Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Computação e Automação
DCA-0216.0 - Sistemas de Controle - Teoria **Período: 2024.1**

Aluno(a): ______________________________ **Data:** ___/___/___

1º Exercício da 3ª Unidade

1) Para cada um dos sistemas dados:

$$\text{Sistema 1:}\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} \end{cases} \qquad \text{Sistema 2:}\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} \end{cases}$$

a) Encontre o polinômio característico e determine se o sistema é estável;
b) Calcule a Matriz de Controlabilidade e determine se o sistema e controlável;
c) Calcule a Matriz de Observabilidade e determine se o sistema e observável.

2) Dado o sistema:
$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} \end{cases}$$

a) Projete uma realimentação de estados ($u(t) = \mathbf{Kx}(t)$) tal que os pólos de malha fechada sejam alocados em $s_{1,2} = -2 \pm i$ e $s_3 = -10$;

b) Projete um observador de estados tal que seus pólos sejam: $s_{1,2} = -1 \pm i$ e $s_3 = -10$.

3) Dado o sistema:
$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} \end{cases}$$

a) Projete uma realimentação de estados ($u(t) = \mathbf{Kx}(t)$) tal que os pólos de malha fechada sejam alocados em $s_{1,2} = -2 \pm i$ e $s_3 = -10$;

b) Projete um observador de estados tal que seus pólos sejam: $s_{1,2} = -1 \pm i$ e $s_3 = -10$.

4) Dado o sistema:
$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} \end{cases}$$
, Projete um controlador seguidor de referências do tipo degrau, tal que os pólos de malha fechada do seguidor sejam: -1,0 ± 0,1i, -5 e -12.

5) Dado o sistema: $G(s) = \dfrac{3s^2 + 4s - 2}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$

a) Encontre uma representação usando a forma canônica controlável.

b) Se for possível, projete um observador de estados com pólos em: -1; -1 e -2.

c) Se for possível, projete uma realimentação de estados ($u(t) = \mathbf{Kx}(t)$) tal que os pólos de malha fechada sejam alocados em: -4; -4 e -5.

6) Dado o seguinte sistema: $G(s) = \dfrac{2s+1}{s(s+3)}$

a) Obtenha uma representação deste sistema na forma canônica controlável;

b) Projete seguidor de referência para entrada degrau, tal que todos os pólos de malha fechada se localizem em -1.

7) Um dado sistema, tem a seguinte função de transferência: $G(s) = \dfrac{3}{s^2 + 2s - 4}$. Pede-se:

a) Obtenha uma representação deste sistema na forma canônica observável;

b) Projete um controlador seguidor de referência, tal que os pólos de malha fechada sejam -2,-2 e -3.

Polinômio Característico $\leftrightarrow \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$	$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$
$\mathbf{U} = \left[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]$	
$\mathbf{K} = -[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 1]\mathbf{U}^{-1}q_c(\mathbf{A})$	
$\mathbf{L} = q_o(\mathbf{A})\mathbf{V}^{-1}[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 1]^T$	

$\dot{\zeta} = \mathbf{A_a}\zeta + \mathbf{B_a}w \Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}w$	$\mathbf{U_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_a} & \mathbf{A_aB_a} & \mathbf{A_a^2B_a} & \ldots \mathbf{A_a^{n-1}B_a} \end{bmatrix}$	$\mathbf{K_a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}\mathbf{U_a^{-1}}q_c(\mathbf{A_a})$ $\mathbf{K_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{k_1} \mid \mathbf{k_2} \end{bmatrix}$

Forma Canônica Observável	*Forma Canônica Controlável*
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0\ldots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0\ldots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 0\ldots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0\ldots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C} = [0 \quad 0\ldots \quad 0 \quad 1]$	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \ldots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C} = [\beta_n \quad \beta_{n-1} \ldots \quad \beta_2 \quad \beta_1]$

RESPOSTAS

1ª Questão

Sistema 1:
a) O sistema é **estável**.
b) O sistema é **controlável**.
c) O sistema é **observável**.

Sistema 2:
a) O sistema é **instável**.
b) O sistema é **controlável**.
c) O sistema é **observável**.

2ª Questão

a) $\mathbf{K} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 & -22 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}6667 & -7{,}3333 & -1{,}3333 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2{,}0000 \\ -8{,}3333 \\ -5{,}3333 \end{bmatrix}$

3ª Questão

a) $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 72 & 117 & -22 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0{,}15580 \\ -8{,}5645 \\ 1{,}0089 \end{bmatrix}$

4ª Questão: $\begin{cases} k_1 = 30{,}30 \\ \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} -84{,}33 & 33{,}09 & -8{,}43 \end{bmatrix} \end{cases}$

5ª Questão:

a) $\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 7; \\ \alpha_3 = 5 \end{cases} \begin{cases} \beta_1 = 3 \\ \beta_2 = 4 \\ \beta_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \end{bmatrix}; \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0{,}0954 \\ 0{,}3112 \\ -0{,}1452 \end{bmatrix}$

c) $\Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -75 & -49 & -10 \end{bmatrix}$

6ª Questão

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \ ; \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ ; \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & \vdots & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \vdots & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$

7ª Questão

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \ ; \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \ ; \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} k_1 = -4 \\ \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} -1{,}6667 & -3{,}3333 \end{bmatrix} \end{cases}$