Université Aboubekr BELKAID - TLEMCEN

كلية العلوم – تيجاني هدام
Faculté des Sciences – Tidjani HAddam
قسم الإعلام الآلي

Matière : Méthodes Numériques
Spécialité : 3ING Informatique
Réalisé par : Mr MERZOUG Mohammed
Mr ETCHIALI Abdelhak

Année Universitaire : 2025-2026

TP 03

PARTIE 3: Algorithme d'élimination de Gauss avec pivot total

1.Objectif : Résoudre un système linéaire de type : **ax=b**
En utilisant la méthode de Gauss et la stratégie du choix **du pivot total.**

- **k**ième **étape**: on échange à la fois les lignes k e k' $(k \geq k')$ et les colonnes k et k'' $(k \geq k'')$ de telle sorte que:

$$\text{k}^{\text{ième}}\ \text{étape}\quad \left|a_{kk}^{(k)}\right| = \max\left\{\left|a_{ij}^{(k)}\right|, i \geq k \quad j \geq k\right\}$$

2.Enoncé : Ecrire en langage python les fonctions des deux algorithmes suivants :

a. Algorithme de la triangularisation :

```
Données  A = (A [i, j])1≤i, j≤n, b=(b[i])1≤i≤n
Début
    Pour i ← 1 à n faire
        pivot_col[i] ← i
    FinPour
    Pour k ← 1 à n  faire
        // Recherche du pivot total
        pivot ← 0
        Pour i ← k à n faire
            Pour j ← k à n faire
                Si |A[i][j]| > pivot alors
                    pivot ← |A[i][j]|
                    i_pivot ← i
                    j_pivot ← j
                FinSi
            FinPour
        FinPour
        // Échange de lignes
        Si i_pivot ≠ k alors
            Échanger les lignes k et i_pivot dans A
            Échanger b[k] et b[i_pivot]
        FinSi
        // Échange de colonnes
        Si j_pivot ≠ k alors
            Échanger les colonnes k et j_pivot dans A
            Échanger pivot_col[k] et pivot_col[j_pivot]
        FinSi
        // Élimination de Gauss
        Pour i ← 1 à n faire
            q ← A[i][k]
            A[i][k] ← 0
            Pour j ← k+1 à n faire
                A[i][j] ← A[i][j] – (q/pivot) * A[k][j]
            FinPour
            b[i] ← b[i] - (q/pivot) * b[k]
        FinPour
    FinPour
Fin

// Algorithme de la remontée
// Réarrangement des x selon les échanges de colonnes
    Pour i ← 0 à n-1 faire
        x_final[pivot_col[i]] ← x[i]
    FinPour
    Afficher x_final
```

b. Algorithme de la remontée

Attention:

Si on fait des échanges de colonnes cela modifie l'ordre des composantes du vecteur solution ,donc il penser à rétablir le bon ordre des composantes à la fin.

Exemple 1:

Soit à résoudre le système suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

1ére étape k=1 :

$pivot = \{\max(|a_{ij}|), i= 1:3, j= 1:3\} = |a_{33}|= 6$

En permutant les lignes 1 et 3, le système devient :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Puis en permutant les colonnes 1 et 3, le système devient:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Attention: A chaque permutation de colonnes, les inconnues changent de place. Dans notre cas, l'inconnue x_1 a changé de place avec x_3

On construit les lignes

$$\begin{cases} L_1 = (6 \;\; 2 \;\; 3\,, \quad 12) \\ L_2 = (5 \;\; 2 \;\; 2\,, \quad 7) \\ L_3 = (3 \;\; 3 \;\; 1\,, \quad -2) \end{cases}$$

On transforme les lignes :

$$\begin{cases} L_1 = (6 \;\; 2 \;\; 3\,, \quad 12) \; \textit{inchangée} \\ L_2 = L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 = (5 \;\; 2 \;\; 2\,, \quad 7) - \frac{5}{6}(6 \;\; 2 \;\; 3\,, \quad 12) = \left(0 \;\; \frac{1}{3} \;\; \frac{-1}{2}\,, \quad -3\right) \\ L_3 = L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 = (3 \;\; 3 \;\; 1\,, -2) - \frac{3}{6}(6 \;\; 2 \;\; 3\,, \quad 12) = \left(0 \;\; 2 \;\; \frac{-1}{2}\,, \quad -8\right) \end{cases}$$

On écrit le système obtenu :

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & -0.5 \\ 0 & 2 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$2^{éme}$ étape k=2 :

$pivot = \{\max(|a_{ij}|), i = 1:3, j = 1:3\} = |a_{32}| = 2$

On permute les lignes 2 et 3:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -0{,}5 \\ 0 & 1/3 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On construit les lignes :

$$\begin{cases} L_1 = (6 \quad 2 \quad 3\,, \quad 12) \\ L_2 = (0 \quad 2 \quad -0{,}5\,, \quad -8\ ) \\ L_3 = (0 \quad 1/3 \ -0{,}5\,, \ -3\ ) \end{cases}$$

On transforme les lignes :

$$\begin{cases} L_1 = (6 \ 2 \ 3\,, \quad 12) \ \textit{inchangée} \\ L_2 = (0 \ 2 \ -0{,}5\,, \quad -5/3) \ \textit{inchangée} \\ L_3 = L_3 - \dfrac{a_{32}}{a_{22}} L_2 = \left(0 \ \dfrac{1}{3} - 0{,}5\,, -8\right) - \dfrac{-1/3}{2}(0 \ 4 \ 6\,, -5/3) = \left(0 \ 0 \ \dfrac{5}{12}, -\dfrac{5}{3}\right) \end{cases}$$

On écrit le système triangulaire obtenu :

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -5/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

Résolution par remontée : $x_1 = 4 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 1$

Remarque:

- Le programme doit:
    1- Lire la mtrice **A** et le vecteur **b**.
    2- Afficher la mtrice A initiale et le vecteur b initial.
    3- Afficher les matrices et les vercteurs intermédiares de chauqe itération.
    4- Afficher la matrice A et le vecteur b finaux.
    5- Afficher le vecteur X.
- Comme il est illustré dans l'exemple ci-dessous:

```
 * Nombre d'equation-inconues :

 * N = 3

 * La matrice A:

 | 1
3
3
 | 2
2
5
 | 3
2
6

 * Le vecteur B:

 | -2
 | 7
 | 12


 * Le systeme est :

 [ 1.0000  3.0000  3.0000 ] [ -2.0000 ]
 [ 2.0000  2.0000  5.0000 ] [ 7.0000 ]
 [ 3.0000  2.0000  6.0000 ] [ 12.0000 ]

 * ItÚration K= 1 :

 [ 6.0000  2.0000  3.0000 ] [ 12.0000 ]
 [ 0.0000  0.3333  -0.5000 ] [ -3.0000 ]
 [ 0.0000  2.0000  -0.5000 ] [ -8.0000 ]

 * ItÚration K= 2 :

 [ 6.0000  2.0000  3.0000 ] [ 12.0000 ]
 [ 0.0000  2.0000  -0.5000 ] [ -8.0000 ]
 [ 0.0000  0.0000  -0.4167 ] [ -1.6667 ]

-------- Gauss avec pivot total ---------

 * La resolution donne X :

 X_1 = 4.000000 ;
 X_2 = -3.000000 ;
 X_3 = 1.000000 ;



Process returned 0 (0x0)   execution time : 36.530 s
```

Exemple 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$x_4 = 0$ $x_3 = 1$ $x_2 = -1$ $x_1 = 0$

```
* Le systeme est :

[ 1.0000  0.0000  6.0000  2.0000 ] [ 6.0000 ]
[ 8.0000  0.0000  -2.0000  -2.0000 ] [ -2.0000 ]
[ 2.0000  9.0000  1.0000  3.0000 ] [ -8.0000 ]
[ 2.0000  1.0000  -3.0000  10.0000 ] [ -4.0000 ]

* ItÚration K= 1 :

[ 10.0000  1.0000  -3.0000  2.0000 ] [ -4.0000 ]
[ 0.0000  0.2000  -2.6000  8.4000 ] [ -2.8000 ]
[ 0.0000  8.7000  1.9000  1.4000 ] [ -6.8000 ]
[ 0.0000  -0.2000  6.6000  0.6000 ] [ 6.8000 ]

* ItÚration K= 2 :

[ 10.0000  1.0000  -3.0000  2.0000 ] [ -4.0000 ]
[ 0.0000  8.7000  1.9000  1.4000 ] [ -6.8000 ]
[ 0.0000  -0.0000  -2.6437  8.3678 ] [ -2.6437 ]
[ 0.0000  0.0000  6.6437  0.6322 ] [ 6.6437 ]

* ItÚration K= 3 :

[ 10.0000  1.0000  2.0000  -3.0000 ] [ -4.0000 ]
[ 0.0000  8.7000  1.4000  1.9000 ] [ -6.8000 ]
[ 0.0000  -0.0000  8.3678  -2.6437 ] [ -2.6437 ]
[ 0.0000  0.0000  0.0000  6.8434 ] [ 6.8434 ]

--------- Gauss avec pivot total ---------

* La resolution donne X :

X_1 = 0.000000 ;
X_2 = -1.000000 ;
X_3 = 1.000000 ;
X_4 = 0.000000 ;


Process returned 0 (0x0)   execution time : 50.020 s
Press any key to continue.
```