

CYANMATH: 创美营讲义（数学）

LeyuDame

2024 年 11 月 18 日

目录

第一章 因式分解技巧	2
1.1 提公因式	2
1.2 应用公式	6
1.2.1 平方差	6
1.2.2 立方和与立方差	7
1.2.3 完全平方	7
1.2.4 完全立方	8
1.2.5 $2^{1984} + 1$ 不是质数	10
1.3 分组分解与十字相乘	11
1.4 多项式的因式分解	12

第一章 因式分解技巧

什么是因式分解

在小学里, 我们学过整数的因数分解. 由乘法, 得

$$3 \times 4 = 12$$

反过来, 12 可以分解: $12 = 3 \times 4$.

当然, 4 还可以继续分解为 2×2 . 于是得

$$12 = 3 \times 2 \times 2$$

这时 12 已经分解成质因数的乘积了.

同样地, 由整式乘法, 得

$$(1 + 2x)(1 - x^2) = 1 + 2x - x^2 - 2x^3$$

反过来, $1 + 2x - x^2 - 2x^3$ 可以分解为两个因式 $1 + 2x$ 与 $1 - x^2$ 的乘积, 即

$$1 + 2x - x^2 - 2x^3 = (1 + 2x)(1 - x^2)$$

$1 - x^2$ 还可以继续分解为 $(1 + x)(1 - x)$. 于是

$$1 + 2x - x^2 - 2x^3 = (1 + 2x)(1 + x)(1 - x)$$

这里 x 的一次多项式 $1 + 2x, 1 + x, 1 - x$ 都不能继续分解, 它们是不可约多项式, 也就是既约多项式. 所以, $1 + 2x - x^2 - 2x^3$ 已经分解成质因式的乘积了.

把一个整式写成几个整式的乘积, 称为因式分解, 每一个乘式称为积的因式.

在因式分解中, 通常要求各个乘式(因式)都是既约多项式, 这样的因式称为质因式.

因式分解的方法, 我们将逐一介绍.

1.1 提公因式

学过因式分解的人爱说: “一提、二代、三分组.”

“提”是指“提取公因式”. 在因式分解时, 首先应当想到的是有没有公因式可提.

几个整式都含有的因式称为它们的公因式.

例如 $ma, mb, -mc$ 都含有因式 m , m 就是它们的公因式.

由乘法分配律, 我们知道

$$m(a+b-c) = ma + mb - mc,$$

因此

$$ma + mb - mc = m(a+b-c).$$

这表明上式左边三项的公因式 m 可以提取出来, 作为整式 $ma + mb - mc$ 的因式. $ma + mb - mc$ 的另一个因式 $a + b - c$ 仍由三项组成, 每一项等于 $ma + mb - mc$ 中对应的项除以公因式 m :

$$a = ma \div m, b = mb \div m, c = mc \div m$$

例 1.1.1 (一次提净). 分解因式: $12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2$

解. $12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2$ 由

$$12a^2x^3, 6abx^2y, -15acx^2$$

这三项组成, 它们的数系数 12, 6, -15 的最大公约数是 3, 各项都含有因式 a 和 x^2 , 所以 $3ax^2$ 是上述三项的公因式, 可以提取出来作为 $12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2$ 的因式, 即有

$$\begin{aligned} & 12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2 \\ &= 3ax^2(4ax + 2by - 5c). \end{aligned}$$

注记. 在例 1.1.1 中, 如果只将因式 $3a$ 或 $3ax$ 提出, 那么留下的式子仍有公因式可以提取, 这增添了麻烦, 不如一次提净为好. 因此, 应当先检查数系数, 然后再一个个字母逐一检查, 将各项的公因式提出来, 使留下的式子没有公因式可以直接提取.

还需注意原式如果由三项组成, 那么提取公因式后留下的式子仍由三项组成. 在例 1 中, 这三项分别为 $12a^2x^3, 6abx^2y, -15acx^2$ 除以公因式 $3ax^2$ 所得的商. 初学的同学为了防止产生错误, 可以采取两点措施:

1. 在提公因式前, 先将原式的三项都写成公因式 $3ax^2$ 与另一个式子的积, 然后再提取公因式, 即

$$\begin{aligned} & 12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2 \\ &= 3ax^2 \cdot 4ax + 3ax^2 \cdot 2by + 3ax^2 \cdot (-5c) \\ &= 3ax^2 \cdot (4ax + 2by - 5c). \end{aligned}$$

在熟练之后应当省去中间过程, 直接写出结果.

2. 用乘法分配律进行验算. 由乘法得出

$$\begin{aligned} & 3ax^2(4ax + 2by - 5c) \\ &= 12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2. \end{aligned}$$

例 1.1.2 (视“多”为一). 分解因式: $2a^2b(x+y)^2(b+c) - 6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$

解. 原式由

$$2a^2b(x+y)^2(b+c), -6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$$

这两项组成. 它们的数系数的最大公约数是 2, 两项都含有因式 a^2 和 b , 而且都含有因式 $x+y$ 与 $b+c$, 因此 $2a^2b(x+y)(b+c)$ 是它们的公因式. 于是有

$$\begin{aligned} & 2a^2b(x+y)^2(b+c) - 6a^3b^3(x+y)(b+c)^2 \\ &= 2a^2b(x+y)(b+c) \cdot (x+y) - 2a^2b(x+y)(b+c) \cdot 3ab^2(b+c) \\ &= 2a^2b(x+y)(b+c) [(x+y) - 3ab^2(b+c)] \\ &= 2a^2b(x+y)(b+c) (x+y - 3ab^3 - 3ab^2c). \end{aligned}$$

在本例中, 我们把多项式 $x+y, b+c$ 分别整个看成是一个字母, 这种观点在因式分解时是很有用的.

例 1.1.3 (切勿漏 1). 分解因式: $(2x+y)^3 - (2x+y)^2 + (2x+y)$.

解. 我们把多项式 $2x+y$ 看成是一个字母, 因此原式由

$$(2x+y)^3, -(2x+y)^2, 2x+y$$

这三项组成, $2x+y$ 是这三项的公因式, 于是

$$\begin{aligned} & (2x+y)^3 - (2x+y)^2 + (2x+y) \\ &= (2x+y) \cdot (2x+y)^2 - (2x+y) \cdot (2x+y) + (2x+y) \cdot 1 \\ &= (2x+y) [(2x+y)^2 - (2x+y) + 1]. \end{aligned}$$

请注意, 中括号内的式子仍由三项组成, 千万不要忽略最后一项 1. 在省去中间过程时, 尤需加倍留心.

例 1.1.4 (注意符号). 分解因式: $-3ab(2x+3y)^4 + ac(2x+3y)^3 - a(2x+3y)$.

解.

$$\begin{aligned} & -3ab(2x+3y)^4 + ac(2x+3y)^3 - a(2x+3y) \\ &= a(2x+3y) \cdot (-3b) \cdot (2x+3y)^3 + a(2x+3y) \cdot c(2x+3y)^2 + a(2x+3y) \cdot (-1) \\ &= a(2x+3y) [-3b(2x+3y)^3 + c(2x+3y)^2 - 1]. \end{aligned}$$

注记. 注意中括号内的最后一项是 -1 , 千万别漏掉. 本例中, 原式的第一项有个因数 -1 , 它也可以作为因数提取出来, 即

$$\begin{aligned} & -3ab(2x+3y)^4 + ac(2x+3y)^3 - a(2x+3y) \\ &= -a(2x+3y) \cdot 3b(2x+3y)^3 - a(2x+3y) \cdot (-c)(2x+3y)^2 - \\ & \quad a(2x+3y) \cdot 1 \\ &= -a(2x+3y) [3b(2x+3y)^3 - c(2x+3y)^2 + 1]. \end{aligned}$$

这样做也是正确的. 但必须注意各项的符号, 提出因数 -1 后各项都应改变符号, 所以上式的中括号内三项的符号恰与原式中相应的三项相反.

例 1.1.5 (仔细观察). 分解因式: $(2x - 3y)(3x - 2y) + (2y - 3x)(2x + 3y)$.

解. 初看起来, 原式所含的第一项 $(2x - 3y)(3x - 2y)$ 与第二项 $(2y - 3x)(2x + 3y)$ 没有公因式, 但进一步观察便会发现

$$2y - 3x = -(3x - 2y),$$

因此 $3x - 2y$ 是两项的公因式. 于是有

$$\begin{aligned} & (2x - 3y)(3x - 2y) + (2y - 3x)(2x + 3y) \\ &= (3x - 2y)[(2x - 3y) - (2x + 3y)] \\ &= -6y(3x - 2y). \end{aligned}$$

提出公因式后, 留下的式子如果可以化简, 就应当化简.

例 1.1.6 (化“分”为整). 分解因式: $3a^3b^2 - 6a^2b^3 + \frac{27}{4}ab$.

解. 这里的第三项 $\frac{27}{4}ab$ 的系数是分数, 为了避免分数运算, 我们把 $\frac{1}{4}$ 先提取出来, 这时每项都除以 $\frac{1}{4}$ (也就是乘以 4), 即

$$\begin{aligned} & 3a^3b^2 - 6a^2b^3 + \frac{27}{4}ab \\ &= \frac{1}{4}(12a^3b^2 - 24a^2b^3 + 27ab) \\ &= \frac{3}{4}ab(4a^2b - 8ab^2 + 9). \end{aligned}$$

熟练以后可以将以上两步并作一步, “一次提净”.

在提出一个分数因数 (它的分母是各项系数的公分母) 后, 我们总可以使各项系数都化为整数 (这个过程实质上就是通分). 并且, 还可以假定第一项系数是正整数, 否则可用前面说过的方法, 把 -1 作为公因数提出, 使第一项系数成为正整数.

注记. 提公因式是因式分解的基本方法之一. 在因式分解时, 首先应该想到是否有公因式可提. 在与其他方法配合时, 即使开始已经提出公因式, 但是经过分组或应用公式后还有可能再出现公因式. 凡有公因式应立即提净. 提公因式时, 应注意各项的符号, 千万不要漏掉一项.

习题 1

将以下各式分解因式:

1. $5x^2y - 10xyz + 5xy$.
2. $2a(x - a) + b(a - x) - (x - a)$.
3. $3 - 2x(x + 1) + a(x + 1) + (x + 1)$.
4. $\frac{3}{2}b^{3n-1} + \frac{1}{6}b^{2n-1}$ (n 是正整数).
5. $2(p - 1)^2 - 4q(p - 1)$.

6. $mn(m^2 + n^2) - n^2(m^2 + n^2)$.
7. $(5a - 2b)(2m + 3p) - (2a - 7b)(2m + 3p)$.
8. $2(x + y) + 6(x + y)^2 - 4(x + y)^3$.
9. $(x + y)^2(b + c) - (x + y)(b + c)^2$.
10. $6p(x - 1)^3 - 8p^2(x - 1)^2 - 2p(1 - x)^2$.

1.2 应用公式

将乘法公式反过来写就得到因式分解中所用的公式, 常见的有七个公式:

1. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
2. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
3. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
4. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.
5. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.
6. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$.
7. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$.

以上公式必须熟记, 牢牢掌握各自的特点.

1.2.1 平方差

七个公式中, 平方差公式应用得最多.

例 1.2.1. 分解因式: $9(m - n)^2 - 4(m + n)^2$.

解. 原式由两项组成, 这两项符号相反, 并且

$$\begin{aligned}9(m - n)^2 &= [3(m - n)]^2, \\4(m + n)^2 &= [2(m + n)]^2,\end{aligned}$$

因此可以应用平方差公式, 得

$$\begin{aligned}&9(m - n)^2 - 4(m + n)^2 \\&= [3(m - n)]^2 - [2(m + n)]^2 \\&= [3(m - n) + 2(m + n)][3(m - n) - 2(m + n)] \\&= (5m - n)(m - 5n).\end{aligned}$$

例 1.2.2. 分解因式: $75x^6y - 12x^2y^5$.

解.

$$\begin{aligned}75x^6y - 12x^2y^5 &= 3x^2y(25x^4 - 4y^4) \\&= 3x^2y \left[(5x^2)^2 - (2y^2)^2 \right] \\&= 3x^2y(5x^2 + 2y^2)(5x^2 - 2y^2)\end{aligned}$$

例 1.2.3. 分解因式: $-(3a^2 - 5b^2)^2 + (5a^2 - 3b^2)^2$.

解.

$$\begin{aligned}&-(3a^2 - 5b^2)^2 + (5a^2 - 3b^2)^2 \\&= (5a^2 - 3b^2)^2 - (3a^2 - 5b^2)^2 \\&= \left[(5a^2 - 3b^2) + (3a^2 - 5b^2) \right] \left[(5a^2 - 3b^2) - (3a^2 - 5b^2) \right] \\&= (8a^2 - 8b^2)(2a^2 + 2b^2) \\&= 16(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \\&= 16(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)\end{aligned}$$

注记. 例 1.2.3 表明在因式公解中可能需要多次应用公式或提公因式, 直到不能继续分解为止.

1.2.2 立方和与立方差

例 1.2.4. 分解因式: $9x^5 - 72x^2y^3$.

解.

$$\begin{aligned}9x^5 - 72x^2y^3 &= 9x^2(x^3 - 8y^3) \\&= 9x^2[x^3 - (2y)^3] \\&= 9x^2(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)\end{aligned}$$

例 1.2.5. 分解因式: $a^6 + b^6$.

解.

$$\begin{aligned}a^6 + b^6 &= (a^2)^3 + (b^2)^3 \\&= (a^2 + b^2) \left[(a^2)^2 - a^2b^2 + (b^2)^2 \right] \\&= (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)\end{aligned}$$

1.2.3 完全平方

例 1.2.6. 分解因式: $9x^2 - 24xy + 16y^2$.

解. 原式由三项组成, 第一项 $9x^2 = (3x)^2$, 第三项 $16y^2 = (4y)^2$, 而

$$2 \cdot 3x \cdot 4y = 24xy$$

与中间一项只差一个符号, 因此可以利用 (完全) 平方式, 得

$$\begin{aligned} & 9x^2 - 24xy + 16y^2 \\ &= (3x - 4y)^2. \end{aligned}$$

不是平方式的二次三项式, 通常用十字相乘法分解 (后面会讲).

例 1.2.7. 分解因式: $8a - 4a^2 - 4$.

解. 首先把原式“理顺”, 也就是将它的各项按字母 a 降幂 (或升幂) 排列, 从而有

$$\begin{aligned} & 8a - 4a^2 - 4 \\ &= -4a^2 + 8a - 4 \\ &= -4(a^2 - 2a + 1) \\ &= -4(a - 1)^2. \end{aligned}$$

注记. 按某个字母降幂排列是一个简单而有用的措施 (简单的往往是有用的), 值得注意.

例 1.2.8. 分解因式: $4a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 18bc - 12ca + 12ab$.

解. 我们需要引入一个公式. 由乘法可得

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca,$$

即若干项的和平方的平方等于各项的平方与每两项乘积的 2 倍的和. 上面的式子可写成

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ &= (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

这也是一个因式分解的公式.

联系到例 1.2.8 就有

$$\begin{aligned} & 4a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 18bc - 12ca + 12ab \\ &= (2a)^2 + (3b)^2 + (-3c)^2 + 2(3b)(-3c) + 2(2a)(-3c) + 2(2a)(3b) \\ &= (2a + 3b - 3c)^2. \end{aligned}$$

1.2.4 完全立方

例 1.2.9. 分解因式: $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$.

解.

$$\begin{aligned}
 & 8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2 \\
 &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 \\
 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3x \\
 &= (2x + 3y)^3.
 \end{aligned}$$

例 1.2.10. 分解因式: $729a^6 - 243a^4 + 27a^2 - 1$.

解.

$$\begin{aligned}
 & 729a^6 - 243a^4 + 27a^2 - 1 \\
 &= (9a^2)^3 - 3 \cdot (9a^2)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (9a^2) \cdot 1^2 - 1^3 \\
 &= (9a^2 - 1)^3 \\
 &= (3a + 1)^3(3a - 1)^3
 \end{aligned}$$

例 1.2.11. 分解因式: $a^6 - b^6$.

解. a^6 可以看成平方:

$$a^6 = (a^3)^2,$$

也可以看成立方:

$$a^6 = (a^2)^3,$$

于是 $a^6 - b^6$ 的分解就有两条路可走.

第一条路是先应用平方差公式:

$$\begin{aligned}
 a^6 - b^6 &= (a^3)^2 - (b^3)^2 \\
 &= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \\
 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)
 \end{aligned}$$

第二条路是从立方差公式入手:

$$\begin{aligned}
 a^6 - b^6 &= (a^2)^3 - (b^2)^3 \\
 &= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \\
 &= (a + b)(a - b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)
 \end{aligned}$$

注记. 采用两种方法分解, 获得的结果应当相同. 因此比较

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

与

$$(a + b)(a - b)(a^4 + a^2b^2 + b^4),$$

我们知道 $a^4 + a^2b^2 + b^4$ 不是既约多项式, 并且有

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \quad (1.1)$$

及

$$a^6 - b^6 = (a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2). \quad (1.2)$$

于是, 从 $a^6 - b^6$ 的分解出发, 不但得到 1.2 式, 而且知道 $a^4 + a^2b^2 + b^4$ 不是既约多项式, 导出了 1.1 式, 可谓问一知三.

后面我们还要介绍导出 1.1 式的另一种方法.

1.2.5 $2^{1984} + 1$ 不是质数

例 1.2.12. 求证 $2^{1984} + 1$ 不是质数.

解. 为了将 $2^{1984} + 1$ 分解因数, 我们需要知道一个新的公式, 即在 n 为正奇数时

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

上式不难用乘法验证, 将右边的两个因式相乘便得到 $a^n + b^n$. 现在我们有

$$\begin{aligned} 2^{1984} + 1 &= (2^{64})^{31} + 1^{31} \\ &= (2^{64} + 1)(2^{64 \times 30} - 2^{64 \times 29} + \cdots - 2^{64} + 1). \end{aligned}$$

$2^{64} + 1$ 是 $2^{1984} + 1$ 的真因数, 它大于 1, 小于 $2^{1984} + 1$, 所以 $2^{1984} + 1$ 不是质数. 用这个方法可以证明: 当 n 有大于 1 的奇数因数时, $2^n + 1$ 不是质数.

注记. 类似地, 由乘法可以得到在 n 为正整数时

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \quad (12)$$

这也是一个有用的公式.

例 1.2.13. 分解因式: $x^5 - 1$.

解.

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

习题 2

将以下各式分解因式:

1. $16 - (3a + 2b)^2$.

2. $4y^2 - (2z - x)^2$.

3. $a^4 - b^4$.

4. $-81a^4b^4 + 16c^4$.
5. $20a^3x^3 - 45axy^2$.
6. $(3a^2 - b^2)^2 - (a^2 - 3b^2)^2$.
7. $x^8 - y^8$.
8. $16x^5 - x$.
9. $(5x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2$.
10. $32a^3b^3 - 4b^9$.
11. $8a^3b^3c^3 - 1$.
12. $64x^6y^3 + y^{15}$.
13. $x^2(a+b)^2 - 2xy(a^2 - b^2) + y^2(a-b)^2$.
14. $a^{n+2} + 8a^n + 16a^{n-2}$.
15. $9a^2 + x^{2n} + 6a + 2x^n + 6ax^n + 1$.
16. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$.
17. $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 6xy + 4xz - 12yz$.
18. $(p+q)^3 - 3(p+q)^2(p-q) + 3(p+q)(p-q)^2 - (p-q)^3$.
19. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2$.
20. $(a+x)^4 - (a-x)^4$.

1.3 分组分解与十字相乘

例 1.3.1 (分组分解三部曲). 分解因式: $ax - by - bx + ay$.

解.

$$\begin{aligned} & ax - by - bx + ay \\ &= (ax - bx) + (ay - by) \\ &= x(a - b) + y(a - b) \\ &= (x + y)(a - b). \end{aligned}$$

分组的方法并不是唯一的, 对于上面的整式 $ax - by - bx + ay$, 也可以采用下面的做法:

$$\begin{aligned} & ax - by - bx + ay \\ &= (ax + ay) - (bx + by) \\ &= a(x + y) - b(x + y) \\ &= (x + y)(a - b) \end{aligned}$$

两种做法的效果是一样的，殊途同归！可以说，一种是按照 x 与 y 来分组（含 x 的项在一组，含 y 的项在另一组）；另一种是按 a 与 b 来分组。

一般地，分组分解大致分为三步：

1. 将原式的项适当分组；
2. 对每一组进行处理（“提”或“代”）；
3. 将经过处理后的每一组当作一项，再采用“提”或“代”进行分解。

一位高明的棋手，在下棋时，决不会只看一步。同样，在进行分组时，不仅要看到第二步，而且要看到第三步一个整式的项有许多种分组的方法，初学者往往需要经过尝试才能找到适当的分组方法，但是只要努力实践，多加练习，就会成为有经验的“行家”。

例 1.3.2 (殊途同归). 分解因式： $x^2 + ax^2 + x + ax - 1 - a$.

解. 解法一：按字母 x 的幂来分组。

$$\begin{aligned} & x^2 + ax^2 + x + ax - 1 - a \\ &= (x^2 + ax^2) + (x + ax) - (1 + a) \\ &= x^2(1 + a) + x(1 + a) - (1 + a) \\ &= (1 + a)(x^2 + x - 1). \end{aligned}$$

解法二：按字母 a 的幂来分组。

$$\begin{aligned} & x^2 + ax^2 + x + ax - 1 - a \\ &= (ax^2 + ax - a) + (x^2 + x - 1) \\ &= a(x^2 + x - 1) + (x^2 + x - 1) \\ &= (a + 1)(x^2 + x - 1). \end{aligned}$$

1.4 多项式的因式分解