Mayth

LeyuDame

2024 年 4 月 29 日

目录

第一章　立体几何初步

1.1　球的表面积与体积

1.1.1　球的表面积

2024-04-29

我们在初中都学过圆的面积, 设圆的半径为 r, 则圆的面积为

$$S = \pi r^2.$$

上式说明圆的面积和半径有关, 进一步地讲, 圆的面积作为二维平面上的度量, 它和圆的半径的平方成正比. 此外, 圆的面积还包含了常数 π. 类似地, 同样是求面积, 我们是否可以推测球的表面积也和球的半径平方成正比呢？是否也和常数 π 有关呢？

公式 1.1.1 (球的表面积)**.** 设球的半径为 r, 则球的表面积

$$S_{球} = 4\pi r^2.$$

下面给出一个不太严谨的球的表面积公式的证明方法, 主要是利用圆柱侧面积来近似代替球的表面积.

证明. 把一个半径为 r 的球的上半球横向切成 n (无穷大) 份, 每份等高并且把每份看成一个类似圆柱, 其中半径等于底面圆半径, 则从下到上第 k 个圆柱的侧面积为

$$S(k) = 2\pi r_k h.$$

$$\because h = \frac{r}{n}, r_k = \sqrt{r^2 - (kh)^2},$$

$$\therefore S(k) = \frac{2\pi r}{n}\sqrt{r^2 - (kh)^2} = 2\pi r^2\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{k^2}{n^4}}.$$

$$\therefore S_{球} = \lim_{n\to+\infty} 2[S(1) + S(2) + \cdots + S(n)] = 4\pi r^2.$$

■

公式 1.1.2 (球的体积)**.** 设球的半径为 r, 则球的体积

$$V_{球} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

例 1.1.1. 如图 8.3-4, 某种浮标由两个半球和一个圆柱黏合而成, 半球的直径是 0.3 m, 圆柱高 0.6 m. 如果在浮标表面涂一层防水漆, 每平方米需要 0.5 kg 涂料, 那么给 1000 个这样的浮标涂防水漆需要多少涂料? (π 取 3.14)

解. 一个浮标的表面积为

$$2\pi \times 0.15 \times 0.6 + 4\pi \times 0.15^2 = 0.8478 \left(\mathrm{~m}^2\right),$$

所以给 1000 个这样的浮标涂防水漆约需涂料

$$0.8478 \times 0.5 \times 1000 = 423.9(\mathrm{~kg}).$$

类比利用圆周长求圆面积的方法, 我们可以利用球的表面积求球的体积. 如图 8.3-5, 把球 O 的表面分成 n 个小网格, 连接球心 O 和每个小网格的顶点, 整个球体就被分割成 n 个“小锥体”.

当 n 越大, 每个小网格越小时, 每个“小锥体”的底面就越平, “小锥体”就越近似于棱锥, 其高越近似于球半径 R. 设 $O-ABCD$ 是其中一个“小锥体”, 它的体积

$$V_{O-ABCD} \approx \frac{1}{3} S_{ABCD} R.$$

由于球的体积就是这 n 个“小锥体”的体积之和, 而这 n 个“小锥体”的底面积之和就是球的表面积. 因此, 球的体积

$$V_{\text{球}} = \frac{1}{3} S_{\text{球}} R = \frac{1}{3} \times 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

由此, 我们得到球的体积公式

$$V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$