

Линейная алгебра как основа для языка запросов к графам

Семён Григорьев

Санкт-Петербургский Государственный Университет

09 декабря 2025

- Доцент кафедры системного программирования Санкт-Петербургского Государственного Университета
- Руководитель исследовательской группы
- Области интересов
 - ▶ **Высокопроизводительная линейная алгебра** для анализа графов
 - ★ **Обобщённая:** матрицы и вектора параметризованы типом элемента, операции над ними могут быть заданы пользователем
 - ★ **Разреженная:** специализированные структуры для хранения матриц и векторов, специализированные алгоритмы для их обработки
 - ★ В том числе, с использованием **графических ускорителей**
 - ▶ **Высокопроизводительный анализ графов**



- Email: s.v.grigoriev@mail.spbu.ru
- GitHub: [gsvgit](#)
- Google Scholar: [Semyon Grigorev](#)
- DBLP: [Semyon V. Grigorev](#)

GraphBLAS⁵

- API для создания алгоритмов анализа графов на основе линейной алгебры
 - Различные операции над матрицами и векторами (разреженными)
 - Параметризация алгебраическими структурами: полукольцами, моноидами и т.д.
- Позволяет выражать различные алгоритмы
 - Обход в ширину, поиск кратчайших путей, достижимость, ...
 - Подсчёт треугольников, PageRank, остовные деревья, кластеризация, ...
 - Навигационные запросы: **RPQ**, **CFPQ**, ...
- Подробнее
 - The GraphBLAS C API Specification¹
 - GraphBLAS Pointers²
 - **SuiteSparse:GraphBLAS**³ — эталон на чистом C
 - **LAGraph**⁴ — коллекция прикладных алгоритмов анализа графов

¹https://graphblas.org/docs/GraphBLAS_API_C_v2.1.0.pdf

²<https://graphblas.org/GraphBLAS-Pointers/>

³<https://github.com/DrTimothyAldenDavis/GraphBLAS>

⁴<https://github.com/GraphBLAS/LAGraph>

⁵<https://graphblas.org/>

$$|S_A| = n, |S_B| = k, |S_C| = m$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}} : [0 \dots (n-1)] \rightarrow S_A$$

, биекция

$$R_1 \subseteq S_A \times S_B$$

$$R_2 \subseteq S_B \times S_C$$

$$R_3 = \{(x, z) \mid (x, y) \in R_1, (y, z) \in R_2\}$$

$$M_{n \times k}^{R_1} : M[i, j] = 1 \iff (\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(i), \mathcal{N}_{\mathcal{B}}(j)) \in R_1; \text{ иначе } M[i, j] = 0$$

$$M_{k \times m}(R_2) : M[i, j] = 1 \iff ; \text{ иначе } M[i, j] = 0$$

$$M_{n \times m}(R_3) = M(R_1) \times M(R_2)$$

$$C = A \times B$$

$$C[i,j] = \sum_{k=0}^{n-1} A[i,k] * B[k,j]$$

$A : \text{Matrix}\langle T_1 \rangle$

$$B : \text{Matrix}\langle T_2 \rangle$$

$$C : \text{Matrix}\langle T_3 \rangle$$

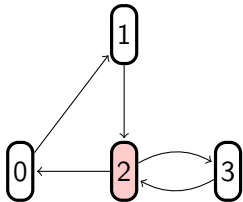
$$\otimes : T_1 \times T_2 \rightarrow T_3$$

$$\oplus : T_3 \times T_3 \rightarrow T_3$$

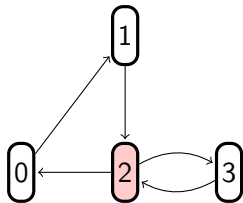
$$\mathbb{O} : T_3$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ z_0 & \dots & z_{j-1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ b_{0j} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Пример: обход в ширину



Пример: обход в ширину



Текущий фронт

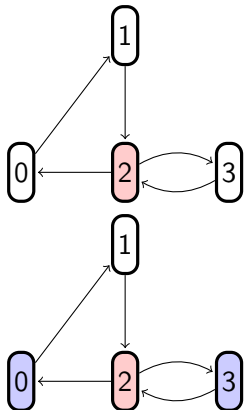
Матрица смежности

Новый фронт

Полукольцо

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример: обход в ширину



Текущий фронт

Матрица смежности

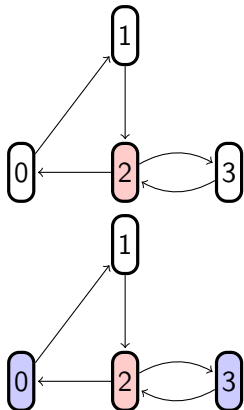
Новый фронт

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Полукольцо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример: обход в ширину



Текущий фронт

$$(0 \ 0 \ 1 \ 0)$$

Полукольцо

Матрица смежности

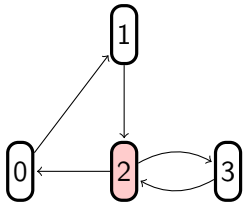
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Новый фронт

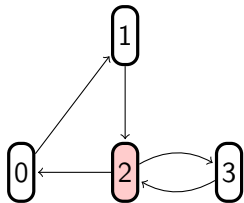
$$(1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

$$(1 \ 0 \ 0 \ 1) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 1 \ 1 \ 0)$$

Обход в ширину с построением дерева обхода



Обход в ширину с построением дерева обхода



Текущий фронт

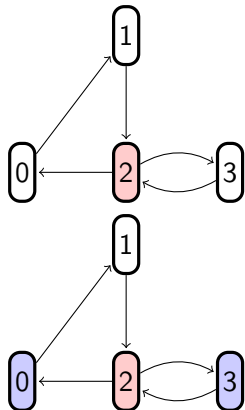
Матрица смежности

Новый фронт

Полукольцо

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обход в ширину с построением дерева обхода



Текущий фронт

Матрица смежности

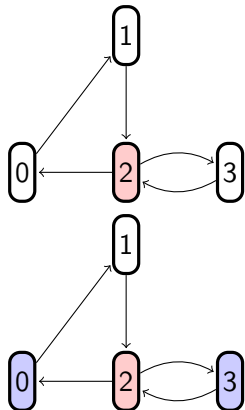
Новый фронт

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Полукольцо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Обход в ширину с построением дерева обхода



Текущий фронт

Матрица смежности

Новый фронт

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Полукольцо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример⁶

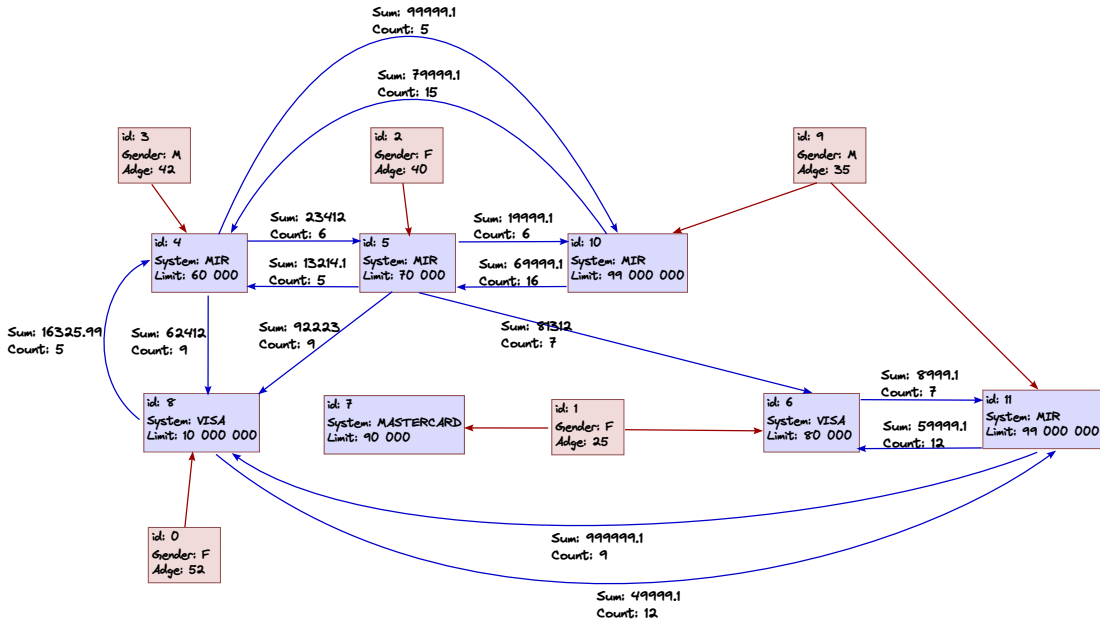
- Граф с двумя типами вершин: пользователи и карты
 - ▶ «Пользователь»: пол, возраст
 - ▶ «Карта»: тип (МИП, VISA, MASTERCARD), лимит средств
- Два типа ориентированных рёбер
 - ▶ «Перевод»: соединяет две карты (откуда и куда перевод)
 - ★ Метка: общая сумма и «количество транзакций»
 - ▶ «Владеет»: соединяет пользователя и карту (от владельца карты к карте)
 - ★ Не имеет меток

⁶Код и описание: <https://github.com/SparseLinearAlgebra/PageRankBenchmark>

Пример⁶

- Граф с двумя типами вершин: пользователи и карты
 - ▶ «Пользователь»: пол, возраст
 - ▶ «Карта»: тип (МИР, VISA, MASTERCARD), лимит средств
 - Два типа ориентированных рёбер
 - ▶ «Перевод»: соединяет две карты (откуда и куда перевод)
 - ★ Метка: общая сумма и «количество транзакций»
 - ▶ «Владеет»: соединяет пользователя и карту (от владельца карты к карте)
 - ★ Не имеет меток
- 1 Выбрать хотим все карты системы «МИР», которыми владеют люди старше заданного возраста
 - 2 Посчитать PageRank на подграфе, заданном переводами между отобранными картами

⁶Код и описание: <https://github.com/SparseLinearAlgebra/PageRankBenchmark>



Пример графа

$$\begin{matrix} 0. \\ 1. \\ 2. \\ 3. \\ 5. \\ 6. \\ 7. \\ 8. \\ 9. \\ 10. \\ 11. \end{matrix} \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix} i$$

- FalkorDB и Cypher
 - ▶ !!!!
 - ▶ !!!!
- Разное про SQL
 - ▶ !!!
 - ▶ !!!
 - ▶ !!!
- Matlang
 - ▶ !!!
 - ▶ !!!
 - ▶ !!!
- !!! Ещё Что-то??? !!!!