BLOQUE 5: TRIGONOMETRÍA

INTRODUCCIÓN

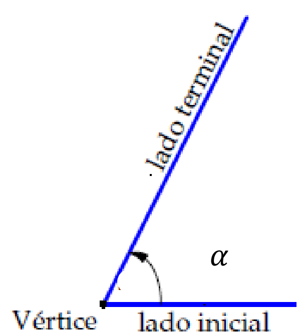
Con este capítulo nos proponemos hacer un repaso sobre los conceptos centrales de trigonometría; el objetivo es que comprendas la importancia de las razones trigonométricas y su aplicación, que profundices el conocimiento de las funciones seno y coseno y cómo se pueden aplicar para resolver ecuaciones trigonométricas.

ÁNGULOS

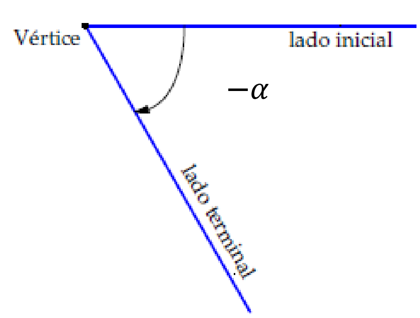
Un ángulo α en el plano es la región determinada por dos semirrectas con origen común, cuando se hace girar el lado inicial hasta el lado final en el sentido contrario a las agujas del reloj. Este sentido es llamado antihorario.

Por convención:
El ángulo es positivo cuando está generado en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y negativo cuando está generado en el sentido horario.

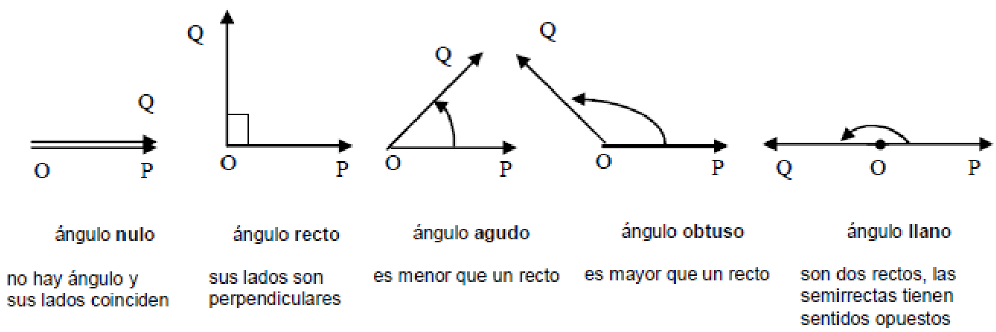
Ángulo positivo



Ángulo negativo



Clasificación de ángulos



Los ángulos que tienen el mismo lado terminal, pero que difieren en un número entero de giros completos, se denominan ***congruentes***. Por ejemplo, si $\alpha = 60° \; y \; \beta = 420°$ son ángulos congruentes.

Sistemas de medición de ángulos

Puesto que en este capítulo trabajaremos con ángulos, es necesario revisar los diferentes sistemas de medición de los mismos. Tanto para el cálculo a mano o con calculadora siempre será fundamental tomar conciencia en el sistema de medición de ángulos que estamos trabajando. Esto constituye una fuente de errores importante a la hora de los cálculos con calculadora.

Los sistemas de medición de ángulos más utilizados son el sistema sexagesimal y el sistema radial.

- *Sistema sexagesimal:*
  La unidad de medida es el grado sexagesimal. Este sistema consiste en la división de la circunferencia en $360°$. De esta manera, se define el grado como:

$$1° = \frac{1 \; rotación \; completa}{360°}$$

  Además, esta manera de particionar la circunferencia establece las graduaciones menores al grado en minutos y segundos, las cuales se obtienen dividiendo en 60 al grado y al minuto respectivamente.
  Es decir:

$$1' = \frac{1°}{60} \qquad\qquad 1'' = \frac{1'}{60}$$

Este sistema de numeración tiene por base 60. Nosotros, en nuestra cotidianidad estamos familiarizados al sistema decimal, por lo que no nos resulta natural usar este sistema. Solamente usamos este sistema en dos aspectos de nuestras vidas:

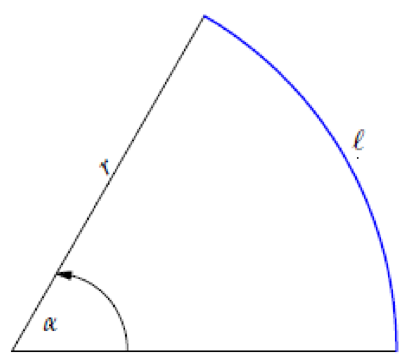
- La hora. En efecto, cada hora son 60 minutos y cada minuto, 60 segundos. En este caso, el día es dividido en 24 horas.
- Los ángulos.

Operar en base 60 tiene particularidades similares a la base 10, sólo que los conceptos de unidad, decena y centena deben reformularse a grado, minuto y segundo.

En base 60, lo que equivaldría a la unidad es el segundo. De esta manera, cuando se supera 59, se suma un número al minuto. Si se supera 59 minutos se suma 1 a la unidad siguiente (grado, para ángulos y horas para la hora). Y así sucesivamente.

- ***SISTEMA RADIAL:***

La unidad de medida es el radián. Se llama radián al arco de circunferencia cuya longitud l es igual al radio r de la misma.



$$\alpha = \frac{longitud\ del\ arco}{radio} = \frac{l}{r}$$

Ahora, si queremos calcular la longitud del arco de circunferencia, ¿cómo lo haremos?

Para esto es necesario recordar la medida del perímetro de la circunferencia:

$$\boxed{\boldsymbol{Perímetro\ de\ la\ circunferencia = 2.\pi.r}}$$

Si $\alpha = 360°\ (1\ circunferencia),\ entonces\ l = 2.\pi.r$

Si $\alpha = 180°\ \left(\frac{1}{2} de\ circunferencia\right), entonces\ l = \frac{2.\pi.r}{2} = \pi.r$

Si $\alpha = 90°\ \left(\frac{1}{4} de\ circunferencia\right), entonces\ l = \frac{2.\pi.r}{4} = \frac{\pi.r}{2}$

Lo que significa que la longitud del arco es **directamente proporcional** al ángulo en cuestión. Con lo que podremos calcular la longitud de arco de circunferencia correspondiente a un ángulo α como:

$$l_\alpha = \underbrace{\frac{\alpha}{360°}}_{\textit{fracción de circunferencia}} .2.\pi.r$$

Si quisiéramos calcular la medida de dichos ángulos en radianes, tenemos:

Si $\alpha = 360°, entonces\ \alpha\ en\ radianes = \frac{2.\pi.r}{r} = 2.\pi$
Si $\alpha = 180°, entonces\ \alpha\ en\ radianes = \frac{\pi.r}{r} = \pi$
Si $\alpha = 90°, entonces\ \alpha\ en\ radianes = \frac{\pi.r}{2.r} = \frac{\pi}{2}$
De donde surge la siguiente equivalencia:

$$\boxed{\boldsymbol{180°\ equivalen\ a\ \pi\ radianes}}$$

Equivalencias entre ambos sistemas

Teniendo en cuenta la relación anterior, podremos hallar la medida en radianes de un ángulo si conocemos su medida en grados, o viceversa.

Para ello tenemos dos formas de plantearlo:

Como proporción:	***Como regla de tres simple:***
$\frac{\alpha\ en\ grados}{180°} = \frac{\alpha\ en\ radianes}{\pi}$	$180°$ ——— π $\alpha\ en\ grados$ — $\alpha\ en\ radianes = \frac{\alpha\ en\ grados\ .\pi}{180°}$ O también π ——— $180°$ $\alpha\ en\ radianes$ — $\alpha\ en\ grados = \frac{\alpha\ en\ radianes.180°}{\pi}$

Veamos algunos ejemplos:

- Expresar en radianes el ángulo $\alpha = 30°$
  Si lo resolvemos como proporción:

$$\frac{30°}{180°} = \frac{\alpha\ en\ radianes}{\pi}$$

Para recordar…

Siempre el ángulo en radianes queda expresado en términos de π.

  Despejamos:

$$\frac{30°.\pi}{180°} = \alpha\ en\ radianes$$

$$\frac{1}{6}\pi = \alpha\ en\ radianes$$

- Expresar en grados el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{3}$
  Si lo resolvemos utilizando la regla de tres simple:

$$\pi \text{ ---------------- } 180°$$

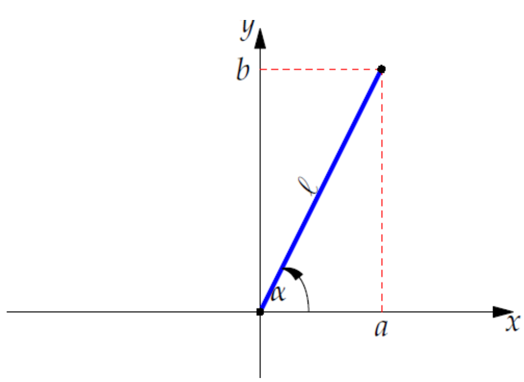
$$\frac{\pi}{3} \text{ ---------------- } \qquad \alpha = \frac{180°.\frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{180°}{3} = 60°$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 1 al 12 del TP 5.

Ángulos en sistemas de coordenadas

Un ángulo está ubicado en posición normal o estándar si el vértice está en el origen del sistema de coordenadas, su lado inicial sobre el eje positivo de las x y el ángulo se mide positivamente.

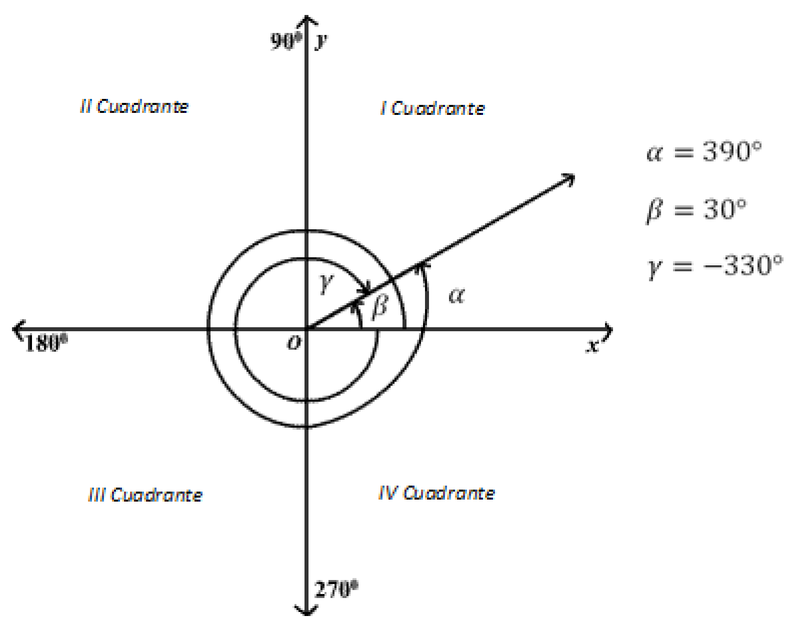
Si consideramos un punto (a, b) en el lado terminal del ángulo, la situación es:



En la figura se muestra un ángulo en posición normal, con lado terminal l y ubicado en el primer cuadrante, esto es, $a > 0$ y $b > 0$.

Para ubicar un ángulo en el sistema de coordenadas cartesianas debemos:

- Ubicar el vértice en el origen de coordenadas.
- La posición inicial de la semirrecta coincide con el semieje positivo de las x (lado inicial) y gira manteniendo fijo su origen hasta llegar a una posición que marca su lado terminal.
- Su signo quedará determinado por el sentido de la rotación del lado inicial.
- Para indicar su ubicación, localizamos el lado terminal en alguno de los cuadrantes en que queda dividido el plano al considerar los ejes cartesianos.



Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 13 del TP 5.

TRIGONOMETRÍA

Es una rama de la matemática que estudia los problemas relativos a la medida de los elementos de los triángulos estableciendo una correspondencia entre las magnitudes susceptibles de medición lineal (medidas de los lados del triángulo) y las angulares (medidas de los ángulos) mediante la introducción de las funciones trigonométricas.

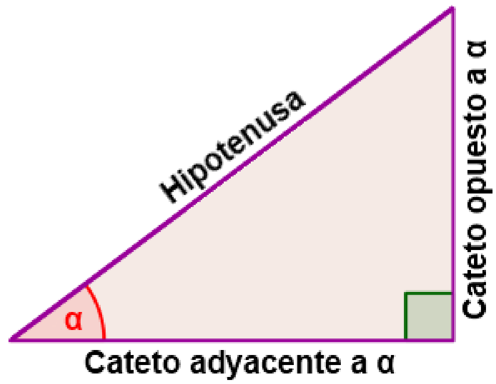
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Antes de definir a las seis razones trigonométricas, definiremos los elementos de un triángulo rectángulo.

HIPOTENUSA: *es el lado del triángulo que está enfrentado al ángulo recto.*

CATETO OPUESTO: *es el lado que está enfrentado al ángulo agudo considerado.*

CATETO ADYACENTE: *es el lado sobre el que se apoya el ángulo agudo considerado.*



Se definen a las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo a los siguientes cocientes:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS
$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$cosec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$
$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	$sec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$
$tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	$cotg\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$

De donde se verifica lo siguiente:

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\alpha}$$

$$sec\ \ \alpha = \frac{1}{cos\alpha}$$

$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

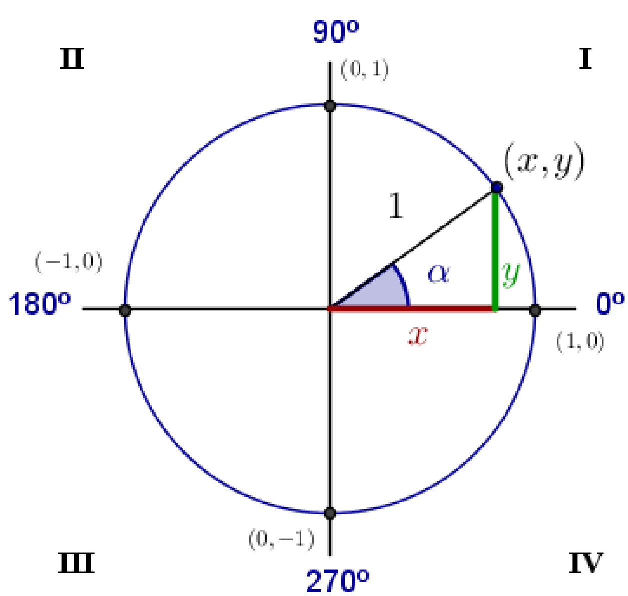
A su vez: $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$ y $cotg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$

Estas razones trigonométricas se utilizan para resolver diferentes problemas matemáticos y extramatemáticos que se modelizan mediante triángulos rectángulos.

En este curso las estudiaremos para introducir funciones trigonométricas.

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Considerando un sistema de ejes cartesianos, es posible representar cada una de las razones trigonométricas por medio de segmentos. Para ello, se considera una circunferencia de radio uno centrada en el origen de coordenadas, llamada ***circunferencia trigonométrica***. En ella podremos analizar qué sucede con los valores de las razones trigonométricas cuando el valor del ángulo está comprendido entre 0° y 360°.



Siendo $r = 1$, tenemos:

$$sen\ \alpha = \frac{y}{1} = y$$

$$cos\ \ \alpha = \frac{x}{1} = x$$

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x}$$

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras, surge la identidad pitagórica fundamental:

$$r^2 = a^2 + b^2$$

$$1^2 = x^2 + y^2$$

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \ \alpha)^2 = 1$$

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Este vínculo entre las relaciones seno y coseno de un ángulo es sin dudas la más importante desde varios puntos de vista. Algunas de las consecuencias que se ponen en evidencia son:

- Ninguna de las relaciones seno o coseno pueden ser menores que -1 ni mayores que 1. En efecto, si la suma de los cuadrados es la unidad, ambas relaciones deben mantenerse menores que 1 en valor absoluto.

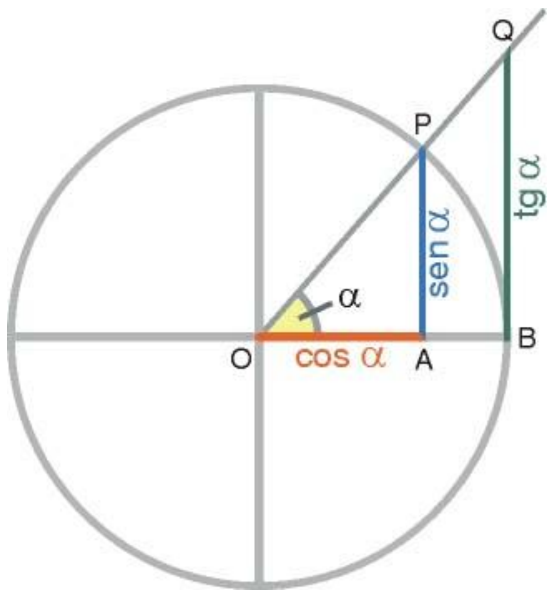
$$-1 \leq sen\ \alpha \leq 1$$
$$-1 \leq cos\ \ \alpha \leq 1$$

- Otra consecuencia es que a partir de saber el valor de una relación trigonométrica, puedo obtener la otra.

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$$
$$sen\ \alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$$

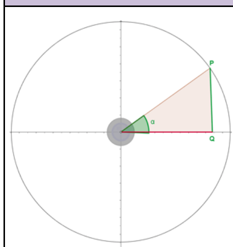
Para la determinación del signo a elegir es fundamental conocer el cuadrante en el que se halla el ángulo.

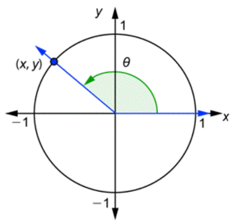
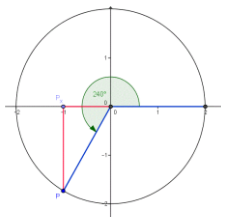
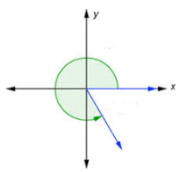
Podemos identificar los tramos que representan las razones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica de la siguiente forma:



SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Los signos de las razones trigonométricas tienen que ver con las abscisas y ordenadas del punto P, y estas coordenadas tendrán distintos signos según en qué cuadrante esté ubicado P.

CUADRANTE	x	y	sen $cosec$	cos sec	tg $cotg$
	$x > 0$	$y > 0$	$+$	$+$	$+$

	$x < 0$	$y > 0$	$+$	$-$	$-$
	$x < 0$	$y < 0$	$-$	$-$	$+$
	$x > 0$	$y < 0$	$-$	$+$	$-$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya podés resolver los ejercicios 14 al 16 del TP 5.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS UTILIZANDO RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Con lo aprendido hasta aquí, vamos a poder resolver situaciones en las que conociendo el valor de una de las razones trigonométricas de un ángulo y el cuadrante al cual pertenece, hallamos el valor de las restantes razones trigonométricas.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1:

Sabiendo que $cos\ \beta = -\frac{1}{2}$ y que $0° \leq \beta \leq 180°$, calcular las restantes razones trigonométricas.

- En principio, debemos determinar a qué cuadrante pertenece el ángulo:

$$\left.\begin{array}{l} cos\ \beta < 0\ \therefore\ \beta \in II\ ó\ III\ cuadrante \\ \\ 0° \leq \beta \leq 180°\ \therefore\ \beta\ \in I\ ó\ II\ cuadrante \end{array}\right\}\ \beta \in II\ cuadrante$$

- Utilizando la identidad pitagórica podremos hallar el valor del $sen\ \beta$.

$$sen^2\beta + cos^2\beta = 1$$

$$sen^2\beta + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$sen^2\beta + \tfrac{1}{4} = 1$$

$$sen^2\beta = 1 - \tfrac{1}{4}$$

$$sen\ \beta = \pm\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

$$sen\ \beta = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Para poder determinar el signo del $sen\ \beta$ tenemos que considerar que el ángulo pertenece al $II\ Cuadrante$, por lo cual el signo del $sen\ \beta$ será positivo.

$$\therefore\ sen\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Conociendo los valores de seno y coseno del ángulo β, podemos determinar el valor de la tangente:

$$tg\ \beta = \frac{sen\ \beta}{\cos\beta}$$

$$tg\ \beta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

- Teniendo los valores de las razones trigonométricas principales, podemos llegar a los valores de las razones trigonométricas recíprocas:

$$cotg\ \beta = \frac{1}{tg\ \beta}$$

$$cotg\ \beta = \frac{1}{-\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\sqrt{\mathbf{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sec\ \beta = \frac{1}{cos\ \beta}$$

$$sec\ \beta = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$cosec\ \beta = \frac{1}{sen\ \beta}$$

$$cosec\ \beta = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$cosec\ \beta = \frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 2:

Sabiendo que $tg\ \alpha = 2$ y que $90° \leq \alpha \leq 270°$, calcular las restantes razones trigonométricas.

- En principio, debemos determinar a qué cuadrante pertenece el ángulo:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha > 0\ \therefore\ \alpha \in I\ ó\ III\ cuadrante \\ 90° \leq \alpha \leq 270°\ \therefore\ \alpha\ \in II\ ó\ III\ cuadrante \end{array}\right\}\ \alpha \in III\ cuadrante$$

- Sabemos lo siguiente:

$$\begin{cases} sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 & (1) \\ tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} \to 2 = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} & (2) \end{cases}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$. Podremos resolver por cualquier método aprendido.

Resolvamos por el método de igualación. Despejamos $sen\ \alpha$ de ambas ecuaciones:

De (1): $sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$

De (2): $sen\ \alpha = 2.\cos\alpha$

Igualamos:

$$\sqrt{1 - cos^2\alpha} = 2\,cos\ \alpha$$

$$1 - cos^2\alpha = (2\ cos\ \alpha)^2$$

$$1 - cos^2\alpha = 4\,cos^2\alpha$$

$$1 = 4\,cos^2\alpha + cos^2\alpha$$

$$1 = 5.\,cos^2\alpha$$

$$\frac{1}{5} = cos^2\alpha$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{5}} = cos\ \ \alpha$$

$$\pm\frac{1}{\sqrt{5}} = cos\ \ \alpha$$

Como $\alpha \in III\ Cuadrante$ el coseno es negativo.

$$\therefore\ cos\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\sqrt{\mathbf{5}}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Teniendo este valor, podremos calcular el $sen\ \alpha$:

$$sen\ \alpha = 2\,cos\,\alpha$$

$$sen\ \alpha = 2\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- Conociendo los valores de las razones trigonométricas principales, podremos calcular las razones trigonométricas recíprocas:

$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

$$cotg\ \alpha = \frac{1}{2}$$

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$$

$$sec\,\alpha = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = -\sqrt{5}$$

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{\frac{-2\sqrt{5}}{5}}$$

$$cosec\ \alpha = -\frac{5}{2\sqrt{5}} . \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{5\sqrt{5}}{2.5}$$

$$cosec\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES

En algunos casos, podremos calcular valores exactos de las razones trigonométricas de los ángulos.

Por ejemplo:

$$sen\ 180° = 0$$

$$cos\ 90° = 1$$

Pero nos encontraremos con otros casos, donde los valores no serán exactos y entonces necesitaremos un modo de determinar dichos valores. Nos referimos a los ángulos llamados especiales, que son los siguientes: $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ y $90°$.

Si bien existen demostraciones para lo que desarrollaremos a continuación, nos parece más conveniente mostrarles una regla nemotécnica para calcular las razones trigonométricas de dichos ángulos.

La regla consiste en armar una tabla dispuesta de la siguiente forma, donde completaremos:

- Para la primera fila (que representa $sen\ \alpha$, siendo α el ángulo que se indica en cada columna) escribimos los números del 0 al 4. Luego, aplicamos raíz cuadrada a todos ellos.
  Posteriormente, dividimos a dicho valor por 2. Finalmente, resolvemos la operación indicada.
- Para completar la segunda fila (que representa $cos\ \alpha$), procedemos de igual forma, pero esta vez completamos con los números del 4 al 0 (en orden decreciente). Luego aplicamos la operación de raíz, dividimos por dos, y finalmente resolvemos la operación.
- Para completar la tercera fila (que representa $tg\ \alpha$), realizamos la división entre la primera fila y la segunda y resolvemos.

Razones trigonométricas	$\alpha = 0°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 90°$
$sen\ \alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$cos\ \alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
$tg\ \alpha$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$	$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$	∞

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya podés resolver los ejercicios 17 al 21 del TP 5.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad trigonométrica es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones.

Para comprobar el cumplimiento de determinada identidad podemos partir del miembro izquierdo de la igualdad y, mediante operaciones y propiedades, llegar a lo expresado en el miembro de la derecha. O bien, podemos partir de la derecha y tratar de llegar a lo expresado en el miembro izquierdo.

Otra manera, es trabajar algebraicamente y por separado con ambos miembros y llegar a una expresión común.

Ejemplo 1:

Demostrar que:

$$tg^2 x + sen^2\, x + cos^2\, x = sec^2\, x$$

En principio, sería conveniente escribir todo en función de seno y coseno:

$$\frac{sen^2 x}{cos^2 x} + sen^2 x + cos^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$$

Luego, podemos realizar algún reemplazo por alguna identidad conocida. Si recordamos la identidad pitagórica, podremos reemplazar en el primer miembro de la siguiente forma:

Identidad Pitagórica

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

$$\frac{sen^2 x}{cos^2 x} + \mathbf{1} = \frac{1}{cos^2 x}$$

Continuando sobre el primer miembro
(debido a que el segundo miembro ya está reducido al máximo),
se podría realizar común denominador:

$$\frac{sen^2 x + cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$

Y finalmente, podremos nuevamente reemplazar por la identidad pitagórica en el primer miembro:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Verificándose de este modo la identidad planteada.

Ejemplo 2:

Demostrar que:

$$sen^2 \alpha + cos^2 \alpha + cotg^2 \alpha = cosec^2 \alpha$$

Sería conveniente escribir todo en función de seno y coseno:

$$sen^2 \alpha + cos^2 \alpha + \frac{cos^2 \alpha}{sen^2 \alpha} = \frac{1}{sen^2 \alpha}$$

Ahora, podemos realizar algún reemplazo por alguna identidad conocida. Si recordamos la identidad pitagórica, podremos reemplazar en el primer miembro de la siguiente forma:

$$\mathbf{1} + \frac{cos^2 \alpha}{sen^2 \alpha} = \frac{1}{sen^2 \alpha}$$

Continuando sobre el primer miembro (debido a que el segundo miembro ya está reducido al máximo), se podría realizar común denominador:

$$\frac{sen^2\,\alpha + cos^2\alpha}{sen^2\,\alpha} = \frac{1}{sen^2\,\alpha}$$

$$\frac{1}{sen^2\,\alpha} = \frac{1}{sen^2\,\alpha}$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya podés resolver el ejercicio 22 del TP 5.

USO DE CALCULADORA

1. Controlar que el modo de trabajo sea correcto.
   Para medir ángulos, el sistema que usaremos es el sexagesimal, donde cada unidad equivale a 60 de la unidad de orden superior: $1° = 60'$ y $1' = 60''$. En la pantalla de la calculadora, debe decir **DEG** o simplemente **D** para que estemos trabajando en este sistema. Lo introducimos a través de la tecla MODE.

2. Para introducir un ángulo, se utiliza la tecla de grados, minutos y segundos:
   Ejemplo: Para escribir el ángulo $30°\,25'16''$, introducimos

   30 [° ' ''] 25 [° ' ''] 16 [° ' '']

3. Problemas directos: Calcular el valor de la razón trigonométrica conociendo el valor del ángulo.
   - Si la razón trigonométrica está en la calculadora: seno, coseno o tangente.
     Ejemplo: calcular $sen\,30° = \frac{1}{2}$

     [sin] [3] [0]

   - Si la razón trigonométrica no está en la calculadora: secante, cosecante o cotangente.
     Ejemplo: calcular $sec30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

     [1] [÷] [cos] [3] [0]

4. Problemas inversos: Calcular el valor del ángulo, teniendo como dato el resultado de la razón trigonométrica (seno, coseno o tangente).

- Si la razón trigonométrica está en la calculadora: seno, coseno o tangente.
  Ejemplo: calcular $sen\ \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow arc\ cos\left(\frac{1}{3}\right) = \alpha \rightarrow \alpha = 70°30'$

- Si la razón trigonométrica no está en la calculadora: secante, cosecante o cotangente.

Ejemplo: Calcular $cotg\alpha = \frac{3}{2}$

$cotg\alpha = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{1}{tg\alpha} = \frac{3}{2} \rightarrow tg\alpha = \frac{2}{3} \rightarrow arc\ tg\ \frac{2}{3} = \alpha \rightarrow \alpha = 33°41'24''$

En este caso, la situación se reduce al caso anterior, por lo cual operamos de la misma forma.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

La ecuación trigonométrica es una igualdad que se cumple para ciertos valores del argumento. En este caso, la incógnita está afectada por una función trigonométrica.
En estas ecuaciones intervienen **funciones trigonométricas**, que son periódicas y por lo tanto sus soluciones se pueden presentar en uno o en dos cuadrantes y además se repiten en todas las vueltas.
Las funciones trigonométricas son la herramienta matemática más adecuada para describir fenómenos periódicos, tan diversos como la actividad cardíaca, el movimiento de los planetas o ciclos de mercados financieros. En este curso solo introducimos la función seno y coseno.

Para resolver las ecuaciones, haremos las transformaciones necesarias para trabajar con una sola función trigonométrica, valiéndonos de las identidades trigonométricas fundamentales.

Ejemplo 1:

$$cos^2 x - 3\ sen^2 x = 0$$

Aplicando la identidad pitagórica y despejando el coseno:

$$\boldsymbol{sen^2 x + cos^2 x = 1 \ \rightarrow cos^2 x = 1 - sen^2 x}$$

Luego reemplazamos en la ecuación dada el $cos^2 x$

$$\mathbf{1 - sen^2 x} - 3\ sen^2 x = 0$$

$$1 - 4\ sen^2 x = 0$$

$$-4\ sen^2 x = -1$$

$$4\ sen^2 x = 1$$

$$sen^2 x = \frac{1}{4}$$

Aplicamos raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación:

$$\sqrt{sen^2 x} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

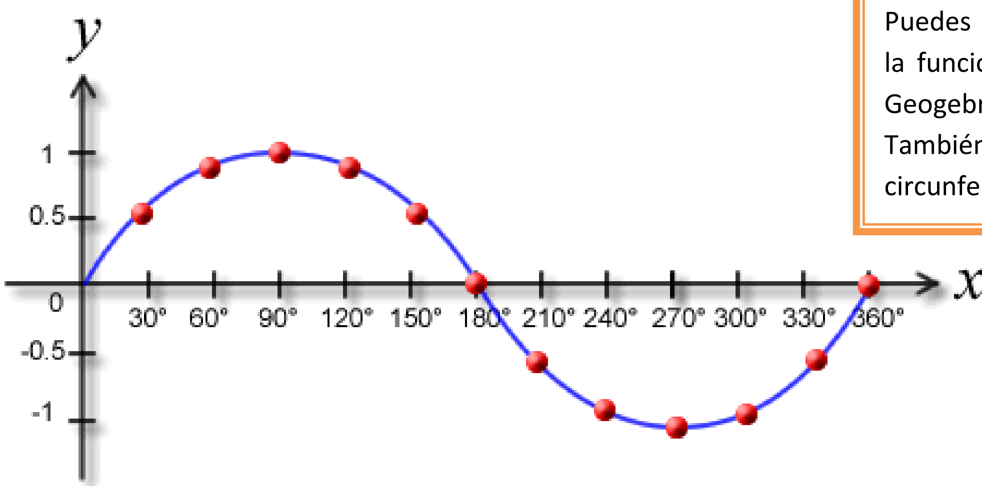
$$|\ sen\ x\ | = \frac{1}{2}$$

$$sen\ x = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad sen\ x = -\frac{1}{2}$$

$$arc\ sen\left(\frac{1}{2}\right) = x \qquad ; \qquad arc\ sen\left(-\frac{1}{2}\right) = x$$

$$x_1 = 30° \qquad x_2 = 150° \qquad x_3 = 210° \qquad x_4 = 330°$$

Si resolviste este ejercicio con calculadora, seguramente hallaste dos de los cuatro valores de solución: $x_1 = 30°$ y $x_3 = 210°$. Veamos de dónde surgen el resto de los valores. Nos ayudaremos de la gráfica de la función $y = sen\ x$. Allí podremos visualizar los valores de x donde el seno vale $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$.



Puedes ayudarte graficando la función con la aplicación Geogebra.
También mirando la circunferencia unitaria.

Como podemos observar, existen más valores que los que obtenemos con calculadora donde $sen\,x = \frac{1}{2}$ y $sen\,x = -\frac{1}{2}$. Entonces, cada vez que resuelvas ejercicios de esta naturaleza, no olvides mirar el gráfico de la función seno para hallar todos los valores que puede tomar x que se encuentren dentro del intervalo $[0°; 360°]$.

Ejemplo 2:

$$cos\ x\ .(cos\ x + 5) = 2 + sen^2x$$

$$cos^2\,x + 5\ cos\ x = 2 + sen^2x$$

Aplicando la identidad pitagórica y despejando el seno:

$$\boldsymbol{sen^2x + cos^2\,x = 1\ \rightarrow sen^2\,x = 1 - cos^2x}$$

$$cos^2\,x + 5\ cos\ x = 2 + 1 - cos^2\,x$$

$$2\,cos^2\,x + 5\ cos\ x = 3$$

$$2\,cos^2\,x + 5\ cos\ x - 3 = 0$$

Si reemplazamos $cos\ x = t$, tenemos una ecuación cuadrática:

$$2t^2 + 5t - 3 = 0$$

Podremos encontrar la solución aplicando la fórmula resolvente:

$$t_1, t_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} =$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$t_1 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad t_2 = \frac{-5 - 7}{4} = -\frac{12}{4} = -3$$

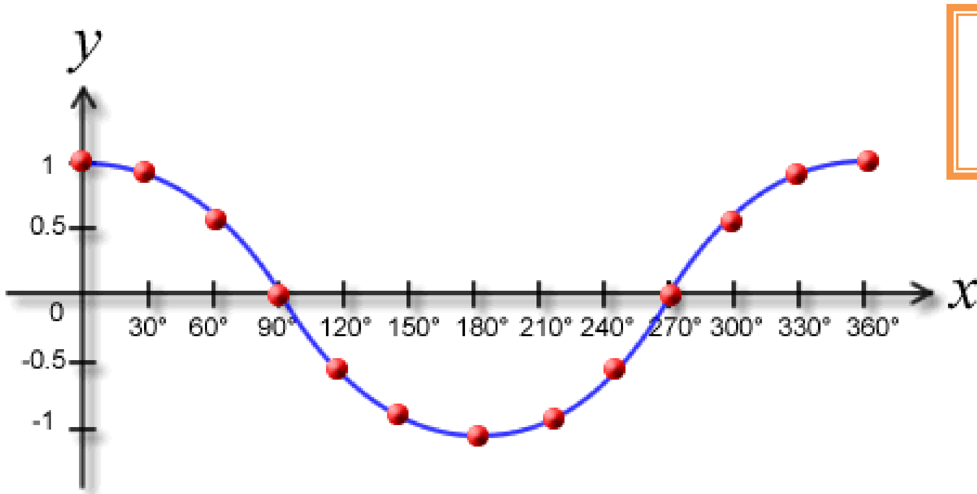
Si retomamos la sustitución realizada, tenemos:

$$cos x_1 = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = arc\ cos\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad cos\ x_2 = -3$$

$$x_1 = 60° \qquad x_2 = 300°$$

dicho valor queda fuera del rango de solución del coseno

Si resolviste este ejercicio con calculadora, seguramente hallaste uno de los dos valores de solución: $x_1 = 60°$. Veamos de dónde surge el otro valor. Nos ayudaremos de la gráfica de la función $y = cos\,x$. Allí podremos visualizar los valores de x donde el coseno vale $\frac{1}{2}$ y el rango de valores que puede tomar dicha función, que se encuentra en el intervalo $[-1; 1]$.



Puedes ayudarte utilizando el Geogebra para graficar la función coseno.

Como podemos observar, existen más valores que los que obtenemos con calculadora donde $cos\, x = \frac{1}{2}$. Entonces, cada vez que resuelvas ejercicios de esta naturaleza, no olvides mirar el gráfico de la función coseno para hallar todos los valores que puede tomar x que se encuentren dentro del intervalo $[0°; 360°]$.

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya podés resolver los ejercicios 23 al 26 del TP 5.

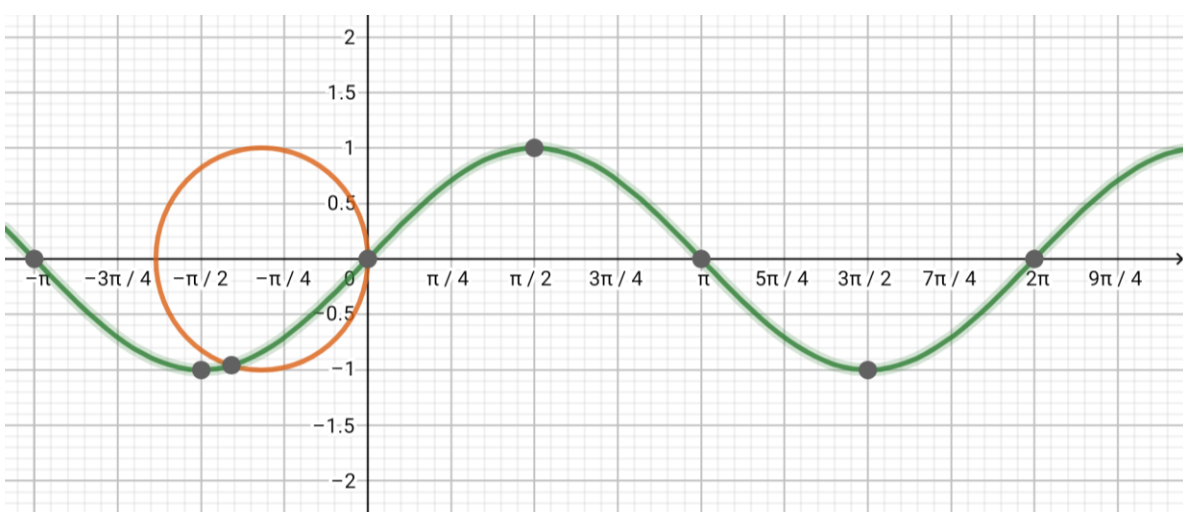
FUNCION SENO

Si bien ya trabajamos en un ejemplo anterior con la función seno, analizaremos sus características.

Todo número real determina un punto P sobre la circunferencia trigonométrica. Definimos la función seno asignando al número real la ordenada del punto P.

Sobre una circunferencia de radio unitario ubicamos los números reales: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}. \frac{\pi}{2}, \ldots$ y construimos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales.

Sobre el eje de abscisas se trasladan los valores de los arcos x considerados en la circunferencia, luego se trasladan los segmentos y correspondientes a las ordenadas de cada punto P, al sistema de coordenadas, paralelamente a sí mismos.



Los valores de $f(x) = sen(x)$ solo dependen de la posición del lado terminal. Si sumamos o restamos, múltiplos de 2π a x el valor de $sen(x)$ no se modifica. Así, los valores de la función $f(x) = sen(x)$ se repetirán cada 2π unidades.

Por lo tanto el dominio de la función es, $Domf = \mathbb{R}$ y su imagen, $Imf = [-1,1]$

- Ceros o raíces de la función seno

$$C_0 = \{x \in \mathbb{R}: x = k.\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

- Periodicidad

  Una función es periódica si existe un numero real $t > 0$ tal que para $x \in Domf$ se cumple que $f(x) = f(x+t)$. El mínimo valor de t para el cual se cumple la igualdad se llama periodo.

  En la función seno $t = 2\pi$ pues $sen(x) = sen(x + 2k\pi), k \in \mathbb{R}$.

Los conjuntos de positividad y negatividad son

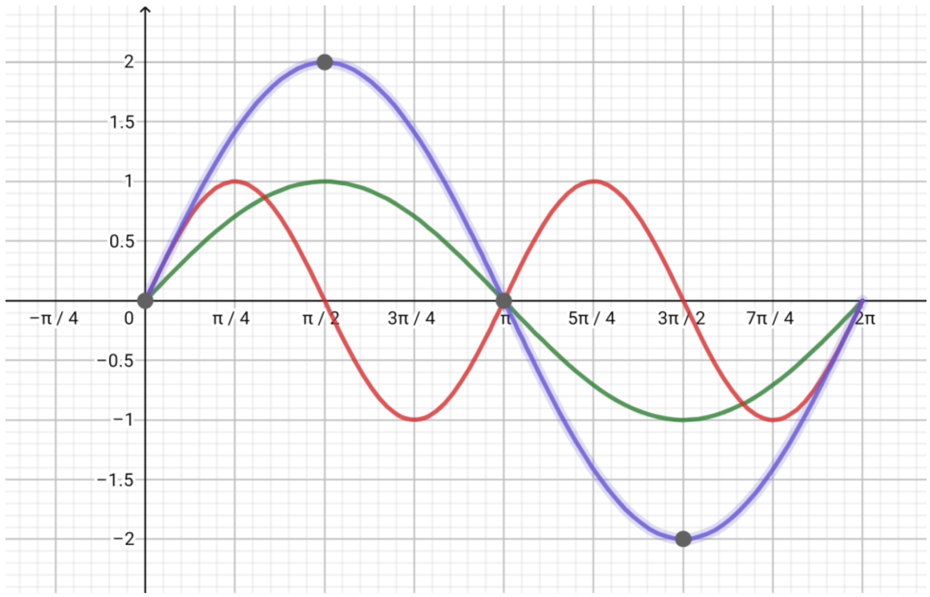
$$C^+ = (0, \pi)\ y\ \ C^- = (\pi, 2\pi)$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

$$IC = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right) \quad ID = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$$

Ejemplo: Analicemos el grafico de las siguientes funciones en el intervalo $[0,2\pi]$

$$f(x) = sen(x), g(x) = 2sen(x), h(x) = sen(2x)$$



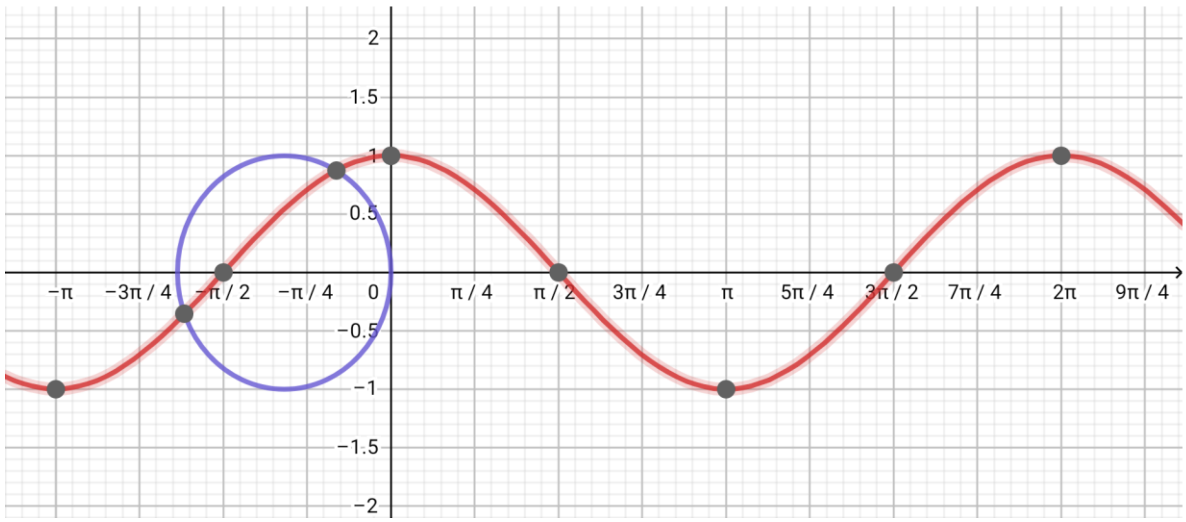
	$f(x) = sen(x)$	$g(x) = 2sen(x)$	$h(x) = sen(2x)$
Dominio	$[0,2\pi]$	$[0,2\pi]$	$[0,2\pi]$
Imagen	$[-1,1]$	$[-2,2]$	$[-1,1]$
Ceros	$\{0,\pi,2\pi\}$	$\{0,\pi,2\pi\}$	$\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi,2\pi\right\}$
C^+	$(0,\pi)$	$(0,\pi)$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$
C^-	$(\pi,2\pi)$	$(\pi,2\pi)$	$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\frac{3}{2}\pi,2\pi\right)$
Intervalos de crecimiento	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2}\pi,2\pi\right)$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2}\pi,2\pi\right)$	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi\right)\cup\left(\frac{5}{4}\pi,2\pi\right)$
Intervalos de decrecimiento	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)\cup\left(\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi\right)$

IMPORTANTE!!

No es lo mismo $sen(2x) \neq 2sen(x)$ como se observa en el grafico y análisis de las funciones

FUNCION COSENO

El análisis de la función coseno se hace de manera análoga, pero teniendo en cuenta que definimos la función coseno asignando al número real, que determina un punto P sobre la circunferencia trigonométrica, la abscisa del punto P.



Los valores de $f(x) = \cos(x)$ se repiten cada 2π unidades.

El dominio de la función es, $Domf = \mathbb{R}$ y su imagen, $Imf = [-1,1]$

- Ceros o raíces de la función coseno

$$C_0 = \left\{x \in \mathbb{R}: x = \frac{\pi}{2} + k.\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Periodicidad

  Es análoga a la de la función seno, es decir el periodo de la función coseno es $t = 2\pi$.

Los conjuntos de positividad y negatividad son

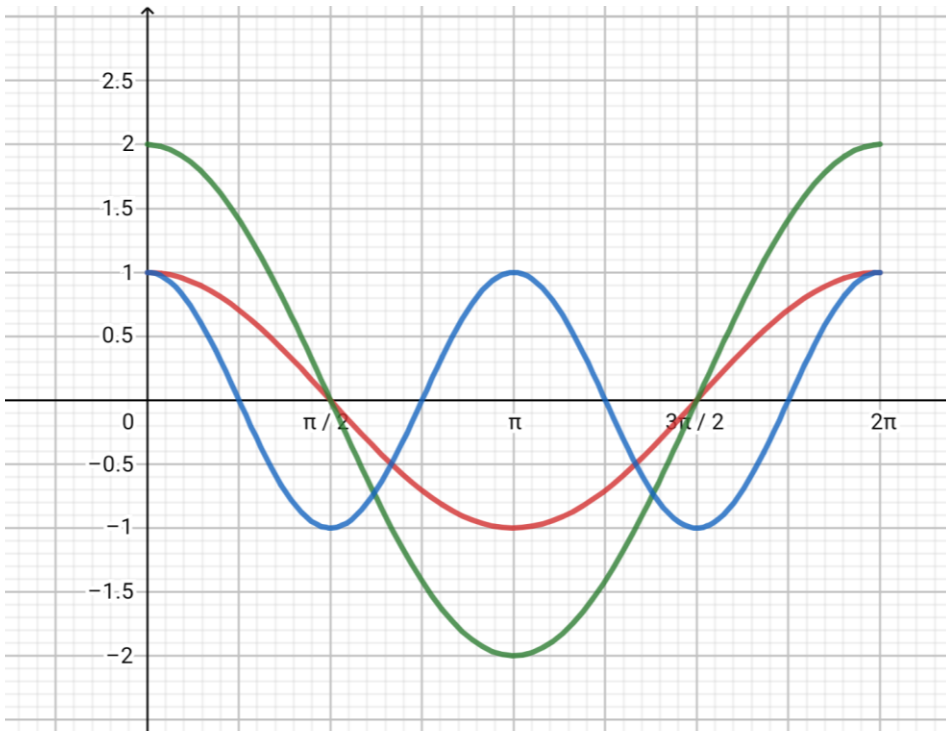
$$C^+ = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right) \ y \ C^- = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

$$IC = (\pi, 2\pi)$$
$$ID = (0, \pi)$$

Ejemplo: Analicemos el grafico de las siguientes funciones en el intervalo $[0,2\pi]$

$f(x) = cos(x), g(x) = 2cos(x), h(x) = cos(2x)$



	$f(x) = cos(x)$	$g(x) = 2cos(x)$	$h(x) = \cos(2x)$
Dominio	$[0,2\pi]$	$[0,2\pi]$	$[0,2\pi]$
Imagen	$[-1,1]$	$[-2,2]$	$[-1,1]$
Ceros	$\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\}$
C^+	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$	$\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right)$
C^-	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$
Intervalos de crecimiento	$(\pi, 2\pi)$	$(\pi, 2\pi)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$
Intervalos de decrecimiento	$(0, \pi)$	$(0, \pi)$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 27 y 28 del TP 5.