BLOQUE 1: NÚMEROS REALES

INTRODUCCIÓN

El presente capítulo nos plantea una revisión de las operaciones en el conjunto de los números reales y las propiedades que deben recordarse para resolverlas.

Nuestro objetivo es que identifiques los distintos conjuntos numéricos, apliques las propiedades que poseen las distintas operaciones y que resuelvas operaciones en el conjunto de los números reales, justificando el procedimiento realizado.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los números que se usan para contar se llaman ***números naturales*****.** Al conjunto formado por todos los números naturales se lo denota con la letra $\mathbb{N}$. Para contar *un* elemento se usa el número 1, para el siguiente el número 2, y así sucesivamente. Esto naturalmente implica que en los naturales existe un orden.

Ahora consideremos el siguiente problema: "*Hallar el número que sumado a 5 sea igual a 3*".
Este problema no tiene solución en el conjunto de los números naturales, ya que si sumamos un natural a 5 obtendremos otro natural *mayor* que 5, y 3 es menor que 5. Este problema es análogo a querer calcular la resta $3 - 5$. Es decir, ninguna resta en la que el sustraendo sea mayor o igual que el minuendo puede ser resuelta en el conjunto de los naturales.
La introducción de los *números enteros negativos* y el *cero* sirvió para resolver este tipo de problemas.
El conjunto de los ***Números Enteros*** se suele representar con la letra $\mathbb{Z}$.

Las fracciones se crearon para expresar partes más pequeñas que la unidad, por ejemplo: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$. Estos números que pueden escribirse como cociente entre dos números enteros a y b, se llaman ***números racionales***. La fracción a/b significa que la unidad se dividió b partes y se tomaron a. El numerador es a, b es el denominador y éste no puede ser cero.
Consideraremos a todas las fracciones equivalentes como un solo número. Por ejemplo, las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ son distintas, pero todas representan el mismo número racional. Así, como números racionales, tenemos que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.
Este conjunto se denota con la letra $\mathbb{Q}$ e incluye al conjunto de números enteros y, por lo tanto, a los números naturales. En efecto, cada número entero está representado por una

fracción con denominador 1, o una equivalente. Por ejemplo, 2 es el número racional representado por la fracción $\frac{2}{1}$ o $\frac{4}{2}$, entre otras.

PARA RECORDAR…

Expresiones decimales exactas: $0{,}75 = \frac{75}{100}$

En el numerador aparece la parte decimal y en el denominador tenemos el 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales

Expresiones periódicas puras: $0{,}3131\ldots = 0{,}\widehat{31} = \frac{31}{99}$

En el numerador aparece la parte periódica, mientras que en el denominador tenemos tantos 9 como cifras tiene el período.

Expresiones periódicas mixtas:

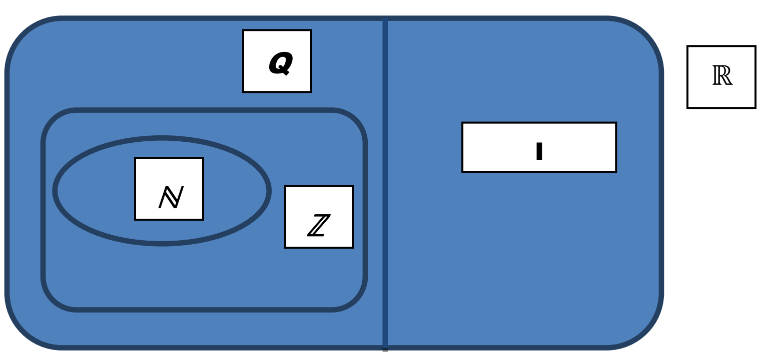
$0{,}63232\ldots = 0{,}6\widehat{32} = \frac{632-6}{990} = \frac{626}{990} = \frac{313}{495}$

En el numerador aparece la diferencia entre la parte decimal y la parte decimal no periódica, mientras que en el denominador tenemos tantos números 9 como cifras tiene el período seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

Los números cuya representación decimal es indefinida y no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros, se llaman ***números irracionales***. Este conjunto se representan con la letra **I**.

Son irracionales $\sqrt{2} = 2{,}41421356\ldots$, el número $\pi = 3{,}14159\ldots$ (que expresa la relación entre la longitud de una circunferencia y su propio diámetro), $\sqrt[3]{5} = 1{,}709975\ldots$, el número $e = 2{,}718281828459045\ldots$entre otros.

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS REALES



PROPIEDADES DEL NÚMERO 0

Elemento Neutro para la Suma: Si lo sumamos con cualquier número se obtiene el mismo número. Por ejemplo: $7 + 0 = 7$, $-4 + 0 = -4$.

Multiplicación por Cero: La multiplicación por cero siempre da como resultado cero.
Por ejemplo: $6 \,.\, 0 = 0$, $(-3) \,.\, 0 = 0$.

Potencia Cero: Se define la potencia de un número no nulo con exponente cero, igual a 1.
Por ejemplo: $70^0 = 1$ y $(-5)^0 = 1$.

PROPIEDADES DEL NÚMERO 1

Elemento Neutro para la Multiplicación: Si se lo multiplica por cualquier número se obtiene el mismo número.
Por ejemplo: $4 \,.\, 1 = 4$, $(-9) \,.\, 1 = -9$ y $0 \,.\, 1 = 0$.

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

Suma de números reales

Propiedades
Si a, b y c son números reales, se cumplen las siguientes propiedades:

- *Ley de cierre:* la suma de dos números reales a y b, da como resultado otro número real.
- *Conmutativa:* $a + b = b + a$
- *Asociativa:* $a + (b + c) = (a + b) + c$
- *Inverso aditivo (u opuesto):* $a + (-a) = 0$

Suma de fracciones de igual denominador:
Cuando dos fracciones tienen el mismo denominador, basta con sumar los numeradores y tomar el denominador común.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}, con\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\ y\ m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

Suma de fracciones de distinto denominador:
En este caso, debemos buscar el mínimo común múltiplo entre los dos denominadores, el cual será el denominador común. Se calcula de la siguiente forma:

ATENCIÓN!

Cuando en una expresión figuran términos encerrados entre paréntesis ( ), corchetes [ ] o llaves { }, para efectuar las operaciones se quitan previamente esos símbolos (en ese orden), teniendo en cuenta que cuando están precedidos por un signo +, se conservan los signos de los términos encerrados, y si están precedidos por un signo −, se cambian los signos de todos los términos encerrados.

- Si los denominadores son primos entre sí, el denominador común es el producto de los mismos.
  Ejemplo:

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3.3+1.2}{2.3}=\frac{11}{6}$$

- Si los denominadores no son primos entre sí, el denominador común es el múltiplo de ambos denominadores que sea menor.
  Ejemplo:

$$\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{5.3+7.2}{24}=\frac{29}{24}$$

Resta de números reales

Resta de fracciones
Es equivalente a la adición de fracciones, con iguales consideraciones.

Ejemplos:

1) Fracciones con igual denominador:

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

2) Fracciones con distinto denominador:

$$\frac{1}{4}-\frac{3}{7}=\frac{1.7-3.4}{28}=\frac{-5}{28}$$

Multiplicación de números reales

Propiedades

Si a, b y c son números reales, se cumplen las siguientes propiedades:

- *Ley de cierre:* el producto de dos números reales es otro número real.
- *Asociativa:* $(a.b).c = a.(b.c)$
- *Conmutativa:* $a.b = b.a$
- *Inverso multiplicativo (o recíproco):* $a.a^{-1} = a.\frac{1}{a} = 1$
- *Distributiva con respecto a la adición:* $a.(b + c) = a.b + a.c$

PARA RECORDAR…

Regla de los signos para la multiplicación:

$+ . + = +$

$+ . - = -$

$- . + = -$

$- . - = +$

Multiplicación de fracciones

La multiplicación de fracciones da como resultado una nueva fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de las fracciones dadas y su denominador es el producto de los denominadores de las mismas.

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}, con\ a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} - \{0\}\ y\ d \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{5}.\frac{3}{4} = \frac{2.3}{5.4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

La fracción $\frac{6}{20}$ se puede simplificar; si dividimos tanto numerador como denominador por 2, obtenemos la fracción irreducible $\frac{3}{10}$, que significa que no se puede seguir simplificando.

División de números reales

ATENCIÓN

La división por cero no es posible.

Dados dos números reales a y b, con $b \neq 0$, el cociente $\frac{a}{b}$ es el número real c tal que el producto $c.b = a$.

En la división se verifica que:

DIVIDENDO = DIVISOR. COCIENTE + RESTO

Para que la división sea exacta, el dividendo debe ser múltiplo del divisor, es decir, el resto es cero.

División de fracciones

Para dividir dos fracciones, se multiplica la primera por el recíproco de la segunda fracción.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c}, con\ a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}-\{0\}, c\in\mathbb{R}-\{0\}\ y\ d\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}:\frac{4}{7}=\frac{2}{3}.\frac{7}{4}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$$

Aplicación de división de fracciones: cálculo de porcentaje

Una fracción cuyo denominador es 100, expresa un porcentaje o tanto por ciento.

Ejemplo: $\frac{35}{100}=0{,}35\Leftrightarrow 35\%$

Podrían presentarse distintos casos dependiendo de cuál sea la incógnita:

- ¿Qué tanto por ciento es 24 de 60?

  La respuesta sería: $\frac{24}{60}=0{,}40=\frac{40}{100}\Leftrightarrow 40\%$
- Para calcular el tanto por ciento de una determinada cantidad x, por ejemplo, el 15% sería:

$$0{,}15.x$$

- Para encontrar un número x tal que su 50% sea 3:

$$0{,}50.x=3$$
$$\frac{50}{100}.x=3$$
$$x=\frac{300}{50}=6$$

ATENCIÓN

El porcentaje es una de las expresiones matemáticas que más usamos en la vida cotidiana.

Un porcentaje es la proporción de una cantidad respecto a otra y representa el número de partes que nos interesan de un total de 100. También se le llama comúnmente *tanto por ciento* donde "por ciento" significa "de cada cien unidades".

Ejemplo: Una empresa tiene 15 empleados de los cuales 6 son mujeres. ¿Qué porcentaje de empleados son de sexo femenino sobre el total?

15 empleados $\longrightarrow$ 100%

6 empleadas $\longrightarrow$ $x=\frac{6\cancel{e}\ .\ 100\%}{15\cancel{e}}=\frac{600\%}{15}=40\%$

La empresa tiene un 40% de empleadas femeninas.

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 1 al 3 del TP 1.

Potenciación de números reales

Si a es un número real positivo, la enésima potencia de a es:

$$a^n = a.a.a.a.....a \text{ (}n\text{ factores } a\text{).}$$

$\boldsymbol{a}$ es la base de la potencia, $\boldsymbol{n}$ es el exponente. $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}$**.**

Definiciones:

- Si $n = 1$ es $a^1 = a$.
- Si $n = 0$ es $a^0 = 1$.
- Si $n > 0$ entonces: $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

Observaciones

- Si $a < 0$ y n es un número par, la potencia es positiva.
- Si $a < 0$ y n es impar, la potencia es negativa.

Propiedades de la potenciación

- Propiedad distributiva con respecto al producto:
  $$(a.b)^n = a^n.b^n$$
- Propiedad distributiva con respecto al cociente:
  $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
- Producto de potencias de igual base:
  $$a^n.a^m = a^{n+m}$$
- Cociente de potencias de igual base:
  $$a^n : a^m = a^{n-m}$$
- Potencia de potencia:
  $$(a^n)^m = a^{n.m}$$

¡ATENCIÓN!

La potencia NO ES DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA SUMA NI A LA RESTA.

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$

Con un contraejemplo se evidencia la propiedad:

$$(2+1)^2 = 3^2 = 9$$

Por otro lado,

$$2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

Entonces:

$$(2+1)^2 \neq 2^2 + 1^2$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 4 y 5 del TP 1.

Radicación de números reales

Si a es un número real y n es un número entero positivo mayor o igual que 2, la raíz enésima de a es el número x, tal que $x^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = x \text{ sí y sólo si } x^n = a$$

El número a se llama radicando, el número n se llama índice, el número x raíz enésima y el símbolo $\sqrt{}$ radical.

Consideraciones:

- Si a es negativo y n es un número par, entonces la raíz enésima no es un número real. Por ejemplo: $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$
- Si a es negativo y n es un número impar, entonces x es negativo. Por ejemplo: $\sqrt[3]{-27} = -3 \; pues \; (-3)^3 = -27$
- Si a es positivo y n es un número par, entonces x es positivo. Por ejemplo: $\sqrt{25} = 5 \; pues \; 5^2 = 25$ o $-\sqrt{16} = -4$
- Si a es positivo y n es un número impar, entonces x es un número positivo. Por ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 2 \; pues \; 2^3 = 8$

Propiedades de la radicación

- Propiedad distributiva con respecto al producto:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

- Propiedad distributiva con respecto al cociente:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

- Raíz de otra raíz:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

Operaciones con radicales

- *Simplificación de raíces*
  Es posible simplificar el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número sin alterar el resultado. Esta propiedad recibe el nombre de *simplificación de radicales*.

Ejemplos:

1)

$$\sqrt[5]{a^5} = a$$

2)

$$\sqrt[6]{x^2.y^4} = \sqrt[3]{x.y^2}$$

Observaciones:
Cada vez que el exponente sea igual al índice de la raíz:

- Si el índice de la raíz es impar, podemos simplificar directamente.
  En símbolos:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$$

- Si el índice de la raíz es par, el resultado será el valor absoluto de la base de la potencia.
  En símbolos:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$$

- *Extracción de factores fuera del radical*

  Aplicando propiedades de potenciación y radicación, cada vez que el **exponente del radicando sea mayor o igual que el índice de la raíz**, podemos simplificar extrayendo factores fuera del radical.

Ejemplos:

1)

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 . 2^2} = \sqrt[3]{2^3} . \sqrt[3]{2^2} = 2 . \sqrt[3]{2^2}$$

2)

$$\sqrt[4]{x^5 . y^6} = \sqrt[4]{x^4} . \sqrt[4]{x} . \sqrt[4]{y^4} . \sqrt[4]{y^2} = x . y . \sqrt[4]{x . y^2}$$

- *Multiplicación y división de radicales*

  Para poder realizar estas operaciones, previamente debemos reducir a **mínimo común índice**, y luego resolver en base a la operación dada.

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{2a} . \sqrt[6]{3b^2} . \sqrt{2c^3}$$

En este caso, debemos hallar un índice común a los índices dados, cuyo valor será el mínimo común múltiplo de ellos.

$$\sqrt[4]{2a}; \quad \sqrt[6]{3b^7}; \quad \sqrt{2c^3}$$

m.c.m (2; 4; 6)=12

$$\sqrt[4]{2a} = \sqrt[4.3]{2^{1.3} . a^{1.3}} = \sqrt[12]{2^3 . a^3}$$

$$\sqrt[6]{3b^7} = \sqrt[6.2]{3^{1.2} . b^{7.2}} = \sqrt[12]{3^2 . b^{14}}$$

$$\sqrt{2c^3} = \sqrt[2.6]{2^{1.6} . c^{3.6}} = \sqrt[12]{2^6 . c^{18}}$$

Entonces tenemos:

$$\sqrt[4]{2a} . \sqrt[6]{3b^7} . \sqrt{2c^3} = \sqrt[12]{2^3 . a^3} . \sqrt[12]{3^2 . b^{14}} . \sqrt[12]{2^6 . c^{18}} =$$

$$= \sqrt[12]{2^3 . a^3 . 3^2 . b^{14} . 2^6 . c^{18}} = \sqrt[12]{2^9 . 3^2 . a^3 . b^{14} . c^{18}}$$

$$= b.c.\sqrt[12]{2^9.3^2.a^3.b^2.c^6}$$

- *Racionalización de denominadores*

  Es el procedimiento mediante el cual expresamos a un cociente $\frac{a}{b}$, siendo $b \neq 0$, como otro cociente que no contiene raíces en el denominador.

  Podemos establecer tres casos:

Caso 1: se multiplica y divide por la raíz presente en el denominador.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3.\sqrt{2}}{\cancel{(\sqrt{2})^2}} = \frac{3.\sqrt{2}}{2}$$

Caso 2: se multiplica y divide por la raíz presente en el denominador elevada a un exponente conveniente.

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a.b^2}} = \frac{a}{\sqrt[3]{a.b^2}}.\frac{\sqrt[3]{\boldsymbol{a^2.b}}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{a^2.b}}} = \frac{a.\sqrt[3]{a^2.b}}{\sqrt[3]{a^3.b^3}}$$

$$= \frac{a.\sqrt[3]{a^2.b}}{a.b} = \frac{\sqrt[3]{a^2.b}}{b}$$

Caso 3: se multiplica y divide por el conjugado del denominador.

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}+\sqrt{\boldsymbol{b}}}{\sqrt{\boldsymbol{a}}+\sqrt{\boldsymbol{b}}}$$

$$= \frac{1.(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b}).(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\cancel{(\sqrt{a})^2}-\cancel{(\sqrt{b})^2}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

PARA RECORDAR…

Fórmula de la diferencia de cuadrados

$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

Potencias con exponente fraccionario

Si a es un número real y n y m son números enteros primos entre sí (máximo común divisor es 1), con $m \geq 2$, entonces: $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, siempre que exista $\sqrt[m]{a}$, dado que si m es par y a es negativo, la expresión no existe en el conjunto de los números$\mathbb{R}$.

Ejemplo:

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 6 al 11 del TP

Logaritmos de números reales

La logaritmación es una operación entre dos números reales a y b, llamados **base** y **argumento** respectivamente, que se define como:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Donde $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$

Ejemplos:

$$log_2 8 = 3 \ \Leftrightarrow \ 2^3 = 8$$

$$log_2 \frac{1}{4} = -2 \ \Leftrightarrow \ 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$log_9 3 = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Propiedades

- El logaritmo de 1, en cualquier base, es 0. En símbolos:
$$log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$$

- El logaritmo de un número, en su misma base, es 1. En símbolos:
$$log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$$

- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores en la misma base, si éstos existen. En símbolos:
$$log_a(x.y) = log_a x + \log_a y, \text{ siendo } x > 0\,, y > 0.$$

- El logaritmo de un cociente es igual a la resta de los logaritmos del dividendo y el divisor en la misma base, respectivamente, si éstos existen. En símbolos:
$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y \text{ , siendo } x > 0\,, y > 0.$$

- El logaritmo de una potencia es igual al exponente del argumento por el logaritmo de la base.
En símbolos:
$$log_a x^y = y.log_a x$$

Cambio de base

Algunas calculadoras científicas solo permiten obtener logaritmos decimales y neperianos:

Los LOGARITMOS DECIMALES son logaritmos en base 10, y se denotan de la siguiente forma: $log_{10} x = log\, x$, *omitiendo la base.*

Los LOGARITMOS NEPERIANOS o NATURALES son logaritmos cuya base es el número $e = 2{,}7182\ldots$, *y se denotan de la siguiente forma:* $log_e x = ln\, x$.

Si tuviéramos que calcular logaritmos en otra base, y no podemos realizarlo con nuestra calculadora, es conveniente realizar cambios de base.
Consideremos el siguiente caso: $log_a b$

Llamamos y al logaritmo que debemos calcular:

$$y = log_a b$$

Si aplicáramos la definición de logaritmo:

$$a^y = b$$

Aplicando logaritmo en base c a ambos miembros de la igualdad y la propiedad de logaritmos con respecto a la potencia, tenemos:

$$log_c a^y = log_c b$$

$$y. log_c a = log_c\ b$$

Despejando el valor de la incógnita, tenemos el cambio a la base c que buscábamos:

$$y = \frac{log_c b}{log_c a} \Leftrightarrow log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

Por medio de esta igualdad, podemos cambiar de base y calcular el logaritmo dado en cualquier base.

Ejemplo: Calcular el $log_3 4$ utilizando base 10.
Aplicando la fórmula de cambio de base tenemos:

$$log_3 4 = \frac{log\ 4}{log\ 3} \cong \frac{0{,}6020}{0{,}4771} = 1{,}2617$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 12 a 15 del TP 1.

INTERVALOS Y RECTA NUMERICA

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real a, se indica como $|a|$, es por definición igual a a si a es un número real positivo o cero, e igual al opuesto de a si a es un número negativo.

En símbolos:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

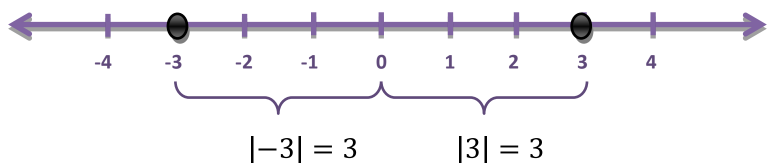
Si $a < 0$: $|-3| = -(-3) = 3$

Si $a > 0$: $|3| = 3$

Interpretación gráfica

Puede decirse también que el valor absoluto o módulo de un número a es **la distancia al cero**, siendo la distancia un número positivo. Todo número real se puede representar en la recta numérica.

Para el caso del ejemplo dado:



Propiedades de Valor Absoluto

Sean a y $b \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = 0$ si y solo si $a = 0$
3. $a \leq |a|$
4. $|a| = \sqrt[n]{a^n}$ $con\ n \in \mathbb{N}\ y\ n\ par$
5. $|a.b| = |a|.|b|$
6. Si $b \neq 0$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
7. Desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$
8. Si $k > 0$, entonces $|x| \leq k$ si y solo si $-k \leq x \leq k$
9. Además, si $|x| \geq k$ si y solo si $x \geq k$ ó $x \leq -k$
10. $|x| < |y|$ si y solo si $x^2 < y^2$

INTERVALOS

Un intervalo es un conjunto de números reales que se corresponden con los puntos de un segmento o una semirrecta en la recta real. Según incluyan o no a los puntos extremos, los intervalos pueden ser abiertos, semi-abiertos o cerrados.

Un intervalo **cerrado**, incluye los valores extremos a y b, y se simboliza utilizando corchetes $[a, b]$.

Intervalo cerrado $[a, b]$

Un intervalo **abierto**, no incluye los valores extremos $a \; y \; b$, y se simboliza utilizando paréntesis (a, b).

Intervalo abierto (a, b)

Podemos tener también intervalos **semi-cerrados** o **semi-abiertos**, para los que el extremo incluido en el conjunto solución se representará mediante un corchete y el valor excluido con un paréntesis.

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 16 del TP 1.