因式分解 II

珠海一中创美营 (数学)

2024 年 11 月 30 日

目录

1. 分组分解
2. 十字相乘
   - 二次三项式
   - 二次齐次式
   - 系数和为零
   - 综合运用
3. 多项式的因式分解
   - 余数定理
   - 有理根的求法
   - 首 1 多项式
4. 既约多项式
   - 艾氏判别法
   - 奇与偶

目录

1 分组分解

2 十字相乘
- 二次三项式
- 二次齐次式
- 系数和为零
- 综合运用

3 多项式的因式分解
- 余数定理
- 有理根的求法
- 首 1 多项式

4 既约多项式
- 艾氏判别法
- 奇与偶

例 1 (分组分解三部曲)

分解因式：$ax - by - bx + ay.$

分组分解三部曲

一般地, 分组分解大致分为三步:

1. 将原式的项适当分组;
2. 对每一组进行处理 (“提” 或 “代”);
3. 将经过处理后的每一组当作一项, 再采用 “提” 或 “代” 进行分解.

一位高明的棋手, 在下棋时, 决不会只看一步. 同样, 在进行分组时, 不仅要看到第二步, 而且要看到第三步.

一个整式的项有许多种分组的方法, 初学者往往需要经过尝试才能找到适当的分组方法, 但是只要努力实践, 多加练习, 就会成为有经验的 “行家” .

例 2 (殊途同归)

分解因式：$x^2 + ax^2 + x + ax - 1 - a.$

例 3 (瞄准公式)

分解因式: $-1-2x-x^2+y^2$.

例 4 (瞄准公式)

分解因式：$ax^3 + x + a + 1.$

例 5 (从零开始)

分解因式：$ab\left(c^2-d^2\right)-\left(a^2-b^2\right)cd.$

目录

1 分组分解

2 十字相乘
- 二次三项式
- 二次齐次式
- 系数和为零
- 综合运用

3 多项式的因式分解
- 余数定理
- 有理根的求法
- 首 1 多项式

4 既约多项式
- 艾氏判别法
- 奇与偶

例 6

分解因式：$x^2 - 7x + 6$.

例 7

分解因式: $x^2 + 7x - 8$.

例 8

分解因式：$x + 12 - x^2$.

例 9 (二次项系数不为 1)

分解因式: $6x^2 - 7x + 2.$

二次齐次式

形如 $ax^2+bxy+cy^2$ 的多项式, 每一项都是 x 与 y 的二次式 (xy 中 x 与 y 的次数都是 1 , 所以 xy 的次数是 $1+1=2$), 称为 x 与 y 的二次齐次式. 它的分解与 x 的二次三项式一样, 采用十字相乘.

例 10

分解因式：$6x^2 - 7xy + 2y^2$.

系数和为零

如果二次三项式 ax^2+bx+c 的系数和

$$a+b+c=0,$$

那么

$$ax^2+bx+c=(x-1)(ax-c).$$

记住这个结论，下面的例题就能迎刃而解了.

例 11

分解因式: $3x^2 + 5x - 8$.

例 12

分解因式: $12x^2 - 19xy + 7y^2$.

例 13 (换元)

分解因式：$x^6 - 28x^3 + 27.$

例 14

分解因式：$\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2$.

例 15

证明：四个连续整数的乘积加 1 是整数的平方.

例 16

分解因式：$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$.

目录

1 分组分解

2 十字相乘
- 二次三项式
- 二次齐次式
- 系数和为零
- 综合运用

3 多项式的因式分解
- 余数定理
- 有理根的求法
- 首 1 多项式

4 既约多项式
- 艾氏判别法
- 奇与偶

多项式的一次因式

设 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 为 x 的 n 次多项式, 本节介绍求它的一次因式的方法. 我们用 $f(x)$ 表示多项式 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, 用 $f(a)$ 表示这个多项式在 $x = a$ 时的值. 例如, 在 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ 时, 可得

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + 6 + 11 + 6 = 24 \\ f(-1) &= -1 + 6 - 11 + 6 = 0 \\ f(+2) &= 8 + 24 + 22 + 6 = 60 \end{aligned}$$

如果我们用一次多项式 $x-c$ 作除式去除多项式 $f(x)$，那么余式是一个数. 设这时商式为多项式 $g(x)$，余式 (余数) 为 r，则

$$f(x)=(x-c)Q(x)+r, \tag{1}$$

即被除式等于除式乘以商式再加余式.
在1式中令 $x=c$，便得到

$$f(c)=0+r=r,$$

余数定理

因此，我们有

$$x-c \text{ 除 } f(x) \text{ 时，所得的余数为 } f(c)\ .$$

这个结论称为**余数定理**.

如果 $f(c)=0$，那么 $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式. 反过来，如果 $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式，那么 $f(c)=0$.

例 17

分解因式: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6.$

例 18

设 $f(x)=2x^3-5x^2+5x-3$, 计算 $f(1), f(-1), f\left(\frac{3}{2}\right)$, 并把 $f(x)$ 分解.

如果 $f(c)=0$ ，那么就说 c 是多项式 $f(x)$ 的根. 因此，在 c 是 $f(x)$ 的根时，$x-c$ 是 $f(x)$ 的因式. 问题是怎样求出 $f(x)$ 的根?
我们假定 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式，也就是说 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 都是整数. 又设有理数 $c=\frac{p}{q}$ 是 $f(x)$ 的根，这里 $p\quad q$ 是两个互质的整数.
由于 $f(c)=0$ ，即

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0$$

两边同乘 q^n 得

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0 \tag{2}$$

2式右边被 p 整除 (0 被任何一个不等于 0 的数整除), 所以它的左边也被 p 整除. 显然, 左边的前 n 项都被 p 整除, 所以最后一项 a_0q^n 也被 p 整除, 但 p 与 q 互质, 所以 p 整除 a_0 , 即 p 是 a_0 的因数 (约数). 同样地, q 应当整除 a_np^n , 从而 q 是 a_n 的因数 (约数). 于是, 可得

有理根 $c=\frac{p}{q}$ 的分子 p 是常数项 a_0 的因数, 分母 q 是首项系数 a_n 的因数.

例 19

分解因式：$f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$.

例 20

分解因式: $f(x) = 3x^3 + x^2 + x - 2$.

例 21

分解因式: $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 3x - 2.$

首 1 多项式

对于首项系数为 1 的整系数多项式 $f(x)$ ，问题更加简单. 这时 $q=1$ ，有理根都是整数根.

例 22

分解因式：$x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1$.

例 23

分解因式: $x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$

例 24

分解因式：$x^3-9x^2y+26xy^2-24y^3$.

例 25

分解因式：$-24y^3+26y^2-9y+1$.

例 26

分解因式: $x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{11}{3}x - 1.$

目录

1. 分组分解
2. 十字相乘
   - 二次三项式
   - 二次齐次式
   - 系数和为零
   - 综合运用
3. 多项式的因式分解
   - 余数定理
   - 有理根的求法
   - 首 1 多项式
4. 既约多项式
   - 艾氏判别法
   - 奇与偶

定理 27 (艾森斯坦判别法)

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式.
如果存在一个质数 p 满足以下条件:

1. p 不整除 a_n;
2. p 整除其余的系数 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$;
3. p^2 不整除 a_0 .

那么, $f(x)$ 在有理数集内不可约.

例 1

证明：对于任意的自然数 n, $x^n - 2$ 在有理数集内不可约.

例 2

证明：$x^4+x^3+x^2+x+1$ 在有理数集内不可约.

例 3

$x^6 + x^3 + 1$ 在有理数集内不可约.

奇与偶

如果把所有的奇数用 1 表示，偶数用 0 表示，那么就得到一种奇怪的算术：

$$0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0$$

它们表示两个偶数的和是偶数；一个偶数与一个奇数的和是奇数；两个奇数的和是偶数.
(在数论中，这是以 2 为模的算术)
采用这种算术，可以使问题大为简化，不但整数只有两个（0 与 1），而且多项式的个数也大大减少. 一次多项式只有两个，即

$$x, x+1$$

实际上，如 $3x+4$ 可以归为第一种，$3x+5$ 可以归为第 2 种，而 $2x+4=0$ 不是一次多项式.
二次多项式只有 4 个，即

$$x^2, x^2+x, x^2+1, x^2+x+1,$$

其中，$x^2=x\cdot x, x^2+x=x(x+1), x^2+1=(x+1)^2$，都不是既约多项式，只有 x^2+x+1 是既约多项式.

例 4

证明：当 $(b+c)d$ 为奇数时，整系数的三次多项式 x^3+bx^2+cx+d 在有理数集内不可约.

例 5

证明：$x^5 + x^2 - 1$ 在有理数集内不可约.

例 6

证明 $x^6 + x^3 - 1$ 在有理数集内不可约.

例 7

证明 $x^4+3x^3+3x^2-5$ 在有理数集内不可约.

TO BE CONTINUED...