

平面几何

三角形与四边形

珠海一中创美营（数学）

2025 年 4 月 2 日

目录

- 1 三角形的基本概念和性质
- 2 三角形的面积、边角间关系定理
- 3 全等三角形
- 4 相似三角形
- 5 三角形中与比例线段有关的几个定理
- 6 三角形的四心

目录

- 1 三角形的基本概念和性质
- 2 三角形的面积、边角间关系定理
- 3 全等三角形
- 4 相似三角形
- 5 三角形中与比例线段有关的几个定理
- 6 三角形的四心

三角形的基本概念和性质

- ① 边与边之间的关系: 两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边。
- ② 角与角之间的关系: 三个内角的和等于 180° , 即在 $\triangle ABC$ 中有 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ 。由此即知三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和。
- ③ 边与角之间的关系: 在同一三角形中, 边长与对角成正比, 即大边对大角, 小边对小角。

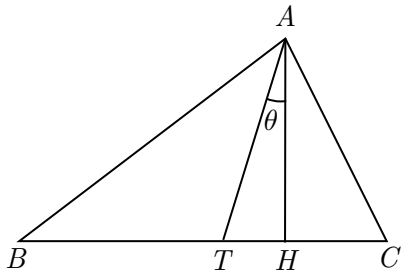
三角形的基本概念和性质

- **三角形的角平分线：** 三角形一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的角平分线。
- **三角形的中线：** 在三角形中，连结一个顶点和它的对边中点的线段叫做三角形的中线。
- **三角形的高：** 从三角形一个顶点向它的对边所在直线画垂线，顶点和垂足间的线段叫做三角形的高线，简称三角形的高。
- **三角形的中位线：** 连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线。中位线平行于第三边且等于第三边的一半。
- **三角形的外角平分线：** 三角形一个内角的邻补角的平分线与这个角的对边的延长线相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的外角平分线。

三角形的基本概念和性质

定理 1

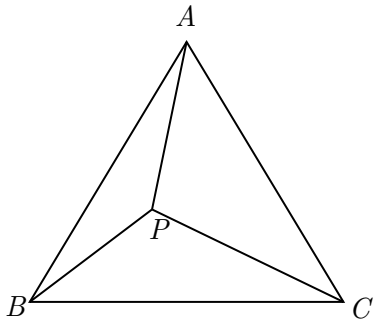
三角形顶角的平分线与底边上的高所夹的角等于两底角差的一半。



例 1

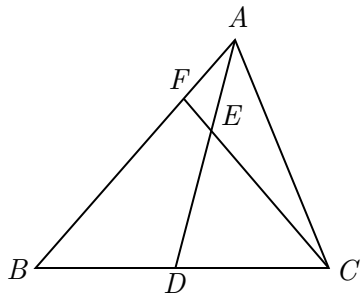
设 P 是边长为 1 的正三角形 ABC 内一点，求证：

$$\frac{3}{2} < PA + PB + PC < 2. \quad (1)$$



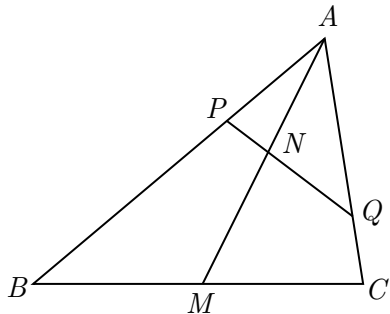
例 2

如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, E 是 AD 上的一点, 且 $AE = \frac{1}{3}AD$, CE 交 AB 于点 F . 若 $AF = 1.2$ cm, 求 AB 长.



例 3

在 $\triangle ABC$ 中, P, Q 分别是边 AB 和 AC 上的点, 中线 AM 与 PQ 交于 N 。若 $AB:AP=5:2$, $AC:AQ=4:3$, 求 $AM:AN$ 。



目录

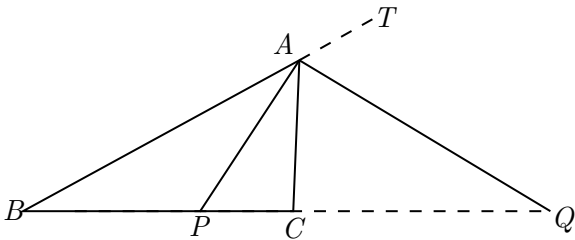
- 1 三角形的基本概念和性质
- 2 三角形的面积、边角间关系定理**
- 3 全等三角形
- 4 相似三角形
- 5 三角形中与比例线段有关的几个定理
- 6 三角形的四心

定理 4 (三角形的角平分线性质定理)

$\triangle ABC$ 中, 若 AP 是 $\angle A$ 的平分线, 则

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$$

角平分线性质定理.ggb

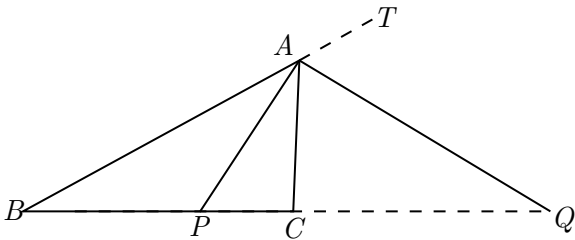


定理 5 (三角形的外角平分线性质定理)

$\triangle ABC$ 中, 若 AQ 是 $\angle A$ 的外角平分线, 则

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{AB}{AC} \quad (2-5)$$

角平分线性质定理.ggb



调和点列与调和线束

定理 6 (正弦定理)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A B C$ 所对的边长分别为 $a b c$, 则

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = \frac{abc}{2S_{\triangle ABC}} \quad (2-6)$$

定理 7 (余弦定理)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A B C$ 所对的边长分别为 $a b c$, 则

$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle C, \\b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos \angle B \\a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A.\end{aligned}\tag{2-7}$$

等面积法-余弦定理.ggb

推论 8 (勾股定理)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 则

$$c^2 = a^2 + b^2$$

广勾股定理

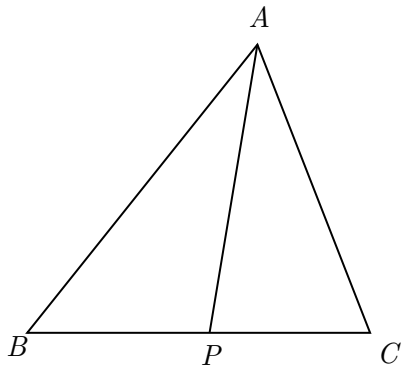
对直角三角形 $\triangle ABC$ 而言, $\angle ADB = 90^\circ$, 点 C 为直角边 BC 所在直线上一点, 则有

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 \mp 2CD \cdot CB.$$

定理 9 (张角定理)

设 P 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点, $\angle BAP = \alpha, \angle CAP = \beta$, 则

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{AP} = \frac{\sin \alpha}{AC} + \frac{\sin \beta}{AB}.$$



定理 10 (张角定理的逆定理)

设 B, P, C 依次是平面内从一点 A 所引三条射线 AB, AP, AC 上的点 (AP 在 AB, AC 之间), $\angle BAP = \alpha, \angle CAP = \beta$, 且 $\alpha + \beta < 180^\circ$, 若有

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{AP} = \frac{\sin \alpha}{AC} + \frac{\sin \beta}{AB},$$

则三点 B, P, C 在一条直线上.

目录

- 1 三角形的基本概念和性质
- 2 三角形的面积、边角间关系定理
- 3 全等三角形**
- 4 相似三角形
- 5 三角形中与比例线段有关的几个定理
- 6 三角形的四心

目录

- 1 三角形的基本概念和性质
- 2 三角形的面积、边角间关系定理
- 3 全等三角形
- 4 相似三角形**
- 5 三角形中与比例线段有关的几个定理
- 6 三角形的四心

目录

- 1 三角形的基本概念和性质
- 2 三角形的面积、边角间关系定理
- 3 全等三角形
- 4 相似三角形
- 5 三角形中与比例线段有关的几个定理**
- 6 三角形的四心

目录

- 1 三角形的基本概念和性质
- 2 三角形的面积、边角间关系定理
- 3 全等三角形
- 4 相似三角形
- 5 三角形中与比例线段有关的几个定理
- 6 三角形的四心**