BLOQUE 3: FUNCION RACIONAL E IRRACIONAL

INTRODUCCIÓN

En este capítulo nos dedicamos a estudiar funciones racionales e irracionales. Para ello debemos repasar las expresiones algebraicas racionales, analizando su dominio de validez, al igual que con las expresiones irracionales.

Nuestro objetivo es que estudies estas funciones en particular, ya que son funciones que se utilizan frecuentemente y puedas realizar análisis completos de estas funciones.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Una expresión algebraica racional es el cociente entre dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ siendo éste último distinto del polinomio nulo.

El dominio de validez de una expresión algebraica racional $P(x)$ / $Q(x)$ son todos los números reales, excepto las raíces del denominador.

Ejemplos:

1. $R(x) = \frac{3x-2}{x^2-4}$

   Si observamos este ejemplo, podemos ver que la variable x puede representar cualquier número real excepto ± 2 ya que si toma cualquiera de estos valores estaríamos planteando una división por cero.

   Por lo tanto, en este caso podemos afirmar que el dominio de validez del ejemplo 1. está dado por: $Dom = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

2. $S(x) = \frac{5}{2x+6}$

   Para este ejemplo, el dominio de validez es: $Dom = \mathbb{R} - \{-3\}$

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

En determinados ejercicios, es conveniente trabajar con expresiones simplificadas. Para simplificar una expresión racional, primero se factoriza, luego se indica el dominio de validez del denominador y por último se simplifica.

Ejemplos:

1. $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$ Siendo el $Dom = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

2. $\frac{x^2-25}{x-5} = \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = x+5$ Siendo el $Dom = \mathbb{R} - \{5\}$

El proceso de simplificar nos permite acortar o reducir operaciones matemáticas, cuando operamos con expresiones algebraicas racionales.

Para simplificar una expresión algebraica podemos proceder de dos maneras diferentes.

- Dividir al numerador y al denominador por el divisor común de mayor grado de ambos, como se hizo en el segundo ejemplo.

- Factorizar el numerador y denominador y cancelar (o simplificar) los factores comunes. Por lo general, utilizamos éste procedimiento.

Ejemplo:

$$\frac{7x^2-14x+7}{5x^2-5} = \frac{7\,.\,(x^2-2x+1)}{5\,(x^2-1)} = \frac{7\,.\,\cancel{(x-1)}(x-1)}{5\,.\,\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{7\,(x-1)}{5\,(x+1)}$$

Mediante la **simplificación** hemos obtenido dos expresiones **equivalentes**. No podemos decir que son iguales, puesto que la simplificación no siempre es válida, por ejemplo, no se puede simplificar una expresión que valga **cero,** porque la división por **cero** no está definida.

¿Qué ocurre cuando $x = 1$?

$$\frac{7\,.1^2-14\,.1+7}{5\,.1^2-5} \neq \frac{7\,(1-1)}{5\,(1+1)}$$

$$\frac{0}{0} \neq \frac{0}{10}$$

$$indeterminada \neq 0$$

La igualdad no se cumple, pues la primera expresión es **indeterminada** y la segunda es 0.

Entonces para poder simplificar por $(x-1)$ debe ser:

$$x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

La igualdad se cumple para $x \neq 1$, es decir,

$\frac{7x^2-14x+7}{5x^2-5} = \frac{7\,(x-1)}{5\,(x+1)}$ sí y sólo sí $Dom = \mathbb{R} - \{1\}$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 1 del TP 3

OPERACIONES CON EXPRESIONES RACIONALES

SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

- ✓ **De igual denominador**

  Para sumar y/o restar expresiones algebraicas racionales de igual denominador, escribimos el mismo denominador y sumamos y/o restamos según corresponda, los numeradores.

  Después de operar con los numeradores, es conveniente factorizar el numerador y el denominador para ver si es posible simplificar.

Ejemplos:

1. $\frac{3x}{x^2-4} + \frac{6}{x^2-4} = \frac{3x}{(x-2)(x+2)} + \frac{6}{(x-2)(x+2)} =$

$$= \frac{3x+6}{(x-2)(x+2)} = \frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{(x-2)}$$

   Siendo el dominio de validez $Dom = \mathbb{R} - \{-2;\ 2\}$.

2. $\frac{x^2+x-5}{x-7} - \frac{x^2-2}{x-7} = \frac{x^2+x-5-(x^2-2)}{x-7} =$

$$= \frac{x^2+x-5-x^2+2}{x-7} = \frac{x-3}{x-7}$$

Siendo el dominio de validez $Dom = \mathbb{R} - \{-7\}$.

- ✓ **De distinto denominador**

  Para sumar y/o restar expresiones algebraicas racionales de distinto denominador, debemos sumar y/o restar expresiones equivalentes a ellas, que tengan el mismo denominador.

  Lo más conveniente es factorizar los denominadores para luego tomar como denominador común el múltiplo común de menor grado $(m.c.m.gr)$ de los denominadores.

  Después de operar, si es posible simplificar.

Ejemplos:

1. $\frac{x-15}{x^2-25}+\frac{3}{2x+10}+\frac{1}{x-5}=\frac{x-15}{(x-5)(x+5)}+\frac{3}{2(x+5)}+\frac{1}{x-5}=$

Buscamos el múltiplo común de menor grado de los denominadores:
$m.c.m.\,gr\,\{x^2-25\,;\;\,2x+10;\;x-5\}=2(x-5)(x+5)$. Siendo el dominio de validez $Dom=\mathbb{R}-\{-5;5\}$.

$$=\frac{2(x-15)+3(x-5)+2(x+5)}{2(x-5)(x+5)}$$
$$=\frac{2x-30+3x-15+2x+10}{2(x-5)(x+5)}=\frac{7x-35}{2(x-5)(x+5)}$$
$$=\frac{7(x-5)}{2(x-5)(x+5)}=\frac{7}{2(x+5)}$$

2. $\frac{4}{3x^2-6x+3}-\frac{2x}{x^2+3x-4}=\frac{4}{3(x^2-2x+1)}-\frac{2x}{(x-1)(x+4)}=$

$$=\frac{4}{3(x-1)^2}-\frac{2x}{(x-1)(x+4)}$$

Buscamos el múltiplo común de menor grado de los denominadores:
$m.c.m.\,gr\,\{3x^2-6x+3\,;\;\;x^2+3x-4\,\}=3(x-1)^2(x+4)$

Hallamos las expresiones equivalentes a las dadas. Para ello, multiplicamos el numerador y el denominador de cada una por los factores que faltan para completar el múltiplo común.

$$=\frac{4(x+4)-2\,.3\,x(x-1)}{3(x-1)^2(x+4)}=\frac{4x+16-6x(x-1)}{3(x-1)^2(x+4)}$$

$$=\frac{4x+16-6x^2+6x}{3(x-1)^2(x+4)}=\frac{-6x^2+10x+16}{3(x-1)^2(x+4)}=\frac{-6(x+1)\left(x-\frac{8}{3}\right)}{3(x-1)^2(x+4)}$$

$$=\frac{-2(x+1)\left(x-\frac{8}{3}\right)}{(x-1)^2(x+4)}$$

La definición de suma algebraica, se generaliza para cualquier número de expresiones algebraicas racionales.

Al factorizar el numerador y denominador se observa que se hace imposible la simplificación.

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 2 del TP 3

MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Al multiplicar dos expresiones algebraicas racionales obtenemos otra expresión racional equivalente a la dada tal que, su numerador es el producto de los numeradores de las expresiones dadas y su denominador es el producto de los denominadores de ellas.

En símbolos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)\,.\,R(x)}{Q(x)\,.\,S(x)}$$

Para resolver una multiplicación de expresiones algebraicas, conviene primero factorizar cada una de las expresiones, luego simplificar y por último resolver el producto.

Ejemplo:

$$\frac{6x^2 - 24}{12x^2 - 24x^3} \cdot \frac{12x^4}{5x^2 + 20x + 20} = \frac{6\,(x^2 - 4)}{\cancel{12x^2}(1 - 2x)} \cdot \frac{\cancel{12x^4}}{5(x^2 + 4x + 4)} =$$

$$= \frac{6\,(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{(1 - 2x)} \cdot \frac{x^2}{5(x + 2)^2} = \frac{6x^2(x - 2)}{5(1 - 2x)(x + 2)}$$

Siendo el dominio de validez $Dom = \mathbb{R} - \left\{-2;\ 0;\ \frac{1}{2}\right\}$.

DIVISIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

El cociente de dos expresiones algebraicas racionales es igual al producto del dividendo por el inverso del divisor. Luego se procede como en el caso de la multiplicación de expresiones algebraicas racionales.

Para dividir dos expresiones algebraicas racionales, multiplicamos a la primera, por la inversa de la segunda.

En símbolos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(x)} = \frac{P(x)\ S(x)}{Q(x)\ R(x)}$$

La inversa de una expresión racional $\frac{R(x)}{S(x)}$ es la expresión $\frac{S(x)}{R(x)}$ siempre que $R(x)$ sea un polinomio no nulo.

Ejemplo:

$$\frac{x^4-x^2}{x^5}:\frac{5x+5}{x^4+2x^3}=\frac{x^4-x^2}{x^5}\cdot\frac{x^4+2x^3}{5x+5}=$$

$$=\frac{x^2(x^2-1)}{x^5}\frac{x^3(x+2)}{5(x+1)}=\frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{5(x+1)}=\frac{(x-1)(x+2)}{5}$$

Siendo el dominio de validez $Dom=\mathbb{R}-\{\ -1,-2{,}0\ \}$.

Para resolver una división de expresiones algebraicas, conviene primero factorizar cada una de las expresiones, observar los denominadores para saber qué valores excluir del dominio, luego invertir el divisor (mirar también ese denominador), simplificar convenientemente y por último resolver el ejercicio planteado.

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 3 y 4 del TP 3

FUNCION RACIONAL

Se denomina función racional a toda función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ tal\ que\ f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x) y\ Q(x)$ son polinomios y $Q(x)\neq 0$.

El dominio de una función racional es el conjunto de todos los valores de la variable independiente que no anulan el denominador.

$$Domf=\{x\in\mathbb{R}/Q(x)\neq 0\}$$

Ejemplos:

a) $f(x)=\frac{x+8}{x-2}, Domf=\mathbb{R}-\{2\}$

b) $g(x)=\frac{x-3}{x(x-3)}, Domg=\mathbb{R}-\{0{,}3\}$

c) $h(x)=\frac{3x+4}{x^2-9}, Domh=\mathbb{R}-\{-3{,}3\}$

d) $i(x)=\frac{x}{x^2+1}, Domi=\mathbb{R}$

Para realizar el gráfico aproximado de una función racional, se debe:

- Determinar el dominio de la función
- Hallar la intersección con el eje y, la cual existe si x=0 pertenece al dominio de la función y es el punto (0,f(0)). Dicho punto corresponde a la ordenada al origen.

- Hallar las raíces o ceros de la función, que son los valores que pertenecen al dominio de la misma y que anulan la función, o sea, las raíces del numerador.
- Calcular la asíntota vertical de la función. Para ello se debe transformar en una expresión racional irreducible, luego se busca el valor para el cual se anula el denominador pero no el numerador.

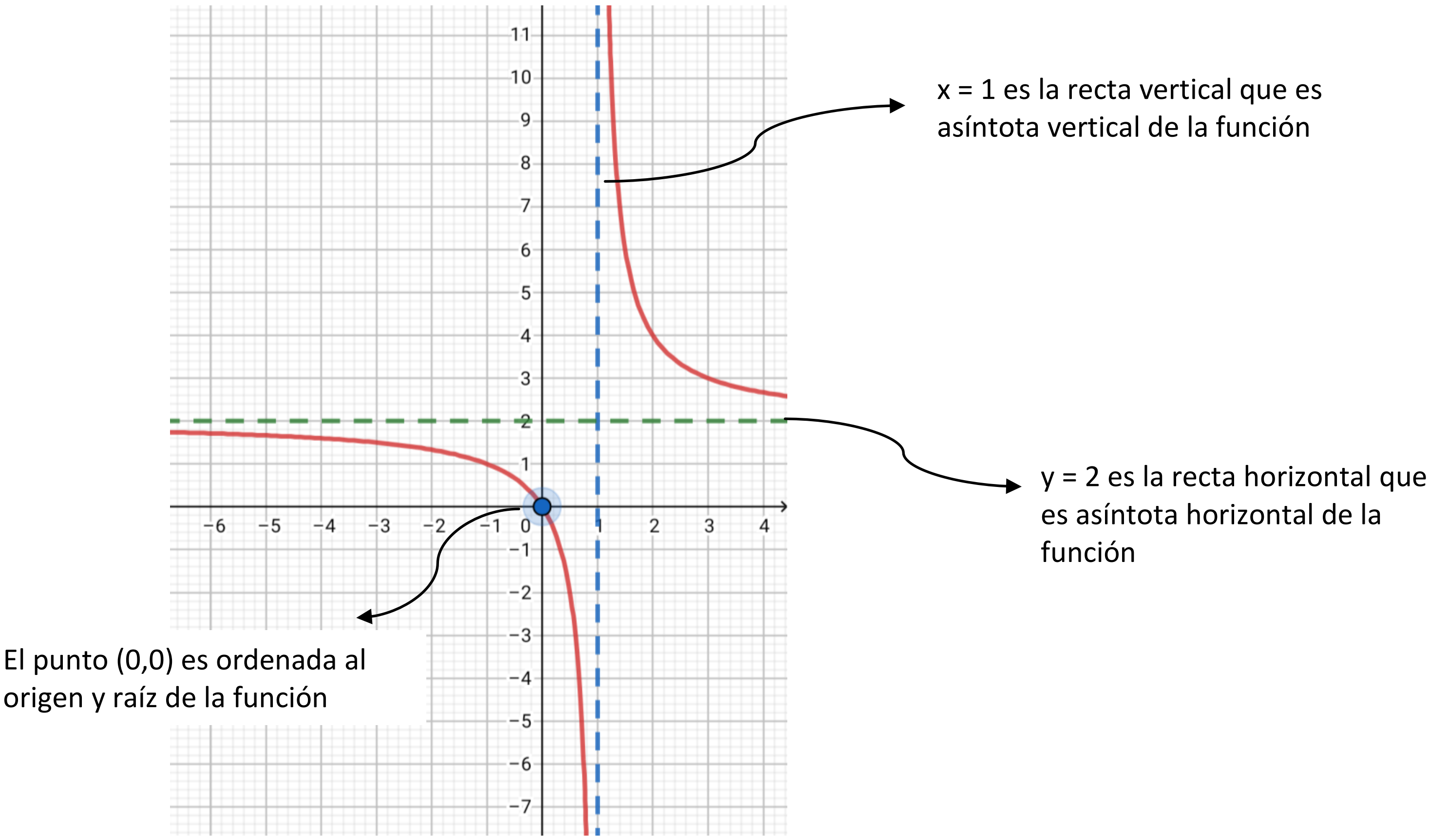
Asíntota vertical
Si $a \in \mathbb{R}$ es cero de Q(x) y no anula a P(x), la recta $x = a$ es una asíntota vertical

Si el valor $a \in \mathbb{R}$ anula tanto el numerador y denominador es un **punto de discontinuidad** de la función.
- Calcular la asíntota horizontal, que en una función racional existe si el **grado del polinomio numerador es menor o igual al grado del polinomio denominador**.

gr P(x) < gr Q(x) $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{y = 0}$ es asíntota horizontal de la función
gr P(x) = gr Q(x) $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{y = \frac{coeficiente\ principal\ de\ P(x)}{coeficiente\ principal\ de\ Q(x)}}$ es asíntota horizontal de la función.

Ejemplo: Dada la función racional $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, buscaremos sus elementos para poder graficarla y hacer un análisis completo.

Calculamos su dominio, excluyendo los valores que anulan el denominador. En este ejemplo, $x = 1$ hace 0 el denominador, entonces $Domf = \mathbb{R} - \{1\}$
Para hallar la ordenada al origen, calculamos $f(0) = \frac{2.0}{0-1} = 0$, es decir que la función pasa por el punto (0,0). En este caso coincide la ordenada al origen con la raíz de la función.
Para analizar la asíntota vertical, el valor $x = 1$ anula el denominador y no el numerador, entonces es asíntota vertical.
Para analizar la asíntota horizontal, observamos que tanto numerador como denominador tienen el mismo grado, entonces la asíntota horizontal esta en $y = \frac{2}{1} = 2$.
Con estos datos podemos graficar la función:



Luego de graficar la función podemos observar cuál es la su imagen:

$$Im\, f(x) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty) = \mathbb{R} - \{2\}$$

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$, buscaremos sus elementos para poder graficarla y hacer un análisis completo.

Calculamos su dominio, excluyendo los valores que anulan el denominador. En este ejemplo, $x = -2$ y $x = 2$ hacen cero el denominador, entonces $Dom f = \mathbb{R} - \{-2,2\}$
Para hallar la ordenada al origen, calculamos $f(0) = \frac{0+2}{0^2-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$, es decir que la función pasa por el punto $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.
Para calcular la raíz de la función, igualamos a cero,
$\frac{x+2}{x^2-4} = 0 \Longrightarrow x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$ es un valor que excluimos del dominio, por lo tanto no puede ser raíz.
Esto nos indica que la expresión se puede simplificar, si se factoriza el denominador con diferencia de cuadrados, se obtiene la función simplificada:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$

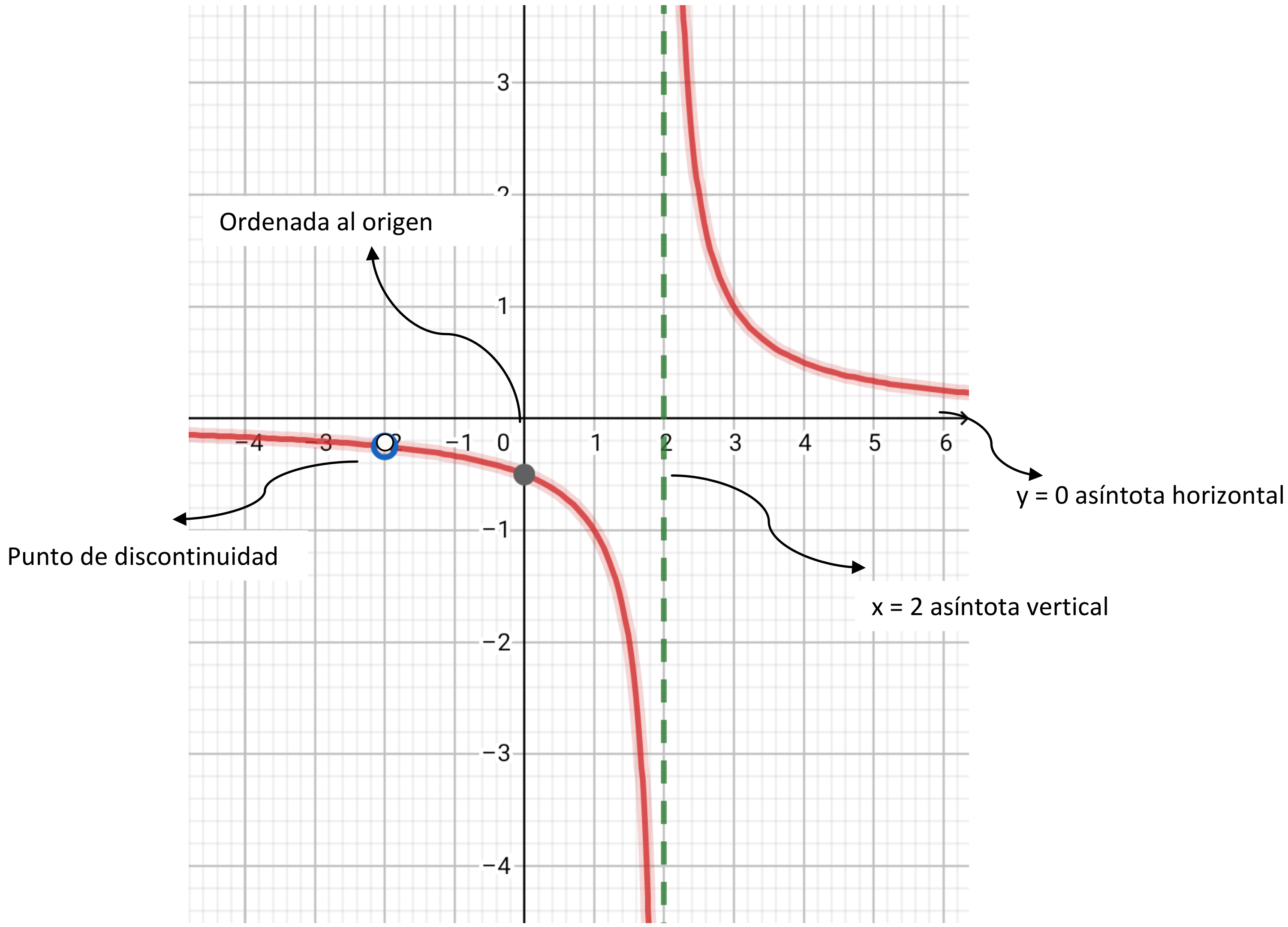
En esta expresión simplificada observamos que la función no tiene raíces.

Para analizar la asíntota vertical, el valor $x = -2$ anula tanto el denominador como el numerador, por lo tanto NO es asíntota sino un punto de discontinuidad de la función. En cambio, el valor $x = 2$ anula el denominador y no el numerador, entonces es asíntota vertical.

El punto de discontinuidad se calcula en la función simplificada, $f(-2) = \frac{1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$.

Para analizar la asíntota horizontal, observamos que numerador y denominador tienen distintos grados, como el grado del denominador es mayor que el grado del numerador, la asíntota horizontal esta en $y = 0$.

Con estos datos podemos graficar la función:



Luego de graficar la función podemos observar cuál es la su imagen:

$$Im\ f(x) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}; 0\right\}$$

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2+x-6}$, buscaremos sus elementos para poder graficarla y hacer un análisis completo.

Primero factorizaremos el polinomio denominador, para buscar los valores de x que excluiremos del dominio.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 6} = \frac{x}{(x-2)(x+3)}$$

Entonces $Domf = \mathbb{R} - \{-3,2\}$

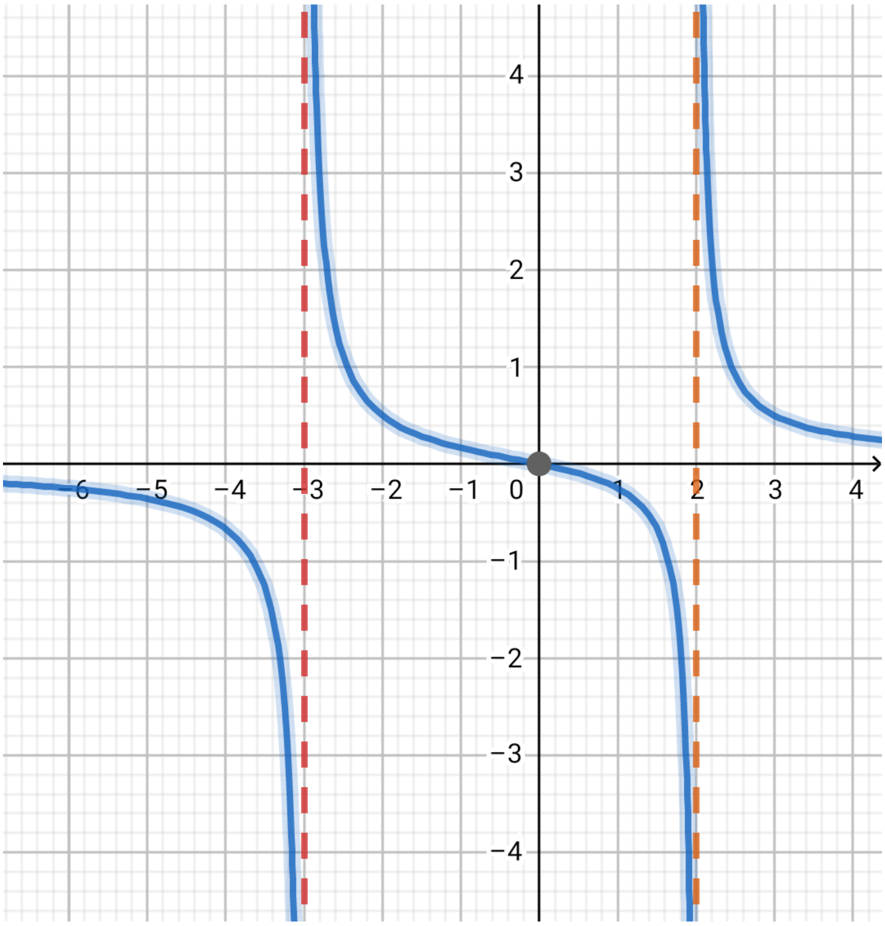
Observamos que la expresión racional no se puede simplificar, por lo tanto tendrá dos asíntotas verticales, pues en los valores $x = -3$ y $x = 2$ se anula el denominador y no el numerador.

Para buscar las raíces, igualamos la expresión a cero,

$$\frac{x}{(x-2)(x+3)} = 0 \rightarrow x = 0$$

Para analizar la asíntota horizontal, el grado del denominador es mayor que el grado del numerador, por lo tanto la asíntota horizontal es la recta $y = 0$.

El gráfico que obtenemos es:



$$Im\, f(x) = \mathbb{R}$$

ECUACIONES RACIONALES

Son aquellas que contienen expresiones algebraicas racionales. También se las denomina ecuaciones fraccionarias debido a que la incógnita aparece en el denominador. Por esta razón, en estas ecuaciones es necesario definir el dominio de validez, es decir los valores que puede tomar la variable x (siempre vamos a excluir del dominio aquellos valores que anulan el denominador).

Para resolverlas es conveniente realizar las operaciones necesarias para llevar la ecuación a una expresión equivalente que no contenga incógnitas en el denominador. Estas operaciones suelen ser multiplicar por o simplificar factores que contienen a la incógnita, por lo que será necesario, una vez obtenida la solución, proceder a verificarla.

Cuando sea posible, es conveniente reescribir las expresiones racionales en términos de un denominador común. De esta manera si los denominadores son iguales, también lo serán los numeradores.

Ejemplos:

1) En este caso los denominadores son iguales

$$\frac{2x-5}{x-4} = \frac{11}{x-4}$$

Analizamos el dominio de validez: esta ecuación es válida para cualquier valor de x excepto para x=4, pues es el valor de x que anula el denominador $\therefore\ Dom = \mathbb{R} - \{4\}$

Para resolverla, igualamos los numeradores y resolvemos una ecuación lineal
$2x - 5 = 11 \quad \therefore \quad 2x = 16 \quad \therefore \quad x = 8$

Verificación:

$$\frac{2\,.\,8-5}{8-4} = \frac{11}{8-4}$$

$$\frac{11}{4} = \frac{11}{4}$$

$\therefore$ Significa **POR LO TANTO**

2) En este ejemplo si bien los denominadores son distintos, podemos realizar operaciones que nos lleven a que sean iguales.

$$\frac{7}{x+2} + \frac{5}{x-2} = \frac{10x-2}{x^2-4}$$

Primero analizamos el dominio de validez de la ecuación: x no puede tomar los valores 2 y -2, entonces $Dom = \mathbb{R} - \{-2{,}2\}$

Ahora para resolverla, realizamos la suma de los términos del primer miembro

Forma genérica de la diferencia de cuadrados:

$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$

$$\frac{7\,(x-2)+5\,(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{10x-2}{x^2-4}$$

El denominador del primer miembro es una diferencia de cuadrados

$$\frac{7x-14+5x+10}{x^2-4}=\frac{10x-2}{x^2-4}$$

Una vez que logramos igualar los denominadores, igualamos los numeradores y resolvemos la ecuación lineal obtenida

$$7x-14+5x+10=10x-2$$

$12x-4=10x-2$

$$2x=2$$

$$x=1$$

No te olvides de **verificar** la solución hallada.

Verificación:

$$\frac{7}{1+2}+\frac{5}{1-2}=\frac{10.1-2}{1^2-4}$$

$$\frac{7}{3}-5=\frac{8}{-3} \quad ; \quad -\frac{8}{3}=-\frac{8}{3}$$

3)

$$\frac{4}{m}=\frac{3}{m-2}$$

Dominio de validez: m no puede tomar el valor 0 ni el valor 2, $\therefore Dom=\mathbb{R}-\{0,2\}$
Para resolver la ecuación,

$$4.(m-2)=3.m$$
$$4.m-8=3.m$$
$$4.m-3.m=8$$
$$m=8$$

Verificación:

$$\frac{4}{8}=\frac{3}{8-2}$$
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

4) En este ejemplo previo a multiplicar por los denominadores, debemos sumar los términos del primer miembro, para lo cual debemos buscar denominador común, factorizando previamente los denominadores:

$$\frac{1-x}{x^2+4x+4}+\frac{3}{x+2}=\frac{2}{5+x}$$

$$\frac{1-x}{(x+2)^2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2}{5+x}$$

Recordemos del bloque de polinomios, la manera en que factorizamos polinomios.

$$\frac{1-x+3(x+2)}{(x+2)^2}=\frac{2}{5+x}$$

Podemos aquí analizar el dominio de validez de la ecuación: habría que excluir el valor -5 y -2, que son los valores que anulan denominadores, $\therefore Dom=\mathbb{R}-\{-5,-2\}$
Una vez que logramos un único denominador en cada miembro proseguiremos con el pasaje de términos

$$\frac{2x+7}{(x+2)^2}=\frac{2}{5+x}$$

Obtenemos así una ecuación polinómica sin denominadores

$$(2x+7)(5+x)=2(x+2)^2$$

$$10x+2x^2+35+7x=2(x^2+4x+4)$$

$$17x+2x^2+35=2x^2+8x+8$$

$$9x+27=0$$

$$x=-\frac{27}{9}$$

$$x=-3$$

Verificación:

$$\frac{1-(-3)}{(-3)^2+4.(-3)+4}+\frac{3}{-3+2}=\frac{2}{5+(-3)}$$

$$\frac{4}{1}+\frac{3}{-1}=\frac{2}{2}$$

$$1=1$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 5 al 8 del TP 3

INECUACIONES RACIONALES

En las inecuaciones racionales, para encontrar los valores de "x" que satisfacen la expresión debemos tener en cuenta que estamos trabajando con una fracción y debemos estudiar su signo. Como se trata de una división, el signo de la fracción depende de los signos del numerador y denominador.

Recordemos que, si numerador y denominador tiene el mismo signo, la fracción será positiva, y si tienen distinto, la fracción será negativa.

Vamos a ver con los siguientes ejemplos cómo proceder para su resolución:

1)

$$\frac{x+3}{12-3x}\geq 0$$

Como se dijo, el signo de la fracción depende de los signos del numerador y denominador y para este ejemplo, el cociente debe ser positivo (≥ 0).

Entones analizaremos los casos en que el numerador y el denominador tienen el mismo signo:

a) $\frac{Positivo\ (\geq 0)}{Positivo\ (>0)}$ En el denominador menor estricto, ya que no puede ser = 0

Numerador $\qquad x + 3 \geq 0 \quad \therefore \quad x \geq -3$

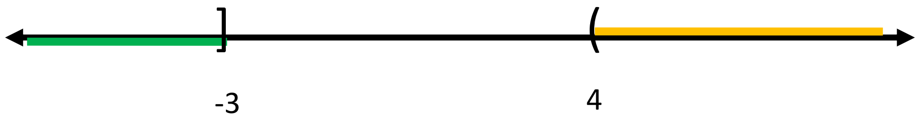
Denominador $\qquad 12 - 3x > 0 \quad \therefore \quad 12 > 3x \quad \therefore \quad \frac{12}{3} > x \quad \rightarrow \quad x < 4$

Del gráfico en la recta numérica, vemos que la intersección se da en el intervalo $[-3; 4)$.

$b)$ $\frac{Negativo\ (\leq 0)}{Negativo\ (<0)}$

Numerador $\qquad x + 3 \leq 0 \quad \therefore \quad x \leq -3$

Denominador $\qquad 12 - 3x < 0 \quad \therefore \quad 12 < 3x \quad \therefore \quad \frac{12}{3} < x \quad \rightarrow \quad x > 4$



Del segundo análisis, vemos que en la recta numérica no hay intersección entre los intervalos, es el conjunto vacío (∅).

El resultado final es la **unión** de los casos a) y b). Por lo tanto, la solución de la inecuación planteada es la siguiente:

$$\boldsymbol{S} = [-3; 4) \cup \emptyset = [\boldsymbol{-3}; \boldsymbol{4})$$

En cada caso, el resultado parcial es la **intersección** de los intervalos obtenidos. El resultado FINAL en la **unión** de los resultados parciales.

2) Veamos otro ejemplo

$$\frac{2x+3}{-x+1} < 0$$

En este caso el cociente entre numerador y denominador debe ser negativo, por lo que tenemos las siguientes opciones:

a) $\frac{Positivo\ (>0)}{Negativo\ (<0)}$

Numerador $\quad 2x + 3 > 0 \quad \therefore \quad 2x > -3 \quad \therefore \quad x > -\frac{3}{2}$

Denominador $\quad -x + 1 < 0 \quad \therefore \quad -x < -1 \quad \therefore \quad x > 1$

El resultado de este caso es $(1; \infty)$

$b)$ $\frac{Negativo\ (<0)}{Positivo\ (>0)}$

Numerador $\quad 2x + 3 < 0 \quad \therefore \quad 2x < -3 \quad \therefore \quad x < -\frac{3}{2}$

Denominador $\quad -x + 1 > 0 \quad \therefore \quad -x > -1 \quad \therefore \quad x < 1$

El resultado de este segundo caso es $(\infty; -3/2)$

Por lo tanto el resultado final de la inecuación es la unión de las soluciones parciales a) y b):

$$\boldsymbol{S} = \left(\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (1; \infty)$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 9 del TP 3

FUNCION IRRACIONAL

Una función irracional es aquella que puede obtenerse efectuando sobre la variable x la operación de radicación.

Por ejemplo,

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad o \qquad g(x) = \sqrt{x-2}$$

Para determinar el dominio de una función irracional, se han de discriminar dos casos en relación al índice de la raíz.

Si el índice es par, la función está definida cuando el radicando es positivo o nulo.
Si el índice es impar, la función está definida para todo valor de x.

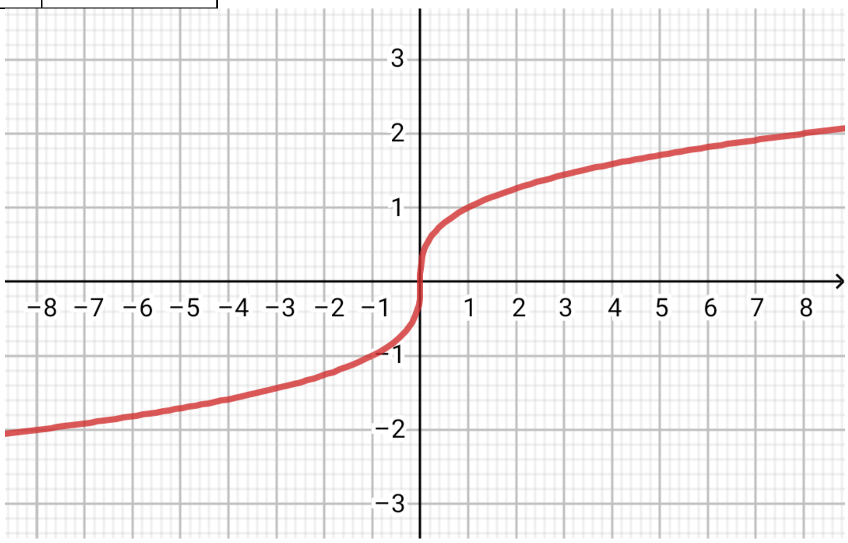
Dada la función $\sqrt[n]{P(x)}$
- Si n es par, $Dom = \{x/P(x) \geq 0\}$
- Si n es impar, $Dom = \mathbb{R}$

Para graficar es conveniente indicar, en primer lugar, el dominio y luego confeccionar una tabla de valores del dominio que faciliten los cálculos.

Ejemplo: La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, está definida para cualquier valor de x por tener la raíz índice impar, es decir, $Domf = \mathbb{R}$

Hacemos una pequeña tabla para poder ubicar unos puntos y graficar

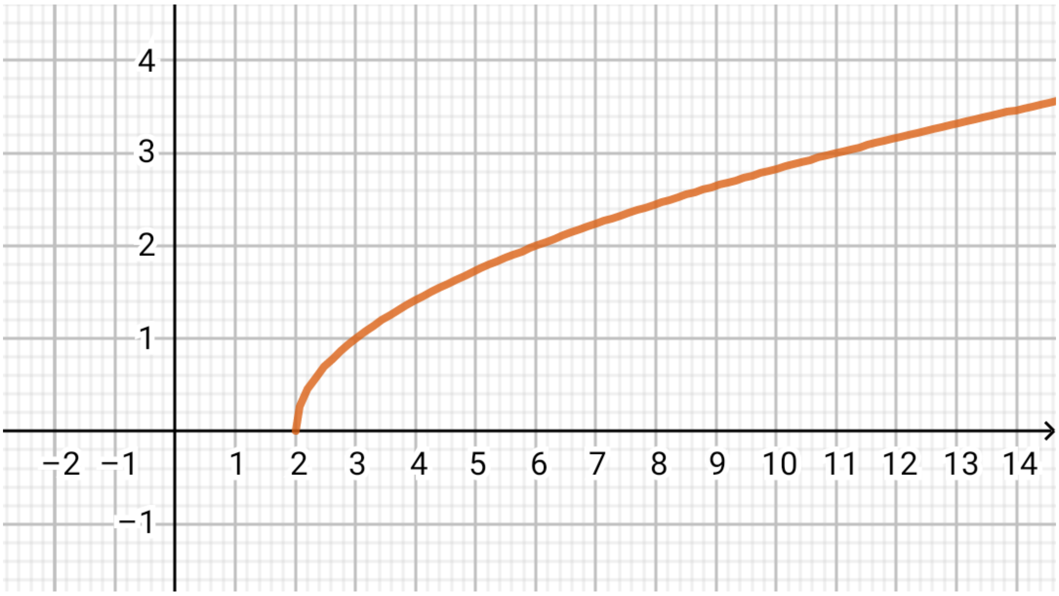
x	$f(x) = \sqrt[3]{x}$
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2



Ejemplo: La función $g(x) = \sqrt{x-2}$, estará definida cuando x-2 sea mayor o igual que cero, pues no está definida la raíz cuadrada para valores negativos.
Entonces el dominio de la función serán todos los valores de x que verifiquen,
$x - 2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 2$, es decir, $Domg = [2, +\infty)$

Hacemos una tabla

x	$g(x) = \sqrt{x-2}$
2	0
3	1
6	2
11	3



ECUACIONES IRRACIONALES

Una ecuación irracional es aquella en la que la incógnita se encuentra bajo el símbolo de raíz.

Para resolverla debemos lograr eliminar las raíces que afectan a la incógnita, elevando ambos miembros a la potencia necesaria. Una vez hallada la solución, debemos verificarla en la ecuación original.

> Si elevamos ambos miembros de una ecuación al cuadrado debe comprobarse si las raíces que se obtienen verifican la ecuación original.
>
> Como vamos a trabajar en el campo de los números reales, tendremos que definir el dominio de la función antes de resolver la ecuación y luego verificar que todos los valores que se obtienen pertenecen al dominio.
> Las que no pertenecen al dominio tampoco pertenecen al conjunto solución.

Ejemplo:

Resolvamos $\sqrt{2x-3}-x=-1$

Primero calculamos el dominio de definición, es decir, $2x-3\geq 0$, entonces $x\geq \frac{3}{2}$, $Dom=\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

Es conveniente aislar el radical en uno de los miembros $\sqrt{2x-3}=x-1$

Elevamos al cuadrado ambos miembros

$$(\sqrt{2x-3})^2=(x-1)^2$$

$$2x-3=x^2-2x+1$$

Resolvemos la ecuación cuadrática

$$2x-3=x^2-2x+1$$

$$0=x^2-4x+4$$

Es un trinomio cuadrado perfecto $(x-2)^2=0$

$$x=2$$

Verificación $\sqrt{2\,.2-3}-2=-1$

$$-1=-1$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios del 10 al 12 del TP 3