BLOQUE 2: FUNCIONES

INTRODUCCIÓN

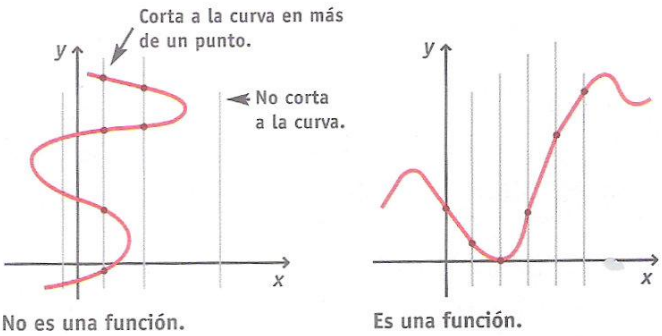
En este capítulo nos dedicamos a estudiar funciones reales de una variable real, que aparecen con frecuencia al modelizar situaciones problemáticas y que permiten realizar análisis completos en situaciones de la vida cotidiana.

Nuestro objetivo es que estudies el concepto de función, analices funciones polinómicas y puedas realizar análisis completos de estas funciones, repasando las operaciones con polinomios y los casos de factorización.

FUNCIONES

Una función $\boldsymbol{f}$ es una relación entre dos variables en la que a cada valor de la variable independiente **"$\boldsymbol{x}$"** se le asocia un único valor de la variable dependiente **"$\boldsymbol{y}$"**.
Se dice que $\boldsymbol{y}$ es función de "$\boldsymbol{x}$", y se escribe $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Ejemplos:

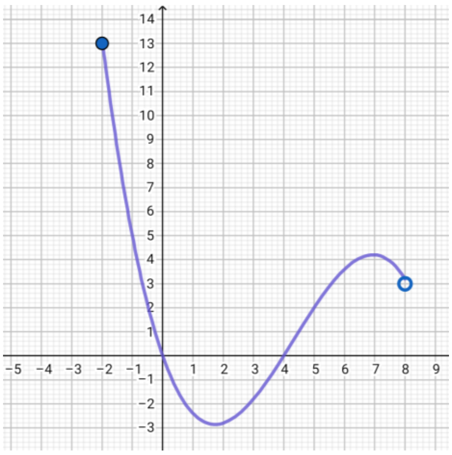


Una forma de determinar si cierta gráfica puede ser una función consiste en trazar rectas verticales sobre ella. Si alguna de las rectas trazadas "corta" a la gráfica en más de un punto no es una función.

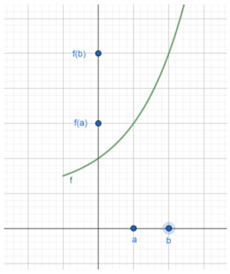
DOMINIO E IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

- El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente("x")
- La **imagen** de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente ("y")

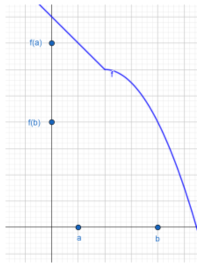
Ejemplo
El **dominio** de esta función es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que -2 y menores que 8, o sea, $Dom(f) = [-2, 8)$
La **imagen** de esta función es $Im(f) = [-3, 13]$



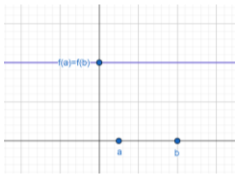
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN



- Una función es **creciente** en un intervalo cuando se cumple que a medida que la variable independiente aumenta, la variable dependiente también lo hace, o sea cuando el gráfico que une los puntos sube.En símbolos, si $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$.



- Una función es **decreciente** en un intervalo cuando se cumple que a medida que la variable independiente aumenta, la variable dependiente disminuye, o sea cuando el gráfico que une los puntos baja.
En símbolos, si $a < b$, entonces $f(a) > f(b)$



- Una función es **constante** en un intervalo si a medida que la variable independiente aumenta, la variable dependiente no varía.
En símbolos, si $a < b$, entonces $f(a) = f(b)$

El grafico de una función se lee **siempre** en el sentido en que aumentan los valores de la variable independiente, es decir de izquierda a derecha.

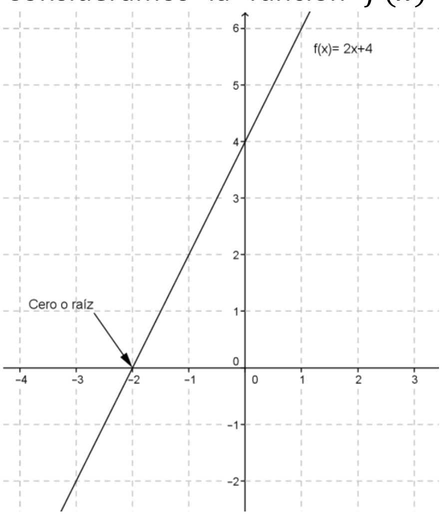
CEROS DE UNA FUNCIÓN

El **conjunto de ceros** de una función, que notamos con C_0, es el conjunto de puntos para el que la función vale cero, es decir, “x” es cero o raíz de una función si $f(x) = 0$
En símbolos:

$$C_0 = \{x \in dom(f) / f(x) = 0\}$$

Los ceros de una función pueden determinarse gráfica y/o analíticamente: en el primer caso basta ver la intersección de la curva con el eje x, en el segundo caso se obtiene a través del planteo de una ecuación.

Ejemplo
Consideramos la función $f(x) = 2x + 4$ y hallamos el cero en forma gráfica y analítica.



Gráficamente: observamos el gráfico

Analíticamente: Planteamos la ecuación f(x)=0 y resolvemos:

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 0 \\ 2x &= -4 \\ x &= -4 : 2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Entonces $C_0 = \{-2\}$

INTERVALOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD

- El **conjunto de positividad** (C^+) de una función está formado por todos los valores del dominio que tienen imágenes positivas.

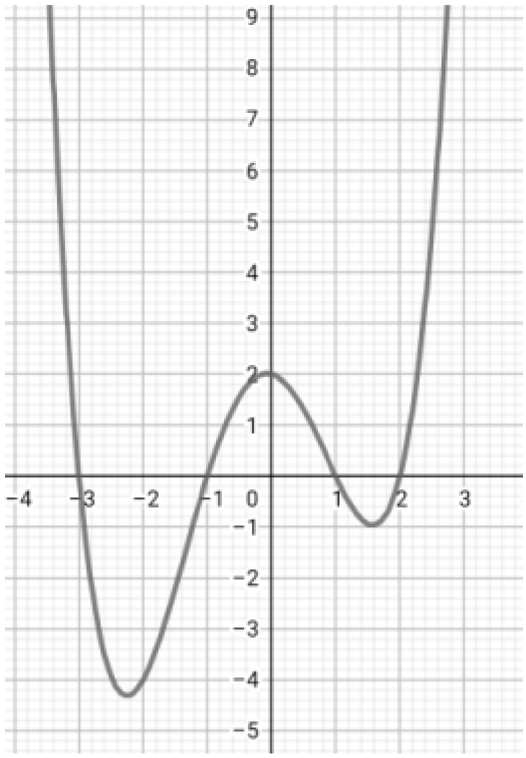
$$C^+ = \{x \in Dom\,(f) /\ f(x) > 0\}$$

- El **conjunto de negatividad** (C^-) de una función está formado por todos los valores del dominio que tienen imágenes negativas.

$$C^- = \{x \in Dom\,(f) /\ f(x) < 0\}$$

Ejemplo

En el gráfico de la siguiente función se observa que:



$$C_0 = \{-3, -1, 1, 2\}$$

$$C^+ = (-\infty, -3)\,U\,(-1,1)\,U\,(2, +\infty)$$

$$C^- = (-3, -1)\,U\,(1,2)$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 1 y 2 del TP 2

FUNCION LINEAL

Llamamos **función lineal** a toda función cuya expresión es de la forma:

$$f(x) = m.x + b, \text{ con } \mathrm{m} \in \mathbb{R} \text{ y } \mathrm{b} \in \mathbb{R}.$$

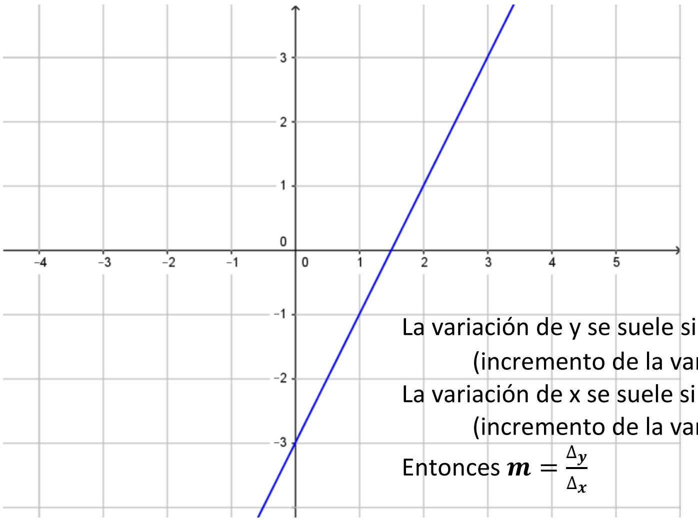
La grafica de una función lineal está formada por puntos alineados y su gráfica es una recta.

El coeficiente m es la *pendiente* y representa cuánto varía y cuando x aumenta una unidad positiva. El coeficiente b es la *ordenada al origen*, es decir, la coordenada y del punto en el que la gráfica de la función corta al eje y.

Ejemplo: La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2x - 3$ es una función lineal.

Puede representarse mediante una tabla y, también, en un grafico cartesiano, de la siguiente manera.

x	$y = 2x - 3$
-2	-7
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1



La variación de y se suele simbolizar Δ_y (incremento de la variable y)
La variación de x se suele simbolizar Δ_x (incremento de la variable x)
Entonces $\boldsymbol{m} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$

Vemos, en la tabla como en el gráfico, que por cada unidad que aumenta "x", en este caso la variable dependiente ("y") aumenta 2 unidades, entonces la pendiente es $\boldsymbol{m} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{2}{1} = 2$.

Notamos también que la ordenada al origen es -3.

A veces las rectas pueden estar dadas en diferentes formas:

Ecuación explícita de una recta: y = m x + b

Ecuación implícita de la recta: Ax + By + C = 0

Siempre es posible realizar el pasaje de una ecuación a la otra.

Ejemplo

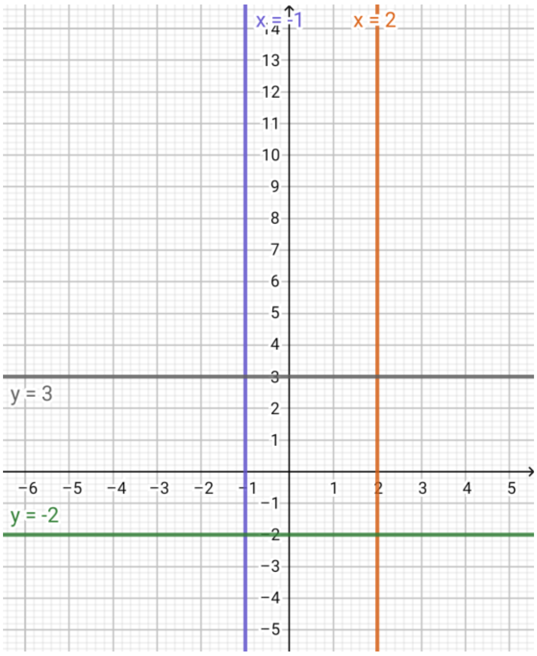
Ecuación implícita	**Ecuación explícita**
$Ax + By + C = 0$	$y = m.x + b$
$-2x + y - 1 = 0$	$y = 2.x + 1$

RECTAS HORIZONTALES Y VERTICALES

La ecuación de una recta horizontal es y = k $(k \in IR)$

La ecuación de una recta vertical es es x = k $(k \in IR)$

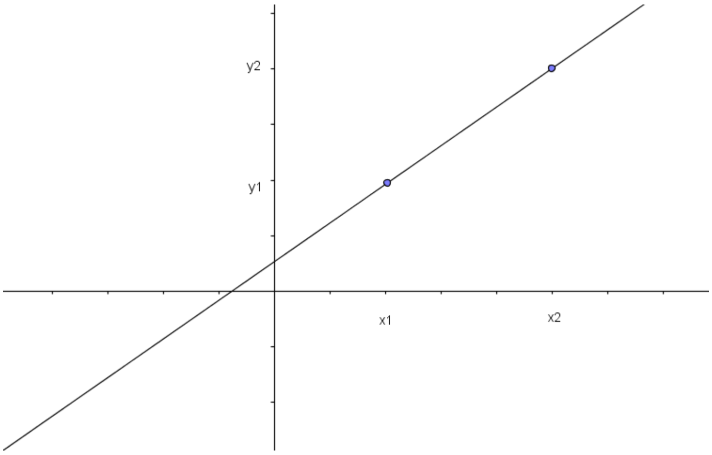
Ejemplo:



PENDIENTE DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

La pendiente de una recta es un número asociado a su inclinación.
Si conocemos las coordenadas de dos puntos de una recta, podemos calcular su pendiente mediante la fórmula:

$$\left.\begin{array}{l} P = (x_1, y_1) \\ Q = (x_2, y_2) \end{array}\right\} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Ejemplo:
Sean (-2, 3) y (-1, -5) la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos es:

$$m = \frac{3 - (-5)}{-2 - (-1)} = \frac{8}{-1} = -8$$

Si la resta entre los puntos se efectuara en un orden diferente, el resultado sería el mismo. Es decir;

$$m = \frac{-5-3}{-1-(-2)} = \frac{-8}{1} = -8$$

Supongamos ahora, que queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.
Sabemos que su pendiente es $m = -8$. Con este dato y cualquiera de los dos puntos podemos encontrar la ordenada al origen.

Entonces tenemos:

$$\left.\begin{matrix} m = -8 \\ (-2, 3) \end{matrix}\right\}$$

Remplazando m y las coordenadas del punto tenemos:

$$\begin{gathered} y = -8x + b \\ 3 = -8.(-2) + b \\ 3 = 16 + b \\ 3 - 16 = b \\ -13 = b \end{gathered}$$

Entonces la recta es $\boldsymbol{y = -8x - 13.}$

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

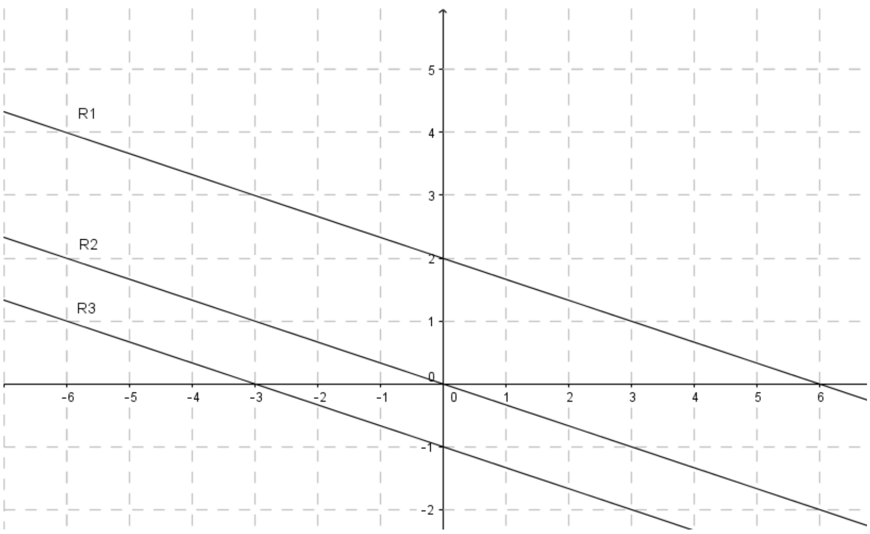
Rectas paralelas: Dos rectas que tienen la misma pendiente son paralelas.

En símbolos: $\left.\begin{matrix} L_1: y = m_1x + b_1 \\ L_2: y = m_2x + b_2 \end{matrix}\right\} m_1 = m_2 \Leftrightarrow L_1 // L_2$

Gráficamente: Las rectas no tienen ningún punto en común.

Ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} R_{1:} y = \dfrac{-1}{3}x + 2 \\ R_{2:} y = \dfrac{-1}{3}x \\ R_3: y = \dfrac{-1}{3}x - 1 \end{matrix}\right\} R_1 // R_2 // R_3$$



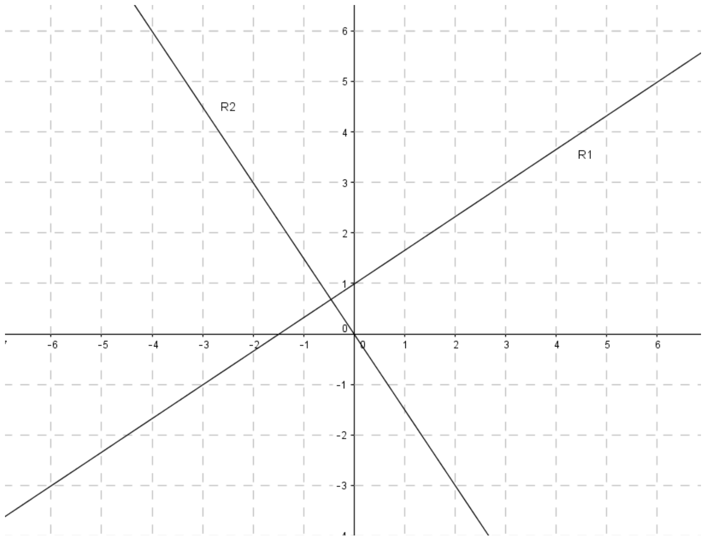
Rectas perpendiculares: Dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes de dos rectas es -1, o sea, que una pendiente es inversa y opuesta a la otra.

En símbolos: $\left.\begin{matrix} L_1: y = m_1x + b_1 \\ L_2: y = m_2x + b_2 \end{matrix}\right\} m_1.m_2 = -1 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2} \Leftrightarrow L_1 \perp L_2$

Gráficamente: Las rectas se cortan en un punto formando cuatro ángulos rectos.

Ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} R_1: y = \dfrac{2}{3}x + 1 \\ \\ R_2: y = \dfrac{-3}{2}x \end{matrix}\right\} R_1 \perp R_2$$



Rectas oblicuas: Si dos rectas tiene distinta pendiente y el producto entre ambas es distinto a -1 entonces las rectas son oblicuas.

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 3 al 6 del TP 2

Ecuación lineal

Una **ecuación** es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas. Por lo tanto el símbolo que une ambas expresiones es el signo igual $(=)$.
Resolver una ecuación es hallar el conjunto de valores de las incógnitas para los cuales la igualdad se verifica.

Una ecuación lineal en una variable es una ecuación de la forma

$$\boxed{ax + b = 0}$$

$\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números reales
$\boldsymbol{x}$ es la incógnita

Ejemplo:

Resolvamos	$2x + 3 = 5$
Pasamos el 3 restando:	$2x = 5 - 3$
Resolvemos	$2x = 2$
Pasamos el 2 dividiendo:	$x = 2 : 2$
Resolvemos	$x = 1$

Inecuación lineal

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que sus dos miembros aparecen ligados por uno de los siguientes signos:

$mayor\ que$	$>$	$\boxed{2+x>7}$
$menor\ que$	$<$	$\boxed{2+x<7}$
$mayor\ o\ igual$	$\geq$	$\boxed{2+x\geq 7}$
$menor\ o\ igual$	$\leq$	$\boxed{2+x\leq 7}$

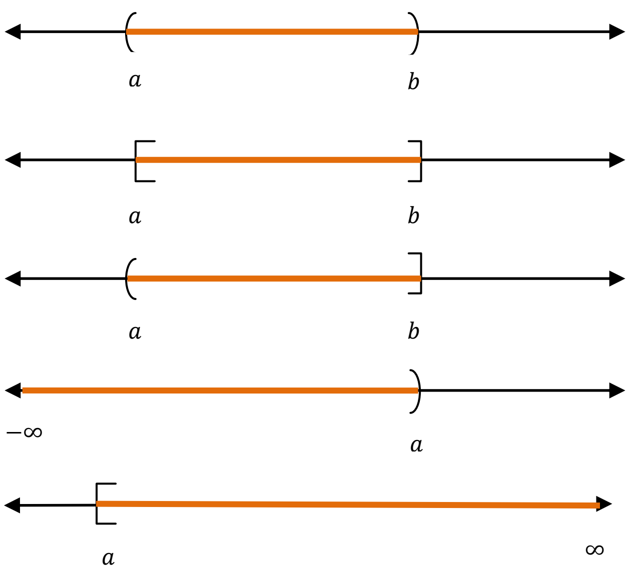
Resolver una inecuación es encontrar los valores de la incógnita para los cuales se cumple la desigualdad, los que serán sus **soluciones**. Entonces, la solución de una inecuación es, por lo general, un **conjunto de valores** que se puede expresar de diferentes maneras:

- Como un **intervalo** o una unión de intervalos de números reales.
- Mediante una representación **en la recta numérica**.
- Por medio de una **inecuación.**

Al hablar de intervalos debemos tener en cuenta que los extremos del mismo pueden ser o no parte del conjunto solución de una inecuación, dependiendo de esto, tendremos intervalos abiertos, cerrados o semi-cerrados.

Asimismo utilizaremos los corchetes o paréntesis para representar el conjunto solución en la recta numérica.

A continuación te mostramos ejemplos de las diferentes formas en que puedes expresar el conjunto solución de una inecuación:

Intervalo	Recta numérica	Inecuación
(a,b)		$\boxed{a<x<b}$
$[a,b]$		$\boxed{a\leq x\leq b}$
$(a,b]$		$\boxed{a<x\leq b}$
$(-\infty,a)$		$\boxed{x<a}$
$[a,\infty)$		$\boxed{x\geq a}$

Las reglas para la resolución de una inecuación son prácticamente las mismas que se emplean para la resolución de las ecuaciones, pero deben tenerse presentes las propiedades particulares de las desigualdades, que tienen que ver con el sentido de las inecuaciones.

A continuación te lo mostramos:

Equivalencia de inecuaciones

$$3x + 4 \leq 5$$
$$3x - 4 \leq 5 - 4$$
$$3x \leq 1$$

i) Sumar o restar cualquier número a ambos miembros de la inecuación nos da como resultado una equivalente a la dada.

$$2x > 6$$
$$2x : 2 > 6 : 2$$
$$x > 3$$

ii) Multiplicar o dividir por cualquier **número positivo** ambos miembros de la inecuación, nos da como resultado una equivalente a la dada.

$$-\frac{1}{3}x < 2$$
$$-\frac{1}{3}x \,.\, (-3) > 2 \,.\, (-3)$$
$$x > -6$$

iii) Multiplicar o dividir por cualquier **número negativo** a ambos miembros de la inecuación, implica **cambiar el sentido** de ésta para obtener como resultado una inecuación equivalente a la dada.

Ejemplos

1)

Resolvemos $3x - 2 < 1$

Despejando $3x < 1 + 2$

$x < 3 \div 3$

Solución $x < 1$

$S = (-\infty, 1)$

Representación gráfica

2)

Resolvemos $\frac{x+1}{2} \geq 4$

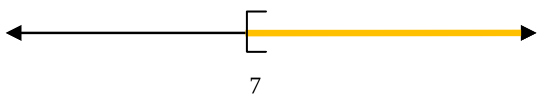
Despejando $x + 1 \geq 4 \,.2$

$x \geq 8 - 1$

Solución $x \geq 7$

$S = [7, \infty)$

Representación gráfica



Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 7 al 11 del TP 2

SISTEMAS DE ECUACIONES

En muchas aplicaciones de la administración y la economía se recurre a los *sistemas de ecuaciones*. Definiremos un sistema de ecuaciones como un conjunto integrado por más de una ecuación. Los sistemas con los que trabajaremos en este curso serán sistemas de dos ecuaciones, con dos incógnitas, llamados sistemas 2×2.

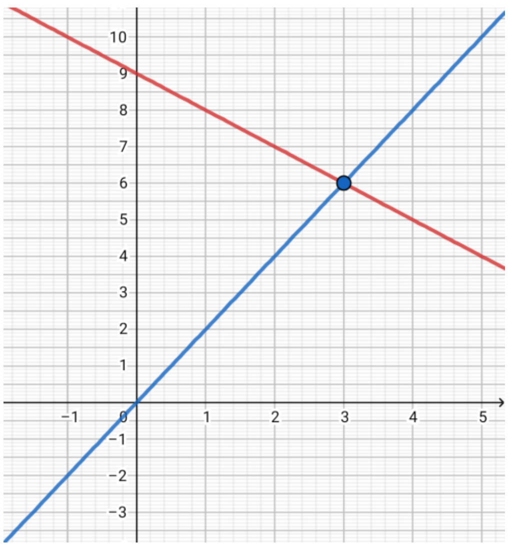
Al resolver los sistemas de ecuaciones se busca obtener los valores de las variables que satisfagan simultáneamente todas las ecuaciones del sistema. Dicho de otra manera, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas significa hallar el conjunto de raíces comunes, es decir, la intersección de los conjuntos solución de ambas ecuaciones.

Al resolver este tipo de sistemas tenemos tres soluciones posibles:

1) Que el sistema tenga una solución ÚNICA, al que se lo denomina como sistema COMPATIBLE DETERMINADO.
2) Que el sistema tenga soluciones INFINITAS, es decir que existan infinitos pares de valores de las incógnitas que satisfagan el sistema. Se lo denomina COMPATIBLE INDETERMINADO.
3) Que el sistema no tenga solución, donde ningún par de números verifique ambas ecuaciones, se lo conoce como sistema INCOMPATIBLE.

A continuación te mostramos desde su gráfica, las tres posibilidades:

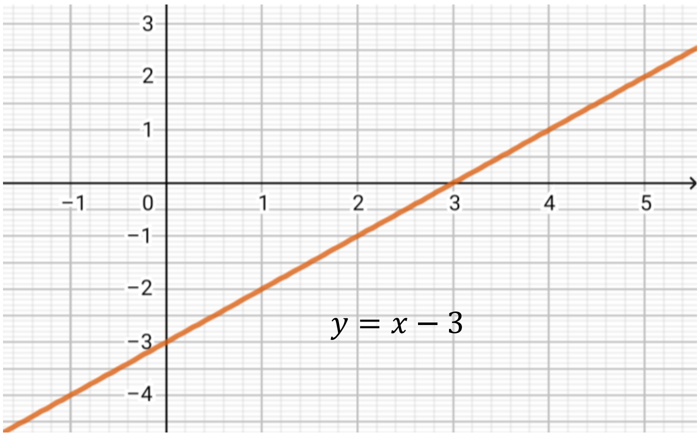
1) Sistema compatible determinado



$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 9 - x \end{cases}$$

La solución a este sistema se puede observar en el gráfico, en el punto en que se intersecan las rectas: $S = \{(3; 6)\}$, el par ordenado tiene coordenadas $x = 3$; $y = 6$

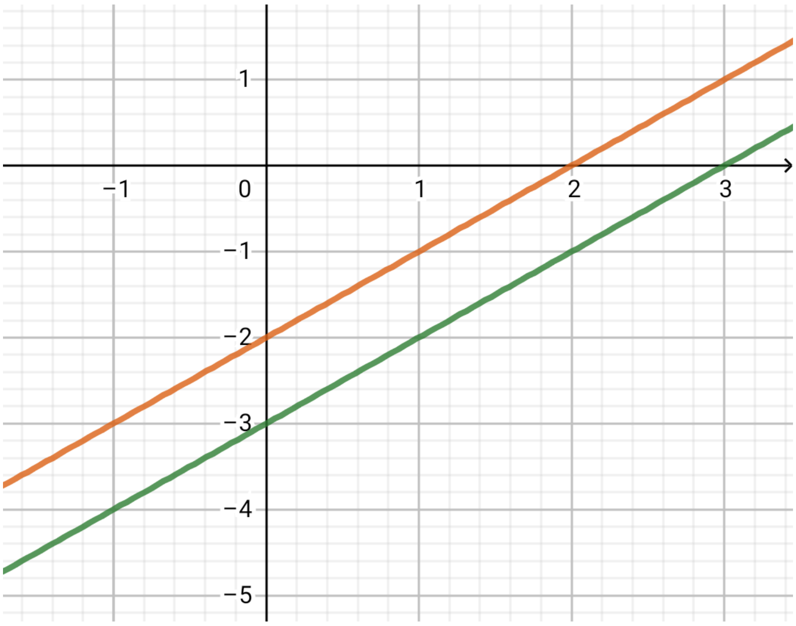
2) Sistema compatible indeterminado



$$\begin{cases} y = x - 3 \\ 2y = 2x - 6 \end{cases}$$

En el gráfico se observa que ambas rectas se superponen, es decir que el sistema tiene infinitas soluciones, ya que cada punto de la recta constituye un par ordenado que satisface ambas ecuaciones.

3) Sistema incompatible



$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

Se observa que las rectas son paralelas, es decir no se cortan en ningún punto, por ello es que se trata de un sistema de ecuaciones que no tiene solución.

Métodos de resolución

Existen varios métodos de resolución para estos sistemas. En este curso, te mostraremos 3 de los métodos algebraicos más utilizados para resolverlos. Para cada método enumeraremos los pasos a seguir a través de la resolución de un ejemplo. Adicionalmente te enseñaremos el análisis gráfico del sistema, tal como lo introdujéramos en los ejemplos anteriores.

Método por Sustitución

Consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir ese valor en la otra ecuación.

Resolvemos: $\begin{cases} 8x + 2y = 8 & (1) \\ 4x - 6y = -10 & (2) \end{cases}$

Pasos a seguir:

1) Despejamos una incógnita de una de las 2 ecuaciones. Por ejemplo despejamos y de la ecuación (1):

$$y = \frac{8 - 8x}{2} \quad ; \quad y = 4 - 4x \quad (3)$$

2) Sustituimos el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación. Sustituimos el valor de y en la ecuación (2):

$$4x - 6\,(4 - 4x) = -10 \;\; (4)$$

Así obtenemos una ecuación con una sola incógnita.

3) Resolvemos la ecuación (4) obtenida:

$$4x - 24 + 24x = -10$$

$$28x = -10 + 24$$

$$28x = 14$$

$$x = \frac{14}{28}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

4) Reemplazamos el valor hallado en la ecuación (3) obtenida en el paso 1):

$$y = 4 - 4x$$

$$y = 4 - 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$y = 2$$

Así obtuvimos el par ordenado $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ que es solución del sistema dado, $S = \left\{\left(\frac{1}{2}; 2\right)\right\}$ que por tener una solución única denominamos sistema COMPATIBLE DETERMINADO.

Método de Igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar los valores obtenidos.

Resolvemos: $$\begin{cases} 14x + 8y = 26 & (1) \\ 5x - 2y = 19 & (2) \end{cases}$$

Pasos a seguir:

1) Despejamos una incógnita cualquiera de ambas ecuaciones, por ejemplo x:

De (1) $\quad x = \frac{26-8y}{14}$

De (2) $\quad x = \frac{19+2y}{5}$

2) Se igualan entre sí los dos valores de x obtenidos:

$$\frac{26-8y}{14} = \frac{19+2y}{5} \quad (3)$$

De esta forma, obtenemos una ecuación con una sola incógnita.

3) Resolvemos la ecuación (3) obtenida:

$$5\,.(26-8y) = 14\,.(19+2y)$$
$$130 - 40y = 266 + 28y$$
$$-28y - 40y = 266 - 130$$
$$-68y = 136$$
$$y = \frac{136}{-68}$$
$$y = -2$$

4) Reemplazamos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones del paso 1):

$$x = \frac{26-8y}{14}$$
$$x = \frac{26-8\,.(-2)}{14}$$
$$x = \frac{42}{14}$$
$$x = 3$$

Así obtuvimos el par ordenado $(3\,;\,-2)$ que es solución del sistema dado, es decir, $S = \{(3\,;\,-2)\}$ que por tener una solución única denominamos sistema COMPATIBLE DETERMINADO.

Método 3: Reducción por sumas y restas (o por eliminación)

Consiste en eliminar una de las incógnitas mediante la suma y/o resta de las dos ecuaciones, obteniendo así una nueva ecuación que dará el valor de la incógnita buscada.

Resolvemos: $$\begin{cases} 7x + 6y = 1 & (1) \\ 4x - 3y = -23 & (2) \end{cases}$$

Pasos:

1) Para lograr eliminar una de las 2 incógnitas necesitamos que los coeficientes de las mismas sean números iguales u opuestos. Si son iguales procederemos a restar miembro a miembro las ecuaciones. Si son opuestos, las sumaremos.
   Para nuestro caso multiplicaremos miembro a miembro la ecuación (2) por 2:
$$(4x - 3y) \,.\, 2 = -23 \,.\, 2$$
$$8x - 6y = -46$$

   Así logramos un nuevo sistema equivalente al dado:
$$\begin{cases} 7x + 6y = 1 \\ 8x - 6y = -46 \end{cases}$$

2) Observamos que los coeficientes que acompañan a y son opuestos, por lo que procederemos a sumar término a término, ambas ecuaciones:
$$\begin{array}{rcr} 7x + 6y & = & 1 \\ \underline{8x - 6y} & = & \underline{-46} \\ 15x + 0y & = & -45 \end{array} \qquad (3)$$

   Así logramos eliminar una incógnita y obtenemos una nueva ecuación que sólo contiene como incógnita a la x.

3) Resolvemos la ecuación (3) obtenida:
$$15x = -45$$
$$x = -3$$

4) Despejamos y de cualquiera de las ecuaciones originales. Por ejemplo de (1):
$$7x + 6y = 1$$
$$y = \frac{1 - 7x}{6}$$

5) Reemplazamos el valor de x hallado en el paso 3):
$$y = \frac{1 - 7\,.(-3)}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

Así obtuvimos el par ordenado $\left(-3\,;\,\frac{11}{3}\right)$ que es solución del sistema dado, es decir, $S=\left\{\left(-3\,;\,\frac{11}{3}\right)\right\}$ que por tener una solución única denominamos sistema COMPATIBLE DETERMINADO.

Análisis gráfico

Este análisis se realiza a partir del gráfico de ambas ecuaciones en el mismo sistema de coordenadas. Para ello debemos expresarlas como funciones lineales (recordemos la ecuación de la recta $y = mx + b$) y buscar el punto de intersección entre ellas. Las coordenadas de dicho punto determinan los valores de x y de y que son solución del sistema de ecuaciones.

Resolvemos: $\begin{cases} -4x - 2y = 2 \quad (1) \\ -10x - 6y = 10\ (2) \end{cases}$

Pasos:

1) Despejamos de ambas ecuaciones la incógnita y, dado que necesitamos hallar las rectas que determina cada ecuación.

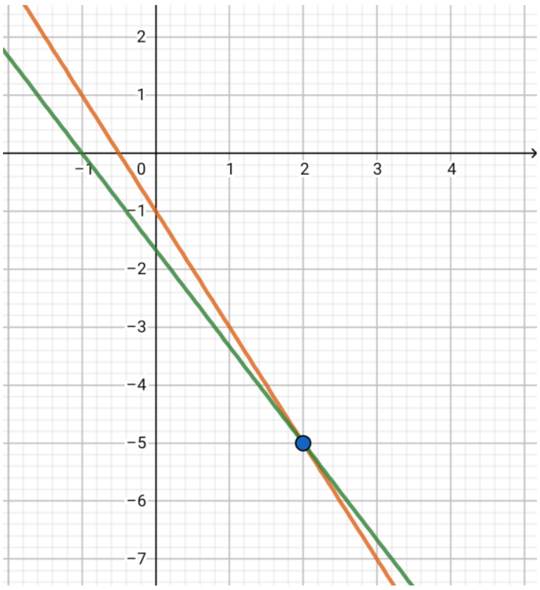
   De (1)

   $-4x - 2y = 2 \quad \therefore \quad y = \frac{2+4x}{-2} \quad ; \quad y = -1 - 2x \quad (3)$

   De (2)

   $-10x - 6y = 10 \quad \therefore \quad y = \frac{10+10x}{-6} \ ; \quad y = -\frac{5}{3} - \frac{5}{3}x \quad (4)$

2) Graficamos cada una de las rectas obtenidas en el mismo sistema de coordenadas



Este método es de **aproximación**, ya que no para todos los casos nos determinará con exactitud la solución del sistema.

Observamos que la intersección de las rectas se da en el punto de coordenadas $(2\,;-5)$ que es solución única del sistema dado, $S = \{(2\,;-5)\}$ por lo que se trata de un sistema COMPATIBLE DETERMINADO.

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 12 al 17 del TP 2

FUNCÓN CUADRÁTICA

A la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ f(x) = ax^2 + bx + c$ siendo a, b, c números reales y $a \neq 0$ se la denomina **función cuadrática**.

$$y = ax^2 + \ bx + c$$
$$a: coeficiente\ cuadrático \quad b: coeficiente\ lineal \quad c: término\ independiente$$

Su dominio natural es el conjunto $\mathbb{R}$. La representación gráfica de una función cuadrática es una curva llamada **parábola**.

Los elementos que se calculan para poder realizar el gráfico son:

- Eje de simetría: $x_v = \frac{-b}{2.a}$
- Vértice: $v = (x_v \, , y_v)$ siendo $x_v = \frac{-b}{2.a}$; $y_v = f\ (\frac{-b}{2.a})$
- Raíces: se calculan mediante la fórmula resolvente

$$x_{1,2} = \frac{-b \ \pm \sqrt{b^2 - 4. a. c}}{2. a}$$

- Ordenada al origen: $f(0) = c$ ó $P = (0, c)$.
  Es el término independiente de la función.

Ejemplo: Graficamos la función $f(x) = \ x^2 + 2x - 3$ siendo $a \ = \ 1; \ b \ = \ 2 \ y \ c = \ -3$. Para ello buscamos los elementos notables de la función:

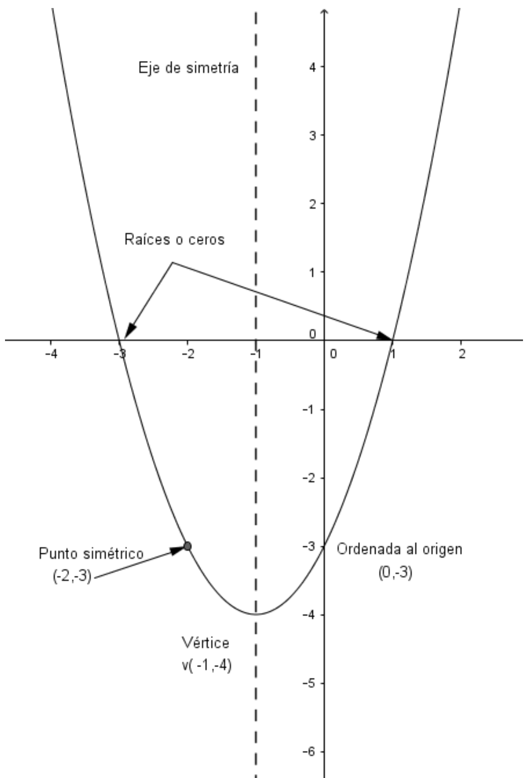
I) Calculamos el eje de simetría:

$$x_v = \frac{-b}{2. a} = \frac{-2}{2.1} = \ -1 \to x_v \ = \ -1$$

II) Calculamos el vértice:

$x_v \ = \ -1$ (calculado en el paso anterior)

$$y_v = f\left(\frac{-b}{2. a}\right) = f(-1) = -4 \to y_v = -4$$
$$f(-1) = \ (-1)^2 \ + \ 2. (-1) \ - 3 \ = \ -4$$



De esta manera concluimos que $v = (-1, -4)$

III) Calculamos las raíces:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad y \quad x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

Entonces: $C_0 = \{1, -3\}$

IV) Calculamos la ordenada al origen:

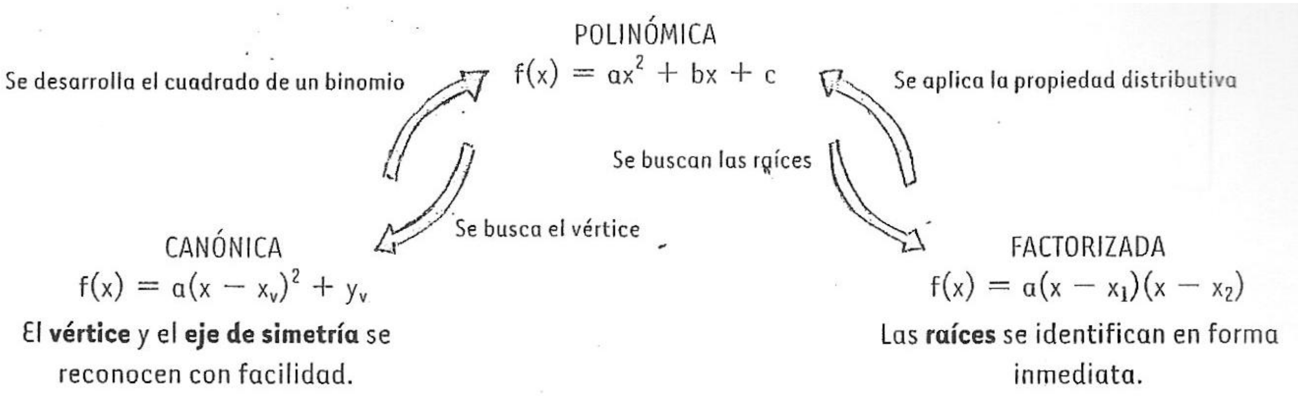
Podemos hacerlo calculando $f(0) = -3$. Entonces, la intersección con el eje y es el punto **(0, -3).** La ordenada al origen siempre coincide con el término independiente.

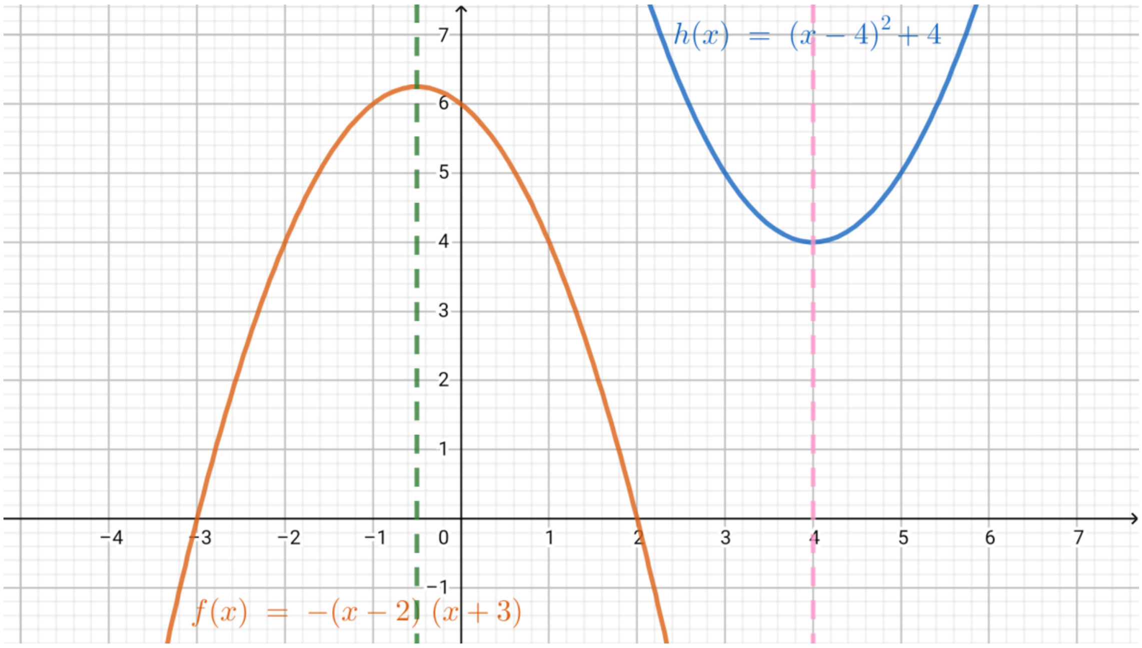
ANÁLISIS DEL COEFICIENTE CUADRÁTICO

El signo de "a" indica hacia donde se dirigen las ramas:

- Si "a" es positivo, $a > 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba, y se dice que la función es cóncava hacia arriba, o simplemente **cóncava**.
- Si "a" es negativo, $a < 0$, las ramas de la parábola están orientadas hacia abajo, y se dice que la función es cóncava hacia abajo, o simplemente **convexa**.

La función cuadrática puede ser expresada de distintas maneras:





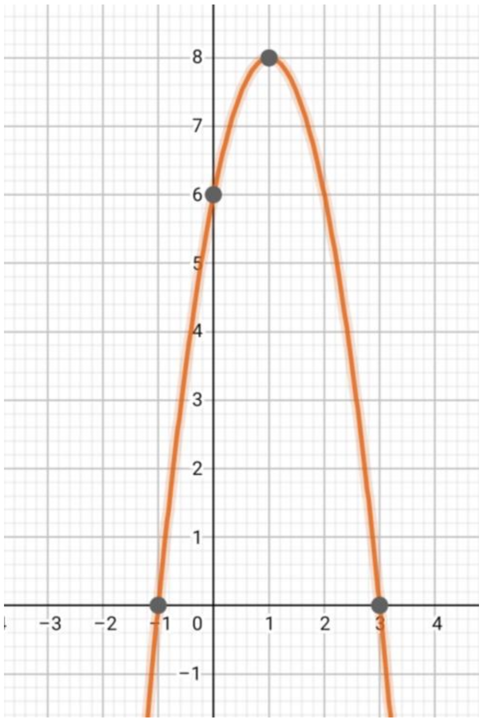
Ejemplo: Dada la función $f(x) = -2(x+1)(x-3)$. Observamos que es una función cuadrática escrita en forma factorizada, es decir, que "veo" las raíces de la función. Entonces $C_0 = \{-1,3\}$.

Luego, el eje de simetría es el punto medio entre las dos raíces, por lo tanto, $x_v = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$, es decir la recta x = 1 es el eje de simetría de la parábola correspondiente a la función f.

Para obtener el vértice, sabemos la coordenada de x (porque coincide con el eje de simetría), es decir, x=1. Para conocer la coordenada de y, reemplazo en la función por el valor de x, es decir, $f(1) = -2\,(1+1)(1-3) = -2.2.(-2) = 8$. Por lo tanto, el vértice de la parábola está en $v = (1,8)$.

Para poder realizar el gráfico, nos faltaría conocer la ordenada al origen, la obtenemos reemplazando el valor de x por cero, $f(0) = -2(0+1)(0-3) = -2.1.(-3) = 6$.

Con los datos obtenidos, graficamos



Para tener la función cuadrática expresada en forma polinómica, debemos aplicar propiedad distributiva:

$$f(x) = -2(x+1)(x-3)$$
$$= -2(x^2-3x+x-3)$$
$$= -2(x^2-2x-3)$$

$$f(x) = -2x^2+4x+6$$

Para obtener la función cuadrática en forma canónica, recordemos que $a = -2$ y $v = (1,8)$.

Entonces

$$f(x) = -2\,(x-1)^2 + 8$$

Ecuación cuadrática

Las ecuaciones cuadráticas con una incógnita son ecuaciones de la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \qquad con\ a\ \neq 0}$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son números reales a los que llamaremos **coeficientes**
(Si $a\ =\ 0$, la ecuación sería lineal)

Para resolverlas, usamos la fórmula:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Donde $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

constituyen las dos soluciones de la ecuación.

Ejemplo:

Resolvamos: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Donde $a = 1\,;\ b = 2\,;\ c = -3$

Reemplazando $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1.(-3)}}{2.1}$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \qquad ; \qquad x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

Soluciones $x_1 = 1$; $x_2 = -3$

El discriminante

Los polinomios de grado 2 tienen 2 raíces y las mismas pueden ser reales o no reales. Para determinar la naturaleza de las raíces analizamos la expresión $b^2 - 4ac$ de la fórmula resolvente.

Esta expresión dentro de la raíz cuadrada recibe el nombre de ***discriminante*** de la ecuación cuadrática. Suele representarse con la letra griega Δ (delta):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Del análisis del discriminante se puede saber cuál es la naturaleza de las raíces, y por consiguiente si la ecuación tendrá solución en los reales o no.

Delta

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$	*el polinomio tendrá* ***2 raíces reales distintas*** *(2 soluciones para la ecuación)*
Si $\Delta < 0$	*el polinomio tendrá* ***2 raíces no reales*** *(la ecuación no tiene solución en los reales)*
Si $\Delta = 0$	*el polinomio tendrá* ***2 raíces reales iguales o coincidentes*** *(una única solución para la ecuación)*

Ejemplo: Analicemos la naturaleza de las raíces de: $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\,.2\,.1 = 9 - 8 > 0$$

Como $\Delta > 0$, por lo tanto la ecuación tiene 2 raíces reales distintas.

Inecuaciones Cuadráticas

Para resolverlas tenemos diferentes alternativas, dependiendo de los términos presentes en la inecuación.

Veamos algunos ejemplos:

Caso 1: Falta el término lineal.

Resolvemos $3x^2 - 2 < 1$

Despejando $3x^2 < 3$

$x^2 < 1$

Aplicando raíz a ambos miembros $\sqrt{x^2} < \sqrt{1}$

Tenemos $|x| < 1$

De donde, por propiedades de módulo, tenemos

$$-1 < x < 1$$

$$S = (-1, 1)$$

Representación gráfica

Caso 2: Falta el término independiente o está completo:

Resolvemos $x^2 < x$

Igualamos a 0 $x^2 - x < 0$

Factorizamos $x\,(x-1) < 0$

Analizamos el signo: si un producto de 2 factores es menor que 0, tenemos 2 opciones:

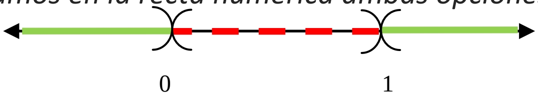
1. *Positivo * Negativo* $x > 0$ y $(x-1) < 0$

   De donde $x > 0$ y $x < 1$

2. *Negativo * Positivo* $x < 0$ y $(x-1) > 0$

   De donde $x < 0$ y $x > 1$

Graficamos en la recta numérica ambas opciones:



La solución es la línea punteada, intersección entre

$x > 0$ y $x < 1$

$$S = (0, 1)$$

Resolvamos $x^2 - 6x > -8$

Igualamos a cero $x^2 - 6x + 8 > 0$

Hallamos las raíces del polinomio

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.8}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 4 \quad ; \quad x_2 = 2$$

Factorizamos $(x-4).(x-2) > 0$

Analizamos el signo: si un producto de 2 factores es mayor que 0, tenemos 2 opciones:

1. *Positivo * Positivo* $x - 4 > 0$ y $x - 2 > 0$

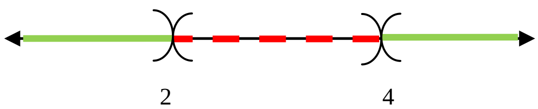
   De donde $x > 4$ y $x > 2$

2. *Negativo * Negativo* $x - 4 < 0$ y $x - 2 < 0$

   De donde $x < 4$ y $x < 2$

La solución está compuesta por la unión de ambos casos:

$$S = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$$



Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 18 al 22 del TP 2

SISTEMAS CUADRÁTICOS Y SISTEMAS MIXTOS

Hasta el momento hemos dado ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales, veamos ahora sistemas formados por dos ecuaciones cuadráticas, llamados **sistemas cuadráticos** o sistemas que combinan ecuaciones cuadráticas y lineales, llamados **sistemas mixtos**.

Para resolverlos aplicaremos cualquiera de los métodos vistos anteriormente.

Ejemplo: Resolvamos $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 2 \ (1) \\ y + x^2 - 2x = -2 \ \ (2) \end{cases}$

Este ejemplo será resuelto mediante el método de sustitución.

Sustituimos la expresión (1) en (2):

$$(x^2 - 2x - 2) + x^2 - 2x = -2$$

Resolvemos la ecuación que resulta: $2x^2 - 4x = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.2.0}}{2.2} = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{4 \pm 4}{4} \qquad x_1 = \frac{4+4}{4} = 2 \qquad x_2 = \frac{4-4}{4} = 0$$

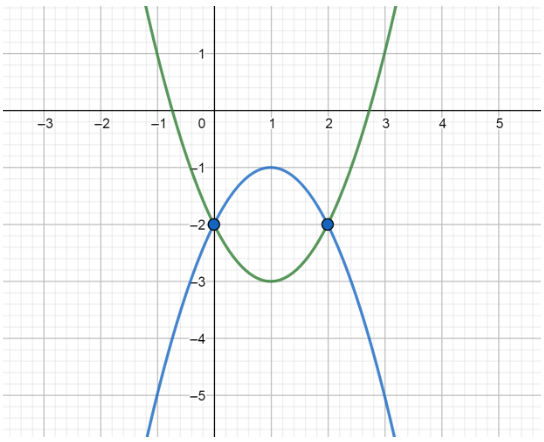
Reemplazamos los valores de "x" que obtuvimos en la expresión $y = x^2 - 2x - 2$ (también puede realizarse en $y + x^2 - 2x = -2$)

$$x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 2^2 - 2.2 - 2 = -2$$

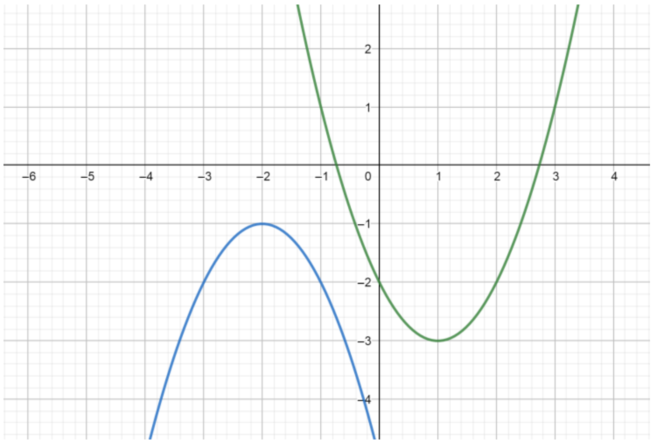
$$x_2 = 0 \rightarrow y_2 = 0^2 - 2.0 - 2 = -2$$

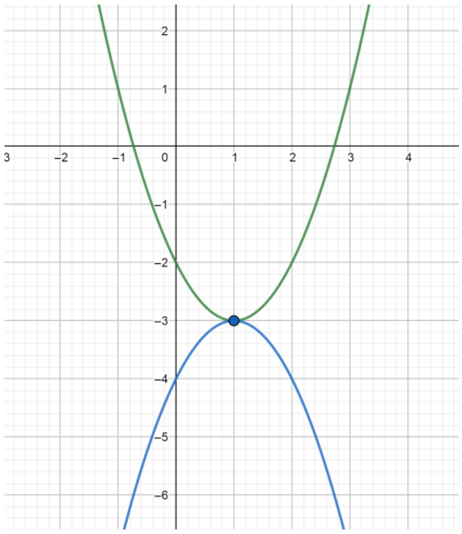
Entonces $S = \{(2, -2); (0, -2)\}$, esto significa que las parábolas que forman este sistema se cortan en estos dos puntos.

Si graficamos ambas parábolas en un mismo sistema de coordenadas cartesianas y buscamos los puntos de intersección deben coincidir con los obtenidos analíticamente.



El sistema cuadrático anterior que resolvimos tiene 2 soluciones, pero también puede darse el caso de que el sistema **no tenga solución**, es decir, que no haya puntos de intersección entre ambas parábolas o también que haya **un solo punto** de contacto.





Ejemplo: Resolvamos $\begin{cases} x = 1 - y & (1) \\ y = x^2 + 2x - 3 & (2) \end{cases}$

1) Resolveremos por igualación, entonces, despejamos y de ambas ecuaciones:

   De (1) $\quad y = 1 - x \quad (3)$

   En (2) y ya está despejada $\quad y = x^2 + 2x - 3$

2) Igualamos $\quad 1 - x = x^2 + 2x - 3$

3) Resolvemos la ecuación cuadrática que obtuvimos:

$$0 = x^2 + 2x - 3 - 1 + x$$
$$0 = x^2 + 3x - 4$$

   Resolvemos aplicando la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\,.1\,.(-4)}}{2\,.1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

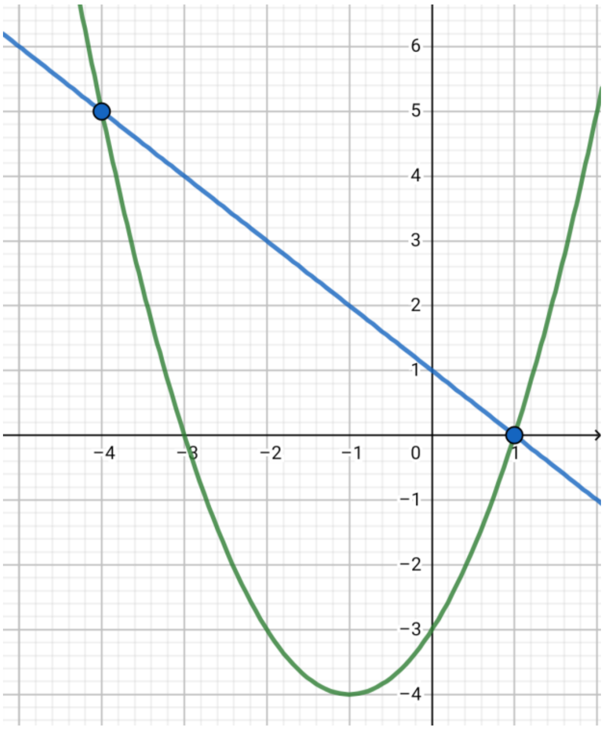
$$x_1 = 1 \qquad ; \qquad x_2 = -4$$

4) Ahora para cada valor de x hallado debemos reemplazar en cualquiera de las ecuaciones obtenidas en el paso 1), para hallar los valores de y:

   Para $\quad x_1 = 1 \quad y_1 = 1 - 1 \quad ; \quad y_1 = 0$

   Para $\quad x_2 = -4 \quad y_2 = 1 - (-4) \quad ; \quad y_2 = 5$

Observamos que en este caso hay 2 pares ordenados que son solución de este sistema mixto. Veamos la gráfica del sistema propuesto:

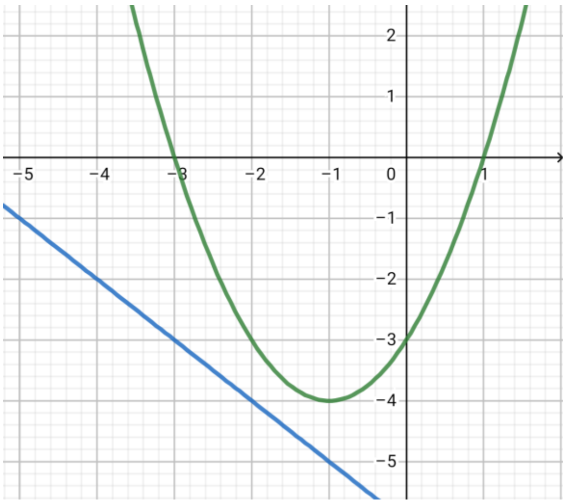


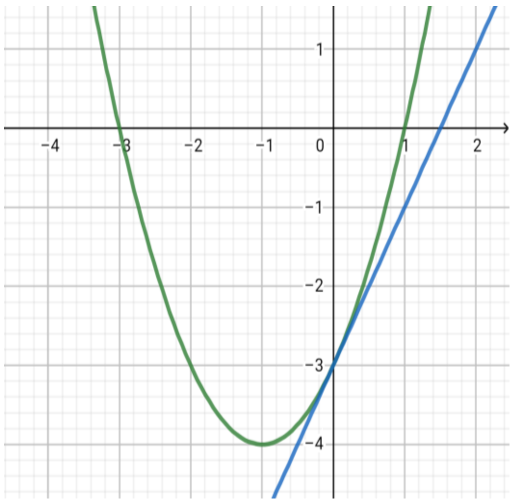
$$S_1 = (1{,}0) \quad S_2 = (-4{,}5)$$

$$S = \{(1{,}0); (-4{,}5)\}$$

Se pueden observar 2 puntos de intersección entre la recta y la parábola $(1, 0)$ y $(-4, 5)$, que son las soluciones al sistema.

El sistema mixto anterior que resolvimos tiene 2 soluciones, pero también puede darse el caso de que el sistema **no tenga solución**, es decir, que no haya puntos de intersección entre la recta y la parábola o también que haya **un solo punto** de contacto entre ambas, en ese caso decimos que la recta es tangente a la parábola.





Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 23 y 24 del TP 2

FUNCIONES POLINOMICAS

POLINOMIOS

Entre las expresiones algebraicas que más utilizamos, encontramos aquellas que tienen la siguiente forma:

$$P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n\,x^n$$

en donde n es un número entero no negativo, $a_0,\ a_1\,, a_2\,, \cdots\,,\ a_{n-1},\ a_n$ son número reales que llamamos **coeficientes** y x es la indeterminada.

Estas expresiones se llaman **polinomios**.

Para indicarlos se utilizan las letras mayúsculas P, Q, R, entre otras y se suele escribir entre paréntesis su o sus indeterminadas $P(x), Q(x, y), R(x, y, z)$.

Trabajaremos en general, en este curso, con polinomios en una indeterminada cuyos coeficientes sean números reales.

En el polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \boldsymbol{a_n}\,\boldsymbol{x^n}$$

si $a_n \neq 0$, decimos que $\boldsymbol{n}$ es el **grado del polinomio** y que $\boldsymbol{a_n}$ es el **coeficiente principal**.

Casos particulares:

- $P(x) = 0 + 0\,.\,x + 0\,.x^2 + \cdots + 0\,.\,x^{n-1} + 0\,.x^n = 0$ es el **polinomio nulo**. Este polinomio **no tiene grado.**

- $Q(x) = C$ dónde C es una constante, con $C \neq 0$ es un polinomio de **grado cero**.

Ejemplo:
$P(x) = 7x^3 - 3x^2 + 6x - 9$ es un polinomio de grado 3 y su coeficiente principal es 7.

- Monomio: es un polinomio de un solo término
- Binomio: es un polinomio de dos términos
- Trinomio: es un polinomio de tres términos.
- Cuatrinomio: es un polinomio de cuatro términos.

Características

Otras características que debemos tener en cuenta de los polinomios son las siguientes:

- Cuando el coeficiente principal es 1, el polinomio es mónico o **normalizado.**

$$P(x) = x^6 - 5x^2 + 9x - 7$$

$P(x)$ es un polinomio mónico, cuyo coeficiente principal es $a_6 = 1$.

Un polinomio es ***mónico*** si el coeficiente que forma el término de mayor grado es 1.

- Al término a_0 se lo llama **término independiente**.

$$P(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2x - 3$$

En este ejemplo el término independiente es $a_0 = -3$.

- Al término $a_1\,x$ se lo llama **término lineal**.

$$R(x) = \frac{2}{3}x^2 + 5x - 4$$

En este polinomio, el término lineal es $5x$.

- Un polinomio está **ordenado** cuando los términos que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus grados.
  - **Polinomio desordenado:**

$$Q(x) = 3 + 7x^2 + 5x^7 - 4x - 2x^5$$

  - **Polinomio ordenado en forma decreciente:**

$$P(x) = 4x^7 - 6x + 2$$

  - **Polinomio ordenado en forma creciente:**

$$R(x) = 9 + 6x - 3x^2 - 4x^4 + 2x^5$$

- Decimos que un polinomio de grado n está **completo** cuando todos los coeficientes $a_0,\ a_1, a_2, \cdots,\ a_{n-1},\ a_n$ son distintos de cero.
  - **Polinomio completo:**

$$Q(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

  - **Polinomio incompleto:**

$$R(x) = 6x^7 - 8x + 3$$

- Para completar un polinomio, agregamos los términos faltantes con coeficientes cero. Completamos el polinomio $R(x)$ del ejemplo anterior.

$$R(x) = 6x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 8x + 3$$

Especialización de un polinomio

En un polinomio las letras representan valores indeterminados, por lo tanto, cuando las letras toman valores concretos, también el polinomio toma un valor concreto.

Ejemplo:
Calcular el valor numérico del polinomio:
$P(x) = 2x^2 - 3x - 7$ para $x = -2$

$P(-2) = 2.(-2)^2 - 3\,.(-2) - 7 = 8 + 6 - 7 = 7$

Entonces el valor numérico del polinomio $2x^2 - 3x - 7$ para $x = -2$, es 7.

Esto es, 7 es el valor numérico que toma $P(x)$ cuando a la indeterminada x se le asigna el valor -2.

Podemos observar que el valor numérico del polinomio no siempre es el mismo, pues depende del valor que tome la indeterminada.

Raíces de un polinomio

Si al especializar un polinomio en un valor numérico determinado, el resultado que obtenemos es 0, ese valor es una **raíz** del polinomio.

a es **raíz** de $P(x)$ si y sólo sí $P(a) = 0$

Ejemplos:

- $x = -5$ es **raíz** de $P(x) = x^2 + 10x + 25$ porque

$$P(-5) = (-5)^2 + 10\,.\,(-5) + 25 = 0$$

- $x = 1$ es **raíz** de $P(x) = x^5 - x^3$ porque $P(1) = 1^5 - 1^3 = 0$
- También $x = -1$ es **raíz** de $P(x) = x^5 - x^3$ porque

$$P(-1) = (-1)^5 - (-1)^3 = 0$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 25 al 29 del TP 2.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA (TFA)

Recordemos que un valor de x es **raíz** de $P(x)$ si el polinomio se anula para ese valor.

Además, si $P(x)$ está expresado como producto de otros polinomios, las raíces de éstos son las raíces de $P(x)$.

Observemos los siguientes ejemplos:

Polinomio expresado como producto	**Raíces reales**	**Cantidad de raíces reales**
$P(x) = (x-1)\,(x-2)\,(x+3)$	$x = 1; x = 2; x = -3$	Tres
$Q(x) = (x-7)\,(x-4)\,(x-4)$	$x = 7; x = 4$ (raíz doble)	Tres

Las raíces no reales de un polinomio siempre vienen de a pares.

$R(x) = (x+5)\,(x+5)\,(x+5)$	$x = -5$ (raíz triple)	Tres
$S(x) = (x-8)\,(x^2+1)$	$x = 8$	Una

Si al escribir un polinomio como producto hay más de un factor que tiene la misma raíz, a ésta se la llama **raíz múltiple**. Por esta razón, $x = 4$ es **raíz doble** de $Q(x)$ (se cuentan como **dos** raíces) y $x = -5$ es **raíz triple** de $R(x)$ (se cuentan como **tres** raíces).

En la tabla anterior figuran las raíces reales, pero un polinomio puede tener **raíces reales** y **raíces no reales (raíces complejas)**. Existe un teorema, denominado **Teorema fundamental del álgebra** (**TFA**), a partir del cual podemos afirmar que **un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces,** considerando las reales y las no reales.
Una consecuencia de este teorema es la siguiente:

Un polinomio de grado n tiene como máximo $\boldsymbol{n}$ raíces reales.

Los polinomios de grado uno (llamados funciones lineales) tienen una raíz real, los de grado dos (llamados funciones cuadráticas) tienen hasta dos raíces reales, los de grado tres tienen hasta tres raíces reales.

Otra consecuencia del TFA

Un polinomio de grado impar tiene como mínimo una raíz real, es decir que su gráfico siempre tendrá contacto con el eje x.

Por esta razón, un polinomio de grado tres, puede tener una raíz real y dos raíces complejas, o bien, tener las tres raíces reales.

Raíces de polinomios de grado uno

Para hallar la única raíz de un **polinomio de grado uno**, es decir de un polinomio de la forma $mx + b$, planteamos la ecuación $mx + b = 0$ y despejamos x.

Ejemplo:

$P(x) = 3x - 4 \rightarrow 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$ es la raíz de $P(x)$.

Raíces de polinomios de grado dos

Para hallar las raíces $x_1\, y\, x_2$ de un **polinomio de segundo grado**, es decir, de un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, igualamos a 0 y resolvemos aplicando la fórmula resolvente.

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Si las raíces son reales, podemos escribir el polinomio mediante este producto:

$$\boldsymbol{a}x^2 + bx + c = \boldsymbol{a}(x - x_1)(x - x_2).$$

Ejemplo:
Encontrar las raíces del polinomio

$$Q(x) = x^2 + 5x - 6 \rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$$

Aplicando la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{siendo} \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = -6 \end{cases}$$

Sustituyendo por los valores:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\,.1\,.(-6)}}{2\,.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

Por lo tanto,

$$x_1 = \frac{-5+7}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-5-7}{2} = -\frac{12}{2} = -6$$

$x_1\, y\;\, x_2$ son las raíces de $Q(x)$.
Entonces $Q(x)$ puede escribirse de la siguiente manera
$Q(x) = (x - 1)(x + 6)$.

Cuando se factoriza la ecuación de segundo grado, si $a \neq 1$, **no olvidar** incluirlo en el resultado de dicha factorización.

Ya sabemos cómo hallar las raíces reales de polinomios de grados uno y dos. De ahora en más, cuando busquemos las raíces de un polinomio, lo que haremos es buscar sólo las **raíces reales**.

TEOREMA DE GAUSS

Raíces de polinomios con coeficientes enteros

Si consideramos el polinomio

$$P(x) = 27x^3 + 3x - 10$$

que tiene todos sus coeficientes enteros y calculamos:

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = 27\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right) - 10 = 27\left(\frac{8}{27}\right) + 2 - 10 = 0$$

como $P\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, resulta que $x = \frac{2}{3}$ es una **raíz** de $P(x)$.

Podemos observar que esa raíz es una fracción que cumple con estas dos condiciones:

- El numerador 2 divide al término independiente -10.
- El denominador 3 divide al coeficiente principal 27.

El **Teorema de Gauss**, que generaliza esta situación, afirma que:

> Cuando una fracción irreducible $\boldsymbol{\frac{p}{q}}$ es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, $\boldsymbol{p}$ divide al término independiente y $\boldsymbol{q}$ divide al coeficiente principal.

Entonces, para hallar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros debemos seguir los siguientes pasos:

1. Se buscan los divisores "p" del término independiente y los divisores "q" del coeficiente principal.
2. Se forman con ellos fracciones irreducibles $\frac{p}{q}$ que son las **posibles raíces**.
3. Se especializa el polinomio en estas fracciones para ver si alguna de ellas es **raíz** de él, aplicando el Teorema del Resto.

Ejemplo:

Queremos hallar las raíces racionales de $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

- Verificamos que todos los coeficientes de $P(x)$ son enteros: 2, 3 y -1.
- Hallamos los divisores p del término independiente: ± 1.
- Hallamos los divisores q del coeficiente principal: ± 1; ± 2.
- Formamos todas las fracciones irreducibles $\frac{p}{q}$: ± 1; $\pm \frac{1}{2}$.
- Especializamos el polinomio $P(x)$ en cada una de las cuatro fracciones irreducibles:

  $P(1) = 2\,.\,1^3 + 3\,.\,1^2 - 1 = 2 + 3 - 1 \neq 0$

  $P(-1) = 2\,.\,(-1)^3 + 3\,.\,(-1)^2 - 1 = -2 + 3 - 1 = 0$

  $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\,.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = 0$

  $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\,.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\,.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 \neq 0$

Entonces las **raíces racionales** de $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$, son $-1 \; y \; \frac{1}{2}$.

POLINOMIOS PRIMOS

Vamos a ver ahora, la ventaja de expresar un polinomio como producto de sus **polinomios primos**.

Son **primos** únicamente los polinomios mónicos de grado uno, y los de grado dos sin raíces reales.

En el ejemplo de raíces de un polinomio, donde se hizo la representación gráfica de $S(x) = x^3 - 8x^2$, podemos ver que si queremos resolver la ecuación $x^3 - 8x^2 = 0$, es conveniente expresar dicha ecuación como un producto $x^2 \, . \, (x-8) = 0$, ya que dicho polinomio se anula cuando alguno de sus factores es 0 y en consecuencia **es más sencillo averiguar las raíces de cada factor que las raíces del polinomio original**.

Si un producto es 0, alguno de sus factores debe ser 0, por lo tanto

$$\underbrace{x^2}_{=0} \; . \; \underbrace{(x-8)}_{=0} = 0$$

y entonces resulta: $x_1 = x_2 = 0 \quad y \quad x_3 = 8$, en donde $x = 0$ es raíz doble (en la gráfica de $S(x) = x^3 - 8x^2$ sólo toca al eje x en $x = 0$ sin atravesarlo).

Ejemplos:
Son primos los siguientes polinomios:

$Q(x) = -3(x-2) \qquad R(x) = x^2 + 4 \qquad S(x) = x^2 + x + 1$

Cuando un polinomio no es primo, se dice que es **compuesto**.

Los polinomios de grado impar mayor que uno son compuestos, ya Que tienen por lo menos una raíz real $\boldsymbol{r}$, y entonces podemos expresarlos como el producto de $(x - \boldsymbol{r}) \, . \, Q(x)$.

Polinomios compuestos son aquellos polinomios de grado no nulo que pueden ser expresados como producto de polinomios de grado positivo menor.

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 30 y 31 del TP 2.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

De la misma manera en que descomponemos un número entero en producto de sus factores primos, podemos descomponer un polinomio compuesto en producto de polinomios primos.

Ejemplo:
Vamos a descomponer el polinomio $Z(x) = 2x^3 - 14x + 12$ en producto de polinomios primos, sabiendo que $x = -3$ es **raíz** de $Z(x)$.

- Como $x = -3$ es **raíz,** expresamos $Z(x)$ como $(x+3)\,.\,Q(x)$, aplicando la regla de Ruffini para calcular $Q(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -14 & 12 \\ -3 & & -6 & 18 & -12 \\ \hline & 2 & -6 & 4 & \underbrace{0}_{resto} \end{array}$$

$$\rightarrow Z(x) = (x+3)\,.\,\underbrace{(2x^2 - 6x + 4)}_{Q(x)}$$

- Ahora descomponemos $Q(x) = 2x^2 - 6x + 4$, que es un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$. Para hallar las raíces x_1 y x_2 de un polinomio de segundo grado utilizamos la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$Q(x) = 2x^2 - 6x + 4 \rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\,.2\,.4}}{2\,.2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4}$$

Un polinomio está factorizado cuando se lo expresa como el producto entre su coeficiente principal y polinomios mónicos primos.

Por lo tanto, $x_1 = \frac{6+2}{4} = \frac{8}{4} = 2$ $\;y\;$ $x_2 = \frac{6-2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ son las raíces de $Q(x)$, que puede escribirse de la siguiente manera: $Q(x) = 2\,(x-2)(x-1)$.

- Finalmente podemos escribir al polinomio del ejemplo:

$$Z(x) = \mathbf{2}\,(x+3)\,(x-2)(x-1).$$

- Podemos observar que el número $\mathbf{2}$ es el **coeficiente principal** de $Z(x)$, y que sus factores son **polinomios mónicos primos**. De esta forma, el polinomio $Z(x)$ quedó **factorizado**.

Ejemplos:

Polinomio desarrollado	**Polinomio factorizado**
$T(x) = 9x + 27$	$T(x) = 9(x + 3)$
$U(x) = -3x^2 + 12x + 15$	$U(x) = -3(x - 5)(x + 1)$
$V(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8$	$V(x) = (x - 4)(x^2 + 2)$

Todo polinomio $P(x)$ compuesto y de grado $\boldsymbol{n}$, que tenga $\boldsymbol{n}$ raíces reales, puede factorizarse de la siguiente manera:

$$P(x) = \boldsymbol{a_n}\,(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$
donde $\boldsymbol{a_n}$ es el coeficiente principal de $P(x)$
$r_1, r_2, \cdots, r_n$ son las n raíces reales de $P(x)$.

Podría suceder que $P(x)$ sea de grado $\boldsymbol{n}$ y no tenga $\boldsymbol{n}$ raíces reales, como en el polinomio

$$V(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8$$

Ejemplo:
Sea:
$S(x) = (x + 1)(x + 1)(x + 1)(x + 1)(x - 2)(x - 2)(x - 2)$

$S(x) = (x + 1)^4\,(x - 2)^3$

$x = -1$ es raíz cuádruple de $S(x)$.

$x = 2$ es raíz triple de $S(x)$.

Ejemplo:
Queremos hallar las raíces del polinomio $V(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ y el grado de multiplicidad de cada una.

- Vemos que todos los coeficientes de $V(x)$ son enteros.
- Intentamos, utilizando el Teorema de Gauss, encontrar las raíces. Las posibles raíces racionales de $V(x)$ son $\pm 1 \; y \; \pm 3$.
- Probamos con el valor de $x = 1$

$$V(1) = 1^3 - 5\,.\,1^2 + 7\,.\,1 - 3 = 1 - 5 + 7 - 3 = 0$$

$$\rightarrow x = 1 \text{ es raíz de } V(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

- Según el Teorema del resto, $(x-1)$ divide a $V(x)$. Si efectuamos la división utilizando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 7 & -3 \\ 1 & & 1 & -4 & 3 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \underbrace{0}_{resto} \end{array}$$

$$V(x) = (x-1)\,.\,\underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{Q(x)}$$

- Buscamos ahora las raíces de $Q(x) = x^2 - 4x + 3$.

  Aplicamos la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

- Sustituyendo por los valores:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\,.\,1\,.\,3}}{2\,.\,1}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

  por lo tanto,

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad y \quad x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

- Podemos escribir al polinomio cociente como:

$$Q(x) = (x-3)(x-1)$$

- Finalmente, $V(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ queda factorizado de la siguiente manera:

CONCLUSIÓN:

- $x = 1$ es raíz doble de $V(x)$.
- $x = 3$ es raíz simple de $V(x)$.

CASOS DE FACTORIZACIÓN

FACTOR COMÚN

Cuando se habla de **extraer factor común** nos estamos refiriendo a una transformación a la que se pueden someter ciertas sumas y que resulta útil en el cálculo.

Si observamos la siguiente expresión:

$$a.b+a.c+a.d$$

- Se trata de una suma cuyos sumandos son productos.
- Todos esos productos contienen el factor común *a*.

La transformación no es otra cosa que la aplicación de la propiedad distributiva.

Entonces podemos transformar la suma, sacando el factor común y colocando un paréntesis:

$$a.b+a.c+a.d=a.(b+c+d)$$

Ejemplos:

Queremos descomponer en factores primos en $\mathbb{R}$.

1. $P(x)=18x^5+12x^4$

   $P(x)=6x^4(3x+2)$

   Observa que el factor común tiene:

   ✓ El grado del término de menor grado de $P(x)$.

   ✓ Como coeficiente, el divisor común máximo de los coeficientes dados.

2. $Q(x)=\frac{16}{25}x^6y+\frac{32}{75}x^4y-\frac{8}{25}x^2y$

   $Q(x)=\frac{8}{25}x^2y\left(2x^4+\frac{4}{3}x^2-1\right)$

Cada término del paréntesis resulta de dividir cada término del polinomio por el factor común.

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 32 del TP 2.

FACTOR COMÚN POR GRUPOS

A veces en un polinomio es posible aplicar la propiedad distributiva extrayendo **factor común por grupos.** En este caso, se agrupan convenientemente los términos, se saca factor común de cada grupo y luego se vuelve a sacar factor común.

Ejemplos:

Queremos descomponer en factores primos en $\mathbb{R}$.

1. $P(x)=x^3+x^2-2x-2$

   $P(x)=(x^3+x^2)+(-2x-2)$

$P(x) = x^2(x+1) - 2(x+1)$

$P(x) = (x+1)(x^2-2)$

2. $Q(x,\ y) = xy + 2x + 3y + 6$

$Q(x,\ y) = (xy + 2x) + (3y + 6)$

$Q(x,\ y) = x(y+2) + 3(y+2)$

$Q(x,\ y) = (y+2)(x+3)$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 33 del TP 2.

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Calculamos el producto

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

La diferencia de cuadrados de dos monomios se puede factorizar como el producto de la diferencia de ambos por su suma.

Ejemplos:

Queremos descomponer en factores primos en $\mathbb{R}$.

1. $16a^2b^4 - 9 = (4ab^2 - 3)(4ab^2 + 3)$

Condiciones:

a) Un cuadrado perfecto $16a^2b^4 = (4ab^2)^2$

b) Otro cuadrado perfecto $9 = 3^2$

Luego:

$$16a^2b^4 - 9 = \underbrace{(4ab^2 - 3)}_{\substack{Diferencia\ de \\ las\ bases}} \ \underbrace{(4ab^2 + 3)}_{\substack{Suma\ de\ las \\ bases}}$$

Base $= 4ab^2$ Base $= 3$

2. $\frac{25}{49}a^8 - p^6 = \left(\frac{5}{7}a^4 - p^3\right)\left(\frac{5}{7}a^4 + p^3\right)$

3. $0{,}01x^{10} - a^4b^2 = (0{,}1x^5 - a^2b)(0{,}1x^5 + a^2b)$

4. $\frac{36}{25}m^{12} - 1 = \left(\frac{6}{5}m^6 - 1\right)\left(\frac{6}{5}m^6 + 1\right)$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 34 del TP 2.

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Cuando tenemos un trinomio de este tipo, sabemos que proviene de elevar al cuadrado un binomio, lo importante es determinar los dos "cuadrados perfectos" y el término restante que es el doble producto de las bases de los cuadrados.

Es decir:

Cuadrado de un binomio		Trinomio cuadrado perfecto
$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$	$\Leftrightarrow$	$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$

De acuerdo con la definición de cuadrado de un binomio resulta que en el trinomio cuadrado perfecto:

- dos de sus términos son cuadrados perfectos y
- el término restante es el doble producto de las bases de los cuadrados.

El cuadrado de un binomio da por resultado un ***trinomio cuadrado perfecto.***

Observa cómo varían los signos del trinomio de acuerdo con los signos de los términos del binomio:

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(-x-a)^2 = (-x-a)(-x-a) = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x-a)^2 = (x-a)(x-a) = x^2 - 2ax + a^2$$

$$(-x+a)^2 = (-x+a)(-x+a) = x^2 - 2ax + a^2$$

- Si el doble producto es positivo, los dos términos del binomio tienen el mismo signo.
- Si el doble producto es negativo, los dos términos del binomio tienen distinto signo.

Ejemplos:

Queremos descomponer en factores primos en $\mathbb{R}$.

1. $P(x) = x^2 + 6x + 9$

   Hay dos cuadrados perfectos cuyas bases son x y 3.

   El otro término es: $2 \,.\, x \,.\, 3 = 6x$ y su signo es positivo.

   Por lo tanto: $P(x) = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = (-x-3)^2$

2. $Q(x) = 4x^2 - 20x + 25$

   Hay dos cuadrados perfectos cuyas bases son $2x$ y 5.

   El otro término es: $2 \,.\, 2x \,.\, 5 = 20x$ y su signo es negativo.

Por lo tanto:

$$Q(x) = 4x^2 - 20x + 25 = (2x-5)^2 = (-2x+5)^2$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 35 del TP 2.

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS COMPLETANDO CUADRADOS

Para los polinomios de grado dos, ya hemos visto dos técnicas para factorizarlos, una de ellas válida para cualquier polinomio de grado dos (utilizando la fórmula resolvente) y la otra, sólo aplicable cuando son trinomios cuadrados perfectos (cuadrado de un binomio).

Mostraremos una tercera técnica, que será **completando cuadrados** y luego aplicando el caso particular de diferencias de cuadrados.

Debemos tener en cuenta que todo polinomio $P(x)$ de grado dos, podemos escribirlo como:

$$P(x) = (x-b)^2 + c \qquad \text{expresión canónica}$$

Desarrollando el cuadrado del binomio en la expresión anterior, tenemos:

$$P(x) = x^2 - 2bx + b^2 + c \qquad (4)$$

Vamos a mostrarte en un ejemplo el procedimiento a seguir para

obtener la expresión canónica de un polinomio.

Si al completar cuadrados, no obtenemos una diferencia, significa que el polinomio es primo en el conjunto de los números reales.

Ejemplo:

Queremos factorizar $P(x) = x^2 - 5x + 6$

Completamos cuadrados: $P(x) = \underbrace{x^2 - 2\,.\,\frac{5}{2}\,.\,x + \left(\frac{5}{2}\right)^2}_{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2} \underbrace{- \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6}_{-\frac{1}{4}}$

OBSERVAR QUE…

Para completar cuadrados, debemos dividir por 2 el coeficiente del término lineal y luego debemos elevar el número que se obtiene al cuadrado, para **sumarlo y restarlo** al trinomio dado.

$$P(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Por diferencia de cuadrados:

$$P(x) = \left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = (x-3)(x-2)$$

En este ejemplo se ha trabajado con un polinomio mónico. Si no lo fuera, debemos sacar factor común a_n para normalizarlo.

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 36 del TP 2.

UNA ESTRATEGIA GENERAL PARA FACTORIZAR POLINOMIOS

Hasta ahora hemos estudiado distintos procedimientos para la factorización de polinomios en el conjunto de los números reales.

Dado un polinomio, podrás utilizar cualesquiera de los métodos expuestos para factorizarlo, pero sugerimos que tengas en cuenta los siguientes pasos para determinar cuál es el más conveniente según el polinomio dado.

- ✓ Primero se busca un factor común.
- ✓ Luego se considera la cantidad de términos.
  Si es un binomio, se observa si es una diferencia de cuadrados.
  Si es un trinomio, se analiza si es un trinomio cuadrado perfecto.
  Si tiene más de tres términos, trata de agrupar y aplicar la extracción de factor común por grupos.
- ✓ Si no se corresponde con ninguno de los pasos anteriores, busca un divisor (aplicando, por ejemplo, el Teorema de Gauss) , luego aplica el algoritmo de Ruffini para hallar el cociente y expresa el dividendo como el producto $divisor\ .\ cociente$.
  Si es necesario, aplica nuevamente este procedimiento o cualquier otro que consideres conveniente.
- ✓ Asegúrate de que cada factor sea primo para que el polinomio esté totalmente factorizado.

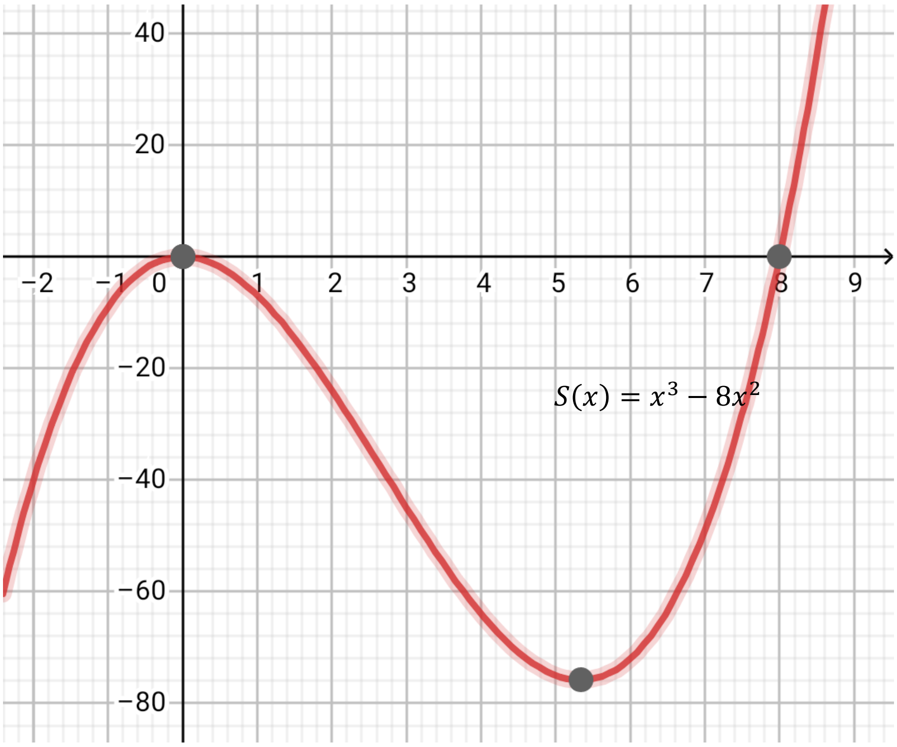
Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 37 del TP 2.

FUNCION POLINOMICA

Una función polinómica es cualquier función cuya fórmula es un polinomio y el grado del polinomio es el grado de la función.

Las funciones polinómicas son **continuas** y su dominio es $\mathbb{R}$

Por ejemplo el gráfico del polinomio $S(x) = x^3 - 8x^2$ es una función polinómica. Si observamos dicho gráfico, podemos decir que sus raíces son $x = 0$ y $x = 8$. En cada raíz real, el gráfico corta al eje x (en $x = 8$), o lo toca (en $x = 0$) sin atravesarlo, es decir que "rebota".



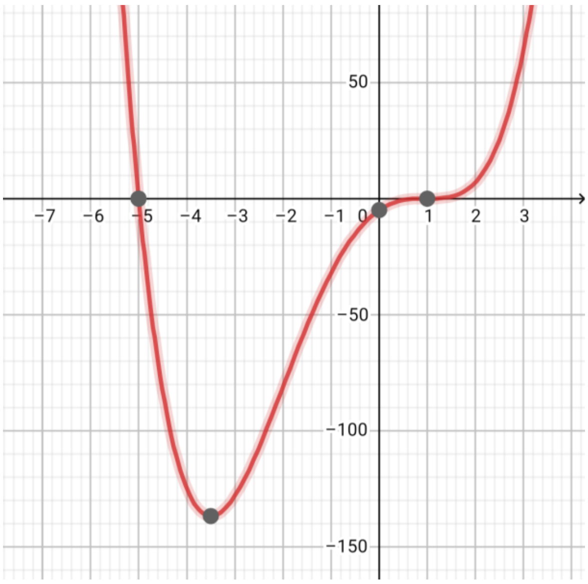
Los valores en los que el gráfico de la función polinómica tiene contacto con el eje x son **raíces** del polinomio**.**

Verifico analíticamente:

- $x = 0$ es **raíz** de $S(x) = x^3 - 8x^2$ pues $S(0) = 0^3 - 8 \, . \, 0^2 = 0$
- $x = 8$ es **raíz** de $S(x) = x^3 - 8x^2$ pues
$$S(8) = 8^3 - 8 \, . \, 8^2 = 512 - 8 \, . \, 64 = 0$$
- $x = 2$ NO es raíz de $S(x) = x^3 - 8x^2$ pues
$$S(2) = 2^3 - 8 \, . \, 2^2 = 8 - 8.4 = 8 - 32 = -24 \neq 0$$

Ejemplo 1:

Si observamos el gráfico de la función polinómica $P(x) = (x - 1)^3 \, (x + 5)$.

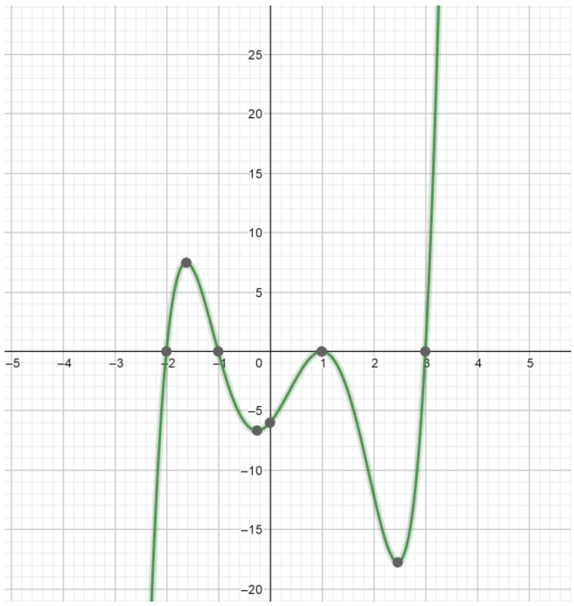


Sus raíces son: $x = 1$ y $x = -5$. Decimos entonces que el **conjunto de ceros** es $C_0 = \{-5,\ 1\}$.
Para los valores de x comprendidos entre $(-\infty, -5\,)$, el polinomio $P(x)$ está por encima del eje x, es decir, toma valores **positivos**. También para los valores de x mayores que 1. Entonces, su conjunto de positividad es $C^+ = (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.
En cambio, hay un solo intervalo de x para los cuales $P(x)$ está por debajo del eje x, es decir, toma valores **negativos**.
Son los valores de x comprendidos entre -5 y 1. Entonces el conjunto de negatividad es $C^- = (-5, 1\,)$.
Observamos que las **raíces** de $P(x) = (x-1)^3\ (x+5)$ son las que determinan los conjuntos C^+ y C^-.

Ejemplo 2:
El conjunto de ceros de $S(x) = (x+1)(x-3)(x-1)^2(x+2)$ es
$C^0 = \{-2, -1,\ 1, 3\}$.

Si observamos el gráfico de $S(x)$, podemos determinar los intervalos de positividad y negatividad.

$$S(x) = (x+1)(x-3)(x-1)^2(x+2)$$



Al factorizar un polinomio, descubrimos el grado de multiplicidad de sus raíces.

a) Marquen en el gráfico las raíces de $S(x)$.
b) Marquen con azul los valores de x donde $S(x)$ es negativo.
c) Marquen con rojo los valores de x donde $S(x)$ es positivo.
d) El conjunto de negatividad de $S(x)$ es $C^- =$ ....
e) El conjunto de positividad de $S(x)$ es $C^+ =$ ....

En general, cuando una raíz r tiene:

- grado de **multiplicidad impar**, el polinomio **atraviesa** el eje x en $x = r$.
- grado de **multiplicidad par**, el polinomio **toca** pero no atraviesa el eje x; "*rebota*" en $x = r$.

Para hacer gráficos aproximados de polinomios, tendremos en cuenta que:

- Los contactos entre el gráfico de la función y el eje x son raíces del polinomio.
- Según el grado de multiplicidad de cada raíz, el gráfico puede atravesar el eje x o sólo tocarlo ("rebota").
- Entre raíces consecutivas, los valores que toma el polinomio son todos positivos o todos negativos.
- El gráfico atraviesa el eje y en el valor del término independiente, que es la ordenada al origen.

Para graficar funciones, también podés utilizar el Geogebra, descargándote la aplicación en tu celular, tablets o computadora aquí.

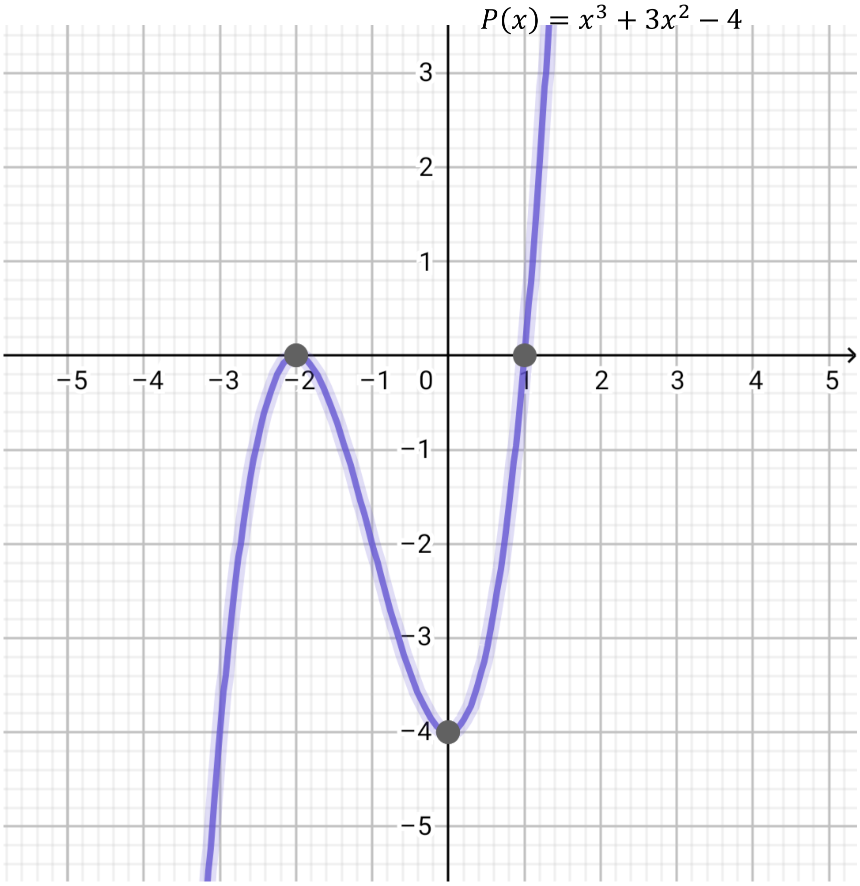
Ejemplo:
Queremos graficar aproximadamente el polinomio
$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ **sin usar tabla de valores**.

- Buscamos las raíces aplicando el Teorema de Gauss.
  Al ser un polinomio mónico, las posibles raíces enteras son los divisores de 4.
  Probemos con $x = 1$: $P(1) = 1^3 + 3 \,.\, 1^2 - 4 = 0$, entonces $x = 1$ es raíz de $P(x)$.
- Aplicando la regla de Ruffini, dividimos $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ por $(x - 1)$ y obtenemos el polinomio cociente $Q(x)$.
- Entonces podemos escribir $P(x) = (x - 1)\underbrace{(x^2 + 4x + 4)}_{Q(x)}$
- $Q(x) = x^2 + 4x + 4$ es un **trinomio cuadrado perfecto**, entonces $Q(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$; por lo tanto: $P(x) = (x - 1)(x + 2)^2$. Podemos deducir que $x = 1$ es raíz simple y $x = -2$ es raíz doble de $P(x)$.
- Ahora buscamos los intervalos de positividad y de negatividad:

$(-\infty;-2)$	$x=-3$	$P(-3)=(-3-1)(-3+2)^2<0$	Negatividad
$(-2;\ 1\ )$	$x=$	$P(\quad)=(\quad)^3+3(\quad)^2-4\quad 0$	
$(\ 1\ ;+\infty)$	$x=$	$P(\quad)=(\quad)^3+3(\quad)^2-4\quad 0$	

Entonces C^0 =……….. , C^+ =………….. y C^- =…………..

- En el sistema de ejes cartesianos marcamos las raíces de $P(x)$ y, de acuerdo con C^+ y C^- y con la multiplicidad de las raíces, graficamos aproximadamente:



Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 38 y 39 del TP 2.

ANEXO: OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma y resta de polinomios

Ejemplo:
Sumar los polinomios
$$P(x) = x^3 + 5x^2 - 7 \quad \text{y} \quad Q(x) = x^2 - 3x - 2$$

- Procedemos así:
  $P(x) + Q(x) = (x^3 + 5x^2 - 7) + (x^2 - 3x - 2) =$
  $= x^3 + 5x^2 - 7 + x^2 - 3x - 2 = x^3 + 6x^2 - 3x - 9$

- La regla práctica es la siguiente: se colocan uno debajo del otro, haciendo coincidir, en la misma columna, los monomios semejantes.

$$\begin{array}{lrrrr} P(x) \rightarrow & x^3 & +5x^2 & & -7 \\ Q(x) \rightarrow & & x^2 & -3x & -2 \\ \hline \boldsymbol{P(x)+Q(x)} = & x^3 & +6x^2 & -3x & -9 \end{array}$$

Cuando en una expresión figuran términos encerrados entre paréntesis ( ), corchetes [ ] o llaves { }, para efectuar las operaciones se quitan previamente esos símbolos (en ese orden), teniendo en cuenta que cuando están precedidos por un signo $+$, se conservan los signos de los términos encerrados, y si están precedidos por un signo $-$, se cambian los signos de todos los términos encerrados.

Ejemplo:
Restar los polinomios $P(x) = x^3 + 5x^2 - 7$ y $Q(x) = x^2 - 3x - 2$

- Podríamos hacerlo así:
  $P(x) - Q(x) = (x^3 + 5x^2 - 7) - (x^2 - 3x - 2) =$
  $= x^3 + 5x^2 - 7 - x^2 + 3x + 2 = x^3 + 4x^2 + 3x - 5$
- O bien, utilizando la regla práctica:

$$\begin{array}{lrrrr} P(x) \rightarrow & x^3 & +5x^2 & & -7 \\ -Q(x) \rightarrow & & -x^2 & +3x & +2 \\ \hline \boldsymbol{P(x)-Q(x)} = & x^3 & +4x^2 & +3x & -5 \end{array}$$

Multiplicación de dos polinomios

Para calcular el producto de dos polinomios se multiplica cada término de uno de los factores por todos y cada uno de los términos del otro factor y se suman los términos semejantes obtenidos.

Ejemplo:

$$(x^3-5x^2-2x+1).(x^2-4x+3)$$
$$=x^5-4x^4+3x^3-5x^4+20x^3-15x^2-2x^3+8x^2-6x+x^2-4x+3$$
$$=x^5-9x^4+21x^3-\ 6x^2-10x+3$$

O también se puede escribir:

$$\begin{array}{r}
x^3-5x^2-2x+1\\
\times\qquad\qquad x^2-4x+3\\
\hline
3x^3-15x^2-6x+3\\
-4x^4+20x^3+\ 8x^2-4x\qquad\\
x^5-5x^4-\ 2x^3+\ \ x^2\qquad\qquad\quad\\
\hline
x^5-9x^4+21x^3-\ 6x^2-10x+3
\end{array}$$

PRODUCTOS NOTABLES

Llamamos **productos notables**, a ciertos productos cuya memorización resulta útil para facilitar los cálculos con expresiones algebraicas.

Cuadrado de un binomio

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

Ejemplos:

- $(x+3)^2=x^2+2\,.\,x\,.3+3^2=x^2+6x+9$
- $(4+5x)^2=4^2+2\,.4\,.5x+(5x)^2=16+40x+25x^2$
- $(x-5)^2=x^2-2\,.\,x\,.5+(-5)^2=x^2-10x+25$
- $(1-3x)^2=1^2-2\,.1\,.3x+(-3x)^2=1-6x+9x^2$

Diferencia de cuadrados

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

Ejemplos:

- $(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$
- $(2x+5)(2x-5)=(2x)^2-5^2=4x^2-25$
- $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)=(\sqrt{x})^2-2^2=x-4$

APLICACIONES

En los siguientes ejercicios resueltos, podemos observar cómo los productos notables se aplican en la descomposición de polinomios en factores y en la simplificación de fracciones algebraicas.

Ejemplo 1:

Descomponer en factores la expresión $x^2 - 6x + 9$

Podemos observar que se trata de un trinomio, en el cual dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto del primer término por el segundo.

$$x^2 - 6x + 9 = \underbrace{x^2}_{\substack{cuadrado \\ del\,primero}} - \underbrace{2\ .\ 3\ .\ x}_{\substack{doble\,del\,primero \\ por\,el\,segundo}} + \underbrace{3^2}_{\substack{cuadrado \\ del\,segundo}}$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

Ejemplo 2:

Descomponer en factores la expresión $x^2 - 9$

Observamos que se trata de una diferencia de cuadrados. Por lo tanto,

$$x^2 - 9 = \underbrace{x^2}_{\substack{cuadrado \\ del\,primero}} - \underbrace{3^2}_{\substack{cuadrado \\ del\,segundo}}$$

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

División de polinomios

Para dividir dos polinomios debemos proceder de manera similar a la división numérica.

Ejemplo:

Vamos a realizar la división entre los polinomios:

$$(2x^4 + 7x^3 - 9x - 7) :\ (x^2 + 2x + 1)$$

1. Si el dividendo es un polinomio incompleto, se completa con los términos que faltan.
2. Se divide el monomio de mayor grado del dividendo por el monomio de mayor grado del divisor:

$$(2x^4) :\ (x^2) = 2x^2$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2x^4} + 7x^3 + 0\,x^2 - 9x - 7 & x^2 + 2x + 1 \\ \hline -\cancel{2x^4} - 4x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & 2x^2 \end{array}$$

3. El cociente parcial obtenido se multiplica por el divisor:
   $2x^2(x^2+2x+1)$
   $= 2x^4+4x^3+2x^2$
   y el resultado se **resta** del dividendo.
   Para ello se coloca, cambiado de signo, debajo del dividendo.
4. Se baja el siguiente monomio del dividendo y se repite el proceso hasta obtener un resto de menor grado que el divisor.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4+7x^3+0\,x^2-9x-7 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^4-4x^3-2x^2\qquad\qquad} & \underbrace{2x^2+3x-8}_{cociente} \\
\cancel{}\;3x^3-2x^2-9x & \\
\underline{\cancel{-3x^3}-6x^2-3x} & \\
-8x^2-12x-7 & \\
\underline{8x^2+16x+8} & \\
\underbrace{4x+1}_{resto} &
\end{array}
$$

Ahora podemos comprobar que aquí también se cumplen las relaciones que conocemos para la división numérica:

$$dividendo \;=\; divisor\,.\,cociente + resto$$

$$2x^4+7x^3-9x-7 = (x^2+2x+1).\,(2x^2+3x-8)+(4x+1)$$

En una división de polinomios, donde:

$$
\boxed{
\begin{array}{l|l}
P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2}
\underbrace{R(x)}_{Resto} & \underbrace{C(x)}_{Cociente}
\end{array}
}
$$

Recordar que en la división se verifica que:

DIVIDENDO = DIVISOR.COCIENTE + RESTO

Se cumple que:

$$
\begin{array}{ccccccc}
P(x) & = & Q(x) & . & C(x) & + & R(x) \\
dividendo & = & divisor & . & cociente & + & resto
\end{array}
$$

A esta última expresión se la llama **algoritmo de la división**.

Y también podemos expresar:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}}$$

siendo el grado de $R(x)$ menor que el grado de $Q(x)$.

TEOREMA DEL RESTO

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} R & C(x) \end{array}$$

Si efectuamos la división entera de un polinomio $P(x)$ por el binomio mónico $(x-a)$, donde a es un número real, como el divisor es de grado 1, puede ocurrir que el resto de esta división sea de grado 0 o bien, que sea el polinomio nulo.

Esto es, el resto es un número real, al que llamaremos R.

$$\boxed{P(x) = (x-a)\,.\,C(x) + R} \qquad (1)$$

Si $x = a$, reemplazando en (1), resulta:

$$P(a) = \underbrace{(a-a)}_{=0}.\,C(a) + R \rightarrow \boldsymbol{P(a) = R}$$

Entonces, al dividir un polinomio $P(x)$ por un polinomio de la forma $(x-a)$, se obtiene como resto un número que es igual a $P(a)$.

Esto es lo que afirma el **Teorema del resto**.

Podemos hallar el **resto** de la división de un polinomio $P(x)$ por otro polinomio de la forma $(x-a)$, **sin hacer la división.**
Basta con especializar el polinomio $P(x)$ en $x = a$.

Ejemplo:
Queremos calcular el resto de la división entre:

$P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 6x - 1$ y

$Q(x) = x + 2$

Sin realizar la división, aplicamos el **Teorema del resto**.

Calculamos:

$P(-2) = 3\,.\,(-2)^3 + 7\,.\,(-2)^2 + 6\,.\,(-2) - 1$

$P(-2) = 3\,.\,(-8) + 7\,.\;4 - 12 - 1 = -9$

Entonces $R = -9$

REGLA DE RUFFINI

Cuando tenemos que dividir un polinomio $P(x)$ por un polinomio **mónico** (cuando su coeficiente principal vale 1) de **grado uno**, conviene utilizar la regla de Ruffini.

Vamos a realizar la división entre $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 6x - 1$ y $Q(x) = x + 2$, que realizamos en el apartado anterior, para verificar que efectivamente el resto es $R = -9$ en la forma convencional y utilizando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+7x^2+6x-1 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2+x+4 \\ \quad x^2+6x & \\ \quad \underline{-x^2-2x} & \\ \qquad 4x-1 & \\ \qquad \underline{-4x-8} & \\ \qquad \quad \underbrace{-9}_{resto} & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 7 & 6 & -1 \\ -2 & & -6 & -2 & -8 \\ \hline & \underbrace{3 \quad 1 \quad 4}_{Cociente} & & & \underbrace{-9}_{Resto} \end{array}$$

- En el primer renglón se escriben los coeficientes del dividendo.
- En el último renglón aparecen los coeficientes del cociente y el resto.

Para aplicar la regla de Ruffini, debo **ordenar y completar** el polinomio dividendo.

Para aplicar la regla de Ruffini, hay que escribir los coeficientes del dividendo, **ordenado y completo** hasta el término independiente. Con respecto al divisor, sólo se escribe su **raíz** (en este ejemplo es -2).

Vamos a ver, paso a paso, cómo se obtienen los coeficientes:

El coeficiente principal del dividendo $(\mathbf{3})$ se copia abajo. Se lo multiplica por $\mathbf{-2}$ y el resultado $\mathbf{-6}$ se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo $(\mathbf{7})$. Se suman 7 y -6 y el resultado $(\mathbf{1})$ se escribe abajo.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 7 & 6 & -1 \\ -2 & & -6 & & \\ \hline & 3 & 1 & & \end{array}$$

El $\mathbf{1}$ obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por $\mathbf{-2}$ y el resultado $\mathbf{-2}$ se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo $(\mathbf{6})$. Se suman $\mathbf{6}$ y $\mathbf{-2}$ y el resultado $(\mathbf{4})$ se escribe debajo.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 7 & 6 & -1 \\ -2 & & -6 & -2 & \\ \hline & 3 & 1 & 4 & \end{array}$$

El $\mathbf{4}$ obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por $\mathbf{-2}$, y el resultado $(\mathbf{-8})$ se escribe debajo del último coeficiente del dividendo $(\mathbf{-1})$. Se suman $\mathbf{-1}$ y $\mathbf{-8}$, y el resultado $(\mathbf{-9})$ es el resto. Se escribe abajo.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 7 & 6 & -1 \\ -2 & & -6 & -2 & -8 \\ \hline & \underbrace{3 \quad 1 \quad 4}_{Cociente} & & & \underbrace{-9}_{Resto} \end{array}$$

El resto es $\mathbf{-9}$. Los valores $\mathbf{3}$, $\mathbf{1}$ y $\mathbf{4}$ son los coeficientes del cociente:

$C(x) = \mathbf{3}x^2 + \mathbf{1}x + \mathbf{4}$

cuyo grado es una unidad **menor** que el del polinomio dividendo.

Según el algoritmo de la división, podemos escribir:

$3x^3+7x^2+6x-1 = (x+2)\,.\,(3x^2+x+4) + (-9)$

La regla de Ruffini es **aplicable** cuando el divisor es un polinomio mónico de grado uno.

Cuando el polinomio es de grado uno y no es mónico, podemos también realizar la división aplicando esta regla, haciendo una transformación en base a la siguiente propiedad:

> Si en una división, se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número, se obtiene el mismo cociente y el resto queda dividido por dicho número.

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - 3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right) : \left(\frac{1}{3}x - 2\right)$$

Primero debemos ordenar y completar el dividendo.

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) : \left(\frac{1}{3}x - 2\right)$$

Luego, para transformar al divisor en un polinomio mónico, debemos dividirlo por $\frac{1}{3}$.
Lo mismo hacemos con el dividendo.

$$\left(2x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 9\right) : (x - 6)$$

Ahora podemos aplicar la regla de Ruffini:

	2	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	-9
6		12	$\frac{135}{2}$	414
	2	$\frac{45}{4}$	69	405

Hemos obtenido el cociente:

$$\mathbf{C(x) = 2x^2 + \frac{45}{4}x + 69}$$

y como resto: $\boldsymbol{R' = 405.}$

Puesto que $\frac{R}{1/3} = R'$, entonces $R = \frac{1}{3}R'$.

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) : \left(\frac{1}{3}x - 2\right) = \begin{cases} \mathrm{C}(x) = 2x^2 + \frac{45}{4}x + 69 \\ R = \frac{1}{3}405 = 135 \end{cases}$$

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Si al realizar la división entera entre $P(x)$ y $Q(x)$ el resto es nulo, decimos que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$, o que $Q(x)$ divide a $P(x)$.

Si a es **raíz** de $P(x)$, es decir, si $P(a) = 0$, $\rightarrow P(x)$ **es divisible** por $(x - a)$

En este caso, podemos expresar $P(x)$ como:

$$\boxed{P(x) = Q(x) \, . \, C(x)}$$

Si a es raíz del polinomio $P(x)$, entonces el resto de la división entre $P(x)$ y $(x - a)$ es cero.

Es decir, si $P(a) = 0$ se cumple que:

$$\boxed{P(x) = (x - a) \, . \, C(x) + \underbrace{P(a)}_{=0} \rightarrow P(x) = (x - a) \, . \, C(x)}$$

Y, recíprocamente, **si al dividir un polinomio $P(x)$ de grado no nulo por $(x - a)$ el resto es cero, entonces a es raíz de $P(x)$.**

Ejemplo:
$P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ con $x = 3$

$P(3) = 3^3 - 3 \, . \, 3^2 + 3 - 3 = 0 \rightarrow$ **3** es **raíz** de $P(x)$

Para hallar $C(x)$, hay que dividir $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ por $(x - 3)$.
Como el resto de la división es cero,
$P(x) = (x - 3) \, . \, C(x)$
El grado de $C(x)$ es una unidad menor que el grado de $P(x)$.
Calcula el valor de $C(x)$.

CONSECUENCIAS QUE TIENEN LAS RAÍCES DE LOS POLINOMIOS

Vamos a analizar las consecuencias de que si a es **raíz** de $P(x)$, entonces se cumple que: $P(x) = (x - a) \, . \, C(x)$.

Ejemplo:
Calcular las raíces de: $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

- Calculamos

$$P(2) = 2^3 - 2^2 - 14 \, . \, 2 + 24 = 8 - 4 - 28 + 24 = 0$$

$\rightarrow x = 2$ es **raíz** de $P(x)$.

CONCLUSIÓN:

Un polinomio $P(x)$ puede expresarse como producto de factores de la forma $(x - a)$, siempre que a sea raíz de $P(x)$.

Esto significa que $P(x)$ es divisible por $(x-2)$.
Entonces podemos escribir:

$$P(x) = (x-2)\,.\,C(x) \qquad (2)$$

- Hallamos $C(x)$ aplicando la regla de Ruffini:

$$C(x) = x^2 + x - 12$$

- Hallamos las raíces de $C(x)$:

$$x_1 = 3 \quad \wedge \quad x_2 = -4 \quad \rightarrow \quad C(x) = (x-3)\,.\,(x+4) \quad (3)$$

- Reemplazamos (3) en (2) y resulta:

$$P(x) = (x-2)\,.\,(x-3)\,.\,(x+4)$$

Verifica que las raíces de $C(x)$ también son raíces de $P(x)$.

Ejemplo:
Calcular las raíces de $R(x) = x^2 + 16$.

En este caso, $R(x)$ **no tiene raíces reales**, puesto que su especialización en cualquier número real, da siempre un resultado positivo. Por lo tanto, no existe ningún polinomio de la forma $(x-a)$ que divida a $R(x)$.

> El polinomio $R(x) = x^2 + 16$ tiene raíces en el conjunto de los números complejos.
>
> En este curso, sólo trabajaremos con raíces pertenecientes al conjunto de los números reales.

EJERCICIOS ANEXO

1. Dados los polinomios:

$P(x) = 4x^2 - 1$ $\qquad$ $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

$R(x) = 6x^2 + x + 1$ $\qquad$ $S(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$

$T(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5$ $\qquad$ $U(x) = x^2 + 2$

Calcula:

a) $P(x) + Q(x) =$

b) $P(x) - U(x) =$

c) $P(x) + R(x) =$

d) $2\,P(x) - R(x) =$

e) $S(x) + T(x) + U(x) =$

f) $S(x) - T(x) + U(x) =$

2. Con los polinomios:
$P(x) = -3x^5 + 2x^2 + 7x - 1$ $\qquad$ $Q(x) = 2x^4 + 3x^2 + 5$
$R(x) = -4x^2 - 8x + 3$

a) Indica el resultado de: $P(x).\ Q(x)\,.R(x)$
b) Indica el resultado de: $P(x)\ .\ [Q(x)+R(x)]$

3. Resuelve los siguientes productos especiales:

a) $(5x^2+3x)^2=$
b) $\left(-\frac{2}{5}x^3-2\right)^2=$
c) $\left(-x^3+\frac{2}{3}x\right)^3=$
d) $\left(-\frac{6}{5}x^2-\frac{2}{3}\right)^3=$
e) $\left(\frac{3}{5}+x^2\right)\left(\frac{3}{5}-x^2\right)=$
f) $\left(-6-\frac{2}{3}x\right)\left(-6+\frac{2}{3}x\right)=$

4. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:
a) $(-10x^6+6x^5-8x^4+12x^3-2x^2+4x-14):\ (-2x^3)=$
b) $(6x^6-15+9x^7-3x-21x^4):\ (3x^2)=$
c) $(4x^6+8x-8x^{10}+12-24x^2):\ (4x^3)=$
d) $(-3x^4+7x^5-9x^6+x-21x^7):\ (-2x^4)=$

5. Halla el cociente y el resto de $P(x)\div Q(x)$ siendo:
$P(x)=8x^7+6x^6+24x^3+52x+16 \qquad Q(x)=2x^2+3x$
Verifica el resultado obtenido, aplicando el algoritmo de la división.

6. Encuentra el dividendo $P(x)$ de una división entera, sabiendo que el resto es $R(x)=3x^2+x$, el cociente es $C(x)=x^3\ .\ R(x)$ y el divisor es $Q(x)=x^4\ .\ R(x)$.

7. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:
a) $(x^5+2x^3-x-8):\ (x^2-2x+1)=$
b) $(x^4-2x^3-11x^2+30x-20):\ (x^2+3x-2)=$
c) $(x^6+5x^4+3x^2-2x):\ (x^2-x+3)=$
d) $(2x^5-3x^3+6x):\ \left(2x-\frac{1}{2}\right)=$

8. Halla el resto de las siguientes divisiones enteras:
a) $(4x^3-x^2+3x-1):\ (x-2)=$
b) $(6x^5+3x^4-3x):\ (x-1)=$
c) $(x^6-3x^3+4):\ \left(x-\sqrt[3]{3}\right)=$
d) $(x^{98}-x^{95}+3x^{91}-1):\ (x+1)=$

9. Encuentra el cociente y el resto de las siguientes divisiones enteras de polinomios, aplicando la regla de Ruffini:

a) $(2x^3-9x^2+4x+10)\ :\ (x-5)=$
b) $(x^4-3x^2+17x+17)\ :\ (x+4)=$
c) $\left(\frac{2}{5}x^3+\frac{4}{5}x-\frac{9}{25}\right)\ :\ \left(x-\frac{1}{2}\right)=$

d) $\left(4\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}\right) : \left(x + \sqrt{2}\right) =$

e) $(0{,}1x^3 + 0{,}01x^2 + 0{,}2x + 0{,}02) : (x + 0{,}1) =$

10. Transforma las siguientes divisiones para poder aplicar la regla de Ruffini. Calcula en cada caso el cociente y el resto de la división.

a) $(2x^3 - 3x^2 + 7x - 5) : (2x - 1) =$

b) $\left(\frac{9}{2}x^5 + \frac{4}{3}x^2 - 12x - 14\right) : (3x + 2) =$

c) $\left(\frac{1}{125}x^3 - 27\right) : \left(\frac{1}{5}x - 3\right) =$

11. Halla el valor de ***m*** para que resulte cociente exacto:

a) $(2x^3 - 3x^2 + \boldsymbol{m}x - 5) : (x - 1) =$

b) $\left(8x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \boldsymbol{m}x + \frac{1}{2}\right) : \left(x - \frac{1}{4}\right) =$

12. Encuentra el valor de $\boldsymbol{k}$ para que al dividir:

a) $3x^2 + \boldsymbol{k}x - 2$ por $x + 3$ se obtenga de resto 5.

b) $7x^3 - \boldsymbol{k}x^2 + \boldsymbol{3}x - 2$ por $x - 2$ se obtenga de resto 1.

c) $5x^4 - \boldsymbol{k}x + 2$ por $x + 1$ se obtenga de resto 3.

13. Hallar, según corresponda los valores de a, b o c, tales que verifiquen:

a) $P(x) = -3x^5 + ax^2 - 2a$ con $P(1) = -5$

b) $Q(x) = x^2 + x + 0{,}5b$ siendo $x = -3$ una de sus raíces.

c) $R(x) = -bx^2 + (16 + b)\,x - 2b$ con $R(2) = 8$

d) $T(x) = x^2 + ax + b$ siendo $x = -1$ y $x = 1$ sus dos raíces.

e) $S(x) = bx^2 - 11x + a$ $\wedge$ $R(x) = bx^3 - ax$ tengan a $x = 4$ como raíz común.

f) El resto de dividir $(x^4 - bx^2 - 3b)$ por $(x^2 - 1)$ sea -16
¿Puede indicar cuál es el polinomio cociente y qué raíces tiene?
¿Son éstas también raíces del primer polinomio?