

地表下光传输的实用模型

Henrik Wann JensenStephen

R. MarschnerMarc

LevoyPat Hanrahan斯坦福大学

摘要

本文介绍了一个简单的半透明材料中的次表面光传输模型。该模型能够有效地模拟BRDF模型无法捕捉到的效果，如材料内部的颜色渗出和光在阴影边界的扩散。该技术甚至对各向异性、高度散射的介质也很有效，而用现有方法模拟这些介质是很昂贵的。该模型结合了单次散射的精确解和多次散射的偶极点源扩散近似。我们还设计了一种新的、基于图像的快速测量技术，用于确定半透明材料的光学特性。我们通过比较预测值和测量值来验证该模型，并展示该技术如何用于恢复各种材料的光学特性，包括牛奶、大理石和皮肤。最后，我们描述了允许该模型在传统射线追踪器中使用的采样技术。

关键词。次表层散射，BSSRDF，反射模型，光传输，扩散理论，现实图像合成

1 简介

准确地建立材料对光的散射模型是现实图像合成的基础。如果局部散射模型过于简单，即使最复杂的光传输算法也无法产生令人信服的结果。因此，大量的研究用于描述光从材料中散射的情况。

以前的研究集中在开发双向反射分布函数（BRDF）的模型。BRDF是由Nicolodemus[14]引入的，作为更一般的双向表面散射分布函数（BSSRDF）的简化。BSSRDF可以描述击中表面的任何两条射线之间的光传输，而BRDF则假设进入材料的光在同一位置离开材料（图1）。这个近似值对金属来说是有效的，但对半透明材料来说是失败的，因为这些材料在表面以下表现出明显的传输。即使对于许多看起来不是很透亮的材料，使用BRDF也会产生一种硬的、明显的计算机生成的外观，因为它没有局部混合表面特征，如颜色和几何形状。只有考虑到次表面散射的方法才能捕捉到半透明材料的真实外观，如大理石、布、纸、皮肤、牛奶、奶酪、面包、肉、水果、植物、鱼、海水、雪等等。

1.1 以前的工作

几乎所有的BRDF模型都是完全由表面散射得出的，任何地下散射都由Lambertian分量来近似。一个例外是Hanrahan和Krueger的模型[10]，它包括一个在均匀的、均匀照明的板块中的单一散射的分析表达。然而，所有的BRDF模型最终都假定光在一个表面点上散射，它们并不模拟从一个点到另一个点的地下传输。

通过求解完整的辐射传输方程，可以准确但缓慢地模拟次表层传输[1]。在图形学中只有少数论文对次表层散射采取了这种方法。Dorsey等人[5]使用光子映射模拟了完全的次表层散射，以捕捉石头风化的外观。Pharr和Hanrahan[15]使用散射函数来模拟次表面散射。这些方法虽然能够模拟次表层散射的所有效应，但与不透明材料的模拟相比，其计算量非常大。基于路径采样的技术对于高散射材料，如牛奶和皮肤，效率特别低，因为光在离开材料之前会散射多次（通常是几百次）。对于高散射介质，Stam [17]介绍了扩散理论的使用。他使用多网格方法求解扩散方程近似值，并使用这种方法来渲染具有多重散射的云。

次表层散射在医学物理学中也很重要，已经建立了模型来描述激光在人体组织中的散射[6,

8]。在这种情况下，扩散理论经常被用来预测以及测量高散射材料的光学特性。我们通过增加精确的单次散射、对任意测距的支持以及用于渲染的实用采样技术，将这一理论扩展到计算机图形中。

在计算机图形的外观测量中，很少考虑次表面散射。Debevec等人[3]测量了人脸的光反射，其中包括表面下散射的贡献，但他们并没有将数据与材料的物理特性联系起来。在医学物理学研究[8,

9]的基础上，我们将为测量生物组织而开发的方法扩展为基于图像的半透明材料的快速外观测量技术。这种方法研究了由光束照亮样品材料所产生的径向反射率曲线。通过拟合来自扩散理论的表达式，有可能估计材料的吸收和散射特性。

2 理论

BSSRDF, S , 将方向为 ω_o 的出射辐射, $L_o(x_o, \omega_o)$ 与方向为 ω_i 的入射光量, $\Phi_i(x_i, \omega_i)$ 联系起来[14]。

$$dL_o(x_o, \omega_o) = S(x_i, \omega_i; x_o, \omega_o) d\Phi_i(x_i, \omega_i).$$

BRDF是BSSRDF的一个近似值，对它来说，假设光线在同一点进入和离开（即 $x_o = x_i$ ）。给定一个BSSRDF，出射辐射度的计算方法是

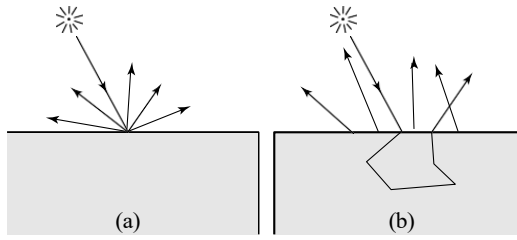


图1：(a) BRDF和 (b) BSSRDF中的光散射。

通过对入射方向 ω 和面积 A 的入射辐射度进行积分， A_ω

$$L_o(x, \omega) = \int_A \int_{4\pi} S(x, \omega; i, x, \omega_i) L_i(x, \omega_i) (n \cdot \omega_i) d\omega_i dA(x_i).$$

光在参与介质中的传播是由辐射传输方程描述的，在计算机图形学中通常被称为体积渲染方程。

$$(\omega \cdot \nabla) L(x, \omega) = -\sigma_t L(x, \omega) + \sigma_s \int_{4\pi} p(\omega, \omega') L(x, \omega') d\omega' + Q(x, \omega).$$

在这个方程中，介质的特性由吸收系数 σ_a 、散射系数 σ_s 和相位函数 $p(\omega, \omega')$ 描述。消光系数 σ_t 定义为， $\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s$ 。我们假设相位函数是归一化的。

$\int_{4\pi} p(\omega, \omega') d\omega' = 1$ ，并且仅是相角的函数。
 $p(\omega, \omega') = p(\omega, \omega')$ 。散射角的平均余弦， g ，为

$$g = \int_{4\pi} (\omega \cdot \omega') p(\omega, \omega') d\omega'.$$

如果 g 为正，相位函数主要是前向散射；如果 g 为负，后向散射占主导地位。一个恒定的相位函数导致各向同性的散射 ($g = 0$)。

对于进入均质介质的无限小的光束。传入的辐射度将随着距离的增加而呈指数下降，这被称为强度降低。

$$L_r(x_i + s\omega, \omega) = e^{-\sigma_t s} L_r(x_i, \omega).$$

降低强度的一阶散射， L_r ，可以被视为一个体积源。

$$Q(x, \omega) = \sigma_s \int_{4\pi} p(\omega, \omega') L_r(x, \omega') d\omega'.$$

为了深入了解光传播的体积行为，将辐射传输方程在所有方向上的 ω 在一点 x 处进行积分是很有用的，其结果是

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(x) = -\sigma_a \varphi(x) + Q_0(x). \quad (1)$$

这个方程与标量辐照度有关。或通量。

$\varphi(x) = \int_{4\pi} L(x, \omega) d\omega$, and the vector irradiance, $\mathbf{E}(x) = \int_{4\pi} L(x, \omega) \omega d\omega$. 在不由于吸收造成的损失或由于体积光源造成的增益 ($Q_0=0$) 的情况下，矢量辐照度的发散等于零。在这个方程中。

我们引入一个0阶源项 Q_0 ，以后我们将需要1阶源项 Q_1 ，其中

$$Q_0(x) = \int_{4\pi} Q(x, \omega) d\omega. \quad Q_1(x) = \int_{4\pi} Q(x, \omega) \omega d\omega.$$

S	BSSRDF
R_d	漫反射 BSSRDF
F_r	菲涅尔反射率
F_{dr}	菲涅尔透射率
E	扩散菲涅尔反射率
φ	矢量辐照度
σ_a	辐射通量
σ_s	吸收系数 散射系数
σ_t	消光系数 还原消光系数
σ_t^1	有效消光系数 扩散常数
σ_{tr}	反照率
D	相位功能
α	相对折射率
p	散射角的平均余弦 量源分布
η	0阶源分布 1阶源分布
g	
Q	
Q_0	
Q_1	

图2：选定的符号。

2.1 扩散近似法

扩散近似是基于这样的观察：高度散射介质中的光分布趋向于成为各向同性。即使初始光源分布和相位函数是高度各向异性的，也是如此。每个散射事件导致光的分布变得模糊，因此光的分布趋向于.....。随着散射事件数量的增加而趋于均匀。

在这种情况下，辐射度可以通过涉及辐射通量和矢量辐照度的双项扩展来近似。

$$L(x, \omega) = \frac{1}{4\pi} \varphi(x) + \frac{3}{4\pi} \omega \cdot \mathbf{E}(x).$$

这些常数是由通量和矢量辐照度的定义决定的。

扩散方程由这个近似值得出。具体来说，我们把这个辐射度的两期扩展代入辐射传输方程，然后对 ω 进行积分；关于代数细节，请参考Ishimaru [12]。其结果是

$$\nabla \cdot \varphi(x) = -3\sigma_t^1 \mathbf{E}(x) + Q_1(x). \quad (2)$$

在这里，我们使用了减弱的消光系数， σ_t^1 ，它由以下公式给出

$$\sigma_t^1 = \sigma_s^1 + \sigma_a \quad \text{其中 } \sigma_s^1 = \sigma_s(1 - g).$$

减少的散射系数 σ_s^1

，将原来的散射系数放大了 $\frac{1}{1-g}$ 一个系数 ($1/g$)。直观地说，一旦光变得各向同性，只有后向散射条款才会改变净通量；前向散射与无散射是没有区别的。

在没有源的情况下，或者源是各向同性的情况下， Q 是标量通量的梯度，那么向量辐照度

$$\mathbf{E}(x) = -D \nabla \varphi(x).$$

这里 $D = \frac{1}{3\sigma_t^1}$ 是扩散常数。这个方程使前

证实了一个直观的概念，即有净能量流（即非零矢量辐照度）从高密度（高流量）区域流向低密度区域。

最后，将方程2代入方程1，我们得出了经典的扩散方程

$$D \nabla^2 \varphi(x) = \sigma_a \varphi(x) - Q_0(x) + 3 D \nabla \cdot \mathbf{Q}_1(x).$$

扩散方程在无限介质中的各向同性的点光源的情况下有一个简单的解决方案。

$$\varphi(x) = \frac{\Phi}{4\pi D} \frac{e^{-\sigma r r(x)}}{r(x)},$$

其中， Φ 是点光源的功率， r 是距离是点源的位置， $\sigma = 3\sigma \sigma^1$ 是有效的传输系数。点源导致体积内的能量密度呈指数式下降。

在有限空间内的散射介质的情况下，扩散方程必须在适当的边界条件下得到解决。边界条件是，在表面上的每一点， x_s ，向内扩散的净通量为零

$$\int_{2\pi} L(x_s, \omega) (\omega \cdot \underline{n}(x_s)) d\omega = 0.$$

这里， 2π 表示对内向二重性半球的积分。使用二项扩展，边界条件为

$$\varphi(x_s) - 2D(\underline{n} - \nabla) \varphi(x_s) = 0. \quad (3)$$

第二项中的减号是由于表面法线指向外侧的惯例，而积分是在向内的方向上。

方程3涵盖了两层折射率相匹配的情况，但另一种重要的情况是这些折射率不同的情况。当具有不同折射率的介质之间存在一个界面时，在界面上会有反射。假设 r 是电介质界面反射率的菲涅尔公式，平均漫射菲涅尔反射率为

$$F_{dr} = \int_0^1 F_r(\eta, \underline{n} \cdot \underline{\omega}^1) (\underline{n} \cdot \underline{\omega}^1) d\omega^1$$

其中 η 是介质的相对折射率，与

反射光线到其他介质。 F_{dr} 可以从菲涅尔公式中分析计算出来[13]。然而，我们将使用一个合理的测量的漫反射率的近似值[7]。

$$F_{dr} = -\frac{1.440}{\eta^2} + \frac{0.710}{\eta} + 0.668 + 0.0636\eta.$$

在两个不同的介质之间产生的边界条件折射率为

$$\int_{2\pi} L(x, \omega) (\omega \cdot \underline{n}_-) d\omega = F_{dr} \int_{2\pi} L(x, \omega) (\omega \cdot \underline{n}_+) d\omega$$

这里的+和-下标分别表示向外和向内的方向。这就产生了

$$\varphi(x_s) - 2D(\underline{n} - \nabla) \varphi(x_s) = F_{dr} \varphi(x)_{s+} - 2D(\underline{n} - \nabla) \varphi(x_s).$$

请注意，这个等式两边的符号不同是因为一个积分是在向外的方向，另一个是在向内的方向。重新排列条款。

$$\varphi(x_s) - 2AD(\underline{n} - \nabla) \varphi(x_s) = 0.$$

这个边界条件与反弹性指数时相同。

匹配（公式3）；唯一的区别是， $2D$ 被 $2AD$ 所取代，其中

$$A = \frac{1 + F_{dr}}{1 - F_{dr}}$$

最后，边界条件允许我们计算漫反射BSSRDF， R_d 。 R_d 等于辐射射出量除以入射通量。离开表面的辐射出口率（ $\underline{n} \cdot \underline{E}(x_s)$ ）。等于表面通量的梯度

$$R_d(r) = -D \frac{(\underline{n} - \nabla \varphi)(x_s)}{d\Phi(x)}.$$

其中 $r = |x - x_s|$ 。

在有限介质的情况下，扩散方程一般没有一个分析解。在本文中，我们对地下反射感兴趣，它通常被建模为一个半无限的平面平行介质。一些作者分析了简单的源几何形状的平面平行问题，特别是进入介质的圆柱形光束的近似情况。精确的

公式存在，但它们涉及贝塞尔函数的无限和[9, 16]。我们寻求一个适合于建模地下反射的简单公式，它不涉及无限和或数字解的问题的偏微分方程。

Eason[6]和Farrell等人[8]开发了一种使用两个点源近似体积源分布的方法；也就是一个偶极子。Eason介绍了这一想法，并通过扩展源分布的力矩，得出了各种源几何形状的偶极子的明确公式，如圆柱形光束。Farrell等人建议使用一个单一的偶极子来表示入射源分布。他们发现单个偶极子的准确度与使用真实源分布的扩散近似法一样，甚至在某些情况下更准确。

偶极子方法包括在表面附近放置两个点光源，以满足所需的边界条件[6]（见图3）。一个点源，即真实心光源，位于表面下的距离 z_r 处，而另一个点源则位于表面下。

另一个是负的虚拟光源，位于表面上方，距离 $z_v = z_r + 4AD$ 。由此产生的通量是

$$\varphi(x) = \frac{\Phi}{4\pi D} \left(\frac{e^{-\sigma r_{dr}}}{r_{dr}} - \frac{e^{-\sigma r_{dv}}}{r_{dv}} \right),$$

其中 $r_{dr} = |x - x_r|$ 是 x 到真实源的距离，以及 $r_{dv} = |x - x_v|$ 是 x 到虚拟光源的距离。Farrell等人[8]建议将真实光源定位在距离 $z_r = 1/\sigma^1$ ，或一个平均自由路径，低于表面。他们只考虑平行于法线的光线。对于其他方向的光可以通过仍将光源置于 $1/\sigma$ 的位置来强制执行互易性。¹ 直下。

现在可以计算出偶极子源引起的漫反射率。

$$R_d(r) = -D \frac{(\underline{n} - \nabla \varphi)(x_s)}{d\Phi_i} = \frac{\alpha^1 r}{4\pi (\sigma r_{dr} + 1)} \frac{e^{-\sigma r_{dr}}}{\sigma^1 r_{dr}^3} + z_v (\sigma r_{dv} + 1) \frac{e^{-\sigma r_{dv}}}{\sigma^1 r_{dv}^3}. \quad (4)$$

最后，我们需要考虑入射光线和出射光线在边界的菲涅尔反射。

$$S(x, \omega; x, \omega) = \frac{1}{\pi^t} F(\eta, \omega) R(|x - x|) F(\eta, \omega) \quad (5)$$

其中 S_d

是BSSRDF的扩散项。这个项代表了多重散射（一个散射事件已经包括在转换为点源的过程中）。下一节将解释如何计

算由于单次散射的贡献。

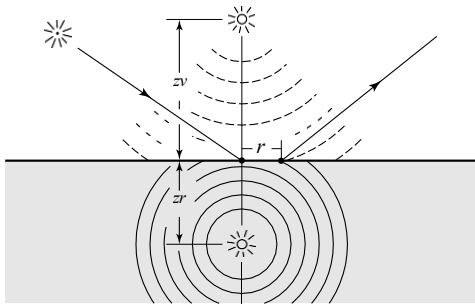


图3：传入的射线被转化为扩散近似的偶极子源。

2.2 单一散射术语

Hanrahan和Krueger[10]得出了一个用于子面反射的BRDF模型，分析计算了来自平坦、均匀照明、均匀板块的总一阶散射。在本节中，我们展示了如何将他们的BRDF扩展到BSSRDF，以说明表面上的局部照明变化。

单一散射导致的总出射辐射： $L^{(1)}$ ，是通过沿着折射的入射辐射进行积分计算的。发出的射线（见图4）。

$$L_o(x_o, \omega) = \sigma_s(x_o) \int_{\Omega} \frac{F_p(\varphi, \omega)}{2\pi} e^{-\sigma_t(x_o) r} L_i(x_i, \omega) ds d\omega_i \quad (1)$$

$$= \int_{\Omega} S^{(1)}(x_i, \varphi, x_o, \omega) L_i(x_i, \omega) (n \cdot \omega) d\omega dA(x_i) \quad (2)$$

这里 $F_p(\eta, \omega_i) F_p(\eta, \omega_o)$ 是两个菲涅尔系数的乘积。透射项，而 ω_i 和 ω_o 是折射入射项和反射项。

出的方向。综合消光系数 σ_{tc} 为 $\sigma_{tc} = \sigma_t(x_o) + G\sigma_t(x_i)$ ，其中 G 是一个几何面。

tor；对于一个平坦的表面 $\frac{G\sigma_o}{|n \cdot \omega|} = |n \cdot \omega|$ 。单一散射的BSSRDF。

$S^{(1)}$ ，由该方程的第二行隐式定义。请注意，在第一条线和第二条线之间有一个变量的变化，第一条线只对两条折射光线相交的配置进行积分，而第二条线则对所有进入的光线进行积分。

和出射的射线。这意味着分布 $S^{(1)}$ ，包含一个德尔塔函数。

2.3 BSSRDF模型

完整的BSSRDF模型是扩散近似和单一散射项的总和。

$$S(x_i, \omega_i; x_o, \omega_o) = S_d(x_i, \omega_i; x_o, \omega_o) + S^{(1)}(x_i, \omega_i; x_o, \omega_o)$$

这里的 S_d 是用公式5评估的， $S^{(1)}$ 是用公式6评估的。BSSRDF的参数是： σ_a ， σ^l ， σ^s ， η ，可能还有一个相位函数（没有相位函数，散射可以被模拟为各向同性）。这个模型考虑了光在表面不同位置之间的传输，它模拟了定向成分（由于单次散射）和漫射成分（由于多次散射）。

最后，请注意单一散射项和扩散近似中涉及的距离。平均出口点离入口点大约有一条平均自由路径。然而，这两个平均自由路径具有相当不同的长度尺度。在单一散射的情况下，平均自由路径等于 $1/\sigma_t$ ；在扩散情况下，平均自由路径等于 $1/\sigma_{tr}$ 。对于半透明的在 σ_a ， σ_s^l ， σ_s^s ，从而 σ_{tr} 材料中，随着与 x_o 的距离增加，单次

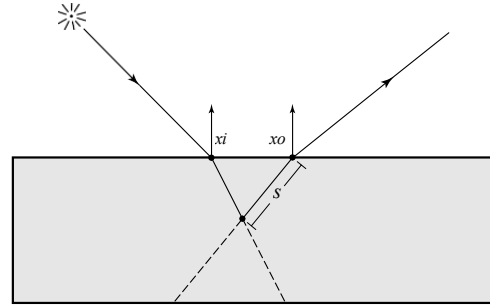


图4：单次散射只发生在折射的入射光线和出射光线相交时，并被计算为沿折射的出射光线的路径长度s的积分。

2.4 BRDF近似法

我们可以通过假设入射光线是均匀的，用BRDF来近似BSSRDF。这个假设使得我们可以对表面的BSSRDF进行积分。通过对扩散项的积分，我们可以发现母体的总漫反射率 R_d ，即。

$$R_d = 2\pi \int_0^\infty R_d(r) r dr = \frac{\alpha^l}{2} \frac{1 + e^{-\frac{A^l}{3}}}{3(1-\alpha^l)} e^{-\frac{\sqrt{3(1-\alpha^l)}}{3}}$$

注意到漫反射率如何只取决于减少的

反照率和内部反射参数 A 。

单一散射项的积分结果是在[10]中提出的模型。对于一个半无限的介质，这可以得到：

$$f_r^{(1)}(x, \omega_i, \omega_o) = \frac{p(\omega_i - \omega_o)}{|n \cdot \omega_i| + |n \cdot \omega_o|}$$

散射项的下降速度远远超过扩散项。

完整的BRDF模型是由菲涅尔项和单次散射近似所缩放的漫反射率之和。

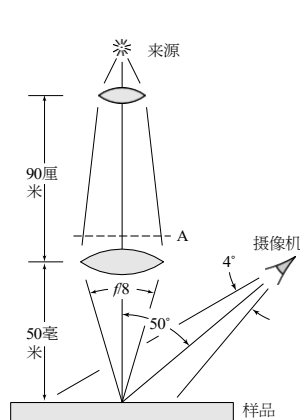
$$f_r(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o) = f_r^{(1)}(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o) + F \frac{R_d}{\pi}$$

这个模型的参数与BSSRDF相同。它类似于[10]中提出的BRDF模型，但有一个重要的区别，即漫反射的光量是由固有的材料参数计算出来的。BRDF近似法适用于不透明材料，这些材料的平均自由路径非常短。

3 测量BSSRDF

为了验证我们的BSSRDF模型，并确定渲染不同种类材料的适当参数，我们使用第2节的扩散理论对几种介质中的次表面散射进行测量。我们的测量方法适用于 σ_a σ_s 的半透明材料，这意味着在离照明点足够远的地方，我们可以忽略单一的散射，并使用扩散项将测量结果与材料参数联系起来。

当多重散射占主导地位时，公式4预测了由于狭窄的入射光束而观察到的每单位入射通量的辐射出口率，作为与照明点距离的函数。为了进行相应的测量，我们用一束紧密聚焦的白光照射样品的表面，并使用3-CCD摄像机拍摄照片，观察整个表面的辐射出口率。我们保持观察的角度不变，这样菲涅尔项在所有的测量中保持不变。图5 (a) 说明了我们的测量设置。



(a)

材料	c_s^1 [mm ⁻¹]			σ_a [mm ⁻¹]			扩散性 反射率			η
	R	G	B	R	G	B	R	G	B	
苹果公司	2.29	2.39	1.97	0.0030	0.0034	0.046	0.85	0.84	0.53	1.3
鸡肉1	0.15	0.21	0.38	0.015	0.077	0.19	0.31	0.15	0.10	1.3
鸡肉2	0.19	0.25	0.32	0.018	0.088	0.20	0.32	0.16	0.10	1.3
奶油	7.38	5.47	3.15	0.0002	0.0028	0.0163	0.98	0.90	0.73	1.3
番茄酱	0.18	0.07	0.03	0.061	0.97	1.45	0.16	0.01	0.00	1.3
大理石	2.19	2.62	3.00	0.0021	0.0041	0.0071	0.83	0.79	0.75	1.5
薯类	0.68	0.70	0.55	0.0024	0.0090	0.12	0.77	0.62	0.21	1.3
斯基米尔克	0.70	1.22	1.90	0.0014	0.0025	0.0142	0.81	0.81	0.69	1.3
皮肤1	0.74	0.88	1.01	0.032	0.17	0.48	0.44	0.22	0.13	1.3
皮肤2	1.09	1.59	1.79	0.013	0.070	0.145	0.63	0.44	0.34	1.3
光谱仪	11.6	20.4	14.9	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.3
蜂蜜牛奶	2.55	3.21	3.77	0.0011	0.0024	0.014	0.91	0.88	0.76	1.3

(b)

图5：(a) 测量仪器，(b) 几种材料的测量参数。

由于信号在远离照明点时呈指数下降，所以测量必须跨越一个宽的动态范围。为此，我们使用了一系列不同的曝光时间，从1毫秒到4秒不等，并使用Debevec和Malik的技术[4]的改进版来组装一个高动态范围的图像。为了减少杂散光和固定图案的CCD噪声的影响，我们从每个测量和参考图像中减去了一个黑暗的图像，该图像是在聚焦镜头前阻挡照明光束的情况下拍摄的（图5 (a) 中的A点）。所得到的图像的动态范围约为 10^5 （图5 (a) 中的少量总能量）。画面减少了镜头和相机闪光的影响，允许更高的亮度。比其他方式可能的动态范围）。

为了解释测量结果，我们只检查了每个测量图像的一维切片，对应于表面上通过照明点的一条线，并垂直于摄像机的观察方向。根据假设，光从不同的¹，这个切片中的像素值 p_i （见图6的例子）是辐射出口率的测量值，是表面上距离的函数。由于 R_d 给出了这个量与 Φ 的比率。

$p_i = K\Phi R_d(r_i)$ ，其中 K 是一个未知的常数。为了消除在计算比例系数时，我们还拍摄了一张参考图像，用一个白色的理想漫反射器（Labsphere Spectralon，反射率 >0.99 ）取代样品。通过对该图像中的所有像素进行求和，我们可以整合辐射出口率，从而得到离开表面的总流量。

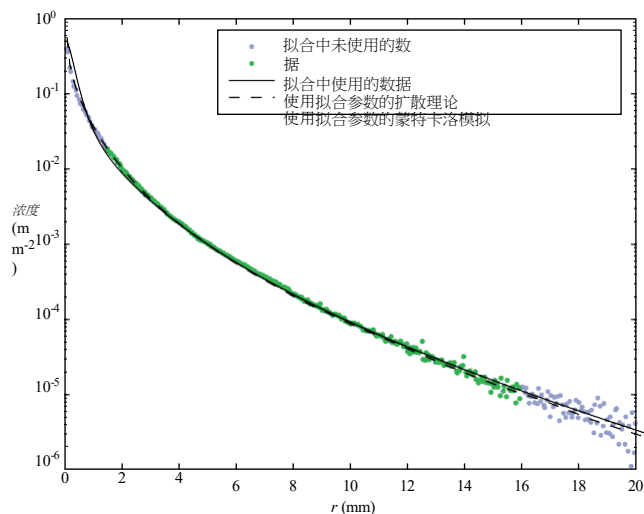
面，对于这种特殊材料来说，它等于入射光量 Φ 。在上述相同的常数 K 下，这个和是 $K\Phi/A$ ，其中 A 是样品表面上一个像素所对应的（已知）面积。然后， $R_d(r_i)$ 的测量值可以计算为 $p_i/(K\Phi)$ 。原则上， σ_a 和 σ^1 ，可以通过在离照明点足够远的距离范围内用公式4拟合相关的反射率曲线来确定，以允许使用差分。

我们发现这个拟合问题的条件很差，所得到的参数的不确定性导致了材料外观的不确定性，特别是总的漫反射率。然而，我们发现这个拟合问题的条件很差，所得到的参数的不确定性导致了材料外观的不确定性太大，特别是总的漫反射率。

We remove this ill-conditioning by measuring the total diffuse reflectance R (which is the sum of the measurement image divided by the sum of the reference image) and computing the least-squares fit subject to the constraint $R_d dA = R$.

图6显示了这些测量结果如何证实了白色大理石样品的扩散理论（只有相机的绿色变化）。

¹我们通过检查不同出射角的反射率验证了大理石的这一假设，它



与由菲涅尔透射项缩放的兰伯斯材料非常相似。

图6：大理石（绿色波段）的测量结果与扩散理论的拟合和蒙特卡洛模拟的确认。

图中显示的是 N_{el} 。将理论（实线）与数据（点）进行拟合，得出参数 $\sigma_a = 0.0041/\text{mm}$ ， $\sigma^1 = 2.6/\text{mm}$ 。使用这些值（虚线）通过蒙特卡洛模拟计算的反射率证实了计算参数的正确性。拟合的其他几种材料的折射率值见图5(b)中的表格。注意，我们对大多数材料的折射率使用了经验值。还要注意的，扩散理论是假设 σ_s σ_a 的，因此相对不透明的材料（如番茄酱中的蓝色波长）的参数可能不太准确。

4 使用BSSRDF进行渲染

在理论部分推导出的BSSRDF模型只适用于半无限的均质介质。在存在任意几何和纹理变化的情况下，类似的推导是不可能的。然而，我们可以利用该理论背后的一些直觉，将其用于计算机图形的实际模型。具体来说，我们需要考虑。

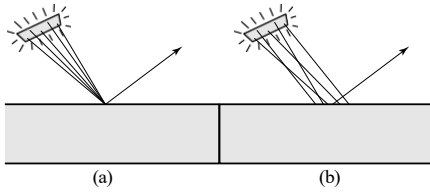


图7：(a) 对BRDF的采样（传统采样），(b) 对BSSRDF的采样（采样点既分布在表面，也分布在光线上）。

- 包括重要性采样在内的BSSRDF的有效整合
- 任意几何形状的单次散射评估
- 任意几何的扩散近似法
- 纹理（物体表面的空间变化）。

在本节中，我们将解释如何在光线追踪的背景下做到这一点。

整合BSSRDF。在每个射线-物体交汇处，传统的照明模型（基于BRDFs）只需要一个点和一个法线来计算出射的辐射度（图7（a））。对于BSSRDF来说，有必要在表面的一个区域内整合入射光线（图7（b））。我们通过随机取样影子射线的两个端点的位置来实现这一点--

这可以看作是经典的分布射线追踪技术的延伸，用于取样区域光源[2]。为了有效地对表面的位置进行采样，我们利用了扩散项和单一散射项的指数衰减。我们对BSSRDF的两个项分别取样，因为单次散射取样的位置必须是沿着折射出的光线，而扩散取样应该分布在 x_o 周围。

更具体地说，对于扩散项，我们使用标准的蒙特卡洛技术，在离 x_o 一定距离的地方，以密度 $(\sigma_t e^{-\sigma_t d})$ 对表面进行随机采样。

单一散射被重新参数化，因为入射光线和出境射线必须相交。我们的技术将在下一节解释。

任意几何的单次散射评估。单一散射的评估是使用蒙特卡洛积分沿折射出射线进行的。我们沿着折射出射线挑选一个随机距离， $s^1 = \log(\xi)/\sigma_t(x_o)$ 。这里 $\xi \in [0, 1]$ 是一个均匀分布的随机数。对于这个样本位置，我们计算外散射辐射度为。

$$\mathbf{L}_o(\mathbf{x}, \omega_o) = \frac{\sigma_s(x_o) F_p(\omega_i - \omega_o)}{\sigma_t} e^{-s^1 \sigma_t(x_i)} e^{-s^1 \sigma_t(x_o)} \mathbf{L}_i(\mathbf{x}, \omega_i)$$

这里 s^1_i

是样品射线在母体中移动的距离。对于任意的几何形状来说，优化这个方程来取样直接照明（有阴影射线）是很困难的，因为它需要找到阴影射线在表面上的折射点。然而，在实践中，通过使用不在表面折射的影子射线，可以找到一个很好的近似值--

这假设光源与介质的平均自由路径相比是很远的。我们可以使用斯奈尔定律来估计入射光线通过介质的真实折射距离。

$$s^1_i = s^1_o \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2} (1 - |\omega_i - \omega_o|^2)}$$

这里 s^1_o 是观察到的距离， s^1_i 是折射的距离。

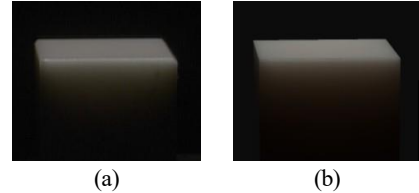


图8：激光在大理石块中的散射。大理石块有40毫米宽，有大量的表面下散射。左边的图片是大理石块的照片，右边的图片是用BSSRDF模型和测量的大理石散射特性合成的类似大小的立方体的渲染。请注意这两张图片的外观是非常相似的。

任意几何的扩散近似。扩散近似的一个重要组成部分是偶极子源的使用。如果几何形状是局部平坦的，我们可以通过使用类似于平坦材料的偶极子源配置得到一个非常好的近似（即我们总是将光源 $1/\sigma^1$ 直置于 x_i 下方）。在存在高度弯曲的表面时必须特别小心；我们处理这种情况时，总是以 $1/\sigma$ 的最小距离来评估扩散项¹。通过这种方式，我们消除了尖锐边缘的奇异现象，在这种情况下，源可以被任意放置在靠近 x_o 的地方。我们发现这种方法在我们的实验中效果非常好。

纹理。我们通过对BSSRDF的使用做一些小的改变来接近纹理材料。我们只考虑表面的纹理变化--由于体积纹理变化产生的影响需要一个完整的参与介质模拟。对于扩散近似，我们总是使用 x_i 处的材料参数，这确保了纹理的自然局部混合。对于单一-散射项，我们使用 $\sigma_s(x_o)$ 和 $\sigma_t(x_o)$ 沿是折射出去的光线，而 $\sigma_t(x_i)$ 是沿折射入射的光线。雷。这种变化包括在方程6中。

5 结果

我们在蒙特卡洛射线追踪器中实现了BSSRDF模型，在这一节中，我们将介绍用这种方法获得的一些实验结果。所有的模拟都是在运行Linux的双800MHz奔腾III电脑上进行的，图像以每像素4个样本和1024像素的宽度进行渲染。

我们的第一个模拟结果如图8所示，它比较了从上方照亮的大理石立方体的侧面照片和从下方照亮的大理石立方体的照片。合成渲染。合成图像的渲染是使用

BSSRDF模型和大理石的测量参数（来自图5的表格）。我们只用一个简单的立方体来近似于圆润的大理石块，所以沿边缘有自然可见的差异。尽管如此，BSSRDF模型还是忠实地再现了包括从大理石方块侧面射出的散射光的外观。

图9显示了从后方照射的大理石半身像（130万个三角形）中的次表层散射的几种不同模拟。BSSRDF模拟与完整的Monte Carlo模拟的外观基本一致，但速度明显更快（5分钟对1250分钟）。

在BSSRDF模拟中，后脑勺的头发表略暗淡；我们认为这是由于迫使 $1/\sigma^1_i$ 扩散近似中的距离。一个类似的ren-

在[5]中，使用光子映射法完成了测量，时间大约为12分钟（按我们的计算机速度计算）。然而，光子映射方法需要对材料进行全面的三维描述，它

需要内存来存储光子，而且对于那些有能力的人来说，成本会变

得很高。

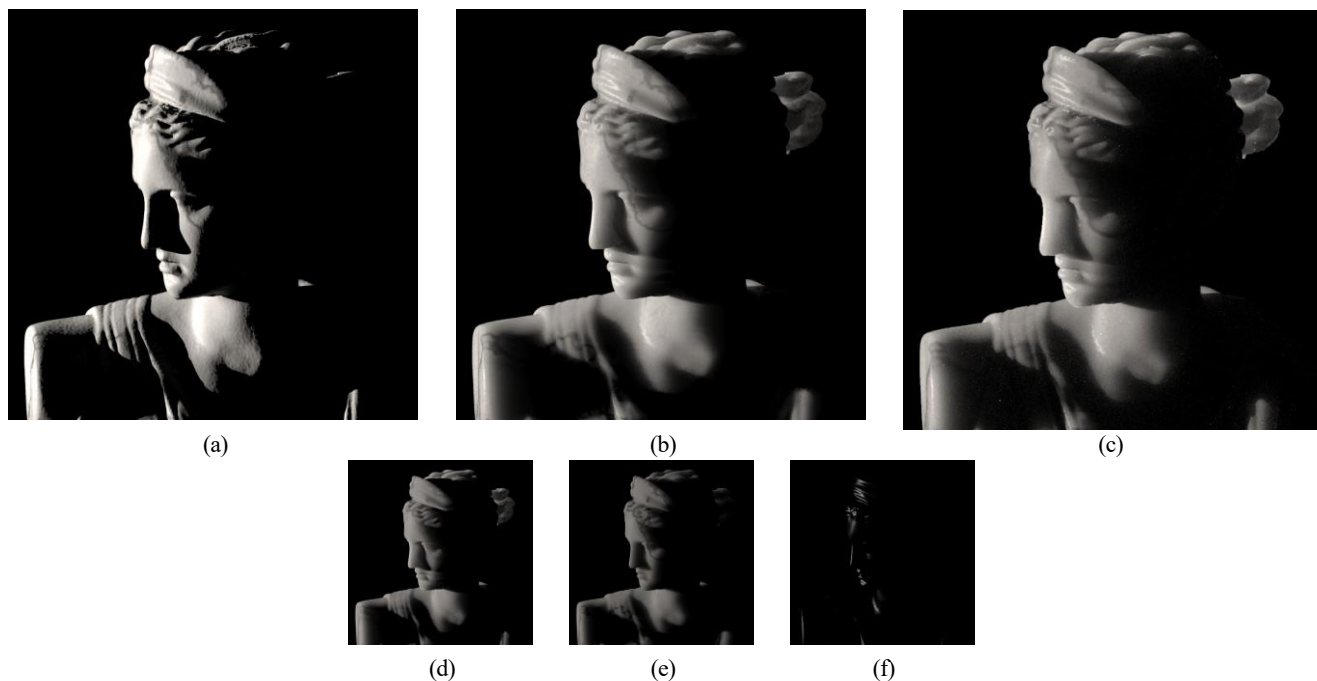


图9：大理石半身像的次表层散射模拟。大理石半身像从后面被照亮，并使用：(a) BRDF近似（2分钟），(b) BSSRDF近似（5分钟），和(c)完整的Monte Carlo模拟（1250分钟）进行渲染。请注意BSSRDF模型如何与蒙特卡罗模拟的外观相匹配，但速度明显更快。(d-f)中的图像显示了BSSRDF的不同组成部分：(d)单一-散射项，(e)扩散项，和(f)菲涅尔项。

高散射材料（如牛奶和皮肤）。

BSSRDF模拟的一个特别有趣的方面是，它能够捕捉到大理石表面的平滑外观。相比之下，BRDF模拟给出了一个非常坚硬的外观，甚至可以看到表面上的微小凹凸不平（这是现实图像合成中的一个典型问题，物体往往看起来坚硬而不真实）。

对于大理石，我们使用了合成散射和吸收的共同效率，因为我们想测试平均散射反照率为0.5时的困难情况（这里扩散和单一-散射的贡献大致相同）。图9显示了单一-散射和扩散项的总和是如何与蒙特卡罗模拟相匹配的。

图10包含三个牛奶的渲染图。第一个渲染图使用了漫反射模型；其他的使用了BSSRDF模型和我们对脱脂牛奶和全脂牛奶的测量。请注意，与BSSRDF图像相比，漫反射牛奶看起来很不真实，太不透明，尽管多重散射占主导地位，而且由于次表面散射导致的辐射出口非常漫反射。有趣的是，BSSRDF模拟能够捕捉到牛奶外观的微妙细节，使牛奶在前面看起来更偏蓝，在后面更偏红。这是由于瑞利散射导致短波长的光比长波长的光散射得更多。

皮肤是一种特别难渲染的材料，它是通过对材料中的射线路径进行采样来模拟次表面散射的方法。这是由于皮肤是高度散射的（典型的反照率是0.95），也是非常各向异性的（典型的散射角的平均余弦是0.85）。这两个特性意味着一个光子的平均散射次数非常高（通常超过100次）。此外，皮肤是非常半透明的，它不能用BRDF来正确渲染（见图11）。一个完整的皮肤模型需要多个层次，但一个

只用一个层就可以得到合理的近似值。在图11中，我们使用BSSRDF和我们对皮肤（skin1）的测量值渲染了一个简单的面部模型。这里我们还使用了Henyey-Greenstein相位函数[11]， $g=0.85$ 作为散射角的平均余弦。皮肤的测量值是在手臂上（可能比脸上的皮肤更透明），但考虑到缺乏空间变化（纹理），整体外观仍然是真实的。BSSRDF给了皮肤一个柔和的外观，它在鼻子下面的阴影区域渲染了出血的颜色。在这里，血液的吸收是特别不明显的，因为散射在皮肤深处的光线更红。在这个模拟中，扩散项比单一-散射项大得多。这意味着皮肤对光线的反射相当分散，但也意味着内部颜色的渗漏是一个重要因素。BRDF图像的渲染时间为7分钟，BSSRDF图像的渲染时间为17分钟。

6 结论和未来工作

在本文中，我们提出了一个新的用于计算机图形的实用BSSRDF模型。该模型将偶极子扩散应用与精确的单一-散射计算相结合。我们展示了该模型如何用于测量半透明材料的散射特性，以及测量值如何用于再现测量结果以及合成渲染。我们通过对表面上的入射光线进行采样来评估BSSRDF，并展示了这种技术如何能够捕捉到半透明材料的柔和和平滑的外观。

在未来，我们计划将该模型扩展到多层，并包括对高效全局照明的支持。

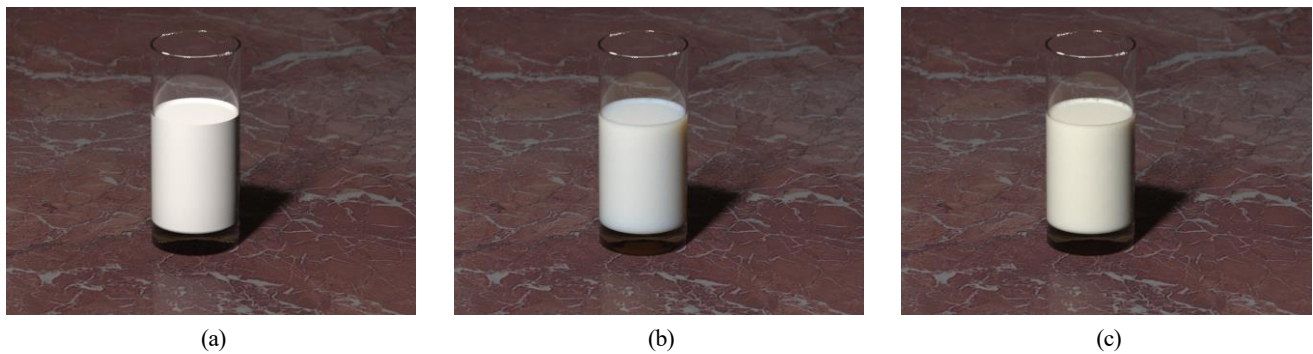


图10：一杯牛奶：(a) 漫反射 (BRDF)，(b) 脱脂 (BSSRDF) 和 (c) 全脂 (BSSRDF)。(b)和(c)使用的是我们的测量值。(a)的渲染时间为2分钟，(b)和(c)的渲染时间为4分钟；这包括大理石桌上的苛化和全局照明以及景深模拟。



BRDF



BSSRDF

图11：使用BRDF模型（上）和BSSRDF模型（下）渲染的一张脸。我们使用了我们测量的皮肤值（skin1），并在两幅图像中使用了相同的照明条件（BRDF图像还包括全局照明）。脸部的几何形状是手工建模的；嘴唇的凹凸图是手绘的，而皮肤上的凹凸图是基于一块皮肤的灰度微距照片。即使有全局照明，BRDF也给人一种硬邦邦的感觉。与此相比，BSSRDF模拟中的皮肤呈现出忠实的柔软外观。此外，BSSRDF还捕捉到了鼻子下面阴影区域的内部颜色渗出。

7 鸣谢

特别感谢Steven

Stahlberg为面部建模。感谢SIGGRAPH的审稿人，感谢Maryann Simmons和Heidi Marschner对稿件的有益评论。这项研究的部分资金来自国家自然科学基金会信息技术研究基金（IIS-0085864）。第一作者也得到了DARPA（DABT63-95-C-0085）的支持，第二作者也得到了本田北美公司的支持。

参考文献

- [1] S.Chandrasekhar.Radiative Transfer.Oxford Univ. Press, 1960.
- [2] R.L. Cook, T. Porter, and L. Carpenter.分布式光线追踪。在ACM Computer Graphics (SIGGRAPH'84)，第18卷，第137-145页，1984年7月。
- [3] P.Debevec, T. Hawkins, C. Tchou, H. Duiker, W. Sarokin, and M. Sagar.获取人脸的反射场。在计算机图形学论文集，2000年年度会议系列，第145-156页，2000年7月。
- [4] P.E. Debevec和J. Malik.从照片中恢复高动态范围辐射图。在计算机图形学论文集，年度会议系列，1997年，第369-378页，1997年8月。
- [5] J.Dorsey, A. Edelman, H. W. Jensen, J. Legakis, and H. K. Pedersen.风化石的建模和渲染。在计算机图形学论文集，年度会议系列，1999年，第225-234页，1999年8月。
- [6] G. Eason, A. Veitch, R. Nisbet, and F. Turnbull.血液对光的反散射理论。J. Physics, 11:1463-1479, 1978.
- [7] W.G. Egan and T. W. Hilgeman.Inhomogeneous Materials的光学特性。Academic Press, New York, 1979.
- [8] T.J. Farrell, M. S. Patterson, and B. Wilson.空间分辨率的扩散理论模型，稳态漫反射，用于体内组织光学特性的非侵入式测定。Med.Phys., 19:879-888, 1992.
- [9] R.A. Groenhuis, H. A. Ferwerda, and J. J. Ten Bosch.从反射测量中确定浑浊材料的散射和吸收。1: 理论。Applied Optics, 22:2456-2462, 1983.
- [10] P.Hanrahan and W. Krueger.分层表面的反射，由于次表面散射。在ACM计算机图形学 (SIGGRAPH'93)，第165-174页，1993年8月。
- [11] L.G. Henyey和J. L. Greenstein.银河系中的漫射。天体物理学杂志，93：70-83，1941。
- [12] A.Ishimaru.随机介质中的波传播和散射，第一卷。Academic Press, New York, 1978.
- [13] G. Kortum.反射率光谱学。Springer-Verlag, 1969.
- [14] F.E. Nicodemus, J. C. Richmond, J. J. Hsia, I. W. Ginsberg, and T. Limperis.反射率的几何考虑和命名法。Monograph 161, National Bureau of Standards (US), October 1977.
- [15] M.Pharr and P. Hanrahan.Monte Carlo评估地下反射的非线性散射方程.In Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, 2000, pages 75-84, July 2000.
- [16] L.Reynolds, C. Johnson, and A. Ishimaru.应用光学，15:2059，1976。

- [17] J.Stam.作为扩散过程的多重散射。In *Eurographics Rendering Workshop 1995*.Eurographics, June 1995.