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式, 那么 $f(c)=0$.

例 1.5.1. 分解因式: $f(x)=x^3+6x^2+11x+6$.

解. 因为 $f(-1)=0$, 根据上面的结论 $x-(-1)=x+1$ 是它的一次因式. 知道这个因式后, 施行除法就可以把商式求出来. 不过, 我们也可以不用除法, 直接去分组分解. 这里分组是" 有的放矢" 的, 每一组都有一个因式 $x+1$, 即

$$\begin{aligned}
&x^3+6x^2+11x+6\\
=&\left(x^3+x^2\right)+\left(5x^2+5x\right)+(6x+6)\\
=&x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)\\
=&(x+1)\left(x^2+5x+6\right)\\
=&(x+1)(x+2)(x+3).
\end{aligned}$$

例 1.5.2. 设 $f(x)=2x^3-5x^2+5x-3$, 计算 $f(1), f(-1), f\left(\frac{3}{2}\right)$, 并把 $f(x)$ 分解.

解.

$$\begin{aligned}
&f(1)=2-5+5-3=-1\\
&f(-1)=-2-5-5-3=-15\\
&f\left(\frac{3}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-3\\
&\quad=\frac{27}{4}-\frac{45}{4}+\frac{15}{2}-3=0
\end{aligned}$$

可知 $x-\frac{3}{2}$ 是 $f(x)$ 的一次因式. 为了避免分数运算, 我们把 $x-\frac{3}{2}$ 乘以 2 得 $2x-3, 2x-3$ 仍然是 $f(x)$ 的一次因式.

现在把 $f(x)$ 分组分解, 注意使每组都有因式 $2x-3$ (也就是同一组中两项的系数比为 $2:(-3)$) :

$$\begin{aligned}
&2x^3-5x^2+5x-3\\
=&\left(2x^3-3x^2\right)-\left(2x^2-3x\right)+(2x-3)\\
=&x^2(2x-3)-x(2x-3)+(2x-3)\\
=&(2x-3)\left(x^2-x+1\right).
\end{aligned}$$

1.5.2　有理根的求法

如果 $f(c)=0$, 那么就说 c 是多项式 $f(x)$ 的根. 因此, 在 c 是 $f(x)$ 的根时, $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式. 问题是怎样求出 $f(x)$ 的根?

我们假定 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式, 也就是说 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 都是整数. 又设有理数 $c=\frac{p}{q}$ 是 $f(x)$ 的根, 这里 p q 是两个互质的整数.

由于 $f(c)=0$, 即

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0$$

两边同乘 q^n 得

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0 \tag{1.4}$$

1.4式右边被 p 整除 (0 被任何一个不等于 0 的数整除), 所以它的左边也被 p 整除. 显然, 左边的前 n 项都被 p 整除, 所以最后一项 a_0q^n 也被 p 整除, 但 p 与 q 互质, 所以 p 整除 a_0 , 即 p 是 a_0 的因数 (约数). 同样地, q 应当整除 a_np^n , 从而 q 是 a_n 的因数 (约数). 于是, 可得

有理根 $c=\frac{p}{q}$ 的分子 p 是常数项 a_0 的因数, 分母 q 是首项系数 a_n 的因数.

例 1.5.3. 分解因式：$f(x)=2x^3-x^2-5x-2$.

解. $a_0=-2$ 的因数是 $\pm1,\pm2$, $a_n=2$ 的因数是 $\pm1,\pm2$. 因此, $f(x)$ 的有理根只可能是 $\pm1,\pm2$ (分母为 1),$\pm\frac{1}{2}$. 因为

$$\begin{aligned}
f(1)&=2-1-5-2=-6\\
f(-1)&=-2-1+5-2=0
\end{aligned}$$

于是 -1 是 $f(x)$ 的一个根, 从而 $x+1$ 是 $f(x)$ 的因式, 可得

$$\begin{aligned}
&2x^3-x^2-5x-2\\
=&\left(2x^3+2x^2\right)-\left(3x^2+3x\right)-(2x+2)\\
=&2x^2(x+1)-3x(x+1)-2(x+1)\\
=&\left(2x^2-3x-2\right)(x+1)\\
=&(x-2)(2x+1)(x+1).
\end{aligned}$$

例 1.5.4. 分解因式: $f(x)=3x^3+x^2+x-2$.

解. $a_0=-2$ 的因数为 $\pm1,\pm2, a_n=3$ 的正因数为 $+1,+3$ (我们可以认为 $\frac{p}{q}$ 的分母 q 是正的, 因此 a_0 的因数有正有负, a_n 的因数可只取正的). 所以, $f(x)$ 的有理根只可能是 $\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}$.

由于

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)-2 \\ &= \frac{8}{9}+\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-2=0 \end{aligned}$$

所以 $x-\frac{2}{3}$ 是 $f(x)$ 的因式, 从而 $3x-2$ 是 $f(x)$ 的因式, 可得

$$\begin{aligned} & f(x)=3x^3+x^2+x-2 \\ =& \left(3x^3-2x^2\right)+\left(3x^2-2x\right)+(3x-2) \\ =& x^2(3x-2)+x(3x-2)+(3x-2) \\ =& (3x-2)\left(x^2+x+1\right). \end{aligned}$$

例 1.5.5. 分解因式: $f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2$.

解. $a_0=-2$ 的因数为 $\pm1,\pm2, a_n=6$ 的正因数为 $1,2,3,6$. 所以, $f(x)$ 的有理根只可能为

$$\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{1}{6}$$

经检验 $c=-\frac{1}{2}$ 是一个根, 所以 $2x+1$ 是 $f(x)$ 的因式, 可得

$$\begin{aligned} & 6x^4+5x^3+3x^2-3x-2 \\ =& \left(6x^4+3x^3\right)+\left(2x^3+x^2\right)+\left(2x^2+x\right)-(4x+2) \\ =& (2x+1)\left(3x^3+x^2+x-2\right) \\ =& (2x+1)(3x-2)\left(x^2+x+1\right). \end{aligned}$$

1.5.3　首 1 多项式

对于首项系数为 1 的整系数多项式 $f(x)$, 问题更加简单. 这时 $q=1$, 有理根都是整数根.

例 1.5.6. 分解因式：$x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1$.

解. 本题有理根只可能为 $\pm1.+1$ 当然不可能为根 (因为多项式的系数全是正的), 经检验 -1 是根, 所以原式有因式 $x+1$, 并且

$$\begin{aligned} & x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1 \\ =& \left(x^6+x^5\right)+\left(x^5+x^4\right)+\left(2x^4+2x^3\right)+\left(2x^3+2x^2\right)+\left(x^2+x\right)+(x+1) \\ =& (x+1)\left(x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1\right). \end{aligned}$$

容易验证 -1 也是 $x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1$ 的根, 并且

$$\begin{aligned}&x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1\\=&\left(x^5+x^4\right)+\left(2x^3+2x^2\right)+(x+1)\\=&(x+1)\left(x^4+2x^2+1\right)\\=&(x+1)\left(x^2+1\right)^2,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1\\=&(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2.\end{aligned}$$

例 1.5.7. 分解因式: $x^3-9x^2+26x-24$.

解. 有理根只可能为

$$\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24$$

经检验, 2 是根, 所以原式有因式 $x-2$, 并且

$$\begin{aligned}&x^3-9x^2+26x-24\\=&\left(x^3-2x^2\right)-\left(7x^2-14x\right)+(12x-24)\\=&(x-2)\left(x^2-7x+12\right)\\=&(x-2)(x-3)(x-4).\end{aligned}$$

例 1.5.8. 分解因式：$x^3-9x^2y+26xy^2-24y^3$.

解.

$$\begin{aligned}&x^3-9x^2y+26xy^2-24y^3\\=&(x-2y)(x-3y)(x-4y).\end{aligned}$$

这只不过是在上题的解答上添上几个 y 而已.

例 1.5.9. 分解因式：$-24y^3+26y^2-9y+1$.

解. $a_n=-24$, 但 $a_0=1$. 为了避免分数计算的麻烦, 我们把原式改为升幂排列

$$1-9y+26y^2-24y^3$$

如果与上例比较一下, 就会发现两者实质上是相同的, 即在上例中令 $x=1$, 便得到

$$\begin{aligned}&1-9y+26y^2-24y^3\\=&(1-2y)(1-3y)(1-4y).\end{aligned}$$

例 1.5.10. 分解因式: $x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{11}{3}x-1$.

解. 原式不是整系数多项式, 但可以先提取 $\frac{1}{3}$, 然后再按上面的办法分解, 得

$$\begin{aligned}&x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{11}{3}x-1\\=&\frac{1}{3}\left(3x^3-5x^2-11x-3\right)\\=&\frac{1}{3}(x+1)(x-3)(3x+1)\end{aligned}$$

习题 8

将以下各式分解因式：

1. $x^3 + 4x^2 - 5$.
2. $2x^5 + 7x^4 + 12x^3 + 14x^2 + 10x + 3$.
3. $(x - 2y)x^3 - (y - 2x)y^3$.
4. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.
5. $2x^4 + x^3 + 7x^2 + 4x - 4$.
6. $3x^3 - 5x^2y + xy^2 + y^3$.
7. $6x^3 - 5x^2y - 3xy^2 + 2y^3$.
8. $3x^3 + 6x^2 + 4x + 8$.
9. $8x^3 + 4(a + b + c)x^2 + 2(ab + bc + ca)x + abc$.
10. $(a - 1)x^3 - ax^2 - (a - 3)x + (a - 2)$.
11. $5x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 9x - 7$.
12. $x^3 + px^2 + px + p - 1$.

1.6　艾森斯坦判别法