Matière : Méthodes Numériques **Année Universitaire : 2025-2026**

Spécialité : 3ING Informatique

Réalisé par : Mr MERZOUG Mohammed
Mr ETCHIALI Abdelhak

TP 03

PARTIE 1: Algorithme d'élimination de Gauss avec pivot non nul

1. Objectif : Pour résoudre un système linéaire, il faut:

- ✓ *Une triangularisation* : le but de la triangularisation est d'annuler progressivement les coefficients qui se trouvent sous la diagonale.
- ✓ *Une remontée* : résolution d'un système triangulaire supérieure.

Remarque importante: Pour résoudre le système il faut appliquer les modifications à la fois à la matrice **A** et au vecteur **b.**

Enoncé:

Ecrire en langage python les fonctions des deux algorithmes suivants :

a. Algorithme de la triangularisation:

✓ Les données d'entrée la matrice **A** et le vecteur **b**.

```
Données  A = (A[i,j])_{1≤i,j≤n} , b = (b[i])_{1≤i≤n}
Début
   pour k=1 .. n-1 faire
       pivot ← A[k, k]
       si pivot ≠ 0 alors
            pour i= k+1 .. n  faire
               q ← A[i, k]
               A[i, k] ← 0
               b[i] <-- b[i]- (q/pivot)*b[k]
              pour  j = k+1 .. m  faire
              A[i, j]  ← A[i, j] – A[k, j] q/pivot
            fin pour
            fin pour
       sinon « problème »
       fin si
   fin pour
fin
```

b. <u>Méthode de remontée:</u>

- ✓ Les données d'entrée : la matrice triangulaire supérieure (nxn) et le vecteur $b(n)$.
- ✓ La solution est le vecteur **x**.

Données : $A(A[i,j])_{1<i,j<n}$ $b=(b[i])_{1<i<n}$
Début

$\quad x[n] \longleftarrow \dfrac{\boldsymbol{b[n]}}{\boldsymbol{A[n,n]}}$

$\quad$ **pour** $i = n-1 .. 1$ **faire**

$\quad\quad sum \longleftarrow 0$

$\quad\quad$ **pour** $k = i+1 .. n$ **faire**

$\quad\quad\quad sum \longleftarrow sum + A[i,k] * x[k]$

$\quad\quad$ **fin pour**

$\quad\quad x[i] \longleftarrow \dfrac{\boldsymbol{b[i]- sum}}{\boldsymbol{A[i,i]}}$

$\quad$ **fin pour**

fin

<u>Remarque</u> : il faut adapter les indices des boucles des algorithmes, car en langage python, un tableau débute par l'indice **0**.

2. <u>Description de l'algorithme de Gauss sur un exemple :</u>

Soit à résoudre le système suivant :

$$S1)\begin{cases} 10\,x_1 + 5\,x + 5\,x_3 = 25 & L1 \\ 2\,x_1 + 5\,x + 7\,x_3 + 4\,x_4 = 1 & L2 \\ 4\,x_1 + 4\,x + x_3 + 4\,x_4 = 12 & L3 \\ -2\,x_1 - 2\,x + x_3 - 3\,x_4 = 10 & L4 \end{cases} \qquad A^1=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad b^1\begin{pmatrix} 25 \\ 1 \\ 12 \\ -10 \end{pmatrix}$$

On va d'abord procéder à la triangularisation du système, cette partie contient (n-1) étapes

<u>1ère Etape</u> : k=1 (1ère itération)

a. On ne touche pas à la ligne du pivot (L1), le pivot (a_{11}= 10),

b. pour les autres lignes, on remplace chaque ligne Li par : $Li - \frac{a_{i1}^1}{a_{11}^1}\,L1 \;\; (i = 1,\ 2{,}3{,}4\,)$

- ✓ Pour i=2 on remplace L2 par : $L2 - \frac{a_{21}^1}{a_{11}^1}\,L1 = L2 - \frac{2}{10}\,L1$
- ✓ Pour i=3 on remplace L3 par : $L3 - \frac{a_{31}^1}{a_{11}^1}\,L1 = L3 - \frac{4}{10}\,L1$
- ✓ Pour i=4 on remplace L4 par : $L4 - \frac{a_{41}^1}{a_{11}^1}\,L1 = L4 - \frac{-2}{10}\,L1$

On obtient après calcul :

$$S2)\begin{cases} 10\,x_1 + 5\,x + 5\,x_3 = 25 & L1 \\ 0 + 4\,x + 6\,x_3 + 4\,x_4 = -4 & L2 \\ 0 + 2\,x - x_3 + 4\,x_4 = 2 & L3 \\ 0 - x + 2x_3 - 3\,x_4 = -5 & L4 \end{cases} \qquad A^2=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad b\begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

<u>2ème Etape</u> : k=2 (2ème itération)

a. On ne touche pas à la ligne (L1 et L2), la ligne du pivot (L2), pivot (a_{22}= 4),

b. on remplace chaque ligne Li par : $\mathrm{Li} - \frac{a_{i2}^2}{a_{22}^2}\,\mathrm{L2}$

- ✓ Pour i=3 on remplace L3 par $\mathrm{L3} - \frac{a_{32}^2}{a_{22}^2} L2 = \mathrm{L3} - \frac{2}{4} L2$
- ✓ Pour i=4 on remplace L4 par $\mathrm{L4} - \frac{a_{42}^2}{a_{22}^2} L2 = \mathrm{L4} - \frac{-1}{4} L2$

On obtient après calcul :

$$S3)\begin{cases} 10\,x_1 + 5\,x + 5\,x_3 = 25 & L1 \\ 0 + 4\,x + 6\,x_3 + 4\,x_4 = -4 & L2 \\ 0 + 0 - 4\,x_3 + 2\,x_4 = 4 & L3 \\ 0 - 0 + \frac{7}{-}x_3 + 2\,x_4 = -6 & L4 \end{cases} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7/2 & -2 \end{pmatrix} \quad b^3 \begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

<u>3ème Etape</u> : k=3 (3ème itération)

- ✓ On ne touche pas à la ligne (L1, L2 et L3), la ligne du pivot (L3), pivot ($^{3}_{33}$= -4),
- ✓ on remplace la ligne L4 par : $\mathrm{L4} - \frac{a_{43}^3}{a_{33}^3}\,\mathrm{L3} = \mathrm{L4} - \frac{3{,}5}{-4}\,\mathrm{L3}$

On obtient après calcul :

$$S4)\begin{cases} 10\,x_1 + 5\,x + 5\,x_3 = 25 \\ 0 + 4\,x + 6\,x_3 + 4\,x_4 = -4 \\ 0 + 0 - 4\,x_3 + 2\,x_4 = 4 \\ 0 - 0 + 0 - 0{,}25\,x_4 = -2{,}5 \end{cases} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}25 \end{pmatrix} \quad b^4 \begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ 4 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$$

La triangularisation est ainsi terminée. On applique ensuite l'algorithme de la remonté pour la résolution d'un système triangulaire supérieur.

$$x_4 = \frac{-2.5}{-0.25} = 10$$
$$x_3 = \frac{4 - 2\,x_4}{-4} = 4$$
$$x = \frac{-4 - \ 6\,x_3 + 4\,x_4)}{4} = -17$$
$$x_1 = \frac{25 - \ 5\,x + 5\,x_3)}{10} = 9$$

Remarque:

- Le programme doit:
    1- Lire la mtrice **A** et le vecteur **b**.
    2- Afficher la mtrice A initiale et le vecteur b initial.
    3- Afficher les matrices et les vercteurs intermédiares de chauqe itération.
    4- Afficher la matrice A et le vecteur b finaux.
    5- Afficher le vecteur X.
- Comme il est illustré dans l'exemple ci-dessous:

```
 * Le systeme est :

 [ 10.0000  5.0000  5.0000  0.0000 ] [ 25.0000 ]
 [ 2.0000  5.0000  7.0000  4.0000 ] [ 1.0000 ]
 [ 4.0000  4.0000  1.0000  4.0000 ] [ 12.0000 ]
 [ -2.0000  -2.0000  1.0000  -3.0000 ] [ -10.0000 ]

 * ItÚration K= 1 :

 [ 10.0000  5.0000  5.0000  0.0000 ] [ 25.0000 ]
 [ 0.0000  4.0000  6.0000  4.0000 ] [ -4.0000 ]
 [ 0.0000  2.0000  -1.0000  4.0000 ] [ 2.0000 ]
 [ 0.0000  -1.0000  2.0000  -3.0000 ] [ -5.0000 ]

 * ItÚration K= 2 :

 [ 10.0000  5.0000  5.0000  0.0000 ] [ 25.0000 ]
 [ 0.0000  4.0000  6.0000  4.0000 ] [ -4.0000 ]
 [ 0.0000  0.0000  -4.0000  2.0000 ] [ 4.0000 ]
 [ 0.0000  0.0000  3.5000  -2.0000 ] [ -6.0000 ]

 * ItÚration K= 3 :

 [ 10.0000  5.0000  5.0000  0.0000 ] [ 25.0000 ]
 [ 0.0000  4.0000  6.0000  4.0000 ] [ -4.0000 ]
 [ 0.0000  0.0000  -4.0000  2.0000 ] [ 4.0000 ]
 [ 0.0000  0.0000  0.0000  -0.2500 ] [ -2.5000 ]
-------------- Gauss -------------

 * La matrice reduite :

 [ 10.0000  5.0000  5.0000  0.0000 ] [ 25.0000 ]
 [ 0.0000  4.0000  6.0000  4.0000 ] [ -4.0000 ]
 [ 0.0000  0.0000  -4.0000  2.0000 ] [ 4.0000 ]
 [ 0.0000  0.0000  0.0000  -0.2500 ] [ -2.5000 ]

 * La resolution donne :

 X_1 = 9.000000 ;
 X_2 = -17.000000 ;
 X_3 = 4.000000 ;
 X_4 = 10.000000 ;


Process returned 0 (0x0)   execution time : 56.096 s
Press any key to continue.
```