Bloque 4: Función exponencial y logarítmica

INTRODUCCION

En este capítulo nos dedicamos a estudiar funciones exponenciales y logarítmicas. Para ello debemos recordar las propiedades de potencia y de logaritmo que hemos estudiado en el Bloque 1.

Nuestro objetivo es que estudies estas funciones en particular, ya que son funciones que se utilizan frecuentemente y tienen muchas aplicaciones en economía.

FUNCION EXPONENCIAL

Llamamos **función exponencial** a toda función del tipo:

$$f(x) = k.a^x \qquad x \in \mathbb{R}$$

Coeficiente de la función
$k \in \mathbb{R} - \{0\}$

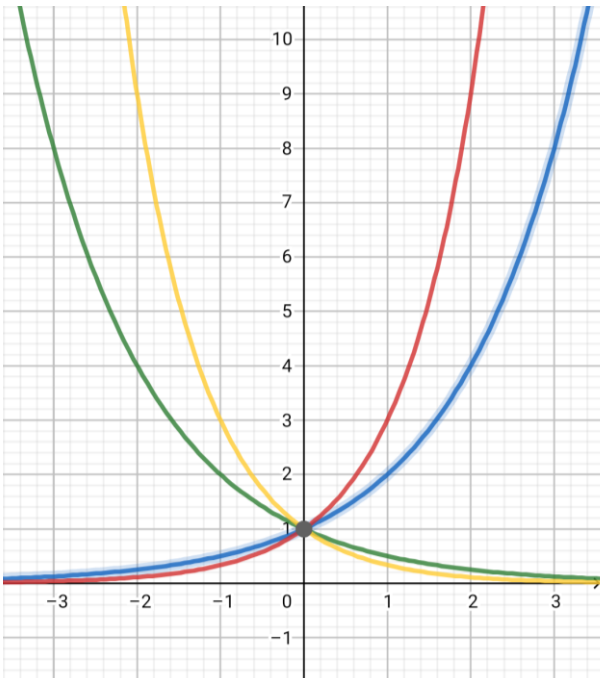
Base de la función
$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

El dominio de las funciones exponenciales es $\mathbb{R}$, es decir $Domf = \mathbb{R}$.
Para comparar y analizar de un modo más general estas curvas, vamos a estudiar cómo se ven afectadas por las variaciones de las constantes k y a.

Funciones de la forma $f(x) = a^x, k = 1$

Observemos los gráficos de las funciones

$f(x) = 2^x, g(x) = 3^x, h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, t(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



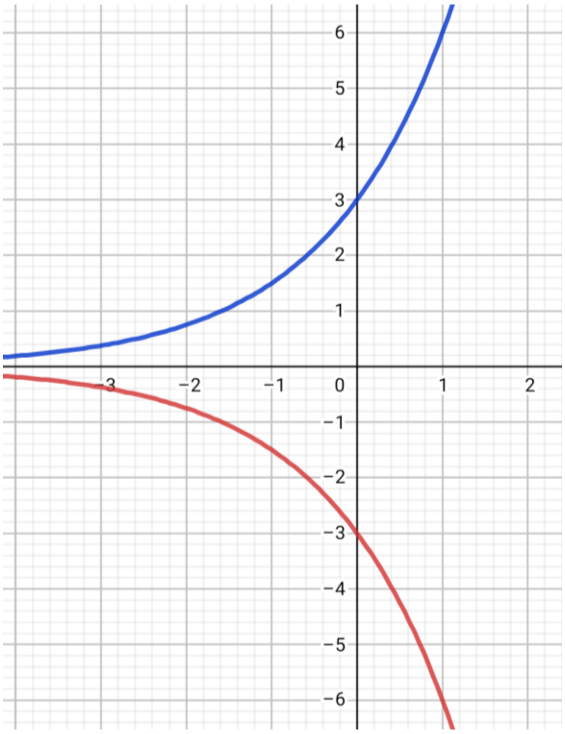
Características comunes:
- Cortan el eje de ordenadas en el punto (0,1)
- No cortan al eje de abscisas, es decir, no tienen raíces.
- Tienen una asíntota horizontal en y = 0.
- El conjunto imagen es $\mathbb{R}^+$.

Diferencias:
- Si $a > 1$ la función es creciente.
- Si $0 < a < 1$ la función es decreciente.
- Las curvas que corresponden a funciones de bases reciprocas, son simétricas con respecto al eje y.

Funciones de la forma $f(x) = ka^x, k \in \mathbb{R} - \{0\}$

Observemos los graficos de las funciones

$f(x) = 3.2^x$ y $g(x) = -3.2^x$



Veamos el comportamiento de las funciones según el valor del coeficiente k, siendo valores opuestos de k para igual base de la función exponencial.

	$f(x) = 3.2^x$	$g(x) = -3.2^x$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Imagen	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^-$
Ordenada al origen	(0,3)	(0,-3)
Crece/Decrece	Crece	Decrece
Asíntota horizontal	y = 0	y = 0

Observación:

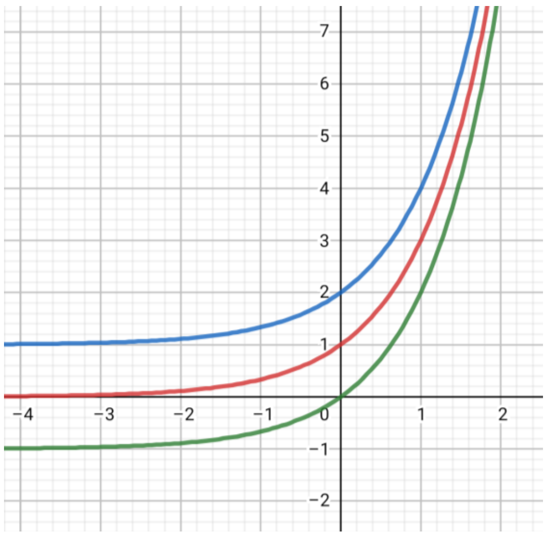
Las curvas correspondientes a las funciones exponenciales que tienen igual base y coeficientes opuestos, son simétricas respecto del eje x.

Analizaremos a continuación los siguientes ejemplos:

Ejemplo:

Sean las funciones $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^x + 1$ y $h(x) = 3^x - 1$.

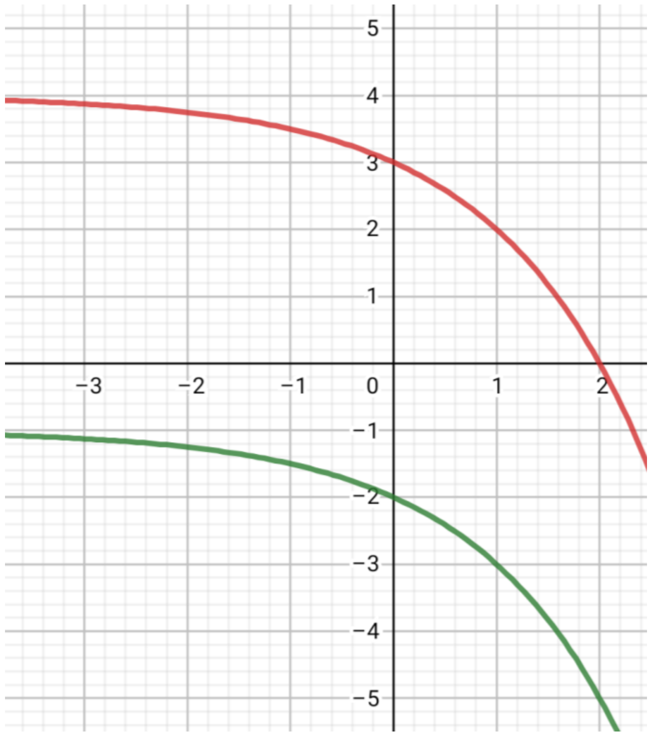
Observamos los gráficos para poder obtener conclusiones:



	$f(x) = 3^x$	$g(x) = 3^x + 1$	$h(x) = 3^x - 1$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Imagen	$\mathbb{R}^+$	$(1, +\infty)$	$(-1, +\infty)$
Ordenada al origen	(0,1)	(0,2)	(0,0)
Raíz	No tiene	No tiene	x = 0
Asíntota Horizontal	y = 0	y = 1	y = -1

Ejemplo: Sean las funciones $f(x) = -2^x + 4$ y $g(x) = -2^x - 1$.

Observamos los gráficos para poder obtener conclusiones:



	$f(x) = -2^x + 4$	$g(x) = -2^x - 1$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Imagen	$(-\infty, 4)$	$(-\infty, -1)$
Ordenada al origen	(0,3)	(0,-2)
Raíz	x = 2	No tiene
Asíntota Horizontal	y = 4	y = -1

Observaciones:

- Para encontrar las raíces de una función exponencial, se iguala a 0, quedando una ecuación exponencial, como en el ejemplo anterior:

$$0 = -2^x + 4 \to 2^x = 4 \to x = 2, pues\ 2^2 = 4$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 1 al 5 del TP 4.

ECUACIONES EXPONENCIALES

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita aparece únicamente en el exponente. Son de la forma

$$\boxed{k\,.\,a^x = c} \qquad siendo\ \ a > 0\ \ y\ \ a \neq 1, k \neq 0$$

Existen diversas formas de resolver estas ecuaciones.

A continuación, te brindamos ejemplos de los procedimientos que te pueden servir para su resolución. Muchas veces debemos usar una combinación de ellos para la resolución de una ecuación exponencial.

*Recuerda del bloque de Números Reales las **propiedades** de la **potenciación** y de los **logaritmos.***

Igualación de bases

Resolvamos $2^x = 4$

Buscamos igualar las bases de las potencias

$$2^x = 2^2$$

Si las bases son iguales, los exponentes también lo son

$$x = 2$$

Resolvamos $2^{x+2} + 2^x = 40$

Aplicando la propiedad del producto de potencias de igual base

$$2^x . 2^2 + 2^x = 40$$

Sacando factor común $2^x(2^2 + 1) = 40$

$$2^x . 5 = 40$$

$$2^x = \frac{40}{5}$$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

Producto de potencias de igual base

$a^n . a^m = a^{n+m}$

Cambio de variables

Resolvamos $4^{2x} - 3 \,.\, 4^x = -2$

$$(4^x)^2 - 3 \,.\, 4^x = -2$$

Realizamos un cambio de variable $4^x = t$

Reemplazando $t^2 - 3 \,.\, t = -2$

Igualamos a 0 $t^2 - 3 \,.\, t + 2 = 0$

Resolvemos la ecuación cuadrática obtenida

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$t_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad ; \quad t_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

Volviendo al cambio de variable

Ahora $si\ t_1 = 2 \quad entonces \quad 4^x = 2 \quad de\ donde \quad 2^{2x} = 2$

Igualando los exponentes $2x = 1 \quad \therefore \quad x = \frac{1}{2}$

Ahora $si\ t_2 = 1 \quad entonces \quad 4^x = 1 \quad de\ donde \quad x = 0$

Potencia de potencia

$(a^n)^m = a^{n.m}$

$a^0 = 1$

Utilizando logaritmos

Cuando no podemos expresar ambos miembros de una ecuación exponencial como potencias de una misma base, debemos utilizar logaritmos para resolverla.

Resolvamos $2^x = 5$

Aplicamos logaritmo (en una base conveniente) a ambos miembros

$$ln\, 2^x = ln\, 5$$

Por la propiedad de los logaritmos, bajamos el exponente

$$x\,.\,ln\, 2 = ln\, 5$$

Despejamos la incógnita $x = \frac{ln\, 5}{ln\, 2} \cong 2{,}3219$

Logaritmo de una potencia
$log_a\, x^y = \boldsymbol{y}.\, log_a\, x$

Bases convenientes son las que se encuentran en la mayoría de las calculadoras
$\boldsymbol{ln}$ ó $\boldsymbol{log}$

Resolvamos $2^{2x} - 2^x - 6 = 0$

Realizamos un cambio de variable $2^x = t$

Reemplazando $t^2 - t - 6 = 0$

Resolvemos la ecuación cuadrática obtenida, cuyas raíces son:

$$t_1 = 3 \quad ; \quad t_2 = -2$$

Volviendo al cambio de variable

1) $Si\ \ t_1 = 3\ \ entonces\ \ 2^x = 3$

   Aplicamos logaritmo a ambos miembros $ln\, 2^x = ln\, 3$

   Resolvemos $x\,.\,ln\, 2 = ln\, 3$

   Despejamos la incógnita $x = \frac{ln\, 3}{ln\, 2} \cong 1{,}5849$

2) $Si\ \ t_2 = -2\ \ entonces\ \ 2^x = -2$

   No existe ningún valor de x que satisfaga la ecuación, por lo tanto se descarta del conjunto solución.

*También podemos resolver aplicando la **definición** de logaritmo*

$log_a\, b = c \Leftrightarrow a^c = b$

Para nuestro ejemplo:

$2^x = 3$

$x = log_2\, 3 \cong 1{,}5949$

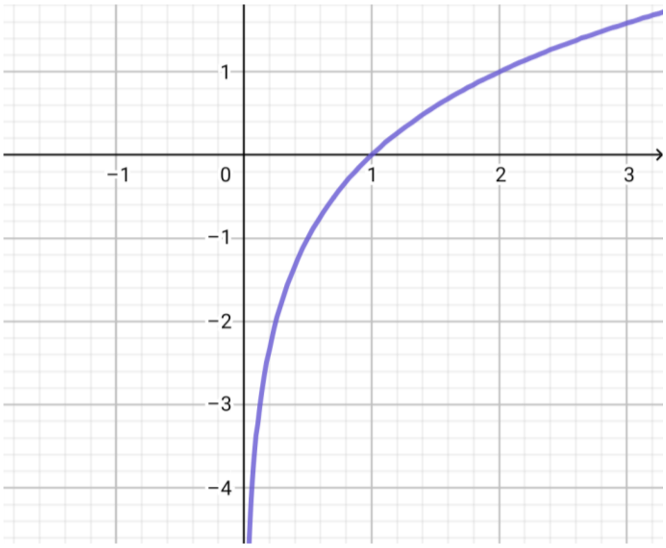
Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver el ejercicio 6 del TP 4.

FUNCION LOGARITMICA

Llamamos función logarítmica a toda función del tipo:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\ tal\ que\ f(x) = \log_a x \text{ con } a > 0\ y\ a \neq 1.$$

Ejemplo: Analicemos la función $f(x) = \log_2 x$



Es importante notar que el logaritmo de números negativos ni de cero está definido, por lo tanto, el dominio de la función es $\mathbb{R}^+$.

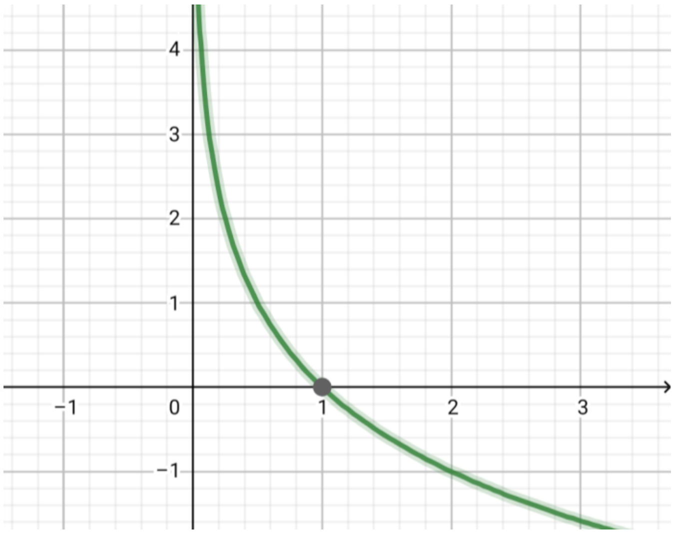
El conjunto imagen es $\mathbb{R}$.

En x = 0, la función presenta una asíntota vertical.

La función no tiene intersección con el eje y, pero si con el eje x. Es decir, tiene una raíz en (1,0).

Es una función creciente.

Ejemplo: Estudiaremos ahora la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



El dominio de la función es $\mathbb{R}^+$.

El conjunto imagen es $\mathbb{R}$.

En x = 0, la función presenta una asíntota vertical.

La función no tiene intersección con el eje y, pero si con el eje x. Es decir, tiene una raíz en (1,0).

Es una función decreciente.

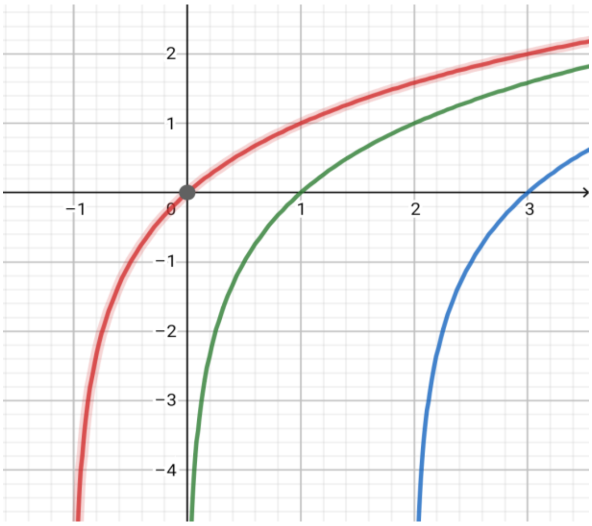
Características de las funciones $f(x) = \log_a x$ con $\boldsymbol{a} > 0$ y $a \neq 1$.

- Dominio: $\mathbb{R}^+$
- Imagen: $\mathbb{R}$
- Conjunto de ceros, $C_0 = \{1\}$
- Asintota vertical en x = 0
- Si $a > 1$, la función es creciente
- Si $0 < a < 1$, la función es decreciente

- Las gráficas de las funciones $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ son simétricas respecto al eje x.

Ejemplo: Analicemos ahora las funciones

$$f(x) = \log_2 x\,, g(x) = \log_2(x-2) \;\; y \;\; h(x) = \log_2(x+1)$$



	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_2(x-2)$	$h(x) = \log_2(x+1)$
Dominio	$(0, +\infty)$	$(2, +\infty)$	$(-1, +\infty)$
Imagen	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Raíz	x = 1	x = 3	x = 0
Asíntota Vertical	x = 0	x = 2	x = -1

Para hallar el dominio analíticamente, debemos recordar que el logaritmo se calcula para valores positivos, entonces por ejemplo, para la función $g(x) = \log_2(x-2)$, para calcular el dominio debemos plantear $x - 2 > 0 \to x > 2$. Es decir, su dominio es $(2, +\infty)$.

Para hallar las raíces analíticamente, debemos igualar la función a 0, es decir, $\log_2(x-2) = 0$, teniendo una ecuación logarítmica. Para resolverla, aplicando la definición de logaritmo tenemos que

$$2^0 = x - 2 \to 1 = x - 2 \to 3 = x$$

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 7 y 8 del TP 4.

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita aparece afectada por la operación logaritmo.

$$\boxed{log_a x = c} \qquad siendo\ a > 0\ \ y\ \ a \neq 1\ \ \ y\ \ x > 0$$

Debido a que los logaritmos no están definidos para todos los valores, antes de resolver debemos encontrar el dominio de validez de la ecuación. Esto se hace planteando que el argumento del logaritmo sea mayor que cero, pues así estará bien definida la ecuación. Al resolver las ecuaciones logarítmicas debemos tener en cuenta que las soluciones cumplan con las condiciones mencionadas, por lo que debemos verificar en la ecuación original los valores hallados.

Ejemplos:

Resolvamos $\qquad log_3 x = 3\,.\,log_3 2$

Primero planteamos que $x > 0$, es decir, que el dominio de validez de la ecuación serán todos los valores de $x \in (0, +\infty)$

Aplicando **propiedades** de los logaritmos

$$log_3 x = log_3 2^3$$

Una vez que tenemos ambos miembros afectados en su totalidad por logaritmos con la misma base, igualamos los argumentos:

$$x = 2^3$$
$$x = 8$$

La solución obtenida pertenece al dominio de validez de la ecuación, por lo tanto, $x = 8$ es solución de la ecuación planteada.

*Debes **verificar** siempre las soluciones obtenidas.*

*Recuerda del capítulo de Números Reales las **propiedades** y la **definición** de los **logaritmos.***

Resolvamos $\qquad log_5 4x = 2$

Planteamos $4x > 0$, es decir, $x > 0$ y entonces el dominio de validez de la ecuación serán todos los valores de $x \in (0, +\infty)$

Aplicando la **definición** de logaritmo

$$5^2 = 4x$$

Resolvemos la ecuación lineal obtenida

$$\frac{25}{4} = x$$

Resolvamos $log_4(x+1)+log_4[4.(x+1)]=2$

Primero planteamos que $x+1>0$, es decir, $x>-1$, entonces el dominio de validez de la ecuación serán todos los valores de $x \in (-1,+\infty)$

Aplicando **propiedades** de los logaritmos

$$log_4[4.(x+1)^2]=2$$

Aplicando la definición de logaritmo

$$4^2=4.(x+1)^2$$
$$4=(x+1)^2$$

$|x+1|=2 \rightarrow$

$$\begin{cases} x+1=2 & \rightarrow \quad x=1 \\ -(x+1)=2 & \rightarrow \quad x+1=-2 \quad \rightarrow \quad x=-3 \end{cases}$$

$x=-3$ no pertenece al dominio de validez de la ecuación, por lo tanto NO es solución de la ecuación.

Verificación para $x=1$

$$log_4(1+1)+log_4 4.(1+1)=2$$
$$log_4 2+log_4 4.2=2$$
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$$

El logaritmo de 1, en cualquier base, es 0

$log_a 1=0 \Leftrightarrow a^0=1$

Resolvamos $log_2(x-1)=2-log_2(x+2)$

$$log_2(x-1)+log_2(x+2)=2$$

Si planteamos que $x-1>0$ y $x+2>0$, es decir, los dos argumentos positivos, tenemos que $x>1 \ y \ x>-2$, entonces el dominio de validez de la ecuación serán todos los valores de $x \in (1,+\infty)$

Aplicando **propiedades** de los logaritmos

$$log_2[(x-1).(x+2)]=2$$

Aplicando la **definición** de logaritmo

$$2^2=(x-1).(x+2)$$
$$4=x^2+x-2$$

Resolvemos la ecuación cuadrática obtenida

$$0=x^2+x-6$$
$$x_1=-3 \quad ; \quad x_2=2$$

$x=-3$ no pertenece al dominio de validez, por lo tanto NO es solución de la ecuación planteada.

Realizar la verificación para $x_2=2$.

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios 9 y 10 del TP 4.

APLICACIONES

Ahora trataremos de resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando ecuaciones e inecuaciones estudiadas hasta aquí.

Para ello, puede ser de utilidad tener en cuenta los siguientes pasos:

1. *Lectura comprensiva del enunciado*
2. *Traducción al lenguaje simbólico*
3. *Expresión de la ecuación correspondiente*
4. *Resolución de la ecuación*
5. *Interpretación del resultado obtenido*

Las aplicaciones que resolveremos en este curso se relacionarán con conceptos económicos, por lo que debemos hacer referencia a ciertas nociones de economía y administración.

Ingresos – Costos – Utilidad

Los **costos fijos** (*CF*) son aquellos que permanecen constantes, es decir, no son sensibles a pequeños cambios en los niveles de actividad de una empresa.

Suele relacionarse a los costos fijos con la estructura productiva y por eso suelen ser llamados también costos de estructura y utilizados en la elaboración de informes sobre el grado de uso de esa estructura. Son ejemplos de estos costos: alquileres, seguros, sueldo del personal administrativo.

Los **costos variables** son aquellos que se modifican de acuerdo a las variaciones del volumen de producción (o nivel de actividad), es decir, dependen de la cantidad de artículos producidos. A mayores niveles de producción, mayores serán los costos variables. Son ejemplos de estos costos: materia prima, insumos, mano de obra.

$$\boxed{CV = Cv\ unitario * cantidad\ producida\ (q)}$$

El **costo total** es la suma de todos aquellos costos en los que se incurre en un proceso de producción o actividad, dicho de otra manera, se obtiene sumando los costos fijos y los costos variables.

$$\boxed{CT = CF + CV}$$

El **costo medio** es el costo por unidad de producción.

$$\boxed{Cme = \frac{CT}{q}}$$

El **ingreso total** es el monto total que recibe una empresa por la venta de su producto.

$$\boxed{IT = p * q}$$

con p: *precio de venta por unidad*

q: *número de unidades vendidas*

Las **Utilidades** son los ingresos totales menos los costos totales.

$$\boxed{U = IT - CT}$$

El **Punto de equilibrio de la empresa***,* es aquel nivel de producción de bienes en que se igualan los ingresos totales y los costos totales, es decir que la utilidad es nula.

Punto Equilibrio

$$IT = CT \ ; \ U = 0$$

Ejemplos:

1) El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce al precio de $60 cada artículo. El costo de materia prima y mano de obra al producir cada artículo es de $40, y tiene costos fijos de $30.000 al mes en la operación de la planta. ¿Cuántas unidades deben producirse y venderse para que la empresa obtenga utilidades mensuales?

Llamaremos $\boldsymbol{q}$ a las unidades que deben ser vendidas.

$CF = 30.000$
$CV = 40 . q$
$p = 60$

Debemos armar la función de **Utilidad**, para lo que necesitaremos la función de Ingreso Total y la de Costo Total:

$U = IT - CT$
$IT = p . q = 60 . q$
$CT = CF + Cv . q = 30.000 + 40 . q$
$U = 60 . q - (30.000 + 40 . q) = 60 . q - 30.000 - 40 . q$
$U = 20 . q - 30.000$

$$\boldsymbol{U = 20 . q - 30.000}$$

Ahora bien, el problema nos cuestiona "cuántas unidades deben venderse para que la empresa obtenga utilidades", lo que significa en lenguaje matemático que $\boldsymbol{U} > 0$

Reemplazamos U $\quad 20 . q - 30.000 > 0$

Resolvemos la inecuación $\quad 20 . q > 30.000$

$q > 30.000 : 20$

$\boldsymbol{q > 1.500}$

Por lo tanto, es necesario vender 1.501 unidades para que la empresa obtenga utilidades.

2) Un constructor debe decidir si rentar o comprar una fotocopiadora. Si renta la máquina el pago mensual o canon sería de $150 (con base anual), y el costo unitario por copia que debe pagar a su locador sería de $0,50. El valor de compra es de $3000, y los costos por operación y mantenimiento por copia serían de $0,30. ¿Cuál es el número mínimo de copias al año que tendría que realizar la máquina para justificar la compra en lugar de la renta?

Llamaremos x al número de copias que se realizarán al año.
Debemos comparar el Costo de Renta versus el Costo de Compra de la fotocopiadora, para ello debemos plantear ambas funciones y compararlas.

$$Costo\ de\ Renta\ (CR)\ =\ 150\,.\,12\ +\ 0{,}50\ .\ x$$
$$Costo\ de\ Compra\ (CC)\ =\ 3000\ +\ 0{,}30\ .\ x$$

Si la pregunta es el número de copias que justifica comprar la máquina en lugar de rentarla, plantearemos la siguiente relación:

$$\boldsymbol{CC}\ <\ CR$$
$$3.000\ +\ 0{,}30\ .\ x\ <\ 150\,.\,12\ +\ 0{,}50\ .\ x$$
$$3.000\ +\ 0{,}30\ .\ x\ <\ 1.800\ +0{,}50\ .\ x$$
$$0{,}30\ .\ x - 0{,}50\ .\ x\ <\ 1.800\ - 3.000$$
$$-0{,}20\ .\ x\ <\ -1.200$$
$$x\ >\ -1.200\ :\ (-\,0{,}20)$$
$$\boldsymbol{x}\ >\ 6.000$$

Deberían realizarse más de 6.000 copias al año, para que se justifique la compra de la fotocopiadora.

3) El precio p en $ de cierto artículo está dado por $p = x + 300$ donde x es el número de ventas mensuales. El costo de producir x unidades del mismo artículo es $C = 200x + 60000$. ¿Cuántas unidades de este artículo deberían producirse para estar la empresa en equilibrio ($\mathrm{IT}\ =\ \mathrm{CT}$)?

Debemos plantear las funciones de Ingreso Total y Costo Total

$$IT = p\,.\,x = (x+300)\,.\,x$$
$$CT = 200x + 60000$$

Igualamos $IT = CT$

$$(x+300)x = 200x + 60000$$

Resolvemos

$$x^2 + 300x = 200x + 60000$$
$$x^2 + 300x - 200x = 60000$$
$$x^2 + 100x - 60000 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática obtenida, aplicando la fórmula resolvente:

$$x_1 = 200 \;\; x_2 = -300$$

De los resultados obtenidos debemos descartar el valor negativo por no tener sentido económico.

Deberían producirse 200 unidades para que la empresa se encuentre en equilibrio.

Oferta – Demanda

Demanda: Cantidad de bienes y servicios que los agentes económicos desean y pueden comprar a un precio dado en un período determinado.

Deseo de cualquier persona por adquirir un bien o servicio económico.

Oferta: Cantidad de bienes y servicios disponibles para la venta y que los oferentes están dispuestos a suministrar a los consumidores a un precio determinado.

En teoría, la demanda y la oferta son los dos componentes básicos que fijan el precio de los bienes y servicios.

Punto de equilibrio del mercado: se da cuando la oferta es igual a la demanda.

Ejemplo

Un fabricante ofrece $2p - 8$ unidades de producto al mercado. Por otro lado la demanda de los consumidores a un precio p en \$ será de $300 - 2p$ unidades. Encontrar el valor de p para el punto de equilibrio.

Hallar el punto de equilibrio implica igualar las ecuaciones de oferta y demanda

$$O = 2p - 8$$
$$D = 300 - 2p$$
$$\boldsymbol{O = D}$$
$$2p - 8 = 300 - 2p$$
$$4p = 308$$
$$\boldsymbol{p = 77}$$

El precio de equilibrio es de $p = 77$. Significa que a un precio de \$77 los oferentes ofrecerán la misma cantidad que los consumidores están dispuestos a adquirir.

Interés compuesto

El concepto y la fórmula general del interés compuesto es una herramienta en el análisis y evaluación financiera de los movimientos de dinero. Con la aplicación del interés compuesto obtenemos intereses sobre intereses, esto es, la capitalización del dinero en el tiempo. Calculamos el monto del interés sobre la base inicial más todos los intereses acumulados en períodos anteriores, es decir, los intereses recibidos son reinvertidos y pasan a convertirse en nuevo capital.

Cn: *Monto al cabo de n períodos*
Co: *Capital inicial*
i: *tasa de interés*
n: *tiempo transcurrido*

$$\boxed{Cn = Co \cdot (1+i)^n}$$

De esto se desprende que:

$$\boxed{I = Cn - Co}$$

I = *Interés obtenido*

Ejemplos:

1) Calcular el **monto** y los **intereses** obtenidos al invertir \$200 al 5% de interés anual durante 10 años, en régimen de capitalización compuesta.

$Co = 200$
$i = 5\% = 0{,}05$
$n = 10$ *años*
Calculamos el monto reemplazando en la fórmula los datos

$$Cn = 200 \cdot (1+0{,}05)^{10} = 200 \cdot (1{,}05)^{10} \cong 200 \,.\, 1{,}6289$$

$$Cn = 325{,}7789$$

Calculamos el interés

$$I = 325{,}7789 - 200 = 125{,}7789$$

El monto obtenido al cabo de 10 años es de \$325,77, y los intereses fueron de \$125,77.

2) ¿Qué suma de dinero mínima se debe invertir si en 2 años se desea disponer de \$1.500 y se consigue una tasa de interés compuesto del 6% anual?

$Cn\ =\ 1.500$
$i\ =\ 6\%\ =\ 0{,}06$
$n\ =\ 2\ años$

Calculamos el capital inicial

$$1.500 = Co \cdot (1 + 0{,}06)^2 = Co \cdot 1{,}1236$$
$$1.500 :\ 1{,}1236 = Co$$
$$Co\ =\ 1.334{,}99$$

La suma que se debe invertir es de \$1.335

3) Determine la tasa de interés anual a la que deben invertirse \$1.000 para que, en 12 años, se obtenga un monto de \$1.601,03.

$Co\ =\ 1.000$
$Cn\ =\ 1.601{,}03$
$n\ =\ 12\ años$

Calculamos el interés

$$1.601.03 = 1.000 \cdot (1 + i)^{12}$$
$$1.601{,}03 :\ 1.000 = (1 + i)^{12}$$
$$1{,}60103 = (1 + i)^{12}$$
$$\sqrt[12]{1{,}60103} - 1 = i$$
$$i = 0{,}0399998$$

La tasa de interés debe ser del 3,99998% (aprox. 4%)

4) Determine el tiempo que estuvo invertido un capital de $2.000, colocado al 4% de interés compuesto anual que al cabo de ese tiempo asciende a $3.202.

$Co = 2.000$
$Cn = 3.202$
$i = 4\% = 0{,}04$

Cuando la incógnita es el tiempo, al reemplazar con los datos del enunciado, obtenemos una ecuación exponencial

$$3.202 = 2.000 \cdot (1 + 0{,}04)^n$$
$$3.202 : 2.000 = (1{,}04)^n$$
$$1{,}601 = (1{,}04)^n$$

Aplicamos logaritmo a ambos miembros para bajar el exponente

$$ln\, 1{,}601 = ln(1{,}04)^n$$
$$ln\, 1{,}601 = n\, .\ ln\, 1{,}04$$
$$\frac{ln\, 1{,}601}{ln\, 1{,}04} = n$$
$$n \cong 11{,}9994$$

El tiempo al que estuvo invertido el capital fue de aproximadamente 12 años.

5) ¿En cuánto tiempo se cuadruplica un capital, si la tasa es del 16% anual?

En este ejemplo parece que faltaran algunos datos, pero igualmente podemos resolverlo.

El monto es igual a 4 veces el capital inicial con lo que $Cn = 4\, .\, Co$,
entonces en la fórmula reemplazamos de la siguiente manera

$$4\, .\, Co = Co \cdot (1 + 0{,}16)^n$$
$$4\, .\, \frac{Co}{Co} = (1 + 0{,}16)^n$$

Así se simplifica Co, con lo que la ecuación que nos queda para resolver es:

$$4 = (1{,}16)^n$$

Aplicamos logaritmo a ambos miembros para bajar el exponente

$$ln\, 4 = ln(1{,}16)^n$$
$$ln\, 4 = n\, .\ ln\, 1{,}16$$
$$\frac{ln\, 4}{ln\, 1{,}16} = n$$
$$n \cong 9{,}34$$

El tiempo que tarda en cuadruplicarse el capital inicial es de aproximadamente 9,34 años.

Con lo que aprendiste hasta aquí, ya puedes resolver los ejercicios del 11 al final del TP 4.