平面几何选讲

Topics in Plane Geometry

2024 年 9 月 30 日

目录

目录

面积公式及其应用

- 利用图形的面积公式, 可以解决许多与面积相关的问题.
- 对于常见的特殊图形面积的计算, 一般直接使用公式或等积变换, 对于非常规图形面积的计算, 可通过图形的割补, 以及图形的运动 (平移, 旋转, 翻折) 来转换成特殊图形面积问题.
- 有时题目中并没有直接涉及面积, 但可以通过对同一图形面积的不同算法, 推出需要的代数或几何关系, 从而使问题获解.

面积公式及其应用

- 利用图形的面积公式, 可以解决许多与面积相关的问题.
- 对于常见的特殊图形面积的计算, 一般直接使用公式或等积变换, 对于非常规图形面积的计算, 可通过图形的割补, 以及图形的运动 (平移, 旋转, 翻折) 来转换成特殊图形面积问题.
- 有时题目中并没有直接涉及面积, 但可以通过对同一图形面积的不同算法, 推出需要的代数或几何关系, 从而使问题获解.

海伦公式

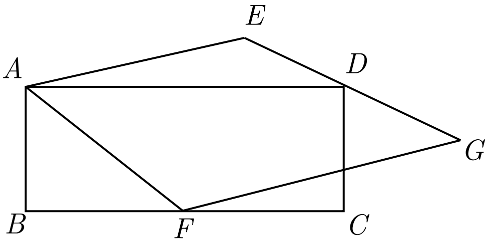
若已知三角形三边长 a, b, c, 则三角形面积

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

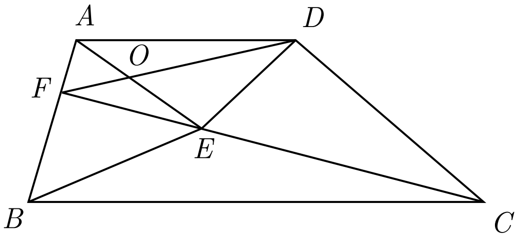
其中 $p = \frac{a+b+c}{2}$.

例题

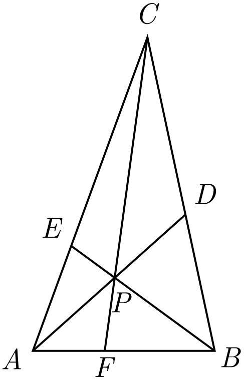
1. 如图, 长方形 $ABCD$ 的面积是 2012 平方厘米, 梯形 $AEGF$ 的顶点 F 在 BC 上, D 是腰 EG 的中点, 试求梯形 $AEGF$ 的面积.



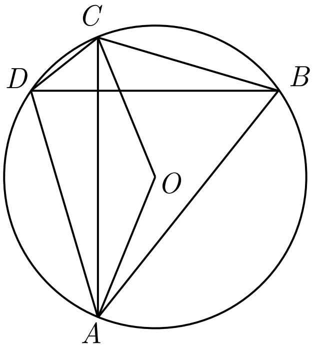
2. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD//BC, AD:BC=1:2, F$ 为线段 AB 上的点, E 为线段 FC 上的点, 且 $S_{\triangle AOF}:S_{\triangle DOE}=1:3, S_{\triangle BEF}=24$, 求 $\triangle AOF$ 的面积.



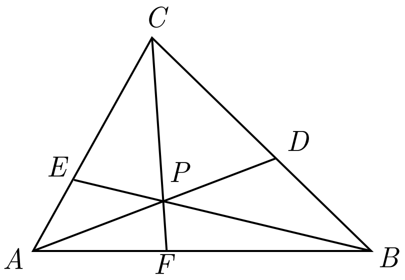
3. 如图, P 是 $\triangle ABC$ 内的一点, 连结 AP, BP, CP 并延长, 分别与 BC, AC, AB 交于点 D, E, F. 已知 $AP=6, BP=9, DP=6, EP=3, CF=20$. 求 $\triangle ABC$ 的面积.
提示: 海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, 其中 $p=\frac{a+b+c}{2}$.



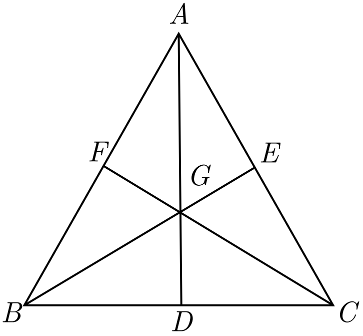
4. 如图, 设凸四边形 $ABCD$ 内接于以 O 为中心的圆, 且两条对角线相互垂直. 求证: 折线 AOC 分该四边形面积相等的两部分.



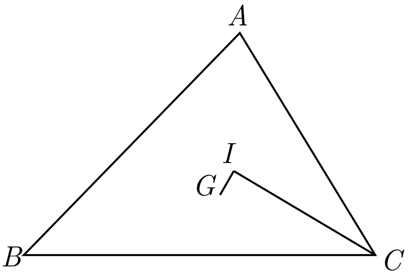
5. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, 延长 AP, BP, CP 与对边相交于点 D, E, F. 设 $AP=a, BP=b, CP=c$, 且 $a+b+c=43$, $PD=PE=PF=d=3$, 求 abc 的值.



6. 如图, 设 $\triangle ABC$ 的三条中线 AD, BE, CF 交于点 G, 且 $\triangle AGF, \triangle CGD$ 和 $\triangle BGD$ 的内切圆半径都相同. 证明: $\triangle ABC$ 是正三角形.

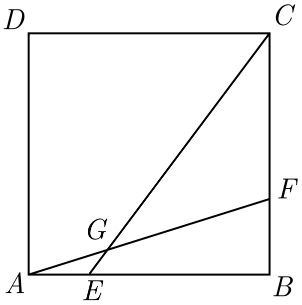


7. 如图, $\triangle ABC$ 的三边上 $BC=a, CA=b, AB=c, a, b, c$ 都是整数, 且 a, b 的最大公约数为 2 . 点 G 和点 I 分别为 $\triangle ABC$ 的重心和内心, 且 $\angle GIC=90°$. 求 $\triangle ABC$ 的周长.

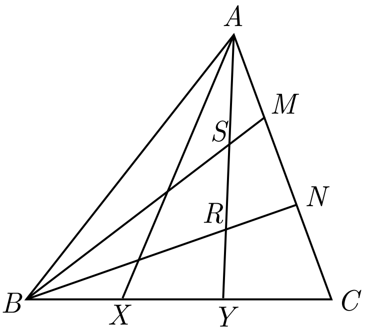


练习题

1. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的面积为 35 平方厘米, E, F 分别为边 AB, BC 上的点, AF 与 CE 相交于点 G, 并且 $\triangle ABF$ 的面积为 5 平方厘米, $\triangle BCE$ 的面积为 14 平方厘米. 求四边形 $BEGF$ 的面积.



2. 如图, 点 M 和 N 三等分 AC, 点 X 和 Y 三等分 BC, AY 与 BM, BN 分别交于点 S, R. 求四边形 $SRNM$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积之比.



3. 设 $\triangle ABC$ 三边上的三个内接正方形 (有两个顶点在三角形的一边上, 另两个顶点分别在三角形另两边上) 的面积都相等. 证明: $\triangle ABC$ 为正三角形.

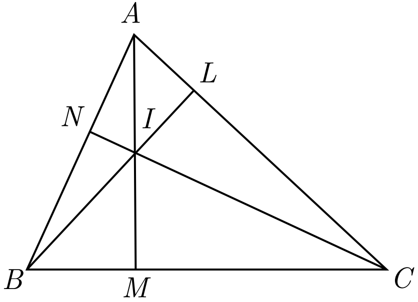
目录

平移、旋转与翻折

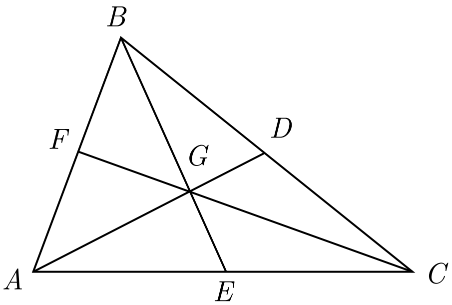
与代数变换的重要性一样，几何变换同样在几何问题的解决中也起着非常重要的作用．通过几何变换，可以把分散的线段、角相对集中起来，从而使已知条件集中在一个我们所熟知的基本图形之中，然后利用新的图形的性质对原图形进行研究，从而使问题得以转化．

例题

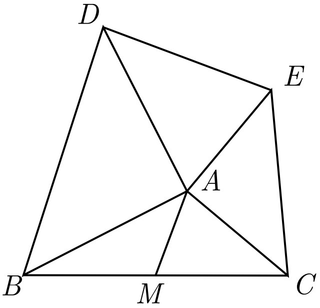
1. 如图, 设 I 是 $\triangle ABC$ 的垂心. 求证: $AI^2 + BC^2 = BI^2 + AC^2 = CI^2 + AB^2$.



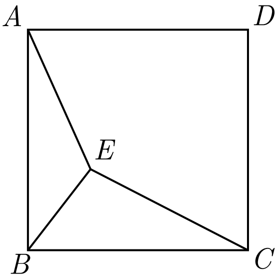
2. 已知 $\triangle ABC$ 的三条中线的长为 $3, 4, 5$. 求 $\triangle ABC$ 的面积.



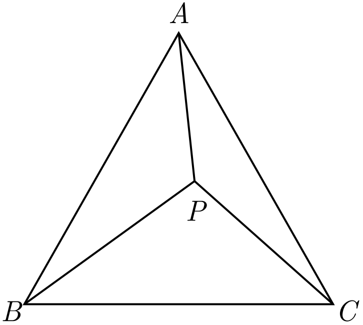
3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 外作等腰 Rt $\triangle ABD$ 和等腰 Rt $\triangle ACE$, 且 $\angle BAD = \angle CAE = 90°$, AM 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线, 连结 DE. 求证: $DE = 2AM$.



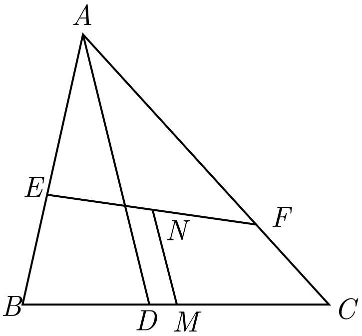
4. 如图, 正方形 $ABCD$ 内一点 E, E 到 A, B, C 三点的距离之和的最小值为 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$, 求此正方形的边长.



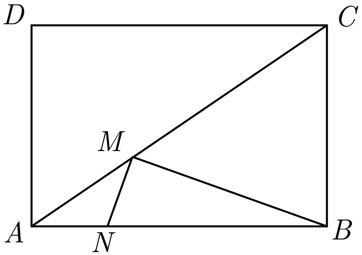
5. 如图, 在正 $\triangle ABC$ 内有一点 P, P 到三个顶点 A, B, C 的距离分别为 a, b, c, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



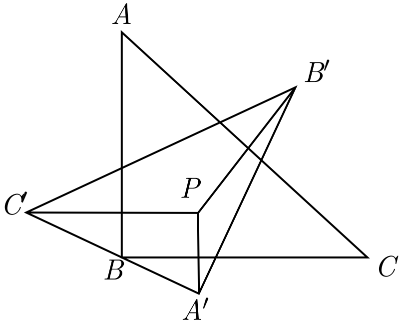
6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是角平分线, $BE = CF$, 点 M, N 分别是 BC 和 EF 的中点. 求证: $MN \,/\!/\, AD$.



7. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=20, BC=10$, 若在 AB, AC 上各取一点 N, M, 使得 $BM+MN$ 的值最小, 求这个最小值.



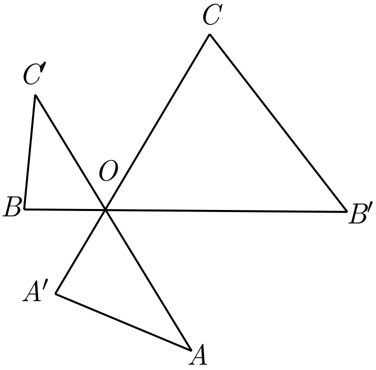
8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, P 为三角形内一点, 分别作 P 关于 BC, CA, AB 的对称点 A', B', C'. 若所得 $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle B'A'C' = 90^\circ$, $A'B' = A'C'$. 求: $S_{\triangle A'B'C'} : S_{\triangle ABC}$ 的值.



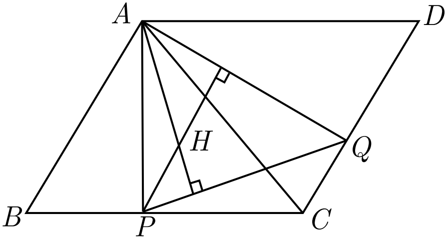
练习题

1. 证明: 如果七条直线两两相交, 那么所得的角中至少有一个角小于 26°.

2. 如图, 在“风车三角形”中, $AA' = BB' = CC' = 2, \angle AOB' = \angle BOC' = \angle COA' = 60^\circ$.
求证: $S_{\triangle AOB'} + S_{\triangle BOC'} + S_{\triangle COA'} < \sqrt{3}$.



3. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 由 A 向另两边作垂线 AP, AQ, 已知 $PQ = a, AC = b, H$ 为 $\triangle APQ$ 的垂心. 求 AH 的值.



TO BE CONTINUED...