平面几何

三角形与四边形

珠海一中创美营 (数学)

2025 年 4 月 4 日

目录

目录

三角形的基本概念和性质

1. 边与边之间的关系：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边.
2. 角与角之间的关系：三个内角的和等于 $180°$，即在 $\triangle ABC$ 中有 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$. 由此即知三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和.
3. 边与角之间的关系：在同一三角形中，边长与对角成正比，即大边对大角，小边对小角.

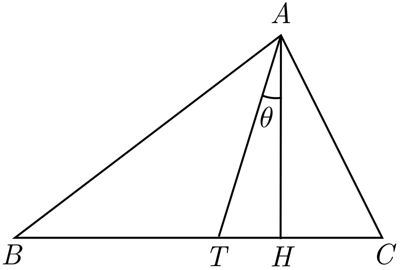
三角形的基本概念和性质

- 三角形的角平分线： 三角形一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的角平分线.
- 三角形的中线： 在三角形中，连结一个顶点和它的对边中点的线段叫做三角形的中线.
- 三角形的高： 从三角形一个顶点向它的对边所在直线画垂线，顶点和垂足间的线段叫做三角形的高线，简称三角形的高.
- 三角形的中位线： 连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线。中位线平行于第三边且等于第三边的一半.
- 三角形的外角平分线： 三角形一个内角的邻补角的平分线与这个角的对边的延长线相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的外角平分线.

三角形的基本概念和性质

定理 1

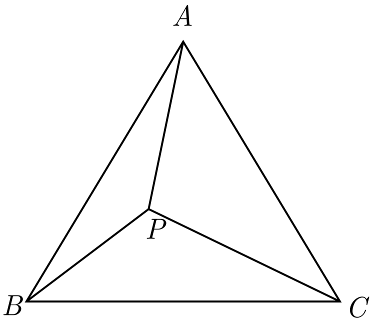
三角形顶角的平分线与底边上的高所夹的角等于两底角差的一半。



例 1

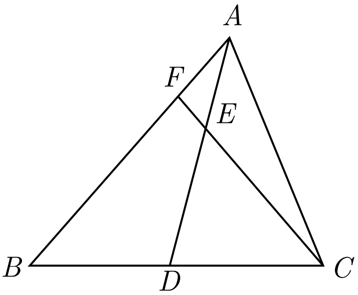
设 P 是边长为 1 的正三角形 ABC 内一点，求证：

$$\frac{3}{2} < PA + PB + PC < 2. \tag{1}$$



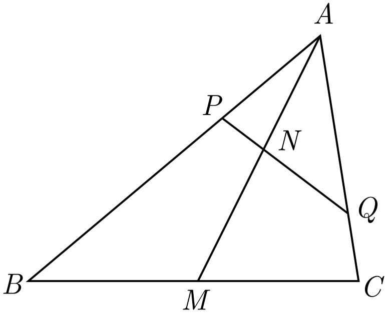
例 2

如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，E 是 AD 上的一点，且 $AE = \frac{1}{3}AD$, CE 交 AB 于点 F. 若 $AF = 1.2$ cm, 求 AB 长。



例 3

在 $\triangle ABC$ 中，P Q 分别是边 AB 和 AC 上的点，中线 AM 与 PQ 交于 N . 若 $AB : AP = 5:2, AC : AQ = 4:3$, 求 $AM : AN$.



目录

定理 4 (三角形的角平分线性质定理)

$\triangle ABC$ 中，若 AP 是 $\angle A$ 的平分线，则

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$$

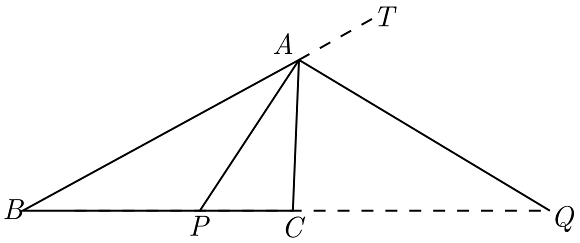
定理 5 (三角形的外角平分线性质定理)

$\triangle ABC$ 中，若 AQ 是 $\angle A$ 的外角平分线，则

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{AB}{AC} \tag{2-5}$$

调和点列与调和线束

角平分线性质定理.ggb



定理 6 (正弦定理)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A B C 所对的边长分别为 a b c, 则

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S_{\triangle ABC}} = 2R.$$

其中 R 为的 $\triangle ABC$ 外接圆半径。

- 大边对大角
- 三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$

定理 7 (余弦定理)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边长分别为 $a\ b\ c$, 则

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A. \end{aligned} \tag{2-7}$$

等面积法 - 余弦定理.ggb

推论 8 (勾股定理)

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$, 则

$$c^2 = a^2 + b^2$$

广勾股定理

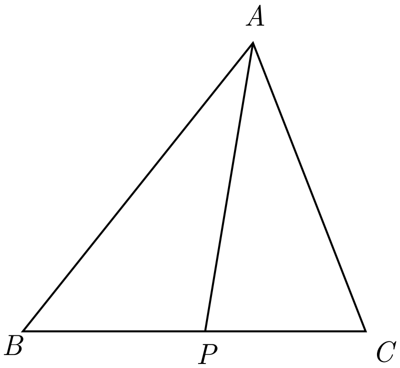
对直角三角形 $\triangle ABC$ 而言，$\angle ADB = 90°$, 点 C 为直角边 BC 所在直线上一点，则有

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 \mp 2CD \cdot CB.$$

定理 9 (张角定理)

设 P 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点，$\angle BAP = \alpha, \angle CAP = \beta$, 则

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP} = \frac{\sin\alpha}{AC} + \frac{\sin\beta}{AB}.$$



定理 10 (张角定理的逆定理)

设 $B\ P\ C$ 依次是平面内从一点 A 所引三条射线 $AB\ AP\ AC$ 上的点 (AP 在 $AB\ AC$ 之间) ，$\angle BAP=\alpha, \angle CAP=\beta$, 且 $\alpha+\beta<180°$, 若有

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB},$$

则三点 B, P, C 在一条直线上.

定理 11 (斯特瓦尔特定理)

设 P 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点，则

$$AP^2 = AB^2 \cdot \frac{PC}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BP}{BC} - BC^2 \cdot \frac{PC}{BC} \cdot \frac{BP}{BC}.$$

斯特瓦尔特定理的推论

特别地，当 AP 为三角形中的重要线段时，有以下结果。

(1) 当 AP 为边 BC 上的中线时，则

$$AP^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2.$$

(2) 当 AP 为角 A 的平分线时，则

$$AP^2 = AB \cdot AC - BP \cdot PC$$

(3) 当 AP 为角 A 的外角平分线时，则

$$AP^2 = -AB \cdot AC + BP \cdot PC$$

(4) 当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，即 $AB = AC$ 时，则

$$AP^2 = AB^2 - BP \cdot PC$$

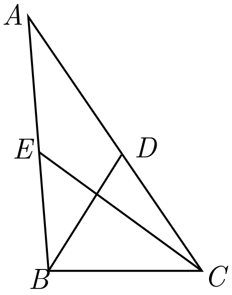
(5) 若 P 分线段 BC 满足 $\frac{BP}{BC} = \lambda$ 时，则

$$AP^2 = \lambda(\lambda - 1)BC^2 + (1 - \lambda) \cdot AB^2 + \lambda \cdot AC^2$$

例 1

在 $\triangle ABC$ 中，已知 BD 和 CE 分别是两边上的中线，并且 $BD \perp CE, BD = 4, CE = 6$. 那么，$\triangle ABC$ 的面积等于：(   )

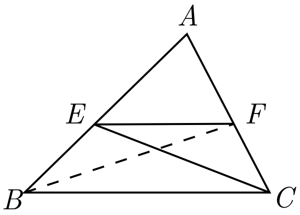
A. 12   B. 14   C. 16   D. 18



例 2

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$EF//BC$, $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle BCE}$. 若 $S_{\triangle ABC}=1$ ，则 $S_{\triangle CEF}$ 等于 (　).

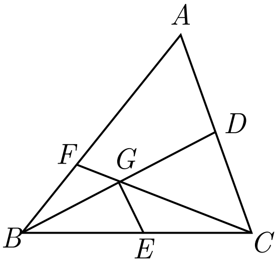
A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{1}{5}$　C. $\sqrt{5}-2$　D. $\sqrt{3}-\frac{3}{2}$



例 3

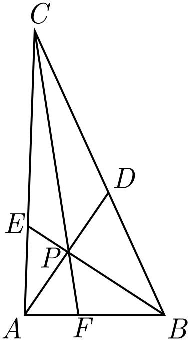
如图，在 $\triangle ABC$ 中，$D\ E$ 分别是 $AC\ BC$ 的中点，$BF=\frac{1}{3}AB, BD$ 与 FC 相交于 G, 连结 EG .

(1) 求证：$GE//AC$; (2) 求 $\frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle BEG}}$ 的值。



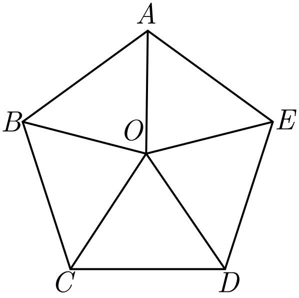
例 4

如图，P 是 $\triangle ABC$ 内的一点，连结 AP 、BP CP 并延长，分别与 BC AC AB 交于 D E F ，已知：$AP=6, BP=9, PD=6, PE=3, CF=20$. 求 $\triangle ABC$ 的面积。



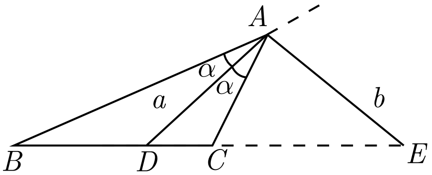
例 5

如图，O 是凸五边形 $ABCDE$ 内一点，且 $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4, \angle 5 = \angle 6, \angle 7 = \angle 8$. 求证：$\angle 9$ 与 $\angle 10$ 相等或互补。



例 6

已知 AD AE 分别是 $\triangle ABC$ 的角 A 的内、外角平分线，点 D 在边 BC 上，点 E 在边 BC 的延长线上。求证：$\frac{1}{BE}+\frac{1}{CE}=\frac{2}{DE}$.



例 7

在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2\sqrt{2}, AC=\sqrt{2}, BC=2$, 设 P 为边 BC 上任一点，则 (　　) .

A. $PA^2 < PB \cdot PC$

B. $PA^2 = PB \cdot PC$

C. $PA^2 > PB \cdot PC$

D. PA^2 与 $PB \cdot PC$ 的大小关系不确定

例 8

在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 2$, 边 BC 上有 100 个不同的点 P_1 、$P_2, \cdots, P_{100}$. 记 $m_i = AP_i^2 + BP_i \cdot P_iC(i = 1, 2, \cdots, 100)$ ，则 $m_1 + m_2 + \cdots + m_{100} =$?

目录

目录

目录

目录