

# ESKF 惯性组合导航

Zh Yan

Nov 25, 2023

## 摘要

这个文稿是 ESKF 惯性组合导航的推导, 主要是根据高博的书《SLAM in Autonomous Driving book》梳理了一遍流程, 并对某些地方做了一些解释说明和个人理解, 旨在学习与记录, 如有错误欢迎批评指正。

## 目录

1	使用误差状态卡尔曼滤波器实现组合导航	2
2	ESKF 的数学推导	3
3	离散时间的 ESKF 运动方程	8
4	ESKF 的运动过程	9
5	ESKF 的更新过程	10
6	ESKF 的误差状态后续处理	11

## 1 使用误差状态卡尔曼滤波器实现组合导航

• 首先，先说明为什么要使用 ESKF？原因如下：

1. 在旋转的处理上，ESKF 的状态变量可以采用最小化的参数表达，也就是使用三维变量来表达旋转的增量。该变量位于切空间中，而切空间是一个矢量空间。传统 KF 需要用到四元数（4 维）或者更高维的变量来表达状态（旋转矩阵，9 维），要不就得采用带有奇异性的表达方式（欧拉角）。
2. ESKF 总是在原点附近，离奇异点较远，数值方面更稳定，并且不会产生离工作点太远而导致线性化近似不够的问题。
3. ESKF 的状态量为小量，其二阶变量相对来说可以忽略。同时，大多数雅可比矩阵在小量情况下变得非常简单，甚至可以用单位阵代替。
4. 误差状态的运动学相比原状态变量更小（小量的运动学），因此可以把更新部分归入原状态变量中。（此外，结合卫星导航的话可以避免“大数吃小数”等数值计算的问题）

然后，先展示一下多传感器融合的效果，如表格1中所示：

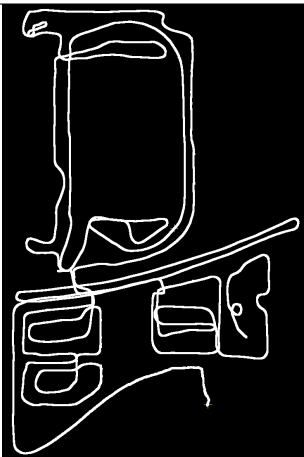
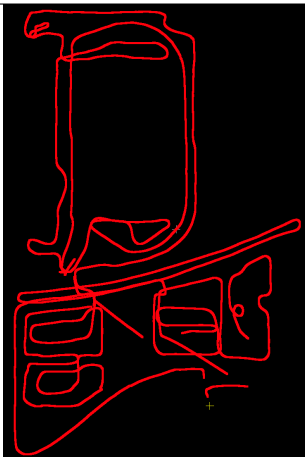
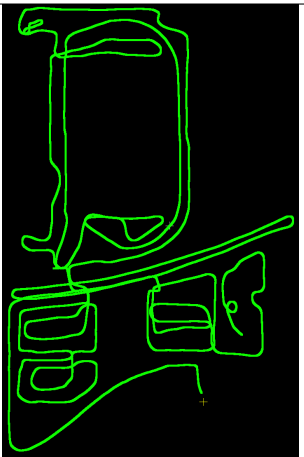
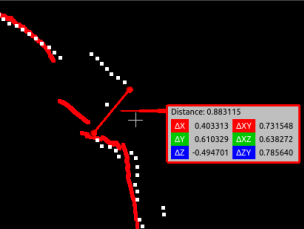
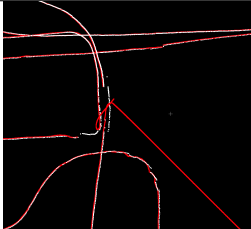
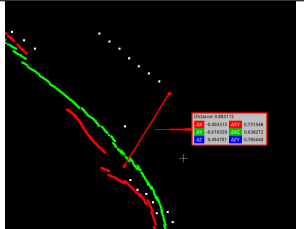
方法	GNSS	GNSS+IMU	GNSS+IMU+Odom
效果			
细节			
说明	GNSS 数据频率为 10Hz 信号不好时误差达到米级	GNSS+IMU 为 100Hz GNSS 信号不好时， IMU 会出现发散	GNSS+IMU+Odom 为 100Hz， Odom 本身频率为 10Hz 效果最好：顺滑、高频

表 1: 不同传感器 ESKF 融合效果对比 (GNSS,GNSS+IMU,GNSS+IMU+Odom)

## 2 ESKF 的数学推导

以 IMU 为运动模型，GNSS 为观测模型，推导 ESKF。设状态变量为：

$$\mathbf{x} = [\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{R}, \mathbf{b}_g, \mathbf{b}_a, \mathbf{g}]^T \quad (1)$$

所有变量都默认下标  $()_{WB}$ ，即都是相对于世界坐标系  $W$ ，其中  $\mathbf{p}$  为平移， $\mathbf{v}$  为速度， $\mathbf{R}$  为旋转， $\mathbf{b}_g, \mathbf{b}_a$  分别为 IMU 零偏， $\mathbf{g}$  为重力。根据 IMU 的测量值，状态变量在连续时间下的运动方程为：

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad (2a)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{b}_a - \boldsymbol{\eta}_a) + \mathbf{g}, \quad (2b)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{b}_g - \boldsymbol{\eta}_g)^\wedge, \quad (2c)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_g = \boldsymbol{\eta}_{bg}, \quad (2d)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_a = \boldsymbol{\eta}_{ba}, \quad (2e)$$

$$\dot{\mathbf{g}} = 0. \quad (2f)$$

**注意**，上式中 IMU 的测量值数据都是处于 IMU 坐标系  $S$  下。公式2c中的旋转推导如下：假设空间中的一个向量  $\mathbf{u}$ ，世界坐标系为  $W$ ，局部坐标系为  $I$ ，存在以下关系：

$$\mathbf{u}_W = \mathbf{R}_I^G \mathbf{u}_I + \mathbf{t}_I^G \quad (3)$$

两边求导得：

$$\mathbf{v}_W = \dot{\mathbf{R}}_I^W \mathbf{u}_I + \dot{\mathbf{t}}_I^W = \dot{\mathbf{R}}_I^W \mathbf{u}_I + \mathbf{v}_I^W \quad (4)$$

其中， $\mathbf{v}_I^W$  为局部坐标系  $I$  在世界坐标系  $W$  下得速度。又由坐标系间速度计算（臂杆速度，可以参考机器人学导论第五章内容）易知：

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_W &= \mathbf{w}_I^W \times \mathbf{u}_W + \mathbf{v}_I^W \\ &= \mathbf{w}_I^W \times \mathbf{R}_I^W \mathbf{u}_I + \mathbf{v}_I^W \end{aligned} \quad (5)$$

所以：

$$\dot{\mathbf{R}}_I^W = \mathbf{w}_I^W \times \mathbf{R}_I^W = (\mathbf{R}_I^W \mathbf{w}_I)^\wedge \mathbf{R}_I^W \quad (6)$$

根据旋转矩阵的伴随性质可得：

$$\dot{\mathbf{R}}_I^W = (\mathbf{R}_I^W \mathbf{w}_I)^\wedge \mathbf{R}_I^W = \mathbf{R}_I^W \mathbf{w}_I^\wedge \quad (7)$$

旋转矩阵的伴随性质：

$$\mathbf{R}p^{\wedge}\mathbf{R}^T = (\mathbf{R}p)^{\wedge} \quad (8)$$

证明： $\forall v \in R^3$

$$(\mathbf{R}p)^{\wedge}v = (\mathbf{R}p) \times v = (\mathbf{R}p) \times (\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}v) = \mathbf{R}[p \times (\mathbf{R}^{-1}v)] = \mathbf{R}p^{\wedge}\mathbf{R}^{-1}v \quad (9)$$

同理：

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}^{-1}p)^{\wedge}v &= (\mathbf{R}^{-1}p) \times v = (\mathbf{R}^{-1}p) \times (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}v) \\ &= \mathbf{R}^{-1}[p \times (\mathbf{R}v)] = \mathbf{R}^{-1}p^{\wedge}\mathbf{R}v \end{aligned} \quad (10)$$

$$\therefore \mathbf{R}^T p^{\wedge} \mathbf{R} = (\mathbf{R}^T p)^{\wedge} \quad (11)$$

参考链接：

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/602088458>

旋转矩阵导数公式怎么得到的？

臂杆速度计算

多个坐标系下的速度和角速度分析

为了在 EKF 的预测过程中对协方差进行预测，需要将上述方程进行线性化：

$$x_{k+1} = f(x_k) + Fdx + w \quad (12)$$

其中， $F = \left. \frac{\partial f}{\partial x(t)} \right|_{x(t)}$  为系数矩阵，该矩阵由运动方程和各项状态变量的导数构成。

• 不使用 EKF 而使用 ESKF 的原因如下：

1.  $F$  中需要计算  $R$  相对于某个扰动的导数，而在不引入张量的情况下，无法表达矩阵对向量的导数形式（即， $R$  二维，扰动  $\delta\theta$  一维向量，求出的导数是三维的）。于是，传统的方式是使用欧拉角或者四元数的四个标量作为状态量，但就无法使用流形上的方法了。（参考读物）
2. 如果考虑将惯性导航系统与卫星导航系统进行融合，那么  $x$  中的平移量就应该使用全局坐标。这会使得  $x$  中的数值变得非常大，在有些场合超出浮点数的有效数字范围，并可能会出现“大数吃小数”的现象。

下面进入 ESKF 的相关定义：

在 ESKF 中，通常把原状态变量称为名义状态变量 (Nominal State)，把 ESKF 里的状态变量称为误差状态变量 (Error State)。名义状态变量和误差状态变量之和称为真值。把噪声的处理放到误差状态变量中，可以认为名义状态变量的方程是不含噪声的：

真值状态变量  $x_t = [p_t, v_t, R_t, b_{at}, b_{gt}, g]^T$ ，下标  $t$  表示真值。

名义状态变量  $x = [p, v, R, b_g, b_a, g]^T$ ，不考虑误差，通过运动学方程预测。

误差状态变量  $\delta x = [\delta p, \delta v, \delta R, \delta b_g, \delta b_a, \delta g]^T$ ，真正的估计量。

IMU 读数记为  $\tilde{\omega}, \tilde{a}$ ，状态量导数相对于观测量之间的关系如下（其实和公式2一致）：

$$\begin{aligned}\dot{p}_t &= v_t, \\ \dot{v}_t &= R_t(\tilde{a} - b_{at} - \eta_a) + g_t, \\ \dot{R}_t &= R_t(\tilde{\omega} - b_{gt} - \eta_g)^\wedge, \\ \dot{b}_{gt} &= \eta_{bg}, \\ \dot{b}_{at} &= \eta_{ba}, \\ \dot{g}_t &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{13}$$

真值、名义状态变量和误差状态变量之间的关系如下：

$$\begin{aligned}p_t &= p + \delta p, \\ v_t &= v + \delta v, \\ R_t &= R\delta R \text{ 或 } q_t = q\delta q, \\ b_{gt} &= b_g + \delta b_g, \\ b_{at} &= b_a + \delta b_a, \\ g_t &= g + \delta g.\end{aligned}\tag{14}$$

名义状态变量的运动方程和真值的一样，**只是不必考虑噪声**（因为噪声将在误差状态变量  $\delta x$  下考虑）。

接下来求误差状态变量的运动方程，首先，对上式求导可得：

$$\begin{aligned}\delta \dot{p} &= \delta v, \\ \delta \dot{b}_g &= \eta_g, \\ \delta \dot{b}_a &= \eta_a, \\ \delta \dot{g} &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{15}$$

$\delta v$  和  $\delta R$  和  $R$  有关系，求导比较复杂，下面单独分析。**误差状态的旋转项求导：**

对式  $R_t = R\delta R$  两边分别求导有：

$$\begin{aligned}\dot{R}_t &= R_t(\tilde{\omega} - b_{gt} - \eta_g)^\wedge \\ &= \dot{R} \exp(\delta \theta^\wedge) + R \exp(\delta \theta^\wedge)\end{aligned}\tag{16}$$

**注意：** $\exp(\delta \theta)^\wedge$  满足（链式求导）：

$$\exp(\delta \theta)^\wedge = \exp(\delta \theta)^\wedge (\delta \dot{\theta})^\wedge\tag{17}$$

因此16第二个等号右边可以化简为（这里利用了名义状态变量  $\dot{R} = R(\tilde{\omega} - b_g)^\wedge$ ，即真值状态变量不考虑噪声的结果）

$$\dot{R} \exp(\delta \theta^\wedge) + R \exp(\delta \theta^\wedge) (\delta \dot{\theta})^\wedge = R(\tilde{\omega} - b_g)^\wedge \exp(\delta \theta^\wedge) + R \exp(\delta \theta)^\wedge (\delta \dot{\theta})^\wedge\tag{18}$$

16第一个等号右边可以化为：

$$R_t(\tilde{\omega} - b_{gt} - \eta_g)^\wedge = R \exp(\delta\theta^\wedge)(\tilde{\omega} - b_{gt} - \eta_g)^\wedge \quad (19)$$

比较两个式子，将  $\dot{\delta\theta}$  移到一侧，约掉两侧左边的  $R$  得：

$$\exp(\delta\theta^\wedge)\delta\dot{\theta}^\wedge = \exp(\delta\theta^\wedge)(\tilde{\omega} - b_{gt} - \eta_g)^\wedge - (\tilde{\omega} - b_g)^\wedge \exp(\delta\theta^\wedge). \quad (20)$$

注意,  $\exp(\delta\theta^\wedge)$  本身是一个  $SO(3)$  矩阵，利用  $SO(3)$  上的伴随性质：

$$\phi^\wedge R = R(R^\top \phi)^\wedge \quad (21)$$

来交换上面的  $\exp(\delta\theta^\wedge)$  得：

$$\begin{aligned} \exp(\delta\theta)^\wedge(\dot{\delta\theta})^\wedge &= \exp(\delta\theta^\wedge)(\tilde{\omega} - b_{gt} - \eta_g)^\wedge - \exp(\delta\theta^\wedge)(\exp(-\delta\theta^\wedge)(\tilde{\omega} - b_g))^\wedge \\ &= \exp(\delta\theta^\wedge)[(\tilde{\omega} - b_{gt} - \eta_g)^\wedge - (\exp(-\delta\theta^\wedge)(\tilde{\omega} - b_g))^\wedge] \\ &\approx \exp(\delta\theta^\wedge)[(\tilde{\omega} - b_{gt} - \eta_g)^\wedge - (I - \delta\theta^\wedge)(\tilde{\omega} - b_g)^\wedge] \\ &= \exp(\delta\theta^\wedge)[b_g - b_{gt} - \eta_g + \delta\theta^\wedge\tilde{\omega} - \delta\theta^\wedge b_g]^\wedge \\ &= \exp(\delta\theta^\wedge)[(-\tilde{\omega} + b_g)^\wedge\delta\theta - \delta b_g - \eta_g]^\wedge \end{aligned} \quad (22)$$

约掉两边系数得：

$$\dot{\delta\theta} = (-\tilde{\omega} + b_g)^\wedge\delta\theta - \delta b_g - \eta_g \quad (23)$$

**误差状态的速度项：**对  $v_t = v + \delta v$  两边同时求导得（其中小量相乘的部分进行舍去近似）：

$$\begin{aligned} \dot{v}_t = a_t &= R_t(\tilde{a} - b_{at} - \eta_a) + g_t \\ &= R \exp(\delta\theta^\wedge)(\tilde{a} - b_a - \delta b_a - \eta_a) + g + \delta g \\ &\approx R(I + \delta\theta^\wedge)(\tilde{a} - b_a - \delta b_a - \eta_a) + g + \delta g \\ &\approx R\tilde{a} - Rb_a - R\delta b_a - R\eta_a + R\delta\theta^\wedge\tilde{a} - R\delta\theta^\wedge b_a + g + \delta g \\ &= R\tilde{a} - Rb_a - R\delta b_a - R\eta_a - R\tilde{a}^\wedge\delta\theta + Rb_a^\wedge\delta\theta + g + \delta g. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\dot{v} + \delta\dot{v} = R(\tilde{a} - b_a) + g + \delta\dot{v} \quad (25)$$

联立可得：

$$\delta\dot{v} = -R(\tilde{a} - b_a)^\wedge\delta\theta - R\delta b_a - R\eta_a + \delta g \quad (26)$$

其中,  $\eta_a$  是零均值的高斯白噪声，乘上任意旋转矩阵之后仍然是一个零均值白噪声，且**协方差矩阵不变**。

**证明：**假设一个零均值的高斯随机变量为  $\mathbf{X}$ ，协方差矩阵是对角线上的元素大小相同的矩阵，那么可以写为：

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}(\mathbf{X}) = \sigma^T \mathbf{I} \sigma \quad (27)$$

其中  $\sigma$  是是每个维度的标准差,  $\mathbf{I}$  是单位矩阵。现在, 用任意旋转矩阵乘以该随机变量, 得到新的随机变量:  $\mathbf{Y} = \mathbf{R}\mathbf{X}$  那么,

$$\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \mathbb{E}(\mathbf{R}\mathbf{X}) = \mathbf{R}\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{R}\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (28)$$

因此,  $\mathbf{Y}$  的均值仍为零。 $\mathbf{Y}$  的协方差矩阵为:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{Y}) &= \mathbb{E}[(\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y}))(\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y}))^\top] \\ &= \mathbb{E}[(\mathbf{R}\mathbf{X} - \mathbf{0})(\mathbf{R}\mathbf{X} - \mathbf{0})^\top] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{X}^\top\mathbf{R}^\top] \\ &= \mathbf{R}\mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^\top]\mathbf{R}^\top \\ &= \mathbf{R}\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))^\top]\mathbf{R}^\top \\ &= \mathbf{R}\text{Cov}(\mathbf{X})\mathbf{R}^\top \\ &= \mathbf{R}\sigma^T\mathbf{I}\sigma\mathbf{R}^\top \\ &= \sigma^T\sigma\mathbf{R}\mathbf{R}^\top \\ &= \sigma^T\mathbf{I}\sigma \\ &= \text{Cov}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (29)$$

即: 协方差不变。

因此:

$$\dot{\delta v} = -R(\tilde{a} - b_a)^\wedge \delta\theta - R\delta b_a - \eta_a + \delta g \quad (30)$$

至此, 误差状态变量的运动方程如下:

$$\begin{aligned} \delta\dot{p} &= \delta v, \\ \delta\dot{v} &= -R(\tilde{a} - b_a)^\wedge \delta\theta - R\delta b_a - \eta_a + \delta g, \\ \delta\dot{\theta} &= -(\tilde{\omega} - b_g)^\wedge \delta\theta - \delta b_g - \eta_g, \\ \delta\dot{b}_g &= \eta_{bg}, \\ \delta\dot{b}_a &= \eta_{ba}, \\ \delta\dot{g} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (31)$$

### 3 离散时间的 ESKF 运动方程

当然，我们写代码用的是上面的离散形式。首先，**名义状态变量运动学离散形式**：

$$\begin{aligned}
 p(t + \Delta t) &= p(t) + v\Delta t + \frac{1}{2} (R(\tilde{a} - b_a)) \Delta t^2 + \frac{1}{2} g \Delta t^2, \\
 v(t + \Delta t) &= v(t) + R(\tilde{a} - b_a) \Delta t + g \Delta t, \\
 R(t + \Delta t) &= R(t) \text{Exp}((\tilde{\omega} - b_g) \Delta t), \\
 b_g(t + \Delta t) &= b_g(t), \\
 b_a(t + \Delta t) &= b_a(t), \\
 g(t + \Delta t) &= g(t).
 \end{aligned} \tag{32}$$

**误差状态变量离散形式**：

$$\begin{aligned}
 \delta p(t + \Delta t) &= \delta p + \delta v \Delta t, \\
 \delta v(t + \Delta t) &= \delta v + (-R(\tilde{a} - b_a)^\wedge \delta \theta - R \delta b_a + \delta g) \Delta t - \eta_v, \\
 \delta \theta(t + \Delta t) &= \text{Exp}(-(\tilde{\omega} - b_g) \Delta t) \delta \theta - \delta b_g \Delta t - \eta_\theta, \\
 \delta b_g(t + \Delta t) &= \delta b_g + \eta_g, \\
 \delta b_a(t + \Delta t) &= \delta b_a + \eta_a, \\
 \delta g(t + \Delta t) &= \delta g.
 \end{aligned} \tag{33}$$

**注意：**

1. 右侧部分我们省略了括号里的  $(t)$  以简化公式；
2. **关于旋转部分的积分**，我们可以将连续形式看成关于  $\delta \theta$  的微分方程然后求解。求解过程类似于对角速度进行积分。如果是  $\delta \theta(t + \Delta t) = \delta \theta + \dot{\delta \theta} \Delta t$  把  $\text{Exp}(-(\tilde{\omega} - b_g) \Delta t)$  泰勒展开就刚好相等。**高博的书里简单带过了，这里补充一下怎么根据微分方程求解得到离散形式的角度误差状态：**

形如：

$$\frac{dX}{dt} = AX + F \tag{34}$$

的通解有以下形式（一阶矩阵微分方程）：

$$\vec{\varphi} = e^{At}(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-As} f(s) ds) \tag{35}$$

上面姿态部分  $\delta \dot{\theta} = -(\tilde{\omega} - b_g)^\wedge \delta \theta - \delta b_g - \eta_g$  也是类似的格式，只不过高博这里应该是把后面一项积分内部的指数部分近似为 1 了，所以最终结果是：

$$\delta \theta(t + \Delta t) = \text{Exp}(-(\tilde{\omega} - b_g) \Delta t) \delta \theta - \delta b_g \Delta t - \eta_\theta, \tag{36}$$



另一种推到方式也可以和 Fast-lio 一样，根据真实状态和误差状态的离散形式来表达误差状态，然后对误差状态和噪声求雅可比：

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} = \mathbf{x}_{i+1} \oplus \hat{\mathbf{x}}_{i+1} = (\mathbf{x}_i \oplus \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i)) \oplus (\hat{\mathbf{x}}_i \oplus \Delta t \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{0})) \quad (37)$$

参考王博的推导

3. **噪声项并不参与递推**，需要把它们单独归入噪声部分中。连续时间的噪声项可以视为随机过程的能量谱密度，而离散时间下的噪声变量就是我们日常看到的随机变量了。这些噪声随机变量的标准差可以列写如下：

$$\sigma(\boldsymbol{\eta}_v) = \Delta t \sigma_a, \quad \sigma(\boldsymbol{\eta}_\theta) = \Delta t \sigma_g, \quad \sigma(\boldsymbol{\eta}_g) = \sqrt{\Delta t} \sigma_{bg}, \quad \sigma(\boldsymbol{\eta}_a) = \sqrt{\Delta t} \sigma_{ba} \quad (38)$$

其中前两式的  $\Delta t$  是由积分关系导致的。

## 4 ESKF 的运动过程

根据上述讨论，可以写出 ESKF 的运动过程。误差状态变量知的离散时间运动方程已经在式33中给出，可以整体地记为：

$$\delta \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\delta \mathbf{x}_k) + \mathbf{w}, \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}) \quad (39)$$

其中  $\omega$  为噪声。按照前面的定义， $\mathbf{Q}$  应该为：

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{0}_3, \text{Cov}(\boldsymbol{\eta}_v), \text{Cov}(\boldsymbol{\eta}_\theta), \text{Cov}(\boldsymbol{\eta}_g), \text{Cov}(\boldsymbol{\eta}_a), \mathbf{0}_3) \quad (40)$$

两侧的零是由于第一个和最后一个方程本身没有噪声导致的。为了保持与 EKF 的符号统一，计算运动方程的线性化形式：

$$\delta \mathbf{x}(t + \Delta t) = \underbrace{\mathbf{f}(\delta \mathbf{x}(t))}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{F} \delta \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (41)$$

其中， $\mathbf{F}$  为线性化后的雅可比矩阵。由于式33已经线性化，现在只需把它们的线性系数“拿”出来（注意变量定义的顺序）：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} I & I\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -R(\tilde{a} - b_a)\Delta t & 0 & -R\Delta t & I\Delta t \\ 0 & 0 & \text{Exp}(-(\tilde{\omega} - b_g)\Delta t) & -I\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (42)$$

在此基础上, 执行 ESKF 的预测过程。预测过程包括对名义状态的预测 (IMU 积分) 及对误差状态的预测:

$$\delta \mathbf{x}_{\text{pred}} = \mathbf{F} \delta \mathbf{x}, \quad (43a)$$

$$\mathbf{P}_{\text{pred}} = \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}. \quad (43b)$$

由于 ESKF 的误差状态在每次更新以后会被重置为  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 因此运动方程的均值部分, 即式43a没有太大意义, 而协方差部分则描述了整个误差估计的分布情况。从直观意义上来看, 运动方程的噪声协方差中增加了  $\mathbf{Q}$  项, 可以看作增大的过程。

## 5 ESKF 的更新过程

大部分的观测数据是对名义状态变量的观测。此时,  $H$  可以通过链式法则来求得:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \delta \mathbf{x}} \quad (44)$$

其中第一项只需要对观测方程进行线性化; 第二项, 根据之前的状态变量的定义, 可以得到 (公式加粗很麻烦, 后面就不加粗了, 除非涉及很多标量):

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \delta \mathbf{x}} = \text{diag}(\mathbf{I}_3, \frac{\partial \text{Log}(\mathbf{R}(\text{Exp}(\delta \boldsymbol{\theta})))}{\delta \boldsymbol{\theta}}, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_3) \quad (45)$$

其他几项都是平凡的, 只有旋转部分, 因为  $\delta \boldsymbol{\theta}$  定义为  $R$  的右乘, 由 BCH 公式48可得:

$$\frac{\partial \text{Log}(\mathbf{R}(\text{Exp}(\delta \boldsymbol{\theta})))}{\delta \boldsymbol{\theta}} = J_r^{-1}(\mathbf{R}) \quad (46)$$

**BCH 公式:** 假定对某个旋转  $R$ , 对应的李代数为  $\Phi$ 。我们给它左乘一个微小的旋转, 记作  $\Delta R$ , 对应的李代数为  $\Delta \Phi$ 。那么, 在李群上得到的结果就是  $\Delta R \cdot R$ , 而在李代数上, 根据 BCH 近似, 为  $J_l^{-1} \Delta \Phi + \Phi$ 。合并起来:

$$\Delta R \cdot R = \exp(\Delta \Phi^\wedge) \exp(\Phi^\wedge) = \exp((J(\Phi)_l^{-1} \Delta \Phi + \Phi)^\wedge) \quad (47)$$

右乘:

$$R \cdot \Delta R = \exp(\Phi^\wedge) \exp(\Delta \Phi^\wedge) = \exp((J(\Phi)_r^{-1} \Delta \Phi + \Phi)^\wedge) \quad (48)$$

反之, 如果在李代数上进行加法, 即  $\Phi + \Delta \Phi$ , 那么可以近似为李群上带左右雅可比的乘法:

$$\exp((\Phi + \Delta \Phi)^\wedge) = \exp((J_l \Delta \Phi)^\wedge) \exp(\Phi) = \exp(\Phi) \exp((J_r \Delta \Phi)^\wedge) \quad (49)$$

## 6 ESKF 的误差状态后续处理

经过预测和更新过程后，修正了误差状态的估计。接下来，只需要把误差状态归入名义状态（这也是为什么后面误差状态重新置零的原因），然后重置 ESKF 即可。归入部分如下：

$$\begin{aligned}
 p_{k+1} &= p_k + \delta p_k \\
 v_{k+1} &= v_k + \delta v_k \\
 R_{k+1} &= R_k \exp(\delta \theta^\wedge) \\
 b_{g,k+1} &= b_{g,k} + \delta b_{g,k} \\
 b_{a,k+1} &= b_{a,k} + \delta b_{a,k} \\
 g_{k+1} &= g_k + \delta g_k
 \end{aligned} \tag{50}$$

上述计算可以定义为广义的加法：

$$x_{k+1} = x_k + \oplus \delta x_k \tag{51}$$

ESKF 的重置分为均值和协方差部分。均值部分直接置零：

$$\delta x = \mathbf{0} \tag{52}$$

由于均值被重置了，之前的协方差描述的是关于  $x_k$  切空间中的协方差（切空间指旋转部分，因为  $\delta \theta$  是流形在欧几里得空间的局部切空间；对本身为矢量的部分无影响），而现在要描述的是  $x_{k+1}$  中的协方差。重置会带来一些微小的差异。换句话说，重置前，KF 滤波器刻画了  $x_{pred}$  切空间处的高斯分布  $\mathcal{N}(\delta x, P)$ ，而重置后，应该刻画  $x_{pred} + \delta x$  处的一个  $\mathcal{N}(0, P_{reset})$ 。这对本身为矢量的状态是无差别的，但对于旋转变量来说，它们的切空间零点发生了改变，所以在数学上需要对此进行区分。

设重置前的名义旋转估计为  $R_k$ ，误差状态为  $\delta \theta$ ，卡尔曼滤波器的增量计算结果为  $\delta \theta_k$ （注意：此处的  $\delta \theta_k$  是已知的，而  $\delta \theta$  是一个随机变量。）；重置之后的名义旋转部分为  $R_k \exp(\delta \theta_k^\wedge) = R^+$ ，误差状态为  $\delta \theta^+$ 。由于误差状态被重置了，显然此时  $\delta \theta^+ = \mathbf{0}$ 。但我们关心的不是它们的直接取值，而是  $\delta \theta^+$  与  $\delta \theta$  的线性化关系。把实际的从重置过程写出来：

$$R^+ \exp(\delta \theta^{+\wedge}) = R_k \exp(\delta \theta_k^\wedge) \exp(\delta \theta^{+\wedge}) = R_k \exp(\delta \theta) \tag{53}$$

由上式可以得到：

$$\exp(\delta \theta^{+\wedge}) = \exp(-\delta \theta_k^\wedge) \exp(\delta \theta) \tag{54}$$

这里  $\delta \theta$  为小量，利用线性化之后的 BCH 公式5，可以得到：

$$\delta \theta^+ = -\delta \theta_k + \delta \theta - \frac{1}{2} \delta \theta_k \times \delta \theta + o((\delta \theta)^2) = f(\delta \theta) \tag{55}$$

这是更新后误差状态  $\delta \theta^+$  与更新之前的误差状态  $\delta \theta$  的关系，求偏导得：

$$\frac{\partial \delta \theta^+}{\partial \delta \theta} \approx I - \frac{1}{2} \delta \theta_k \tag{56}$$

即 (EKF 非线性函数进行线性化类似):

$$\delta\theta^+ = f(\delta\theta) + F_k \Delta \quad (57)$$

上面得计算表明重置前后的误差状态相差一个旋转方面得小雅可比矩阵, 记作  $J_\theta = I - \frac{1}{2}\delta\theta_k$ 。把这个小雅可比矩阵放到整个状态变量维度下, 并保持其他部分为单位阵, 可以得到一个完整的雅可比矩阵:

$$F_k = J_k = \text{diag}(I_3, I_3, J_\theta, I_3, I_3, I_3) \quad (58)$$

因此, 在把误差状态的均值归零的同时, 它们的协方差矩阵也应该进行线性变换:

$$P_{reset} = J_k P J_k^T \quad (59)$$

不过, 由于  $\delta\theta$  并不大, 这里的  $J_k$  仍然十分接近于单位阵, 所以大部分资料并不处理这一项, 而是直接把前面估计的  $P$  矩阵作为下一时刻的起点。该问题的实际意义是做了**切空间投影**, 即把一个切空间中的高斯分布投影到另一个切空间中。在 ESKF 中, 两者没有明显的差异, 但是在迭代卡尔曼滤波器 (**IEKF**) 中还会牵扯到在观测过程中多次变换切空间。与此相比, ESKF 只有重置过程中的单次变换, 原理更简单。

#### 参考链接:

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/602088458>

旋转矩阵导数公式怎么得到的?

臂杆速度计算

多个坐标系下的速度和角速度分析

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/84010704>

乘性卡尔曼滤波器

简明 ESKF 推导

一阶矩阵微分方程求解

王博的 Fast-lie 推导