

# Анализ графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути

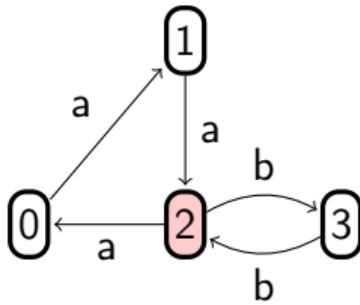
## Заготовки для докторской диссертации

Семён Григорьев

Санкт-Петербургский Государственный Университет

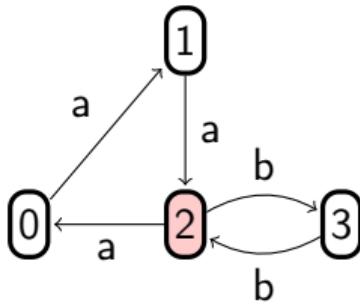
!!! !!! 2026

# Формальные языки и ограничения на пути в графе



- $G = \langle V, E, L \rangle$  — (ориентированный) граф с метками на рёбрах
- Путь  $\pi$  задаёт слово:  $\omega(2\pi_1) = \omega(2 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{a} 1) = aa$
- Ищем пути, задающие слова определённого вида
  - ▶ Например, слова вида  $a^*b$
- Множество слов — язык  $\mathcal{L}$  над алфавитом  $\Sigma$ 
  - ▶ Для удобства будем считать, что  $\Sigma \cap L \neq \emptyset$

# Формальные языки и ограничения на пути в графе

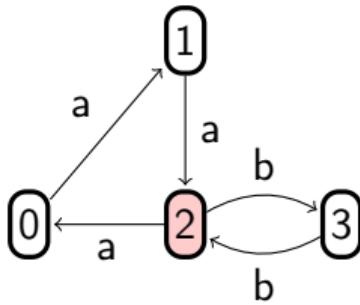


- $G = \langle V, E, L \rangle$  — (ориентированный) граф с метками на рёбрах
- Путь  $\pi$  задаёт слово:  $\omega(2\pi_1) = \omega(2 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{a} 1) = aa$
- Ищем пути, задающие слова определённого вида
  - ▶ Например, слова вида  $a^*b$
- Множество слов — язык  $\mathcal{L}$  над алфавитом  $\Sigma$ 
  - ▶ Для удобства будем считать, что  $\Sigma \cap L \neq \emptyset$

## Варианты задач Formal Language Constrained Path Quering (FLPQ)

Для данного графа  $G$ , стартовых вершин  $V_s \in V$  и финальных вершин  $V_f \in V$ , языка  $\mathcal{L}$

# Формальные языки и ограничения на пути в графе



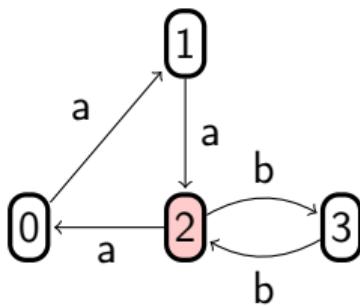
- $G = \langle V, E, L \rangle$  — (ориентированный) граф с метками на рёбрах
- Путь  $\pi$  задаёт слово:  $\omega(2\pi_1) = \omega(2 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{a} 1) = aa$
- Ищем пути, задающие слова определённого вида
  - ▶ Например, слова вида  $a^*b$
- Множество слов — язык  $\mathcal{L}$  над алфавитом  $\Sigma$ 
  - ▶ Для удобства будем считать, что  $\Sigma \cap L \neq \emptyset$

## Варианты задач Formal Language Constrained Path Quering (FLPQ)

Для данного графа  $G$ , стартовых вершин  $V_s \in V$  и финальных вершин  $V_f \in V$ , языка  $\mathcal{L}$

- Задача достижимости:  $R = \{(u, v) \mid \omega(u\pi_v) \in \mathcal{L}, u \in V_s, v \in V_f\}$

# Формальные языки и ограничения на пути в графе



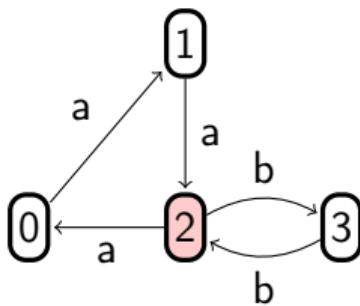
- $G = \langle V, E, L \rangle$  — (ориентированный) граф с метками на рёбрах
- Путь  $\pi$  задаёт слово:  $\omega(\pi_1) = \omega(2 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{a} 1) = aa$
- Ищем пути, задающие слова определённого вида
  - ▶ Например, слова вида  $a^*b$
- Множество слов — язык  $\mathcal{L}$  над алфавитом  $\Sigma$ 
  - ▶ Для удобства будем считать, что  $\Sigma \cap L \neq \emptyset$

## Варианты задач Formal Language Constrained Path Quering (FLPQ)

Для данного графа  $G$ , стартовых вершин  $V_s \in V$  и финальных вершин  $V_f \in V$ , языка  $\mathcal{L}$

- Задача достижимости:  $R = \{(u, v) \mid \omega(_u\pi_v) \in \mathcal{L}, u \in V_s, v \in V_f\}$
- Задача поиска всех путей:  $P = \{\pi \mid \omega(_u\pi_v) \in \mathcal{L}, u \in V_s, v \in V_f\}$

# Формальные языки и ограничения на пути в графе



- $G = \langle V, E, L \rangle$  — (ориентированный) граф с метками на рёбрах
- Путь  $\pi$  задаёт слово:  $\omega(\pi_1) = \omega(2 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{a} 1) = aa$
- Ищем пути, задающие слова определённого вида
  - ▶ Например, слова вида  $a^*b$
- Множество слов — язык  $\mathcal{L}$  над алфавитом  $\Sigma$ 
  - ▶ Для удобства будем считать, что  $\Sigma \cap L \neq \emptyset$

## Варианты задач Formal Language Constrained Path Quering (FLPQ)

Для данного графа  $G$ , стартовых вершин  $V_s \in V$  и финальных вершин  $V_f \in V$ , языка  $\mathcal{L}$

- Задача достижимости:  $R = \{(u, v) \mid \omega(u\pi_v) \in \mathcal{L}, u \in V_s, v \in V_f\}$
- Задача поиска всех путей:  $P = \{\pi \mid \omega(u\pi_v) \in \mathcal{L}, u \in V_s, v \in V_f\}$
- Задача поиска одного пути
- Задача проверки наличия достижимых пар

## Теория графов

- Классические варианты известных задач
  - ▶ Достигимость
  - ▶ Поиск путей
  - ▶ Между всем парами вершин
  - ▶ От заданных вершин
  - ▶ ...
- Способы представления графов
- Разновидности графов:
  - ▶ С циклами
  - ▶ Без циклов
  - ▶ ...

# Задача на стыке областей

## Теория графов

- Классические варианты известных задач
  - ▶ Достигимость
  - ▶ Поиск путей
  - ▶ Между всем парами вершин
  - ▶ От заданных вершин
  - ▶ ...
- Способы представления графов
- Разновидности графов:
  - ▶ С циклами
  - ▶ Без циклов
  - ▶ ...

## Теория формальных языков

- Способы задания ограничений
  - ▶ Автоматы
  - ▶ Грамматики
  - ▶ ...
- Разрешимость
  - ▶ Проверка пустоты пересечения языков
  - ▶ Замкнутость относительно пересечения с регулярными языками
  - ▶ ...
- Представление результата
  - ▶ Пересечение языков — язык
  - ▶ Способы задания языков
  - ▶ ...

# Области применения

- Регулярные языки
  - ▶ Графовые базы данных (Regular Path Queries, RPQ)
    - ★ Поддерживается (частично) в ряде существующих языков запросов (типа Cypher)

# Области применения

- Регулярные языки
  - ▶ Графовые базы данных (Regular Path Queries, RPQ)
    - ★ Поддерживается (частично) в ряде существующих языков запросов (типа Cypher)
- Контекстно-свободные языки
  - ▶ Статический анализ кода (Context-Free Language Reachability, CFL-r)
    - ★ Анализ потока данных (межпроцедурный анализ указателей), разрешение имён, унификация, ...
  - ▶ Графовые базы данных (Context-Free Path Querying, CFPQ)
    - ★ Биоинформатика, анализ происхождения данных, анализ иерархий (в RDF), ...

# Области применения

- Регулярные языки
  - ▶ Графовые базы данных (Regular Path Queries, RPQ)
    - ★ Поддерживается (частично) в ряде существующих языков запросов (типа Cypher)
- Контекстно-свободные языки
  - ▶ Статический анализ кода (Context-Free Language Reachability, CFL-r)
    - ★ Анализ потока данных (межпроцедурный анализ указателей), разрешение имён, унификация, ...
  - ▶ Графовые базы данных (Context-Free Path Querying, CFPQ)
    - ★ Биоинформатика, анализ происхождения данных, анализ иерархий (в RDF), ...
- За пределами контекстно-свободных языков
  - ▶ Многокомпонентные контекстно-свободные (MCFL): статический анализ кода
  - ▶ Линейные конъюнктивные (Linear Conjunctive): статический анализ кода

# Запросы с ограничениями в виде регулярных языков

- Хорошо изучены
  - ▶ Впервые введены в работе A. O. Mendelzon and P. T. Wood. 1989. Finding regular simple paths in graph databases.
  - ▶ Большое количество прикладных и теоретических работ

# Запросы с ограничениями в виде регулярных языков

- Хорошо изучены
  - ▶ Впервые введены в работе A. O. Mendelzon and P. T. Wood. 1989. Finding regular simple paths in graph databases.
  - ▶ Большое количество прикладных и теоретических работ
- Часть стандартов ISO языков запросов
  - ▶ ISO/IEC 9075-16:2023 Information technology — Database languages — SQL Part 16: **Property Graph Queries (SQL/PGQ)**
  - ▶ ISO/IEC 39075:2024 Information technology — Database languages — **GQL**

# Запросы с ограничениями в виде регулярных языков

- Хорошо изучены
  - ▶ Впервые введены в работе A. O. Mendelzon and P. T. Wood. 1989. Finding regular simple paths in graph databases.
  - ▶ Большое количество прикладных и теоретических работ
- Часть стандартов ISO языков запросов
  - ▶ ISO/IEC 9075-16:2023 Information technology — Database languages — SQL Part 16: **Property Graph Queries (SQL/PGQ)**
  - ▶ ISO/IEC 39075:2024 Information technology — Database languages — **GQL**
- ! Проблемы с производительностью
  - ▶ Angela Bonifati, George Fletcher, Hannes Voigt, and Nikolay Yakovets. 2018. Querying Graphs
  - ▶ Diego Arroyuelo, et al. 2023. Optimizing RPQs over a compact graph representation

# Запросы с ограничениями в виде контексто-свободных языков

- Активно изучаются
  - ▶ Родоначальники: Томас Репс и Михалис Яннакакис
    - ★ Thomas Reps. 1997. Program analysis via graph reachability
    - ★ Mihalis Yannakakis. 1990. Graph-theoretic methods in database theory
  - ▶ Большое количество прикладных и теоретических работ
  - ▶ Известные открытые вопросы
    - ★ Существование истинно субкубического алгоритма для задачи достижимости

# Запросы с ограничениями в виде контексто-свободных языков

- Активно изучаются
  - ▶ Родоначальники: Томас Репс и Михалис Яннакакис
    - ★ Thomas Reps. 1997. Program analysis via graph reachability
    - ★ Mihalis Yannakakis. 1990. Graph-theoretic methods in database theory
  - ▶ Большое количество прикладных и теоретических работ
  - ▶ Известные открытые вопросы
    - ★ Существование истинно субкубического алгоритма для задачи достижимости
- Существуют инструменты (академические прототипы) анализа кода на основе CFL-р
  - ▶ POCR, PEARL, GASPAK, GIGASCALE, ...

# Запросы с ограничениями в виде контекстно-свободных языков

- Активно изучаются
  - ▶ Родоначальники: Томас Репс и Михалис Яннакакис
    - ★ Thomas Reps. 1997. Program analysis via graph reachability
    - ★ Mihalis Yannakakis. 1990. Graph-theoretic methods in database theory
  - ▶ Большое количество прикладных и теоретических работ
  - ▶ Известные открытые вопросы
    - ★ Существование истинно субкубического алгоритма для задачи достижимости
- Существуют инструменты (академические прототипы) анализа кода на основе CFL-р
  - ▶ POCR, PEARL, GASPAR, GIGASCALE, ...
- Попытки интегрировать в графовые базы данных
  - ▶ Предложение о расширении Cypher
  - ▶ Arseniy Terekhov et al. 2021. Multiple-Source Context-Free Path Querying in Terms of Linear Algebra

# Запросы с ограничениями в виде контекстно-свободных языков

- Активно изучаются
    - ▶ Родоначальники: Томас Репс и Михалис Яннакакис
      - ★ Thomas Reps. 1997. Program analysis via graph reachability
      - ★ Mihalis Yannakakis. 1990. Graph-theoretic methods in database theory
    - ▶ Большое количество прикладных и теоретических работ
    - ▶ Известные открытые вопросы
      - ★ Существование истинно субкубического алгоритма для задачи достижимости
  - Существуют инструменты (академические прототипы) анализа кода на основе CFL-р
    - ▶ POCR, PEARL, GASPAR, GIGASCALE, ...
  - Попытки интегрировать в графовые базы данных
    - ▶ Предложение о расширении Cypher
    - ▶ Arseniy Terekhov et al. 2021. Multiple-Source Context-Free Path Querying in Terms of Linear Algebra
- ! Проблемы с производительностью
- ▶ Jochem Kuijpers, George Fletcher, Nikolay Yakovets, and Tobias Lindaaker. 2019. An Experimental Study of Context-Free Path Query Evaluation Methods
  - ▶ Chenghang Shi, et al. 2024. Pearl: A Multi-Derivation Approach to Efficient CFL-Reachability Solving

## Более широкие классы языков в качестве ограничений на пути

- Перспективны
  - ▶ Позволяют улучшить «точность» некоторых видов анализа кода

# Более широкие классы языков в качестве ограничений на пути

- Перспективны
  - ▶ Позволяют улучшить «точность» некоторых видов анализа кода

## ! Изучены слабо

- ▶ Qirun Zhang and Zhendong Su. 2017. Context-sensitive data-dependence analysis via linear conjunctive language reachability
- ▶ Giovanna Kobus Conrado, Adam Husted Kjelstrøm, Jaco van de Pol, and Andreas Pavlogiannis. 2025. Program Analysis via Multiple Context Free Language Reachability
- ▶ Epelbaum I.V., Azimov R.Sh., Grigorev S.V. 2023. Multiple context-free path querying by matrix multiplication

# Высокопроизводительный анализ графов

- Обобщённая разреженная линейная алгебра — один из перспективных путей к высокопроизводительному анализу графов
  - ▶ «Естественная» параллельность — возможность использовать современное аппаратное обеспечение, в том числе GPGPU
  - ▶ Выразительность — алгоритмы для достаточно широкий спектра задач выражимы в терминах линейной алгебры
    - ★ Транзитивное замыкание, поиск кратчайших путей
    - ★ Обход в ширину, построение минимального остовного дерева
    - ★ Подсчёт треугольников, ...

# Высокопроизводительный анализ графов

- Обобщённая разреженная линейная алгебра — один из перспективных путей к высокопроизводительному анализу графов
  - ▶ «Естественная» параллельность — возможность использовать современное аппаратное обеспечение, в том числе GPGPU
  - ▶ Выразительность — алгоритмы для достаточно широкий спектра задач выражимы в терминах линейной алгебры
    - ★ Транзитивное замыкание, поиск кратчайших путей
    - ★ Обход в ширину, построение минимального остовного дерева
    - ★ Подсчёт треугольников, ...
- GraphBLAS API — стандарт, декларирующий базовые примитивы линейной алгебры и операции над ними
  - ▶ Предложена качественная референсная реализация: SuiteSparse:GraphBLAS
  - ▶ Разрабатывается библиотеки прикладных алгоритмов LAGraph

# Высокопроизводительный анализ графов

- Обобщённая разреженная линейная алгебра — один из перспективных путей к высокопроизводительному анализу графов
    - ▶ «Естественная» параллельность — возможность использовать современное аппаратное обеспечение, в том числе GPGPU
    - ▶ Выразительность — алгоритмы для достаточно широкий спектра задач выражимы в терминах линейной алгебры
      - ★ Транзитивное замыкание, поиск кратчайших путей
      - ★ Обход в ширину, построение минимального остовного дерева
      - ★ Подсчёт треугольников, ...
  - GraphBLAS API — стандарт, декларирующий базовые примитивы линейной алгебры и операции над ними
    - ▶ Предложена качественная референсная реализация: SuiteSparse:GraphBLAS
    - ▶ Разрабатывается библиотеки прикладных алгоритмов LAGraph
- ! Не все алгоритмы естественным образом выражимы в терминах линейной алгебры
- ! Эффективное использование GPGPU — нетривиальная задача

# Обучение

- Существуют курсы, затрагивающие те или иные аспекты решения задач анализа графов с использованием формальных языков
  - ▶ Анализ данных, базы данных
  - ▶ Статический анализ кода

# Обучение

- Существуют курсы, затрагивающие те или иные аспекты решения задач анализа графов с использованием формальных языков
  - ▶ Анализ данных, базы данных
  - ▶ Статический анализ кода
- Курсы затрагивают отдельные аспекты
  - ▶ Фундаментальные: алгебра, теория графов, ...
  - ▶ Прикладные: анализ данных, базы данных, построение компиляторов, ...

# Обучение

- Существуют курсы, затрагивающие те или иные аспекты решения задач анализа графов с использованием формальных языков
  - ▶ Анализ данных, базы данных
  - ▶ Статический анализ кода
- Курсы затрагивают отдельные аспекты
  - ▶ Фундаментальные: алгебра, теория графов, ...
  - ▶ Прикладные: анализ данных, базы данных, построение компиляторов, ...

## ! Целостность картины

- ▶ Разные прикладные области используют общий фундамент

# Обучение

- Существуют курсы, затрагивающие те или иные аспекты решения задач анализа графов с использованием формальных языков
  - ▶ Анализ данных, базы данных
  - ▶ Статический анализ кода
- Курсы затрагивают отдельные аспекты
  - ▶ Фундаментальные: алгебра, теория графов, ...
  - ▶ Прикладные: анализ данных, базы данных, построение компиляторов, ...

## ! Целостность картины

- ▶ Разные прикладные области используют общий фундамент

## ! Преподавание фундаментальных дисциплин для инженеров-программистов

- ▶ Связь теории и практики
- ▶ Применимость в конкретных областях
  - ★ Теория формальных языков — синтаксический анализ (языков программирования)
  - ★ А что, если я не собираюсь заниматься компиляторами?

# Выводы

- Анализ графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути — активно развивающаяся область, имеющая прикладное значение

# Выводы

- Анализ графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути — активно развивающаяся область, имеющая прикладное значение
- Междисциплинарность: теория графов, теория формальных языков,  
линейная алгебра, статический анализ кода, графовые базы данных,  
параллельные вычисления

# Выводы

- Анализ графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути — активно развивающаяся область, имеющая прикладное значение
- Междисциплинарность: теория графов, теория формальных языков, линейная алгебра, статический анализ кода, графовые базы данных, параллельные вычисления
- ! Отсутствие системности в исследованиях
  - ▶ Выстраивание междисциплинарных связей
  - ▶ Переиспользование методов, инструментов, терминологии, . . .
  - ▶ Сопоставление результатов

# Выводы

- Анализ графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути — активно развивающаяся область, имеющая прикладное значение
- Междисциплинарность: теория графов, теория формальных языков, линейная алгебра, статический анализ кода, графовые базы данных, параллельные вычисления
- ! Отсутствие системности в исследованиях
  - ▶ Выстраивание междисциплинарных связей
  - ▶ Переиспользование методов, инструментов, терминологии, . . .
  - ▶ Сопоставление результатов
- ! Проблемы с прикладными алгоритмами
  - ▶ Точечные решения вместо методов решения классов задач
  - ▶ Плохая производительность
  - ▶ Слабая база для экспериментальных исследований

# Выводы

- Анализ графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути — активно развивающаяся область, имеющая прикладное значение
- Междисциплинарность: теория графов, теория формальных языков, линейная алгебра, статический анализ кода, графовые базы данных, параллельные вычисления
- ! Отсутствие системности в исследованиях
  - ▶ Выстраивание междисциплинарных связей
  - ▶ Переиспользование методов, инструментов, терминологии, . . .
  - ▶ Сопоставление результатов
- ! Проблемы с прикладными алгоритмами
  - ▶ Точечные решения вместо методов решения классов задач
  - ▶ Плохая производительность
  - ▶ Слабая база для экспериментальных исследований
- ! Отсутствие системности в подготовке специалистов
  - ▶ Выстраивание междисциплинарных связей
  - ▶ формирование целостной картины

## Цель работы

Целью данной работы является создание методологии анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути

- Нацеленную на получение практически значимых результатов
- Предоставляющую гибкий подход к решению задач
- Позволяющую формально рассуждать о свойствах объектов

# Положения, выносимые на защиту

- ① Создана методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути, нацеленная на конструирование алгоритмов FLPQ

## Положения, выносимые на защиту

- ① Создана методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути, нацеленная на конструирование алгоритмов FLPQ
- ② Разработаны методики конструирования алгоритмов решения FLPQ

# Положения, выносимые на защиту

- ① Создана методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути, нацеленная на конструирование алгоритмов FLPQ
- ② Разработаны методики конструирования алгоритмов решения FLPQ
  - ▶ Использующих операции линейной алгебры

# Положения, выносимые на защиту

- ① Создана методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути, нацеленная на конструирование алгоритмов FLPQ
- ② Разработаны методики конструирования алгоритмов решения FLPQ
  - ▶ Использующих операции линейной алгебры
  - ▶ Основанных на классических алгоритмах синтаксического анализа

# Положения, выносимые на защиту

- ① Создана методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути, нацеленная на конструирование алгоритмов FLPQ
- ② Разработаны методики конструирования алгоритмов решения FLPQ
  - ▶ Использующих операции линейной алгебры
  - ▶ Основанных на классических алгоритмах синтаксического анализа
- ③ Разработана методика проведения экспериментальных исследований решений FLPQ

# Положения, выносимые на защиту

- ① Создана методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути, нацеленная на конструирование алгоритмов FLPQ
- ② Разработаны методики конструирования алгоритмов решения FLPQ
  - ▶ Использующих операции линейной алгебры
  - ▶ Основанных на классических алгоритмах синтаксического анализа
- ③ Разработана методика проведения экспериментальных исследований решений FLPQ
- ④ Спроектированы и реализованы библиотеки разреженной линейной алгебры, использующие графические ускорители для решения FLPQ

# Положения, выносимые на защиту

- ① Создана методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути, нацеленная на конструирование алгоритмов FLPQ
- ② Разработаны методики конструирования алгоритмов решения FLPQ
  - ▶ Использующих операции линейной алгебры
  - ▶ Основанных на классических алгоритмах синтаксического анализа
- ③ Разработана методика проведения экспериментальных исследований решений FLPQ
- ④ Спроектированы и реализованы библиотеки разреженной линейной алгебры, использующие графические ускорители для решения FLPQ
- ⑤ Создан набор данных для экспериментального исследования решений FLPQ

# Положения, выносимые на защиту

- ① Создана методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути, нацеленная на конструирование алгоритмов FLPQ
- ② Разработаны методики конструирования алгоритмов решения FLPQ
  - ▶ Использующих операции линейной алгебры
  - ▶ Основанных на классических алгоритмах синтаксического анализа
- ③ Разработана методика проведения экспериментальных исследований решений FLPQ
- ④ Спроектированы и реализованы библиотеки разреженной линейной алгебры, использующие графические ускорители для решения FLPQ
- ⑤ Создан набор данных для экспериментального исследования решений FLPQ
- ⑥ Разработаны, реализованы, интегрированы в пользовательские библиотеки и инструменты алгоритмы решения различных вариантов FLPQ

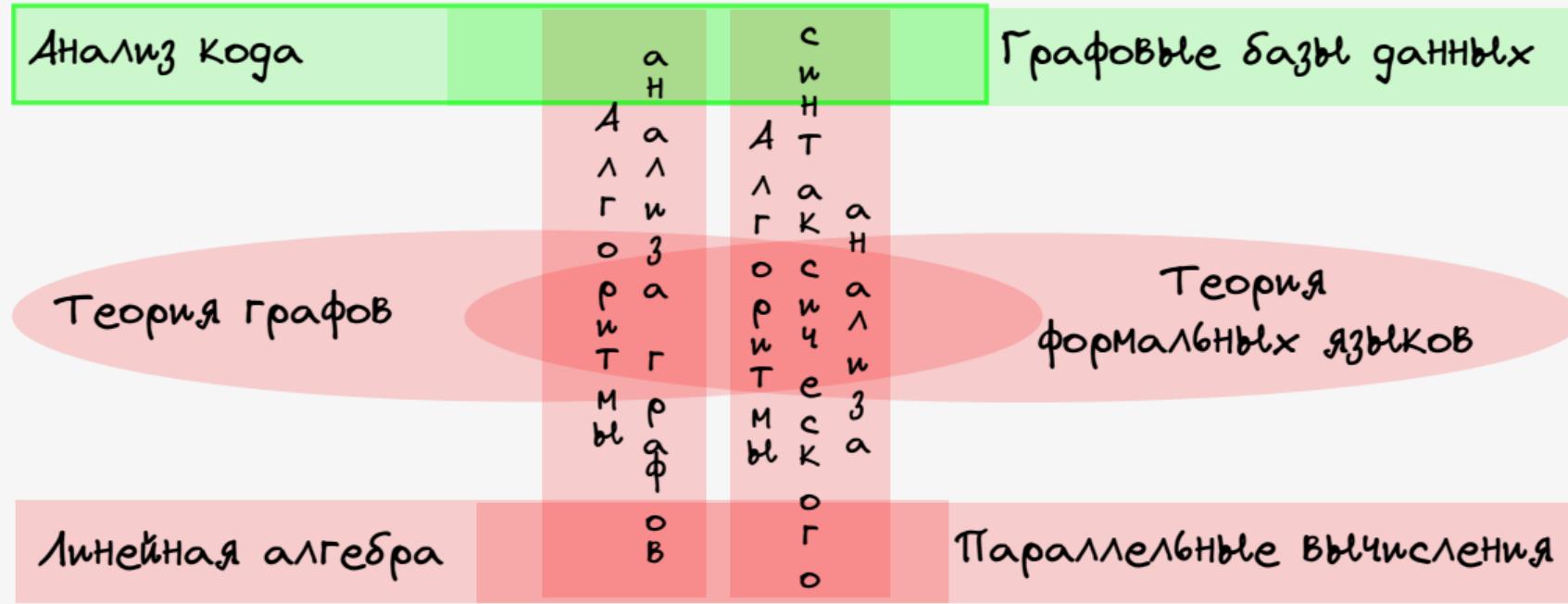
# Положения, выносимые на защиту

- ① Создана методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути, нацеленная на конструирование алгоритмов FLPQ
- ② Разработаны методики конструирования алгоритмов решения FLPQ
  - ▶ Использующих операции линейной алгебры
  - ▶ Основанных на классических алгоритмах синтаксического анализа
- ③ Разработана методика проведения экспериментальных исследований решений FLPQ
- ④ Спроектированы и реализованы библиотеки разреженной линейной алгебры, использующие графические ускорители для решения FLPQ
- ⑤ Создан набор данных для экспериментального исследования решений FLPQ
- ⑥ Разработаны, реализованы, интегрированы в пользовательские библиотеки и инструменты алгоритмы решения различных вариантов FLPQ
- ⑦ Разработаны методические рекомендации по выстраиванию междисциплинарных связей, улучшающих понимание областей применения и алгоритмов решения FLPQ

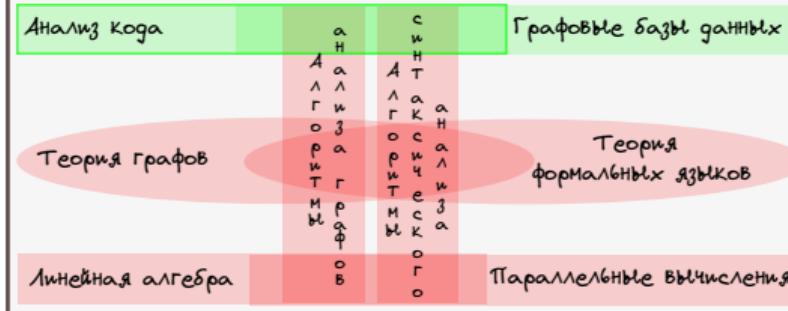
# Положения, выносимые на защиту

- ① Создана методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути, нацеленная на конструирование алгоритмов FLPQ
- ② Разработаны методики конструирования алгоритмов решения FLPQ
  - ▶ Использующих операции линейной алгебры
  - ▶ Основанных на классических алгоритмах синтаксического анализа
- ③ Разработана методика проведения экспериментальных исследований решений FLPQ
- ④ Спроектированы и реализованы библиотеки разреженной линейной алгебры, использующие графические ускорители для решения FLPQ
- ⑤ Создан набор данных для экспериментального исследования решений FLPQ
- ⑥ Разработаны, реализованы, интегрированы в пользовательские библиотеки и инструменты алгоритмы решения различных вариантов FLPQ
- ⑦ Разработаны методические рекомендации по выстраиванию междисциплинарных связей, улучшающих понимание областей применения и алгоритмов решения FLPQ
- ⑧ Разработан курс для программных инженеров, выстраивающий изучение основ теории формальных языков вокруг различных вариантов FLPQ

# Методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути

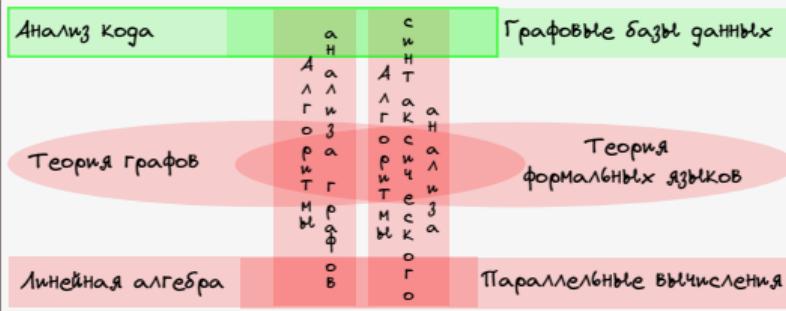


## Методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути



- Объект — задачи анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути
- Предмет — алгоритмы решения задач анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути

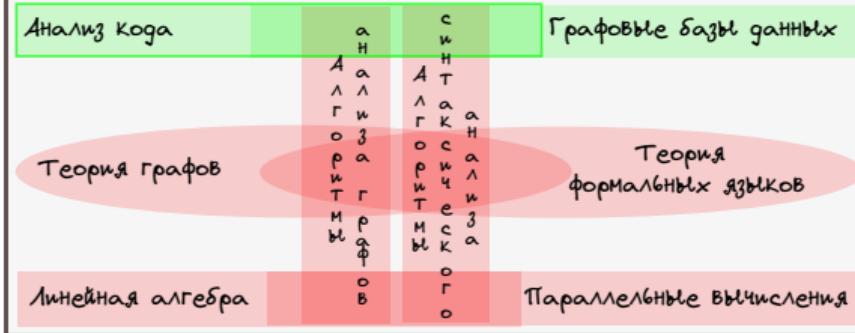
## Методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути



- Объект — задачи анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути
- Предмет — алгоритмы решения задач анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути

- Теоретическая обоснованность: границы применимости, оценки сложности, доказательство корректности
- Универсальность: возможность построить решатели в стиле SAT или SMT
- Настраиваемость: класс языков  $\longleftrightarrow$  структура графа  $\longleftrightarrow$  библиотеки
- Эволюционность: использование новых результатов из конкретных областей
- Основные фазы (цикл)
  - ▶ Формулировка задачи, моделирование предметной области
  - ▶ Дизайн: построение алгоритма, теоретический анализ
  - ▶ Разработка: реализация алгоритма, оптимизации
  - ▶ Экспериментальное исследование: оценка показателей, сравнительный анализ

## Методология анализа графов с использованием формальных языков в качестве ограничений на пути



Методология анализа графов с использованием формальных языков  
в качестве ограничителей на пути

Методика преподавания

Методика создания алгоритмов

Методика проведения экспериментального исследования

Методология анализа графов с использованием формальных языков  
в качестве ограничителей на пути

Методика преподавания

Методика создания алгоритмов

Методика проведения экспериментального исследования

Методология анализа графов с использованием формальных языков  
в качестве ограничителей на пути

Методика преподавания

Методика создания алгоритмов

Методика проведения экспериментального исследования

# Метод конструирования алгоритмов FLPQ, основанных на линейной алгебре

1 !!!

# Алгоритмы FLPQ, основанные на линейной алгебре

- Новые алгоритмы анализа графов с использованием следующих классов языков
  - ▶ Регулярные языки (RPQ)
  - ▶ Контекстно-свободные языки (CFPQ)
  - ▶ Булевы и конъюнктивные языки
  - ▶ Многокомпонентные контекстно-свободные языки

# Алгоритмы FLPQ, основанные на линейной алгебре

- Новые алгоритмы анализа графов с использованием следующих классов языков
  - ▶ Регулярные языки (RPQ)
  - ▶ Контекстно-свободные языки (CFPQ)
  - ▶ Булевы и конъюнктивные языки
  - ▶ Многокомпонентные контекстно-свободные языки
- Решаются различные варианты задач FLPQ
  - ▶ Достигимость
  - ▶ Поиск путей
  - ▶ Между всеми парами вершин
  - ▶ От заданного множества вершин

# Алгоритмы FLPQ, основанные на линейной алгебре

- Новые алгоритмы анализа графов с использованием следующих классов языков
  - ▶ Регулярные языки (RPQ)
  - ▶ Контекстно-свободные языки (CFPQ)
  - ▶ Булевы и конъюнктивные языки
  - ▶ Многокомпонентные контекстно-свободные языки
- Решаются различные варианты задач FLPQ
  - ▶ Достигимость
  - ▶ Поиск путей
  - ▶ Между всеми парами вершин
  - ▶ От заданного множества вершин
- Используются разнообразные операции линейной алгебры
  - ▶ Поэлементные операции над матрицами и векторами
  - ▶ Умножение матриц и матрицы на вектор в различных полукольцах
  - ▶ Произведение Кронекера

# Алгоритмы FLPQ, основанные на линейной алгебре

- Новые алгоритмы анализа графов с использованием следующих классов языков
  - ▶ Регулярные языки (RPQ)
  - ▶ Контекстно-свободные языки (CFPQ)
  - ▶ Булевы и конъюнктивные языки
  - ▶ Многокомпонентные контекстно-свободные языки
- Решаются различные варианты задач FLPQ
  - ▶ Достигимость
  - ▶ Поиск путей
  - ▶ Между всеми парами вершин
  - ▶ От заданного множества вершин
- Используются разнообразные операции линейной алгебры
  - ▶ Поэлементные операции над матрицами и векторами
  - ▶ Умножение матриц и матрицы на вектор в различных полукольцах
  - ▶ Произведение Кронекера
- Сформулированы и доказаны теоремы о корректности полученных алгоритмов
- Получены оценки сложности для предложенных алгоритмов

# Метод конструирования алгоритмов FLPQ, основанных на классических алгоритмах синтаксического анализа

- ① Обобщённый синтаксический анализ
- ② Понятие shift-shift конфликта

# Алгоритмы CFPQ, основанные на классических алгоритмах синтаксического анализа

- Новые алгоритмы анализа графов с использованием контекстно-свободных языков

# Алгоритмы CFPQ, основанные на классических алгоритмах синтаксического анализа

- Новые алгоритмы анализа графов с использованием контекстно-свободных языков
- Используются различные методы и алгоритмы синтаксического анализа
  - ▶ Генеративный на основе обобщённого LR (Generalized LR, GLR)
  - ▶ Генеративный на основе обобщённого LL (Generalized LL, GLL)
  - ▶ Комбинаторы парсеров (Parser combinators)
  - ▶ Комбинаторы грамматик (Grammar combinators)

# Алгоритмы CFPQ, основанные на классических алгоритмах синтаксического анализа

- Новые алгоритмы анализа графов с использованием контекстно-свободных языков
- Используются различные методы и алгоритмы синтаксического анализа
  - ▶ Генеративный на основе обобщённого LR (Generalized LR, GLR)
  - ▶ Генеративный на основе обобщённого LL (Generalized LL, GLL)
  - ▶ Комбинаторы парсеров (Parser combinator)
  - ▶ Комбинаторы грамматик (Grammar combinator)
- Решаются различные варианты задач FLPQ
  - ▶ Достигимость
  - ▶ Поиск путей
  - ▶ Между всеми парами вершин
  - ▶ От заданного множества вершин

# Алгоритмы CFPQ, основанные на классических алгоритмах синтаксического анализа

- Новые алгоритмы анализа графов с использованием контекстно-свободных языков
- Используются различные методы и алгоритмы синтаксического анализа
  - ▶ Генеративный на основе обобщённого LR (Generalized LR, GLR)
  - ▶ Генеративный на основе обобщённого LL (Generalized LL, GLL)
  - ▶ Комбинаторы парсеров (Parser combinator)
  - ▶ Комбинаторы грамматик (Grammar combinator)
- Решаются различные варианты задач FLPQ
  - ▶ Достигимость
  - ▶ Поиск путей
  - ▶ Между всеми парами вершин
  - ▶ От заданного множества вершин
- Сформулированы и доказаны теоремы о корректности полученных алгоритмов
- Получены оценки сложности для предложенных алгоритмов

## ① Набор данных

# Инженерные решения на основе разработанных алгоритмов

- Разработаны универсальные решатели
  - ▶ UCFS и CFPQ\_GLL: контекстно-свободные языки, на основе GLL
  - ▶ CFPQ\_PyAlgo: контекстно-свободные языки, на основе линейной алгебры

---

<sup>1</sup>Коллекция алгоритмов анализа графов на основе линейной алгебры

# Инженерные решения на основе разработанных алгоритмов

- Разработаны универсальные решатели
  - ▶ UCFS и CFPQ\_GLL: контекстно-свободные языки, на основе GLL
  - ▶ CFPQ\_PyAlgo: контекстно-свободные языки, на основе линейной алгебры
- Интеграция с инструментами статического анализа кода
  - ⚙️ C SVF — инструмент для анализа LLVM IR
  - ⚙️ C Qilin — инструмент для анализа Java

<sup>1</sup>Коллекция алгоритмов анализа графов на основе линейной алгебры

# Инженерные решения на основе разработанных алгоритмов

- Разработаны универсальные решатели
  - ▶ UCFS и CFPQ\_GLL: контекстно-свободные языки, на основе GLL
  - ▶ CFPQ\_PyAlgo: контекстно-свободные языки, на основе линейной алгебры
- Интеграция с инструментами статического анализа кода
  - ⚙️ C SVF — инструмент для анализа LLVM IR
  - ⚙️ C Qilin — инструмент для анализа Java
- Интеграция в графовые базы данных
  - ▶ Первая полноценная поддержка запросов с ограничениями в виде КС языков
    - ★ От языка запросов (Cypher) до алгоритма выполнения в инфраструктуре БД (RedisGraph)
  - ▶ Самый высокопроизводительный алгоритм запросов с КС ограничениями для Neo4j

<sup>1</sup>Коллекция алгоритмов анализа графов на основе линейной алгебры

# Инженерные решения на основе разработанных алгоритмов

- Разработаны универсальные решатели
  - ▶ UCFS и CFPQ\_GLL: контекстно-свободные языки, на основе GLL
  - ▶ CFPQ\_PyAlgo: контекстно-свободные языки, на основе линейной алгебры
- Интеграция с инструментами статического анализа кода
  - ⚙️ C SVF — инструмент для анализа LLVM IR
  - ⚙️ C Qilin — инструмент для анализа Java
- Интеграция в графовые базы данных
  - ▶ Первая полноценная поддержка запросов с ограничениями в виде КС языков
    - ★ От языка запросов (Cypher) до алгоритма выполнения в инфраструктуре БД (RedisGraph)
  - ▶ Самый высокопроизводительный алгоритм запросов с КС ограничениями для Neo4j
- Часть алгоритмов интегрирована в библиотеку LAGraph<sup>1</sup>
  - ▶ Для регулярных и контекстно-свободных языков

<sup>1</sup>Коллекция алгоритмов анализа графов на основе линейной алгебры

# Инженерные решения на основе разработанных алгоритмов

- Разработаны универсальные решатели
  - ▶ UCFS и CFPQ\_GLL: контекстно-свободные языки, на основе GLL
  - ▶ CFPQ\_PyAlgo: контекстно-свободные языки, на основе линейной алгебры
- Интеграция с инструментами статического анализа кода
  - ⚙️ C SVF — инструмент для анализа LLVM IR
  - ⚙️ C Qilin — инструмент для анализа Java
- Интеграция в графовые базы данных
  - ▶ Первая полноценная поддержка запросов с ограничениями в виде КС языков
    - ★ От языка запросов (Cypher) до алгоритма выполнения в инфраструктуре БД (RedisGraph)
  - ▶ Самый высокопроизводительный алгоритм запросов с КС ограничениями для Neo4j
- Часть алгоритмов интегрирована в библиотеку LAGraph<sup>1</sup>
  - ▶ Для регулярных и контекстно-свободных языков
- Отдельные реализации
  - ▶ Многокомпонентные контекстно-свободные языки в качестве ограничений
  - ▶ Конъюнктивные и булевы языки в качестве ограничений

<sup>1</sup>Коллекция алгоритмов анализа графов на основе линейной алгебры

# Библиотеки разреженной линейной алгебры

- Спроектированы и реализованы библиотеки разреженной линейной алгебры, использующие возможности GPGPU
  - ▶ Специализированные для булевой алгебры: CuBool (Nvidia Cuda), Spbla (OpenCL)
  - ▶ Обобщённые: Spla (OpenCL), Brahma.FSharp + GraphBLAS# (F# + OpenCL)

# Библиотеки разреженной линейной алгебры

- Спроектированы и реализованы библиотеки разреженной линейной алгебры, использующие возможности GPGPU
  - ▶ Специализированные для булевой алгебры: CuBool (Nvidia Cuda), Spbla (OpenCL)
  - ▶ Обобщённые: Spla (OpenCL), Brahma.FSharp + GraphBLAS# (F# + OpenCL)
- Показана применимость разработанных библиотек для решения задач анализа графов
  - ▶ В том числе, некоторых задач FLPQ

# Библиотеки разреженной линейной алгебры

- Спроектированы и реализованы библиотеки разреженной линейной алгебры, использующие возможности GPGPU
  - ▶ Специализированные для булевой алгебры: CuBool (Nvidia Cuda), Spbla (OpenCL)
  - ▶ Обобщённые: Spla (OpenCL), Brahma.FSharp + GraphBLAS# (F# + OpenCL)
- Показана применимость разработанных библиотек для решения задач анализа графов
  - ▶ В том числе, некоторых задач FLPQ
- Сформулированы рекомендации и ограничения
  - ▶ Выделение булевых операций для улучшения производительности
  - ▶ Баланс между трансфером данных и вычислениями (в контексте FLPQ)
  - ▶ Востребованность операций и их модификаций: Kronecker с маской и фильтрами
  - ▶ Использование возможностей функциональных языков программирования (полукольца, Option для матриц смежности)

# Задачи FLPQ в обучении

- ① Междисциплинарность
- ② Прикладное значение
- ③ Алгоритмы
- ④ Теория, которая важна на практике
- ⑤ Курсы, успехи студентов

# Ограничения

- Прикладная направленность: основной фокус на получении алгоритмов, имеющих практическую ценность
  - ▶ Возможно ли улучшить оценки сложности для задачи или класса задач?

# Ограничения

- Прикладная направленность: основной фокус на получении алгоритмов, имеющих практическую ценность
  - ▶ Возможно ли улучшить оценки сложности для задачи или класса задач?
- Не обсуждаются частные/крайние случаи
  - ▶ Что делать, если известно, что граф — дерево?
  - ▶ Можно ли улучшить решение, если известно, что язык принадлежит специальному узкому классу?

# Ограничения

- Прикладная направленность: основной фокус на получении алгоритмов, имеющих практическую ценность
  - ▶ Возможно ли улучшить оценки сложности для задачи или класса задач?
- Не обсуждаются частные/крайние случаи
  - ▶ Что делать, если известно, что граф — дерево?
  - ▶ Можно ли улучшить решение, если известно, что язык принадлежит специальному узкому классу?
- Не обсуждаются некоторые особенности прикладных областей
  - ▶ Реализуем ли мы статический анализ для IDE или же для компилятора
  - ▶ Разрабатываем мы алгоритм для графовой базы данных с OLAP нагрузкой или же с OLTP

# Ограничения

- Прикладная направленность: основной фокус на получении алгоритмов, имеющих практическую ценность
  - ▶ Возможно ли улучшить оценки сложности для задачи или класса задач?
- Не обсуждаются частные/крайние случаи
  - ▶ Что делать, если известно, что граф — дерево?
  - ▶ Можно ли улучшить решение, если известно, что язык принадлежит специальному узкому классу?
- Не обсуждаются некоторые особенности прикладных областей
  - ▶ Реализуем ли мы статический анализ для IDE или же для компилятора
  - ▶ Разрабатываем мы алгоритм для графовой базы данных с OLAP нагрузкой или же с OLTP
- Не обсуждается удобство для прикладного пользователя
  - ▶ Как естественным образом встраивать рассматриваемые ограничения в язык запросов к графикам?
  - ▶ Возможно ли создание унифицированного решателя задач FLPQ?
    - ★ По аналогии с SAT или SMT

# Результаты

1 !!!

## Соответствие паспорту специальности 2.3.5

- Пункту 1: модели, методы и алгоритмы проектирования, анализа, трансформации, верификации и тестирования программ и программных систем
- Пункту 4: интеллектуальные системы машинного обучения, управления базами данных и знаний, инструментальные средства разработки цифровых продуктов
- Пункту 8: модели и методы создания программ и программных систем для параллельной и распределенной обработки данных, языки и инструментальные средства параллельного программирования
- Пункту 10: оценка качества, стандартизация и сопровождение программных систем

## Основные публикации

- ① Epelbaum I.V., Azimov R.Sh., Grigorev S.V. Multiple Context-Free Path Querying by Matrix Multiplication // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023.
- ② Egor Orachev, Maria Karpenko, Pavel Alimov, Semyon Grigorev // SPbLA: The Library of GPGPU-powered Sparse Boolean Linear Algebra Operations. Journal of Open Source Software, 2022
- ③ Shemetova, E.N., Grigorev, S.V. // Path Querying on Acyclic Graphs Using Boolean Grammars. Program Comput Soft, 2021
- ④ Azimov, R., Grigorev, S. // Path Querying with Conjunctive Grammars by Matrix Multiplication. Program Comput Soft, 2019
- ⑤ Shemetova, E., Okhotin, A., Grigorev, S. // Rational Index of Languages Defined by Grammars with Bounded Dimension of Parse Trees. Theory Comput Syst, 2025

## Основные публикации

- ⑥ Азимов Р. Ш., Григорьев С. В. Алгоритм поиска всех путей в графе с заданными контекстно-свободными ограничениями с использованием матриц с множествами промежуточных вершин // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики, 2021
- ⑦ С. В. Григорьев и др., Инstrumentальная поддержка встроенных языков в интегрированных средах разработки // Модел. и анализ информ. систем, 2014

⑧ 

⑨ 

⑩ 

⑪ 

# Конференции, семинары, гранты

- Конференции (более 10)
  - ▶ Анализ данных и базы данных: EDBT-2021, ADBIS-2020, DAMDID-2025
  - ▶ Анализ графов: GRADES-NDA-2018/2019/2020/2021, Grapl-2021, LSGDA-2025
  - ▶ Статический анализ кода: SOAP-2025, SIGPLAN International Symposium on Scala 2018
  - ▶ Иное: SECR-2017, PSI-2015, PaCT-2025, SYRCoSE-2025

# Конференции, семинары, гранты

- Конференции (более 10)
  - ▶ Анализ данных и базы данных: EDBT-2021, ADBIS-2020, DAMDID-2025
  - ▶ Анализ графов: GRADES-NDA-2018/2019/2020/2021, Grapl-2021, LSGDA-2025
  - ▶ Статический анализ кода: SOAP-2025, SIGPLAN International Symposium on Scala 2018
  - ▶ Иное: SECR-2017, PSI-2015, PaCT-2025, SYRCoSE-2025
- Семинары
  - ▶ Семинар кафедры Системного программирования
  - ▶ Data.Meetup: графовые решения. Финтех и телеком

# Конференции, семинары, гранты

- Конференции (более 10)
  - ▶ Анализ данных и базы данных: EDBT-2021, ADBIS-2020, DAMDID-2025
  - ▶ Анализ графов: GRADES-NDA-2018/2019/2020/2021, Grapl-2021, LSGDA-2025
  - ▶ Статический анализ кода: SOAP-2025, SIGPLAN International Symposium on Scala 2018
  - ▶ Иное: SECR-2017, PSI-2015, PaCT-2025, SYRCoSE-2025
- Семинары
  - ▶ Семинар кафедры Системного программирования
  - ▶ Data.Meetup: графовые решения. Финтех и телеком
- Гранты
  - ▶ Грант РНФ 18-11-00100 «Логические и алгебраические методы в теории формальных языков»
  - ▶ Грант РФФИ 19-37-90101 «Поиск путей с ограничениями в терминах формальных языков»
  - ▶ Грант СПбГУ 116636233 «Методы искусственного интеллекта в задачах механики сплошных сред»