

高效次表层散射的近似反射率曲线

Per H.

ChristensenBrent Burley

皮克斯动画工作室华特迪士

尼动画工作室皮克斯技术备忘录#15-04 - 2015年7月



图1：用本报告中提出的近似次表层散射反射率曲线渲染的图像。© Disney/Pixar.

(普罗米修斯雕像由Scott Eaton建模；头部数据由Infinite Realities通过创作共用协议提供；外星人、水果和蜡烛由Dylan Sisson渲染；绵羊由Chris Scoville建模)。

摘要

我们提出了基于经验反射率曲线的BSSRDF模型的三个有用的参数化。该模型非常简单，但通过适当的参数化，对于许多常见的材料，它比最先进的基于物理的模型（量化扩散和光子束扩散）更匹配粗暴的蒙特卡洛参考。每个反射率曲线是两个外项的总和，其中指数的高度和宽度取决于表面反射率和平均自由路径长度。我们的参数化允许与使用相同参数的基于物理的扩散模型直接比较。这些参数化是针对垂直照明、漫反射表面（照明方向不相关）和散射距离的另一种测量方法而确定的。我们的近似值对于渲染光线跟踪和基于点的次表面散射是有用的。

关键词：渲染，半透明材料，次表面散射，函数近似，BSSRDF，反射率曲线。

1 简介

逼真的表面下散射建模对于渲染诸如皮肤、肉类等半透明材料的可信图像非常重要。

水果、植物、蜡、大理石、玉石、牛奶和果汁。计算机图形学研究人员已经开发出越来越复杂和准确的基于物理的地下散射模型，从简单的偶极子扩散模型[Jensen等人，2001]到量化的扩散模型[d'Eon和Irving 2011]和光子束扩散和漫反射单散射模型[Habel等人，2013]。在这里，我们介绍了三个参数化的经验模型，它和偶极子一样简单，但比光子束扩散更符合残酷的蒙特卡洛参考。

用近似值代替基于物理的模型的主要原因是：

- 不需要对用户友好的表面反射率和平均自由路径长度输入参数进行数值反演[Jensen and Buhler 2002; Habel et al. 2013]，就可以得到不太直观的体积散射和吸收系数。
- 内置单散射术语。
- 更快的评估，更简单的代码，不需要查找表。
- 没有特别的修正系数 $\kappa(r)$ 来使理论符合蒙特卡洛参考文献[Donner和Jensen 2007; Habel等人2013]。
- 一个简单的重要性抽样的cdf。

2 背景和相关工作

2.1 蒙特卡洛模拟和BSSRDFs

计算次表面散射的最通用方法是将物体视为一个体积，并运行一个粗暴的蒙特卡洛模拟[Kalos和Whitlock 1986; Wang等人1995]。然而，这可能是非常缓慢的，特别是对于复杂的场景。

描述光如何进入一个物体，在其内部散射，然后离开物体的函数是BSSRDF--

双向表面散射反射率分布函数。Donner等人[2009]使用蒙特卡洛粒子追踪法为同质半无限体上的平坦表面制定了一个经验性的BSSRDF模型。他们表示离开表面的光的半球形分布，取决于入射光的角度、出射光的相对位置和物理参数（体积反射率、平均自由路径长度、相函数和折射率）。他们的表格花了几个月的时间来计算，包含大约250MB的数据。

2.2 基于物理的反射率曲线

BSSRDF

S 通常被简化为径向对称（1D）漫反射轮廓 R 、两个定向菲涅尔透射项 F_t 和常数 C 的乘积[Jensen等人, 2001; d'Eon和Irving 2011; Jimenez等人, 2015]。

$$S(x_i, w_i; x_o, w_o) = C F_t(x_i, w_i) R(|x_o - x_i|) F_t(x_o, w_o) \quad (1)$$

图2显示了不同表面反射率的例子；这些曲线是用蒙特卡洛模拟计算出来的。纵轴显示的是 $rR(r)$ 而不是 $R(r)$ ，因为 $R(r)$ 是以径向方式在表面上整合的（并且在接近 $r=0$ 处有一个尖锐的峰值）。

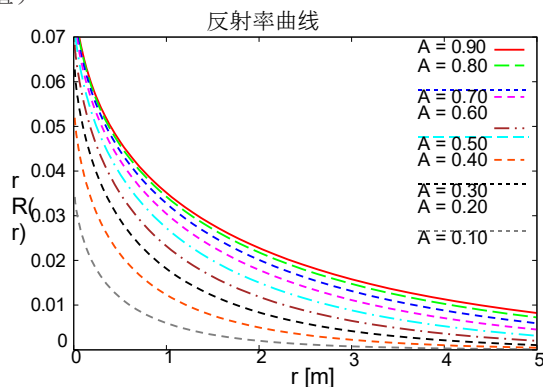


图2：不同表面反射率的反射率曲线 $R(r)$ 。

偶极子扩散模型[Jensen等人, 2001]是对经过多次散射事件而扩散的地下散射的一种近似。这个模型很简单，评估速度快，使用广泛；但是，它也过于模糊，导致看起来像蜡质的。散射的参数是由体积散射和吸收系数 σ_s 和 σ_a （或者说，体积散射反射率 $\alpha = \sigma_s / \sigma_t = \sigma_s / (\sigma_s + \sigma_a)$ 和体积平均自由路径长度 $\ell = 1 / \sigma_t = 1 / (\sigma_s + \sigma_a)$ ）。

在后续的工作中，Jensen和Buhler[2002]引入了一个更多的郊区散射的直观参数化：表面反射率

(漫射表面反射率) $A = \int_0^\infty R(r) 2\pi r dr$ 和扩散性

表面上的平均自由路径长度 ℓ_d

。我们在近似值中使用类似的直观参数。(我们用符号 A 表示表面反射率，而不是常用的 R_d ，因为 R_d 也经常用于反射率profile的扩散(多散射)部分。)

d'Eon后来提出了一个更精确的物理偶极子扩散模型，简单地称为“一个更好的偶极子”[d'Eon 2012]。

最近Frisvad等人[2014]提出了一个定向偶极子模型，取消了径向对称扩散轮廓的假设；这提高了对具有光滑折射表面的物体（如牛奶、果汁和其他具有悬浮颗粒的液体）进行非垂直（斜向）照射的准确性。

d'Eon和Irving[2011]引入了量化扩散：改进的扩散理论和一个扩展的源项，而不仅仅是一个偶极。这导致了更真实的外观和更清晰的特征，但计算起来也更加复杂和耗时。由此产生的漫反射曲线被近似为高斯之和。我们的近似值更准确，而且计算起来也更简单。

Habel等人[2013]的光子束扩散论文有三个主要贡献：一个光子束扩散模型，与量化扩散一样准确，但评估速度更快；一个准确的漫反射单散射模型，以及对进入材料的斜向再分量的优雅处理。我们的近似值比对称散射（垂直照明或理想的漫反射表面透射）的光子束扩散更快，也更准确。

光子束模型有一个经验项 $\kappa(r)$ ，以使理论结果与中距离范围内的蒙特卡洛参考值更好地匹配；我们的模型完全放弃了理论，由纯粹的经验项组成。

上述所有的扩散模型都需要单独处理真实的散射，或者通过显式射线追踪或单独的积分。这两种方法都很慢。我们的模型包括单一散射，所以不需要昂贵的单独计算。

2.3 近似的反射率曲线

像图2中的反射率曲线可以用表格来表示。例如，我们可以把表面反射率为0, 0.01, 0.02,, 的再反射曲线与距离 r 的关系表存储起来。1, 然后在给定的表面反射率和距离之间进行内插。

然而，我们的灵感来自于经常使用的用较简单的函数来逼近复杂函数的技术。一个很好的例子是菲涅尔反射和折射公式。菲涅尔反射和折射可以根据物理学（麦克斯韦方程和能量约束）建立模型，作为两个条款的总和，一个用于垂直偏振光，一个用于平行偏振光。但施利克

[1994]观察到所得到的曲线可以被一个简单的多项式近似，而这个近似是

在计算机图形学中广泛使用，因为它更简单，评估更快，而且没有明显的差异。我们希望对次表层散射有类似的应用。

反射率曲线已被合理地用零均值高斯之和近似[d'Eon等人, 2007年; Yan等人, 2012年; Jimenez等人, 2015年]，用单个高斯或三次多项式近似更为粗略[King等人, 2013年]。

Burley[2013; 2015]指出，漫反射曲线的形状可以很好地用两条指数函数之和除以距离 r 的曲线来近似。

$$R(r) = \frac{e^{-r/d} + e^{-r/(3d)}}{8\pi dr} \quad (2)$$

d 参数决定了曲线的高度和宽度，可以根据艺术偏好来设置，也可以根据物理参数来确定。有了这个 $R(r)$ 的表达式， d 的任何正值都可以得到一个1的表面反照率，因此Burley将其命名为归一化反照率。通过乘以表面反照率 A 并选择一个合适的

对于许多常见的材料，我们可以得到一个非常准确的拟合。这个模型在Walt Disney Animation Studio的Hyperion渲染器中得到了实现；图3显示了迪士尼电影《大英雄6》中使用这个散射模型的例子。



图3：用Hyperion渲染的《大英雄6》的图像。

在下面的章节中，我们提出了简单的分析，即如何最好地缩放和拉伸归一化的扩散曲线，以便在整个有效的表面反照率范围内与蒙特卡洛参考相匹配。换句话说，我们确定合适的“翻译”，从物理pa这使得散射距离的物理参数与基于物理的扩散模型所使用的参数相同，便于与这些模型直接比较。

3 探照灯配置

我们首先考虑所谓的探照灯结构，即一束聚焦的光入射到一个平面下的半无限均匀介质上--见图4。光子穿过表面，被介质散射，并多次被吸收或逃离介质回到表面。离开表面的光子的分布形成了一个反射率曲线文件 $R(r)$ ，对于正常入射的光来说，它是径向对称的。或弥漫性传播。

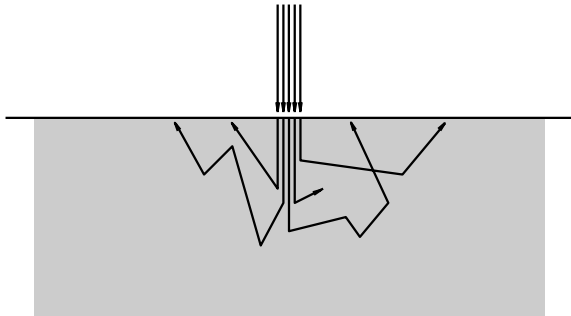


图4：探照灯配置。

在这一节中，我们假设光子首先垂直于表面直线下行，这个简化的假设也用于例如，MCML模拟包[Wang等人，1995]和其他地方。我们还假设相位函数是各向同性的--各向异性的相位函数通常用相似性的方法来处理。通过使用减少的散射系数 $\sigma' = s(1 - g)\sigma_s$ ，在未来的工作中，在第8节中会有更多关于这个问题。

3.1 蒙特卡洛参考资料

图5显示了在平均自由路径 $\ell=1$ 和各向异性 $g=0$ 的情况下，表面白度在0.1和0.9之间的反射率曲线 $R(r)$ （这些实际上与图2中的数据相同，但现在有一个对数垂直轴）。这些参考剖面是用类似于MCML[Wang等人，1995]的蛮力蒙特卡洛模拟计算的。是我们的目标曲线，用于近似计算。表面反照率的计算不包括菲涅尔条款，即 $A = \int_0^\infty R(r) 2\pi r dr$ 。体积散射和吸收系数 σ_s 和 σ_a 选择- $\sigma_s = \sigma_a$ ，使平均自由路径长度 $\ell = 1/(\sigma_s + \sigma_a)$ 为1（即 $\alpha = \sigma_s$ ， $\sigma_a = 1 - \sigma_s = 1 - \alpha$ ），在积分 $R(r)$ 时达到理想的表面反照率 A 。

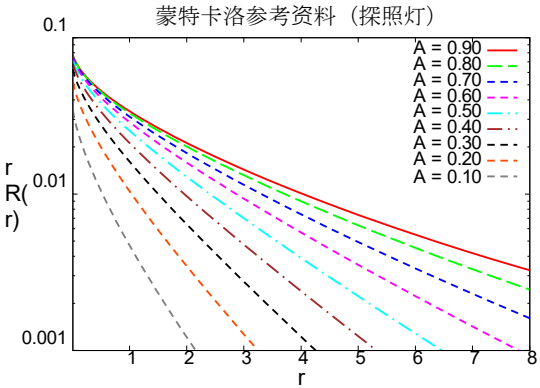


图5：表面白度 A 在0.1和0.9之间的探照灯配置的反射率曲线 $R(r)$ 。

3.2 功能性近似

我们希望确定与一个有物理意义的量相对应的 d 的适当值，并选择了体积平均自由路径长度 ℓ 。如果我们用一个比例系数 s 来表示 d 和 ℓ 之间的关系，我们可以在公式2中设置 $d = \ell/s$ ，得到。

$$R(r) = A s \frac{e^{-sr/\ell} + e^{-sr/(3\ell)}}{8\pi \ell r} \quad (3)$$

接下来我们注意到，要通过曲线拟合来确定 s ，只需考虑 $\ell=1$ 即可，因为给定 A 的蒙特卡洛参考曲线的形状是与 ℓ 无关的。 $R(r, \ell) = R_{\ell=1}(r)/\ell^2$ 。所以对于 ℓ 我们只需要考虑曲线拟合。

$$R_{\ell=1}(r) = A s \frac{e^{-sr} + e^{-sr/3}}{8\pi r} \quad (4)$$

现在我们需要为 A 的有效范围确定好的 s 值。我们使用 s 参数空间的暴力随机抽样来

尽量减少对 r 的相对误差。 $P_i \frac{|R(r_i) - R_{MC}(r_i)|}{R_{MC}(r_i)}$ 来确定对于任何给定的 A 值，最佳值 s 。

图6显示了我们的反射率曲线近似与蒙特卡洛参考值的拟合情况，最佳拟合为两个高斯，光子束扩散加单一散射，偶极子扩散加单一散射，以及更好的偶极子扩散加单一散射的表面白度0.2，0.5和0.8。这些数字说明，两个高斯人不能像我们的归一化扩散参数化那样与参考曲线匹配。它还表明，我们的近似值比偶极、更好的偶极和单次散射的光子束扩散更接近于MC参考点。

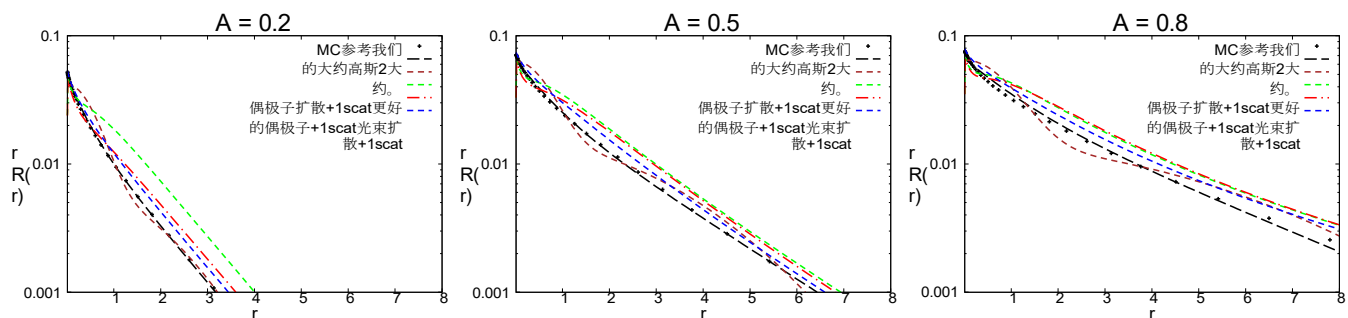


图6：对表面反照率 $A=0.2$ 、 0.5 和 0.8 的各种反射率曲线模型的拟合。(相当于体积反照率 a 分别为 0.686 、 0.938 和 0.9939 ， $\ell=1$ 。对数纵轴)。

我们可以简单地生成一个 $A=0.01, 0.02, \dots, 0.99$ 的 s 值的表格。其中一些值在图7中被绘制成数据点。如果我们使用这些值，并对介于两者之间的表面反照度进行插值，我们得到与蒙特卡罗参考值相比 4.9% 的平均相对误差。但这里我们提出一个简单的函数这是更紧凑和更容易评估的。

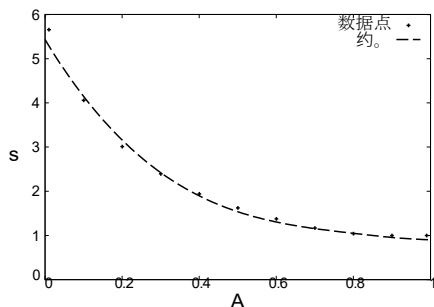


图7： s 的数据点和拟合曲线。

通过一些手动的曲线拟合，我们发现下面的比例系数 s 的简单表达式可以很好地拟合出最佳值。

$$s = 1.85 - A + 7 |A - 0.8|^3. \quad (5)$$

这个函数被绘制成图7中的曲线。与Monte Carlo参考文献相比，用这个 s 表达的反射率曲线的相对误差在整个表面白度范围内平均为 5.5% 。与Monte Carlo参考文献中隐含的所有近似和假设（半无限均质体、平面、探照灯配置等）相比，这实际上是一个相当小的误差。

4 漫反射表面传输

在上一节中，我们假设光线以垂直于表面的方向直接进入体积。在这一节中，我们将按照理想的表面漫反射来模拟次表面的散射反射率曲线。这可能是一个更适合粗糙表面材料的模型，如干燥（无汗）的皮肤、化妆品、大多数水果和粗糙（未抛光）的大理石，也适合我们忽略（或不知道）入射光线方向的情况。

图8显示了理想的漫反射表面透射（余弦分布）后的次表层散射的反射率曲线 $R(r)$ ，同样是用蒙特卡罗模拟计算的。该图的一般形状是

0.1 蒙特卡罗参考资料（扩散性）

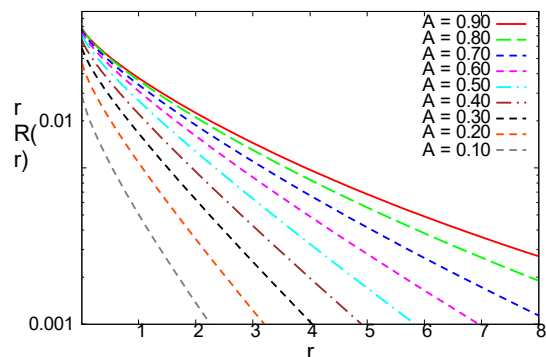


图8：表面反照率 A 在 0.1 和 0.9 之间的漫反射曲线 $R(r)$ 。（对数纵轴， $\ell=1$ ， $g=0$ ）。

这种情况下的反射率曲线与探照灯情况类似，因此我们使用相同的函数近似，即公式3，但计算新的 s 值。对于最佳的 s 值，我们得到的平均相对误差与蒙特卡罗参考值相比只有 2.6% 。

再次使用手动曲线拟合，我们发现，这个表达式对 s 来说，可以很好地拟合出最佳值。

$$s = 1.9 - A + 3.5 (A - 0.8)^2. \quad (6)$$

图9显示了数据点和 s 的拟合曲线。使用这个 s 的表达式，相对于蒙特卡罗参考的平均相对误差只有 3.9% 。

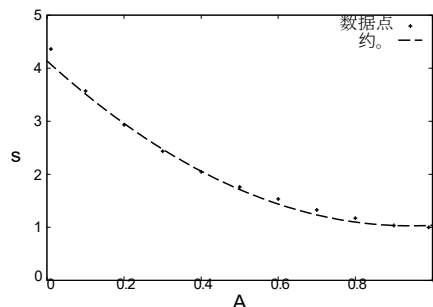


图9： s 的数据点和拟合曲线。

在实际使用中，我们发现探照灯近似法和扩散法的外观没有太大区别。

传输近似。因此，尽管这些抽象概念旨在代表两类非常不同的表面，但在实际的视觉特效和CG动画工作中，这种区别可能并不特别重要。

5 dmfp作为参数

我们现在回到探照灯的配置上。可以使用散射距离的另一种参数化：表面上的扩散平均自由路径（dmfp）， ℓ_d ，而不是体积内的平均自由路径（mfp）， ℓ 。为了计算对应于 σ_s 和 σ_a 的扩散平均自由路径长度，我们可以首先计算扩散系数

$$D = (\sigma_t + \sigma_a) / t(3\sigma^2)。(7)$$

给出 D ，我们就可以计算出有效的传输消减共

有效 $\sigma_{tr} = \frac{\sigma_a}{D}$ ，然后 $\ell_d = 1/\sigma_{tr}$ 。为了计算蒙特卡洛参考曲线，我们只需确定哪一对 σ_s 和 σ_a 的值能给出所需的 A 值，同时也能给出 $\ell_d = 1$ ：选择能给出 A 的 σ_s ， σ_a 的比率，然后将 σ_s 和 σ_a 一起放大，得到 $\ell_d = 1$ 。我们发现，通过在公式3中用 ℓ_d 代替 ℓ ，并使用这个简单的 s 表达式，可以获得对这些曲线的良好拟合。

$$s = 3.5 + 100 (A - 0.33)^4。(8)$$

图10显示了数据点和 s 的拟合曲线。使用最佳 s 值的平均误差为6.4%，使用上述表达式的平均误差为7.7%。

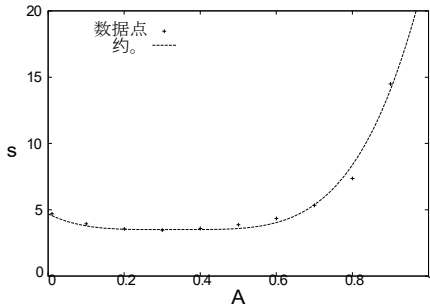


图10：s的数据点和拟合曲线。

6 实用细节：重要性抽样

对于与入口点和出口点之间的径向距离成比例的重要性采样，我们需要 $R(r)$ 和 $2\pi r$ 的乘积对应的cdf（累积分布函数）。对于基于物理的BSSRDFs，这个cdf必须通过数值积分来计算，这很麻烦，而且会降低性能。但幸运的是，Burley的归一化扩散 $R(r)$ 次

$2\pi r$ 很容易被整合，cdf是

$$\text{cdf}(r) = \frac{\int_0^r R(t) 2\pi t dt}{\int_0^\infty R(t) 2\pi t dt} (9)$$

$$\frac{A/4}{r/4} \left(\frac{4 - e^{-r/d} - 3e^{-r/(3d)}}{4} \right)。(10)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} e^{-r/d} - \frac{3}{4} e^{-r/(3d)} (11)$$

这个简单的cdf可以用于我们的两个参数化： $d = \ell/s$ 或 $d = \ell_d/s$ 。

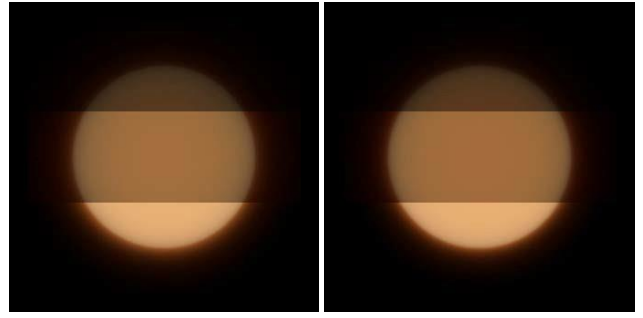


图11：(a) 用光子束扩散和单次散射渲染的皮肤色材料。(b) 用我们的近似反射曲线渲染的相同材料。

反cdf是 $r = \text{cdf}^{-1}(\xi)$ ，其中 ξ 是介于0和1之间的随机变量。不幸的是，cdf不是可分析的，但我们可以通过（至少）三种方式处理这个问题。1) 随机抽取一个的两个指数，用它的倒数作为cdf，然后用MIS（多重重要性抽样）对结果进行权衡；2) 进行几次牛顿迭代；3) 用 $d=1$ 的预先计算的cdf表 $^{-1}$ ，按 d 比例计算。

7 讨论和结果

使用这些简单的公式比计算量化扩散或单散射的光子束扩散要快很多倍。

都需要数字积分。事实上，我们的公式甚至比简单的偶极子扩散模型还快。由于参数相同，从一个基于物理的扩散模型转换到我们的近似扩散模型很简单。

在基于物理的模型的实际使用中，它们可以在渲染过程中按需制表，并在接下来的查找过程中对表格进行插值，因此在实践中，使用我们的近似方法节省的运行时间实际上是相当小的。然而，从渲染作者的角度来看，代码的简化是非常重要的。特别是将表面反射率和平均自由路径长度数值化为体积散射和吸收系数的代码并非完全微不足道。消除这些代码以及用于生成和查找表格的优化代码，用我们非常简单的 s 和归一化扩散 $R(r)$ 的公式来取代它们，是一个非常有用的方法。丰富而实用的简化。作为奖励，重要性的cdf采样是非常简单的。

我们的近似扩散模型对射线追踪和基于点的次表面散射很有用，探照灯mfp和dmfp parameterizations作为皮克斯的RenderMan渲染器中的两个次表面散射模型被实现。

图11显示了一个由聚光灯照亮的表面；该表面由三条具有不同皮肤光泽的带子组成。左边是Photon光束扩散加单次散射，右边是使用我们的近似反射曲线的BSSRDF（第3节的探照灯配置），参数相同。

图12显示的是一个人头的特写，光子束分流的情况。

左边是融合加单一散射（直接散射到表面），右边是使用我们的近似再反射曲线的BSSRDF，参数相同。注意到表面上散射的特征性红光通过

在两幅图像中都有背光的耳垂。

图1显示了其他表面下散射的例子。

与我们的近似反射谱：大理石、人体皮肤、塑料、水果、蜡烛蜡和动物皮肤。



图12：头部特写。(a) 用光子束扩散和单一散射进行渲染。(b) 使用相同的散射参数--表面反照率纹理和平均自由路径长度，用我们的近似反射率曲线进行渲染。(头部数据由Infinite Realities通过创作共用协议提供)。

8 结论和未来工作

我们提出了三种近似再反射剖面的参数化，用于简单而有效地呈现次表面散射的情况。在整个表面反照率范围内，与蒙特卡洛参考值相比，其相对误差分别为5.5%、3.9%和7.7%。我们坚信，在保留更严重的无限板块假设（平坦表面的半无限同质体）的同时，追求更高的精确性将是徒劳的。

未来的工作包括研究一套不太严格的假设。例如，尝试对斜入射方向和非辐射对称散射的扩散轮廓进行简单的近似[Donner等人，2009；Habel等人，2013；Frisvad等人，2014；d'Eon，2014]，将会非常有趣。这可能很简单，因为尺度 s 取决于入射光线的极性和相关的方位角（以及表面反照率）。另外，具有各向异性散射（ $g \neq 0$ ）的漫反射次表面散射材料通常用模拟的方式来近似。矩的相似性： $\sigma'_s = (1 - g)\sigma_{s0}$ 。这可能是一个在许多散射事件后的合理假设，但对于单次散射来说和低频散射，它可能不是。将曲线与各向异性散射计算的蒙特卡洛参考值相匹配将是很有趣的。

鸣谢

非常感谢我们在RenderMan和Hyperion团队的同事的支持。还要感谢皮克斯的Christophe Hery和Ryusuke Villemin以及迪斯尼的Wojciech Jarosz和Ralf Habel，他们对次表面散射进行了多次富有成效的讨论，并感谢Dylan Sisson提供的图片。

参考文献

Burley, B. 2013.次表层散射调查。Unpublished slides.

Burley, B. 2015.用集成的次表层散射扩展迪斯尼的基于物理的BRDF。SIGGRAPH 2015 Physically Based Shading Course Notes.(To appear).

D'Eon, E., and Irving, G. 2011.用于渲染半透明材料的量化扩散模型。ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH) 30, 4, 56:1-56:14.

D'Eon, E., Luebke, D., and Enderton, E. 2007. 高效人类皮肤的渲染。Rendering Techniques (Proc. Eurographics Symposium on Rendering), 147-158.

D'Eon, E. 2012.一个更好的偶极子。Tech. rep., <http://www.eugenedeon.com>.

D'Eon, E. 2014.一个双光束3D探照灯BSSRDF.In SIGGRAPH Talks.

Donner, C., and Jensen, H. W. 2007.使用光子扩散对半透明材料进行渲染。Rendering Techniques (Proc. Eurographics Symposium on Rendering), 243-252.

Donner, C., Lawrence, J., Ramamoorthi, R., Hachisuka, T., Jensen, H. W., and Nayar, S. 2009. 一个经验性的BSSRDF模型。ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH) 28, 3, 30:1-30:10.

FRISVAD, J. R., HACHISUKA, T., AND KJELDSEN, T. K. 2014.次表层散射的定向偶极子模型。ACM Transactions on Graphics 34, 1.

Habel, R., Christensen, P. H., and Jarosz, W. 2013.Photon beam diffusion: a hybrid Monte Carlo method for subsurface scattering.Computer Graphics Forum (Proc. Eurographics Symposium on Rendering) 32, 4, 27-37.

Jensen, H. W., and Buhler, J. 2002.A rapid hierarchical rendering technique for translucent materials.ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH) 21, 3, 576-581.

Jensen, H. W., Marschner, S. R., Lvo, M., and Hanrahan, P. 2001.地下光传输的实用模型。计算机图形学 (Proc. SIGGRAPH) 35, 511-518.

Jimenez, J., Zsolnai, K., Jarabo, A., Freude, C., Auzinger, T., WU, X.-C., von der Pahlen, J., Wimmer, M., and Gutierrez, D. 2015.Separable subsurface scattering.Computer Graphics Forum.(To appear).

- KALOS, M. H., and whitlock, P. A. 1986. *Monte Carlo Methods*. John Wiley and Sons.
- King, A., Kulla, C., Conty, A., and Fajardo, M. 2013。BSSRDF重要性采样。在SIGGRAPH会议上。
- Schlick, C. 1994.用于基于物理的渲染的廉价BRDF模型。 *Computer Graphics Forum 13*, 3, 233-246.
- WANG, L., JACQUES, S., AND ZENG, L. 1995.MCML:蒙特多层组织中光传输的卡洛模型。 *程序和生物学中的计算机方法*, 8, 313-371.
- Yan, L.-Q., Zhou, Y., Xu, K., and Wang, R. 2012.准确的球形高斯灯光下的半透明材料渲染。 *计算机图形论坛 (Proc. Pacific Graphics)* 31, 7, 2267-2276.