Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Computação e Automação
DCA-0216.0 - Sistemas de Controle - Teoria **Período: 2024.1**

Aluno(a): ______________________________ **Data:** ____/____/______

2º Exercício da 3ª Unidade

1. Dado o seguinte sistema: $\begin{cases} \mathbf{x}_{K+1} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \end{cases}$

   a) Determine os pólos do sistema e diga se ele é estável, ou não;
   b) Determine a matriz de controlabilidade do sistema e diga se ele é controlável, ou não;
   c) Determine a matriz de observabilidade do sistema e diga se ele é observável, ou não;

2. Dado o sistema: $\begin{cases} \mathbf{x}_{K+1} = \begin{bmatrix} 0,0877 & 0,1786 & -0,0691 \\ -0,0595 & 0,0877 & -0,1056 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,3679 \end{bmatrix} \mathbf{x}_K + \begin{bmatrix} -0,0561 \\ -0,1438 \\ 0,9482 \end{bmatrix} u_K \\ y_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_K \end{cases}$;

   a) Projete uma realimentação de estados ($u_K = \mathbf{K}\mathbf{x}_K$) tal que os pólos de malha fechada sejam alocados em $z_{1,2} = -0,5 \pm 0,5i$ e $z_3 = 0,5$;
   b) Projete um observador de estados tal que seus pólos sejam: $z_{1,2} = 0,9 \pm 0,1i$ e $z_3 = 0,1$.

3. Dado o sistema: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$

   a) Obtenha uma representação discreta ($\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$), para $T = 1$s;
   b) Se for possível, projete uma realimentação de estados ($u(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k)$) tal que os pólos de malha fechada sejam alocados em $z_{1,2} = 0,25 \pm 0,5i$;
   c) Se for possível utilizar estados estimados para fazer a realimentação ($u(k) = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$), projete um observador de estados tal que os pólos do observador sejam $z_1 = -0,5$ e $z_2 = 0,5$.

4. Dado o seguinte sistema: $G(s) = \dfrac{3s-2}{s^2+s}$

a) Encontre uma representação usando a forma canônica controlável .

b) Obtenha uma representação (matrizes **G** e **H**) no dómio discreto para esse sistema, considerando um período de amostragem de 1s.

c) Projete um seguidor de referência, para entradas do tipo degrau, tal que os pólos do seguidor sejam: 0,5 ± 0,2*i* e -0,1.

5. Dado o seguinte sistema: $\begin{cases} \mathbf{x}_{K+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \end{cases}$, se for possível, projete um seguidor de referência, para entradas do tipo degrau, tal que os pólos do seguidor sejam: ±0,5 ± 0,5i.

Forma Canônica Observável	Forma Canônica Controlável
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0\ldots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0\ldots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 0\ldots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0\ldots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0\ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \ldots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} \ldots & \beta_2 & \beta_1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{G}(T) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}T}$; onde $e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}$	$\mathbf{H}(T) = \int_0^T \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}dt = \left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}dt\right)\mathbf{B}$	$\mathbf{W_O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$
$\hat{\mathbf{K}} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{W}_c^{-1}\mathbf{q}_c(\hat{\mathbf{G}})$	$\mathbf{W_C} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{GH} & \ldots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix}$	

$\begin{bmatrix} x_e(k+1) \\ u_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ u_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} w(k)$	$\begin{bmatrix} k_2 & k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}} & +\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}-\mathbf{I} & \mathbf{H} \\ \mathbf{CG} & \mathbf{CH} \end{bmatrix}^{-1}$

Respostas:

1ª Questão:

a) Estabilidade: **NÃO É ESTÁVEL**.

b) Controlabilidade: **É CONTROLÁVEL.**

c) Observabilidade: **É OBSERVÁVEL.**

2ª Questão:

a) $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -15{,}2647 & 22{,}1665 & 1{,}3583 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1{,}3567 \\ 0{,}8794 \\ -2{,}0546 \end{bmatrix}$

3ª Questão:

a) $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \xrightarrow{T=1} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 1{,}0 \\ 0{,}0 & 1{,}0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}0 \end{bmatrix}u(k)$

b) $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0{,}8125 & 1{,}0938 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1{,}25 \\ 0{,}75 \end{bmatrix}$

4ª Questão:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\boxed{\Rightarrow \mathbf{G}(T)\big|_{T=1} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0{,}6321 \\ 0{,}0000 & 0{,}3679 \end{bmatrix}}$ e $\boxed{\mathbf{H}(T)\big|_{T=1} = \begin{bmatrix} 0{,}3679 \\ 0{,}6321 \end{bmatrix}}$

c) $\boxed{\begin{cases} k_1 = 0{,}2523 \\ k_2 = \begin{bmatrix} -0{,}1576 & 0{,}4702 \end{bmatrix} \end{cases}}$

5ª Questão: $\boxed{\begin{cases} k_1 = -0{,}1042 \\ k_2 = \begin{bmatrix} -1{,}3698 & -0{,}7370 & -1{,}4219 \end{bmatrix} \end{cases}}$