



Matière : Analyse Numérique  
Spécialité : 3ING Informatique  
Réalisé par : Mr MERZOUG Mohammed  
Mr ETCHIALI Abdelhak

Année Universitaire : 2025-2026

## TP 04

### Partie 1: Algorithme de décomposition LU

**1.Objectif :** Résoudre un système linéaire de type :  $\mathbf{ax} = \mathbf{b}$

En utilisant la méthode de décomposition LU dont le principe est:

$$\begin{aligned} A &= LU \\ Ax = b &\Leftrightarrow \begin{cases} (1) & Ly = b \\ (2) & Ux = y \end{cases} \end{aligned}$$

- résoudre le système (1) par l'algorithme de la descente

- résoudre le système (2) par l'algorithme de la remontée

**2.Enoncé :** Ecrire en langage python les fonctions des algorithmes suivants :

a. Algorithme de décomposition LU:

Données :  $A = (A[i, j])$ ,  $n$  le nombre de lignes et colonnes

début

```
    U ← A
    L ← I
    pour k = 1 . . . n faire
        p ← U[k, k]
        pour i = k + 1 . . . n faire
            q ← U[i, k]
            U[i, k] ← 0
            L[i, k] ← q/p
            pour j = k + 1 . . . n faire
                U[i, j] = U[i, j] - U[k, j].q/p
```

fin

retourner  $U$  la matrice triangulaire supérieure,  
 $L$  la matrice triangulaire inférieure

b. Algorithme de la descente

- résoudre le système  $Ly = b$  par l'algorithme de la descente

c. Algorithme de la remontée

- résoudre le système  $Ux = y$  par l'algorithme de la remontée

**Exemple 1:**

Soit le système  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**1- Décomposition LU:**

**1<sup>ère</sup> étape k=1 :**

$$U^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad L^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

**2<sup>ème</sup> étape k=2 :**

$$U^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \left| \quad L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

**3<sup>ème</sup> étape k=3 :**

$$U^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

**2- Résoudre le système  $Ly=b$  par descente:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 2 \quad y_2 = -2 \quad y_3 = 1$$

**3- Résoudre le système  $Ux=y$  par remontée:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = -1$$

## Remarque:

- Le programme doit:
  - 1- Lire la matrice **A** et le vecteur **b**.
  - 2- Afficher la matrice **A** initiale et le vecteur **b** initial.
  - 3- Afficher les matrices **L** et **U** après décomposition.
  - 4- Afficher le système  $Ly=b$  et le résoudre par descente.
  - 5- Afficher le système  $Ux=y$  et le résoudre par remontée.
- Comme il est illustré dans l'exemple ci-dessous:

```
* Le systeme est :
[ 1.0000 2.0000 3.0000 ] [ 2.0000 ]
[ 1.0000 1.0000 2.0000 ] [ 0.0000 ]
[ 1.0000 1.0000 1.0000 ] [ 1.0000 ]
----- 1- Decomposition -----

* A = L * U

* La Matrice U0:
[ 1.0000 2.0000 3.0000 ]
[ 1.0000 1.0000 2.0000 ]
[ 1.0000 1.0000 1.0000 ]

* La Matrice L0:
[ 1.0000 0.0000 0.0000 ]
[ 0.0000 1.0000 0.0000 ]
[ 0.0000 0.0000 1.0000 ]

*** iteration k = 1
** pivot =1
* La Matrice U1:
[ 1.0000 2.0000 3.0000 ]
[ 0.0000 -1.0000 -1.0000 ]
[ 0.0000 -1.0000 -2.0000 ]

* La Matrice L1:
[ 1.0000 0.0000 0.0000 ]
[ 1.0000 1.0000 0.0000 ]
[ 1.0000 0.0000 1.0000 ]

*** iteration k = 2
** pivot =-1
* La Matrice U2:
[ 1.0000 2.0000 3.0000 ]
[ 0.0000 -1.0000 -1.0000 ]
[ 0.0000 0.0000 -1.0000 ]

* La Matrice L2:
[ 1.0000 0.0000 0.0000 ]
[ 1.0000 1.0000 0.0000 ]
[ 1.0000 1.0000 1.0000 ]

La Matrice U :

[ 1.0000 2.0000 3.0000 ]
[ 0.0000 -1.0000 -1.0000 ]
[ 0.0000 0.0000 -1.0000 ]

La Matrice L :

[ 1.0000 0.0000 0.0000 ]
[ 1.0000 1.0000 0.0000 ]
[ 1.0000 1.0000 1.0000 ]
----- 2- Resoudre Ly = b par descente-----
* le systeme reduit:
[ 1.0000 0.0000 0.0000 ] [ 2.0000 ]
[ 1.0000 1.0000 0.0000 ] [ 0.0000 ]
[ 1.0000 1.0000 1.0000 ] [ 1.0000 ]
*la resultat donne :
y_1 = 2.0000;
y_2 = -2.0000;
y_3 = 1.0000;

----- 3- Resoudre Ux = y par remontee-----
* le systeme reduit:
[ 1.0000 2.0000 3.0000 ] [ 2.0000 ]
[ 0.0000 -1.0000 -1.0000 ] [ -2.0000 ]
[ 0.0000 0.0000 -1.0000 ] [ 1.0000 ]
* la resultat donne :
x_1 = -1.0000;
x_2 = 3.0000;
x_3 = -1.0000;
l_Quit
```

## Exemple 2:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 3 & 8 & 13 \\ 2 & 9 & 18 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

```
* Le systeme est :
[ 4.0000 8.0000 12.0000 ] [ 4.0000 ]
[ 3.0000 8.0000 13.0000 ] [ 5.0000 ]
[ 2.0000 9.0000 18.0000 ] [ 11.0000 ]
----- 1- Decomposition -----
*A = L * U
* la Matrice U0:
[ 4.0000 8.0000 12.0000 ]
[ 3.0000 8.0000 13.0000 ]
[ 2.0000 9.0000 18.0000 ]
* La Matrice L0:
[ 1.0000 0.0000 0.0000 ]
[ 0.0000 1.0000 0.0000 ]
[ 0.0000 0.0000 1.0000 ]
*** iteration k = 1
** pivot =4
* la Matrice U1:
[ 4.0000 8.0000 12.0000 ]
[ 0.0000 2.0000 4.0000 ]
[ 0.0000 5.0000 12.0000 ]
* La Matrice L1:
[ 1.0000 0.0000 0.0000 ]
[ 0.7500 1.0000 0.0000 ]
[ 0.5000 0.0000 1.0000 ]
*** iteration k = 2
** pivot =2
* la Matrice U2:
[ 4.0000 8.0000 12.0000 ]
[ 0.0000 2.0000 4.0000 ]
[ 0.0000 0.0000 2.0000 ]
* La Matrice L2:
[ 1.0000 0.0000 0.0000 ]
[ 0.7500 1.0000 0.0000 ]
[ 0.5000 2.5000 1.0000 ]
* la Matrice U :
[ 4.0000 8.0000 12.0000 ]
[ 0.0000 2.0000 4.0000 ]
[ 0.0000 0.0000 2.0000 ]
* La Matrice L :
[ 1.0000 0.0000 0.0000 ]
[ 0.7500 1.0000 0.0000 ]
[ 0.5000 2.5000 1.0000 ]
----- 2- Resoudre Ly = b par descente-----
* le systeme reduit:
[ 1.0000 0.0000 0.0000 ] [ 4.0000 ]
[ 0.7500 1.0000 0.0000 ] [ 5.0000 ]
[ 0.5000 2.5000 1.0000 ] [ 11.0000 ]
*la resultat donne :
y_1 = 4.0000;
y_2 = 2.0000;
y_3 = 4.0000;

----- 3- Resoudre Ux = y par remontee-----
* le systeme reduit:
[ 4.0000 8.0000 12.0000 ] [ 4.0000 ]
[ 0.0000 2.0000 4.0000 ] [ 2.0000 ]
[ 0.0000 0.0000 2.0000 ] [ 4.0000 ]
* la resultat donne :
x_1 = 1.0000;
x_2 = -3.0000;
x_3 = 2.0000;
```