Matière : Méthodes Numériques
Spécialité : 3ING Informatique
Réalisé par : Mr MERZOUG Mohammed
Mr ETCHIALI Abdelhak

Année Universitaire : 2025-2026

TP 03

PARTIE 2: Algorithme d'élimination de Gauss avec pivot partiel

1.Objectif : Résoudre un système linéaire de type : **ax=b**
En utilisant la méthode de Gauss et la stratégie du choix **du pivot partiel.**

Dans ce cas-là, on doit permuter les lignes à chaque étape de façon à placer en pivot le terme de coefficient le plus élevé de la ligne

$k^{\text{ième}}$ étape: $\left|a_{kk}^{(k)}\right| = \max\left\{\left|a_{ik}^{(k)}\right| , i \geq k\right\}$

2.Enoncé : Ecrire en langage python les fonctions des deux algorithmes suivants :
a. Algorithme de la triangularisation :

```
Données  A = (A[i ,j])1≤i,j≤n  , b=(b[i])1≤i≤n
Début
        Pour k ← 1 à n faire
                // Recherche du pivot partiel
                i_pivot ← k
                pivot ← |A[k][k]|
                Pour i ← k à n faire
                        Si |A[i][k]| > pivot alors
                                pivot ← |A[i][k]|
                                i_pivot ← i
                        FinSi
                FinPour
                // Échange des lignes si nécessaire
                Si i_pivot ≠ k alors
                        Échanger les lignes k et i_pivot dans A
                        Échanger b[k] et b[i_pivot]
                FinSi
                // Élimination de Gauss
                Pour i ← 1 à n faire
                        q ← A[i][k]
                        A[i][k] ← 0
                        Pour j ← k+1 à n faire
                                A[i][j] ← A[i][j] – (q/pivot) * A[k][j]
                        FinPour
                        b[i] ← b[i] - (q/pivot) * b[k]
                FinPour
        FinPour
Fin
```

b. Algorithme de la remontée

Exemple

Soit à résoudre le système $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a: $L_i = L_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} L_k$

1ére étape k=1

$$pivot = \max(|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|) = |a_{31}| = 3$$

En permutant les lignes 1 et 3, le système précèdent devient

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On construit les lignes

$$\begin{cases} L_1 = (3 \ 6 \ 9, & 3) \\ L_2 = (2 \ 1 \ 2, & 2) \\ L_3 = (1 \ 6 \ 9, & 1) \end{cases}$$

On transforme les lignes :

$$\begin{cases} L_1 = (3 \ 6 \ 9, \quad 3) \ inchangée \\ L_2 = L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 = (2 \ 1 \ 2, \quad 2) - \frac{2}{3}(3 \ 6 \ 9, \quad 3) = (0 \ -3 \ -4, \quad 0) \\ L_3 = L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 = (1 \ 6 \ 9, \quad 1) - \frac{1}{3}(3 \ 6 \ 9, \quad 3) = (0 \ 4 \ 6, \quad 0) \end{cases}$$

On écrit le système obtenu :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2ème étape :k=2

$pivot = \max(|a_{22}|, |a_{32}|) = |a_{32}| = 4$ On permute les lignes 2 et 3.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On construit les lignes :

$$\begin{cases} L_1 = (3 \quad 6 \quad 9\,, \quad 3) \\ L_2 = (0 \quad 4 \quad 6\,, \quad 0) \\ L_3 = (0 \; -3 \; -4\,, \quad 0) \end{cases}$$

On transforme les lignes :

$$\begin{cases} L_1 = (3 \;\; 6 \;\; 9\,, \quad 3) \; inchang\acute{e}e \\ L_2 = (0 \;\; 4 \;\; 6\,, \quad 0) \; inchang\acute{e}e \\ L_3 = L_3 - \dfrac{a_{32}}{a_{22}} L_2 = (0 \; -3 \; -4\,, \quad 0) - \dfrac{-3}{4}(0 \;\; 4 \;\; 6\,, \quad 0) = (0 \;\; 0 \;\; 0.5\,, \quad 0) \end{cases}$$

On écrit le système obtenu :

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résolution par remontée : $x_3 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_1 = 1$

Remarque:

- Le programme doit:
    1- Lire la mtrice **A** et le vecteur **b**.
    2- Afficher la mtrice A initiale et le vecteur b initial.
    3- Afficher les matrices et les vercteurs intermédiares de chauqe itération.
    4- Afficher la matrice A et le vecteur b finaux.
    5- Afficher le vecteur X.
- Comme il est illustré dans l'exemple ci-dessous:

```
* Le systeme est :

[ 1.0000  6.0000  9.0000 ] [ 1.0000 ]
[ 2.0000  1.0000  2.0000 ] [ 2.0000 ]
[ 3.0000  6.0000  9.0000 ] [ 3.0000 ]

* ItÚration K= 1 :

[ 3.0000  6.0000  9.0000 ] [ 3.0000 ]
[ 0.0000  -3.0000  -4.0000 ] [ 0.0000 ]
[ 0.0000  4.0000  6.0000 ] [ 0.0000 ]

* ItÚration K= 2 :

[ 3.0000  6.0000  9.0000 ] [ 3.0000 ]
[ 0.0000  4.0000  6.0000 ] [ 0.0000 ]
[ 0.0000  0.0000  0.5000 ] [ 0.0000 ]

-------- Gauss avec pivot partiel --------

* La matrice reduite :

[ 3.0000  6.0000  9.0000 ] [ 3.0000 ]
[ 0.0000  4.0000  6.0000 ] [ 0.0000 ]
[ 0.0000  0.0000  0.5000 ] [ 0.0000 ]

* La resolution donne :

X_1 = 1.000000 ;
X_2 = 0.000000 ;
X_3 = 0.000000 ;
```

Exemple 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$x_4 = 0$ $x_3 = 1$ $x_2 = -1$ $x_1 = 0$

```
* Le systeme est :

[ 1.0000  0.0000  6.0000  2.0000 ] [ 6.0000 ]
[ 8.0000  0.0000  -2.0000  -2.0000 ] [ -2.0000 ]
[ 2.0000  9.0000  1.0000  3.0000 ] [ -8.0000 ]
[ 2.0000  1.0000  -3.0000  10.0000 ] [ -4.0000 ]

* ItÚration K= 1 :

[ 8.0000  0.0000  -2.0000  -2.0000 ] [ -2.0000 ]
[ 0.0000  0.0000  6.2500  2.2500 ] [ 6.2500 ]
[ 0.0000  9.0000  1.5000  3.5000 ] [ -7.5000 ]
[ 0.0000  1.0000  -2.5000  10.5000 ] [ -3.5000 ]

* ItÚration K= 2 :

[ 8.0000  0.0000  -2.0000  -2.0000 ] [ -2.0000 ]
[ 0.0000  9.0000  1.5000  3.5000 ] [ -7.5000 ]
[ 0.0000  0.0000  6.2500  2.2500 ] [ 6.2500 ]
[ 0.0000  0.0000  -2.6667  10.1111 ] [ -2.6667 ]

* ItÚration K= 3 :

[ 8.0000  0.0000  -2.0000  -2.0000 ] [ -2.0000 ]
[ 0.0000  9.0000  1.5000  3.5000 ] [ -7.5000 ]
[ 0.0000  0.0000  6.2500  2.2500 ] [ 6.2500 ]
[ 0.0000  0.0000  0.0000  11.0711 ] [ 0.0000 ]

-------- Gauss avec pivot partiel --------

* La matrice reduite :

[ 8.0000  0.0000  -2.0000  -2.0000 ] [ -2.0000 ]
[ 0.0000  9.0000  1.5000  3.5000 ] [ -7.5000 ]
[ 0.0000  0.0000  6.2500  2.2500 ] [ 6.2500 ]
[ 0.0000  0.0000  0.0000  11.0711 ] [ 0.0000 ]

* La resolution donne :

X_1 = 0.000000 ;
X_2 = -1.000000 ;
X_3 = 1.000000 ;
X_4 = 0.000000 ;
```