

初等数论

整除, 同余和不定方程

LeyuDame

2024 年 10 月 30 日

定义

对任给的两个整数 $a, b (a \neq 0)$, 如果存在整数 q , 使得 $b = aq$, 那么称 b 能被 a 整除 (或称 a 能整除 b), 记作 $a \mid b$. 否则, 称 b 不能被 a 整除, 记作 $a \nmid b$. 如果 $a \mid b$, 那么称 a 为 b 的因数, b 为 a 的倍数.

性质

如果 $a \mid b$, 那么 $a \mid (-b)$, 反过来也成立; 进一步, 如果 $a \mid b$, 那么 $(-a) \mid b$, 反过来也成立.

性质

如果 $a \mid b, b \mid c$, 那么 $a \mid c$. (传递性)

性质

若 $a \mid b, a \mid c$, 则对任意整数 x, y , 都有 $a \mid bx + cy$. (即 a 能整除 b, c 的任意一个 “线性组合”)

例

若 $a|n, b|n$, 且存在整数 x, y , 使得 $ax + by = 1$, 证明: $ab \mid n$.

例

证明：无论在数 12008 的两个 0 之间添加多少个 3，所得的数都是 19 的倍数.

例

已知一个 1000 位正整数的任意连续 10 个数码形成的 10 位数是 2^{10} 的倍数. 证明:
该正整数为 2^{1000} 的倍数.