既约多项式

珠海一中创美营 (数学)

2024 年 11 月 29 日

定理 1 (艾森斯坦判别法)

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式.
如果存在一个质数 p 满足以下条件:

1. p 不整除 a_n;
2. p 整除其余的系数 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$;
3. p^2 不整除 a_0 .

那么, $f(x)$ 在有理数集内不可约.

例 1

证明：对于任意的自然数 n, x^n-2 在有理数集内不可约.

例 2

证明：$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 在有理数集内不可约.

例 3

$x^6 + x^3 + 1$ 在有理数集内不可约.

奇与偶

如果把所有的奇数用 1 表示, 偶数用 0 表示, 那么就得到一种奇怪的算术:

$$0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0$$

它们表示两个偶数的和是偶数；一个偶数与一个奇数的和是奇数；两个奇数的和是偶数.
(在数论中, 这是以 2 为模的算术)
采用这种算术, 可以使问题大为简化, 不但整数只有两个 (0 与 1), 而且多项式的个数也大大减少. 一次多项式只有两个, 即

$$x, x+1$$

实际上, 如 $3x+4$ 可以归为第一种, $3x+5$ 可以归为第 2 种, 而 $2x+4=0$ 不是一次多项式.
二次多项式只有 4 个, 即

$$x^2, x^2+x, x^2+1, x^2+x+1,$$

其中, $x^2=x\cdot x, x^2+x=x(x+1), x^2+1=(x+1)^2$, 都不是既约多项式, 只有 x^2+x+1 是既约多项式.

例 4

证明：当 $(b+c)d$ 为奇数时，整系数的三次多项式 x^3+bx^2+cx+d 在有理数集内不可约.

例 5

证明：$x^5 + x^2 - 1$ 在有理数集内不可约.

例 6

证明 $x^6 + x^3 - 1$ 在有理数集内不可约.

例 7

证明 $x^4+3x^3+3x^2-5$ 在有理数集内不可约.

$\mathcal{TO\ \ BE\ \ CONTINUED}\ldots$