Table des matières

I. Déroulement du stage

Pour la 5ième fois, le Centre International de Valbonne (CIV) nous a accueilli du lundi 16 août vers X h au jeudi 26 août vers XX h, avec un effectif final de XX stagiaires et XX animatheurs.

Parmi les presque XX candidats à la Coupe Animath, un peu moins de 500 ont franchi le cap des éliminatoires en ligne. Sur la base des résultats de la Coupe, nous devions accueillir XX stagiaires, dont environ XX de fin de première, 20 de seconde, 10 de troisième et 10 de quatrième. En prévision des EGMO, Olympiades Européennes Féminines de Mathématiques, et de la JBMO, Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques, des bonifications ont été ajoutées pour favoriser les filles et les plus jeunes.

Le stage était structuré comme ceux des années précédentes : deux périodes de quatre jours (18 - 21 août et 22 - 26 août), trois de cours / exercices, un entraînement de type olympique le matin du quatrième jour (de 9h à 12h, ou, pour le groupe D, de 8h à 12h) et une après-midi récréative. Les élèves étaient répartis en 4 groupes A, B, C, et D en fonction de leur expérience en mathématiques olympiques. Le programme est construit suivant ce qui est demandé lors des compétitions internationales : Arithmétique, Algèbre, Combinatoire et Géométrie.

En plus des cours étaient prévues, le soir, des conférences à vocation culturelle, permettant de découvrir de nouveaux pans des mathématiques. Merci à Pooran Memari pour son exposé sur les triangulations et leur utilisation dans la vie courante ; Colin Davalo pour sa présentation des jeux combinatoires (et avoir appris aux élèves à gagner à tous les coups au jeu de Nim !) ; Phong Nguyen pour son colloque sur l'utilisation de la théorie des nombres dans la vie courante et à Victor Vermès pour sa (très actuelle) conférence sur la propagation d'une épidémie.

L'après-midi suivant le premier entraînement fut organisée un grand jeu par une petite équipe chapeautée par X.

Il est possible de retrouver les comptes rendus du stage au jour le jour sur le site de la POFM : https://maths-olympiques.fr/?p=5193

II. Coupe Animath de printemps 2021

III. Groupe A

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre & Géométrie

1 THÈME

2 THÈME

3 THÈME

4 Inégalités

5 THÈME

6 THÈME

2 Entraînement de mi-parcours

3 Deuxième partie : Arithmétique & Combinatoire

1 THÈME

2 Nombres premiers

Définition des nombres premiers

Définition 1 (Nombre premier)**.**
Un nombre premier est un nombre naturel qui a exactement 2 diviseurs naturels - 1 et lui-même.

Exercice 1
Trouver tous les premiers entre 1 et 15.

Exercice 2
Trouver tous les premiers pairs.

Exercice 3
Combien y a-t-il de paires de premiers consécutifs ?

Exercice 4
Trouver tous les premiers de la forme $a^2 - 1$, avec $a \geqslant 2$ naturel.

Exercice 5
Est-ce que tous les nombres de la forme $n^2 + n + 41$, avec n naturel, sont premiers ?

Exercice 6
Soit n un nombre naturel. On veut tester si n est premier. On peut tester si n est divisible par $2, 3, 4, \ldots, n-1$. On sait alors que n est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun de ses nombres. Montrer qu'en faite, il suffit de tester que les diviseurs plus petits que $\sqrt{n}$, ce qui donne une façon plus rapide de tester si un nombre n est premier.

Exercice 7
Soit n naturel. Montrer que si 2^{n-1} est premier, alors n est premier.

Exercice 8
Montrer que si un premier p divise un premier q, alors $p = q$.

Exercice 9
Soit p premier et n naturel. Montrer que soit p divise n, soit p et n sont premiers entre eux.

Lemme d'Euclide

Le lemme d'Euclide s'énonce comme suit :

Théorème 2 (Lemme d'Euclide)**.**

Soit p premier et a, b naturels. Si p divise ab, alors soit p divise a, soit p divise b

Remarquons que la condition p premier est indispensable. De faite, 6 divise $12 = 3 \times 4$, mais 6 ne divise ni 3 di 4. C'est possible par ce que 6 n'est pas premier.

On va le prouver plus tard, puis ce que la preuve est assez compliquée et technique.

Exercice 10
Soit a entier. Montrer que 5 divise a^2 si et seulement si 5 divise a.

On peut un peut généraliser le lemme d'Euclide :

Théorème 3 (Lemme d'Euclide (généralisé))**.**

Soit p premier et $a_2, a_2, \ldots, a_n$ des entiers. Si p divise $a_2 \times a_2 \times \cdots \times a_n$, alors il divise un des $a_2, a_2, \ldots, a_n$.

Démonstration.

On va prouver cette généralisation en appliquant le lemme d'Euclide plusieurs fois. Si un premier p divise $a_2 \times a_2 \times \cdots \times a_n$, alors par le lemme d'Euclide, p divise soit a_2 soit $a_2 \times a_3 \times \cdots a_n$. Dans le premier cas, on a terminé. Dans le deuxiemme cas, on reapplique le lemme d'Euclide de la meme manière. On a alors que p divise soit a_2 soit $a_3 \times a_4 \times \cdots \times a_n$. Dans le premiér cas, on a terminé, dans le deuxiemme cas, on refait le meme raisonnement. Si on refait ce raisonnement assez de fois, on aura terminé au bound d'un moment.

Remarque : ce raisonnement peut etre rendu plus rigoureux grace a une recurence.

Exercice 11
Soit a entier. Montrer que 5 divise a^3 si et seulement si 5 divise a.

Démonstration (Lemme d'Euclide).

Soit p premier et a, b entiers tels que p divise ab, écrivons $ab = kp$ avec k entier. Supposons par l'absurde que p ne divise ni a ni b. Alors p est premier avec a et avec b donc par le théoréme de Bézout, il existe des entiers w, x, y, z tels que

$$wa + xp = 1$$

et

$$yb + zp = 1$$

soit

$$wa = 1 - xp$$

et

$$yb = 1 - zp$$

on a alors

$$wyab = (1 - xp)(1 - zp)$$
$$wykp = 1 - xp - zp + xzp^2$$
$$1 = p(wyk + x + z - p)$$

Donc p divise 1, ce qui est une contradiction.

Décomposition en facteurs premiers

Théorème 4 (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.**
Soit $n \geqslant 1$ naturel. n peut s'ecrir comme produit de facteurs premiers d'une manière unique. Cette ecriture s'appéle la décomposition de n en facteurs premiers.

Par example, $6 = 2 \times 3$, 2×3 est la décomposition de 6 en facteurs premiers. $12 = 2 \times 2 \times 3, 15 = 3 \times 5, 14 = 2 \times 17, 8 = 2 \times 2 \times 2$. Pour que ce théoréme s'applique aux nombres premiers, on dit qu'un nombre premier est produit de juste lui-même (meme si c'est pas vraiment un produit, ca nous simplifie la vie). On dit aussi que 1 est produit de zero nombres premiers.

Bien sur, $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2 \times 3 \times 2 = 3 \times 2 \times 2$. On dit que la décomposition en facteurs premiers reste la meme quand on change l'ordre des facteurs, donc quand on dit unique, on veut dire unique a réordonnement pret.

Remarque : on a défini les nombres premiers de manière a ce que 1 ne soit pas premier. On peut maintenant en quoi ca nous simplifie la vie : si 1 était premier, la décompositoin en facteurs premiers ne serait pas unique : $6 = 2 \times 3 = 2 \times 3 \times 1 = 2 \times 3 \times 1 \times 1 = 2 \times 3 \times 1 \times 1 \times 1 = \ldots$.

Exercice 12
Montrer qu'un premier divise un nombre naturel si et seulement s'il est présent dans sa décomposition en facteurs premiers.

Exercice 13
Montrer que si un nombre naturel est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.

Exercice 14

Montrer qu'un nombre naturel est un carré parfait si et seulement si chaque premier présent dans sa décomposition en facteurs premiers y apparait un nombre pair de fois.

Montrer qu'un nombre naturel est une puissance k^e parfait si et seulement si chaque premier présent dans sa décomposition en facteurs premiers y apparait un nombre divisible par k de fois.

Exercice 15
Un entier est à la fois un carré parfait et un cube parfait. Est-il alors forcement une puissance 6^e parfaite ?

Exercice 16

Montrer que deux naturels sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de facteur premier en commun.

Exercice 17
Soient a et b naturels. Montrer que a divise b si et seulement si tous les premiers présents dans la décomposition en facteurs premiers de a sont aussi présent dans la décomposition en

facteurs premiers de b et chacun d'entre eux y apparait au moins au temps de fois que dans celle de a.

Exercice 18
Combien de diviseurs naturels a 121 ? Combien de diviseurs naturels a $1\ 000$? Combien de diviseurs naturels a $1\ 000\ 000\ 000$?

Exercice 19
Soient a et b deux naturels premiers entre eux et n un naturel. Montrer que si a divise n et b divise n, alors ab divise n.

Exercice 20
Soit p premier. Montrer qu'un nombre naturel est une puissance de p si et seulement si p est son seul facteur premier.

Lemme de Gauss

Théorème 5 (Lemme de Gauss)**.**

Soient $n \neq 0, a, b$ des naturels tels que n et a sont premiers entre eux. Si n divise ab, alors n divise b.

Démonstration.
Comme n et a sont premiers entre eux, ils n'ont pas de facteurs preimers en commun. Or comme n divise ab, tous les facteurs premiers de n sont présents dans la décomposition en facteurs premiers de ab au moins autemps de fois que dans celle de n. Donc, comme n et a n'ont pas de facteurs premiers en commun, ils sont tous présents dans la décomposition de b en facteurs premiers, ce qui conclut.

Exercice 21
Montrer le lemme d'Euclide en utilisant le lemme de Gauss.

Exercice 22
Soient x et y des entiers. Montrer que si $2x + 1$ divise $8y$, alors $2x + 1$ divise y.

Exercice 23
Soient x et y des naturels. Montrer que si x^2 divise $x^2 + xy + x + y$, alors x^2 divise $x + y$.

Infinitude de nombres premiers

Théorème 6.

Il y a une infinité de nombres premiers.

Démonstration.
Supposons par l'absurde qu'il y a un nombre fini de nombres premiers. Disons que $p_2, p_2, \ldots, p_n$ sont tous les nombres premiers. Mais alors, $p_2p_2 \cdots p_n + 1$ n'est divisible par aucun des $p_2, p_2, \ldots, p_n$ puis ce que si p_i divise $p_2p_2 \cdots p_n + 1$, il divise $p_2p_2 \cdots p_n + 1 - p_i \times p_2p_2 \cdots p_{i-1}p_{i+1} \cdots p_n = 1$. Mais, $p_2p_2 \cdots p_n + 1$ est un entier plus grand que 2, il a donc au moins un facteur premier. Comme ce facteur ne peut etre aucun des $p_2, p_2, \ldots, p_n$, il y a un autre premier que $p_2, p_2, \ldots, p_n$. Contradiction.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1

Ce sont $2, 3, 5, 7, 11, 13$. Un calcul montre que ses nombres sont bien divisibles que par 1 et eux memes. Réciproquement, 4 n'est pas premier car il est divisible par 2 et $2 \neq 1$ et $2 \neq 4$. De meme, 6 est divisible par 2, 8 est divisible par 2, 9 est divisible par 3, 10 est divisible par 2, 12 est divisible par 2, 14 est divisible par 2 et 15 est divisible par 3.

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier par ce qu'il n'a qu'un seul diviseur naturel. Ca peut paraitre bizare de choisir une définition de premier qui exclut 1, mais on vera aprés que ca nous simplifie en faite la vie.

Solution de l'exercice 2

2 est le seul premier pair. De faite, si un premier est pair, alors 2 en est un diviseur, donc, comme $2 \neq 1$, 2 est égal a ce premier. Réciproquement, 2 est bien premier.

Solution de l'exercice 3

$2, 3$ est la seule paire de premiers consécutifs. De faite, si deux premiers sont consécutifs, alors un d'entre eux est pair, il est donc égal a 2. Réciprquement, $1, 2$ ne sont pas deux premiers consécutifs car 1 n'est pas premier, et $2, 3$ sont bien deux premiers consecutifs.

Solution de l'exercice 4

3 est le seul premier de cette forme. De faite, si un premier p est de la forme $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$, il est divisible par $a - 1$ et $a + 1$. Or, comme $a \geqslant 2$, $a - 1$ et $a + 1$ sont naturels, donc chacun d'entre eux vaut soit 1 soit p. Comme ils sont distincts et $a - 1$ est le plus petit d'entre eux, c'est $a - 1$ qui doit valoir 1, donc a doit valoir 2. Réciproquement, $2^2 - 1 = 3$ est bien premier.

Solution de l'exercice 5

On veut montrer que la réponse est non. On veut qu'un nombre de cette forme ait un diviseur autre que 1 et lui-même. Notament, si on veut que ce diviseur soit 41, on n'a qu'a prendre $n = 41$ et on aura alors $n^2 + n + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1)$ est le produit de deux naturels > 1 et donc pas premier.

Solution de l'exercice 6

On va montrer que si n n'est pas premier, alors il a un diviseur naturel autre que 1 et n qui vaut au plus $\sqrt{n}$. Prenons n'importe quel diviseur d de n. Si $d \leqslant \sqrt{n}$, on a fini. Sinon, si $d > \sqrt{n}$, on a que $\frac{n}{d}$ est aussi un diviseur de n, mais alors $\frac{n}{d} < \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}^2}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, soit $\frac{n}{d} < \sqrt{n}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7

Supposons par l'absurde que $2^n - 1$ est premier et n n'est pas premier. n a alors un diviseur naturel $k \neq 1, n$ et on peut alors ecrir $n = kl$ avec $l = \frac{n}{k} \neq 1, n$ entier naturel. Alors $2^n - 1 = 2^{kl} - 1 = \left(2^k - 1\right)\left(2^{(l-1)k} + 2^{(l-2)k} + \cdots + 2^{2k} + 2^k + 1\right)$ est un produit de deux entiers > 1 et donc pas premier.

Solution de l'exercice 8

Comme p est un diviseur de q et q est premier, on a que p vaut soit q soit 1. Le deuxiemme cas n'étant pas possible (car 1 n'est pas premier), on a bien fini.
Solution de l'exercice 9

Soit d le plus grand diviseur commun de p et de n. Comme d divise p, on a que d vaut soit 1 soit p. Dans le premier cas, p et n sont premiers entre eux, dans le second cas, p divise n car d divise n.
Solution de l'exercice 10

5 est premier. Donc, par le lemme d'Euclide, si 5 divise $a^2 = a \times a$, alors soit 5 divise a, soit 5 divise a, on a donc conclu.
Solution de l'exercice 11

5 est premier. Donc par la généralisation du lemme d'Euclide, on a que 5 divise soit a, soit a, soit a.

On prouve maintenant le lemme d'Euclide. Cette preuve peut paraitre parachutée, il existe une preuve plus naturelle mais elle utilise les modulos qui sont au programme du cours de demain.
Solution de l'exercice 12

Dans un sens, si p est présent dans la décomposition en facteurs premiers de n, alors on peut ordonner cette decomposition comme $n = p \times q_2 q_2 \cdots q_k$, donc p divise bien n.

Dans l'autre sens, si p divise n, alors décomposons n en facteurs premiers : $n = q_2 q_2 \cdots q_k$. p divise $q_2 q_2 \cdots q_k$ et donc par la généralisation du lemme de Gauss il divise q_i pour un certain i. Donc, comme p et q_i sont premiers, on a $q_i = p$, donc p est bien présent dans la décomposition de n en facteurs premiers.
Solution de l'exercice 13

2 et 3 sont premiers. Donc, si un nombre naturel n est divisible par 2 et par 3, 2 et 3 sont présents dans sa décomposition en faceturs premiers. Alors cette décomposition peut etre reordonnée comme $n = 2 \times 3 \times q_2 q_2 \cdots q_k = 6 \times q_2 q_2 \cdots q_k$, n est donc bien divisible par 6.
Solution de l'exercice 14

Pour la premiére sous question, dans un sens, si un nombre naturel n est un carré parfait, posons $n = a^2$. Soit alors $a = p_2 p_2 \cdots p_l$ la décomposition de a en facteurs premiers. On a

$$n = a \times a = (p_2 p_2 \cdots p_l) \times (p_2 p_2 \cdots p_l)$$

. Pour chaque premier qui apparait dans cette décomposition, soit x le nombre de fois qu'il apparait dans un des facteurs. Il apparait alors $2x$ fois dans toute la décomposition, un nombre pair de fois.

Dans l'autre sens, si chaque facteur premier apparait un nombre pair de fois dans la décomposition en facteurs premiers de n, on peut regrouper ses facteurs premiers :

$$n = (p_2 p_2)(p_2 p_2) \cdots (p_l p_l)$$

n a alors

$$n = (p_2 p_2 \cdots p_l)(p_2 p_2 \cdots p_l) = (p_2 p_2 \cdots p_l)^2$$

comme voulu.

Poul la deuxiemme sous question, on procéde de la meme manière. Dans un sens, si un nombre naturel n est une puissance k^e, posons $n = a^k$. Décomposons a en facteurs premiers : $a = p_2 p_2 \cdots p_l$. On a alors $n = a^k = a \times a \times \cdots \times a = (p_2 p_2 \cdots p_l)(p_2 p_2 \cdots p_l) \cdots (p_2 p_2 \cdots p_l)$, avec k fois $p_2 p_2 \cdots p_l$. Si un facteur premier apparait dans cette décomposition, il apparait dans un des k facteurs. Soit x le nombre de fois qu'il apparait dans ce facteur. Il apparait alors kx fois dans toute la décomposition, c'est bien un nombre divisible par k.

Dans l'autre sens, si chaque facteur premier apparait un nombre pair de fois dans la décomposition de n, alors cette décomposition peut etre écrite comme

$$n = (p_2 p_2 \cdots p_2)(p_2 p_2 \cdots p_2) \cdots (p_l p_l \cdots p_l)$$

et puis réarangée comme

$$n = (p_2 p_2 \cdots p_l)(p_2 p_2 \cdots p_l) \cdots (p_2 p_2 \cdots p_l) = (p_2 p_2 \cdots p_l)$$

n est donc bien une puissance k^e, ce qu'il falait démontrer.
Solution de l'exercice 15

La réponse est oui. Supposons que n est un naturel qui est a la fois un carré parfait et un cube parfait. Comme n est un carré parfait, chaque facteur premier présent dans sa décomposition en facteurs premiers est présent un nombre divisible par 2 de fois dans sa décomposition en facteurs premiers. Comme n est un cube parfait, chaque facteur premier présent dans sa décomposition en facteurs premiers y est présent un nombre divisible par 3 de fois. Donc, chaque facteur premier de n est présent un nombre divisible par $2 \times 3 = 6$ de fois dans la décomposition de n en facteurs premiers, d'ou n est bien une puissance 6^e.
Solution de l'exercice 16

Si deux naturels ont un facteur premier en commun, alors ce facteur en est un diviseur commun. Comme il n'est pas égal a 1 (car premier), ils ne sont pas premiers entre eux.

Réciproquement, si supposons que deux naturels n'ont pas de facteurs premiers en commun. Supposons par l'absurde qu'ils ne sont pas premiers entre eux, c'est a dire que leur pgcd ne vaut pas 1. Ce pgcd a alors au moins un diviseur premier (n'importe quel facteur de sa décomposition en facteurs premiers). C'est alors un facteur premier en commun des deux naturels, contradiction.
Solution de l'exercice 17

Supposons que dans la décomposition de a en facteurs premiers, p_2 apparait k_2 fois, p_2 apparait k_2 fois, ..., p_n apparait k_n fois, avec $p_2, p_2, \ldots, p_n$ des premiers distincts. On a alors

$$a = p_2^{k_2} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$$

Supposons que $p_2, p_2, \ldots, p_n$ apparaissent aussi dans la décomposition de b en facteurs premiers, l_2 fois, l_2 fois, ..., l_n fois respectivement, avec $k_2 \leqslant l_2, k_2 \leqslant l_2, \ldots, k_n \leqslant l_n$. On a alors

$$b = p_2^{l_2} p_2^{l_2} \cdots p_n^{l_n} q_2 q_2 \cdots q_m$$

pour certains premiers $q_2, q_2, \ldots q_m$. On a alors

$$b = p_2^{k_2} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n} \times p_2^{l_2 - k_2} p_2^{l_2 - k_2} \cdots p_n^{l_n - k_n} q_2 q_2 \cdots q_m$$

$$b = a \times p_2^{l_2-k_2} p_2^{l_2-k_2} \cdots p_n^{l_n-k_n} q_2 q_2 \cdots q_m$$

Donc a divise bien b (Remarque qu'on a besoin que $k_i \leqslant l_i$ pour que $l_i - k_i$ soit positif et donc que $p_i^{l_i-k_i}$ soit entier).

Réciproquement, supposons que a divise b et qu'un preimer p apparait k fois dans la décomposition de a en facteurs premiers. On a que p divise a et a divise b, donc p divise b. p apparait donc aussi dans la décomposition de b en facteurs premiers. Soit l le nombre de fois que p apparait dans la décomposition de b en facteurs premiers. On peut ecrire $b = p^l \times q_2 q_2 \cdots q_n$. Supposons alors par l'absurde que $k > l$. On peut alors écrir $p^k = p^{l-k} p^l$, avec $l - k \geqslant 1$. Comme p^k divise a et a divise b, on a que p^k divise b. Autrement dit, $p^{l-k} p^l$ divise $p^l \times q_2 q_2 \cdots q_n$, donc p^{l-k} divise $q_2 q_2 \cdots q_n$, donc p divise $q_2 q_2 \cdots q_n$, ce qui n'est pas possible car p est premier mais il n'est pas un des $q_2, q_2, \cdots, q_n$.

Solution de l'exercice 18

$121 = 11^2$. Donc les diviseurs naturels de 121 sont exactement 1, qui n'a aucun facteur premier, et les nombres naturels dont 11 est le seul facteur premier et ce facteur premier est présent 1 ou 2 fois dans la décomposition en facteurs premiers, ce sont 11 et 121. Donc, 121 a exactement 3 diviseurs naturels.

$1\,000 = 2^3 \times 5^3$. Les diviseurs naturels de $1\,000$ sont donc exactement les nombres naturels avec que des 2 et 5 dans la décomposition en facteurs premiers et qui y ont $0, 1, 2$ ou 3 fois 2 et $0, 1, 2$ ou 3 fois 5. Il y a quatre possibilités de combien de facteurs 2 il y a et quatre possibilités de combien de facteurs 5 il y a, ca donne donc en tout $4 \times 4 = 16$ diviseurs.

$1\,000\,000\,000 = 2^9 \times 5^9$. Donc, de meme que dans la question précédente, il a $(9+1) \times (9+1) = 100$ diviseurs.

Solution de l'exercice 19

Comme a et b sont premiers entre eux, ils n'ont pas de facteur premier en commun. Par l'exercice précédent, tous les facteurs premiers de a apparaissent dans la décomposition en facteurs premiers de n au moins autemps de fois que dans celle de a. De meme, tous les facteurs preimers de b apparaissent dans la décomposition de n en facteurs premiers au moins autemps de fois que dans celle de b. Donc, tous les facteurs premiers de ab apparaissent dans la décomposition de n au moins autemps de fois que dans celle de n (par ce que chaque facteur premier de ab est soit un facteur premier de a et il apparait dans la décomposition en facteurs premiers de ab autemps de fois que dans celle de b, soit la meme chose mais c'est un facteur premier de b).

Solution de l'exercice 20

Si p est le seul facteur premier de n, alors $n = p \times p \times \times \times p$ est bien une puissance de p. Réciproquement, si n est une puissance de p, alors on peut ecrir $n = p \times p \times \times \times p$, un produit de nombres premiers, donc p est le seul facteur premier de n.

Solution de l'exercice 21

Supposons qu'un premier p divise ab mais il ne divise ni a ni b, c'est a dire il est premier avec a et avec b. Par le lemme de Gauss, il divise alors b, ce qui n'est pas possible car il est premier avec b.

Solution de l'exercice 22

$2x+1$ est premier avec $8 = 2 \times 2 \times 2$ car $2x+1$ est impair et 2 n'en est donc pas un facteur premier. Donc, par le lemme de Gauss, $2x+1$ divise y car il divise $8y$.
Solution de l'exercice 23

On factorise $x^2+xy+x+y = x(x+y)+x+y = (x+1)(x+y)$. $x+1$ est premier avec x car ils n'ont pas de facteurs premiers en commun. De faite, si p est un facteur premier de x^2, il est aussi un facteur premier de x, donc il ne divise pas $x+1$ car sinon il diviserais $x+1-x=1$. Donc, par le lemme de Gauss, x^2 divise $x+y$, ce qu'il fallait démontrer.

3 THÈME

4 THÈME

5 THÈME

6 THÈME

4 Derniers cours

1 THÈME

2 THÈME

IV. Groupe B

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre & Géométrie

1 Chasse aux angles

2 Récurrence

Ce cours reprend les exercices des deux années précédentes :

https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/08/PolycopieV1-1.pdf page 87-92

http://igm.univ-mlv.fr/~juge/pofm/2020-2021/Valbonne-2020/Polycopié-Valbonne-2020-v2.pdf page 104-111

A l'exception de cet exercice difficile traité en complément :

Exercice 1
Trouver les fonctions $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ telles que $f(f(n)) < f(n+1)$.

(Indication : Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \geq n, f(m) \geq n$.)

Solution de l'exercice 1
On montre le résultat indiqué par récurrence :

- Initialisation : on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geq 0$.
- Hérédité : On suppose le résultat vérifié pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Alors pour tout $m \geq n+1,\ f(m) > f(f(m-1)) \geq n$ par hypothèse de récurrence car $f(m-1) \geq n$ par hypothèse de récurrence.

Donc $f(m) \geq n+1$ (entiers).

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geq n$ d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) > f(n)$ donc f est strictement croissante.

Donc en réutilisant l'équation de départ, $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) < n+1$ donc $f(n) = n$.

Finalement, la seule solution est $id_{\mathbb{N}}$ qui convient effectivement.

3 Triangles semblables

Exercices

Exercice 1
(Puissance d'un point) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique et X l'intersection de AB et CD. Montrer que XBC est semblable à XDA.

Exercice 2
Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que $AH^2 = HB \cdot HC$, $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times BC$.

Exercice 3
Soit ABC un triangle et D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un parallèlogramme, M un point du segment $[AC]$. Soit E le projeté orhtogonal de M sur le segment $[AB]$ et F le projeté orhtogonal sur le segment $[AD]$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$.

Exercice 5
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et N le milieu du segment $[CD]$. Les droites (AN) et (BD) se coupent en Q et les droites (AM) et (BD) se coupent en P. Montrer que $BP = PQ = QD$.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un losange. Soit F un point du segment $[AD]$ et E un point du segment $[AB]$. Les droites (FC) et (BD) se coupent en L, les droites (EC) et (BD) se coupent en K. Les droites (FK) et (BC) se coupent en Q et les droites (EL) et (DC) se coupent en P. Montrer que $CP = CQ$.

Exercice 7
Soit ABC un triangle et soit D, E et F les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit X un point à l'intérieur du triangle ABC. Soient A', B' et C' les symétriques du point X par rapport respectivement aux points D, E et F. Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourrantes.

Exercice 8
Soit ABC un triangle rectangle isocèle en C, et D, E deux points sur $[CA]$ et $[CB]$ tel que $CD = CE$. Puis, soit U et V deux points sur $[AB]$ tels que (DU) et (CV) sont perpendiculaires à (AE). Montrer que $UV = VB$.

Exercice 9

Soit $ABCD$ trapèze avec $(AD) \parallel (BC)$, M l'intersection de ses diagonales et P un point de $[BC]$ tel que $\widehat{APM} = \widehat{DPM}$. Montrer que la distance de B à (DP) est égale à la distance de C à (AP).

Exercice 10
Soit ABC un triangle et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit respectivement avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit P un point tel que $PF = FB$, les droites (FP) et (AC) sont parallèles et les points P et C sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Soit Q un point tel que $QE = EC$, les droites (EQ) et (AB) sont parallèles et les points Q et B sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Montrer que les points P, D et Q sont alignés.

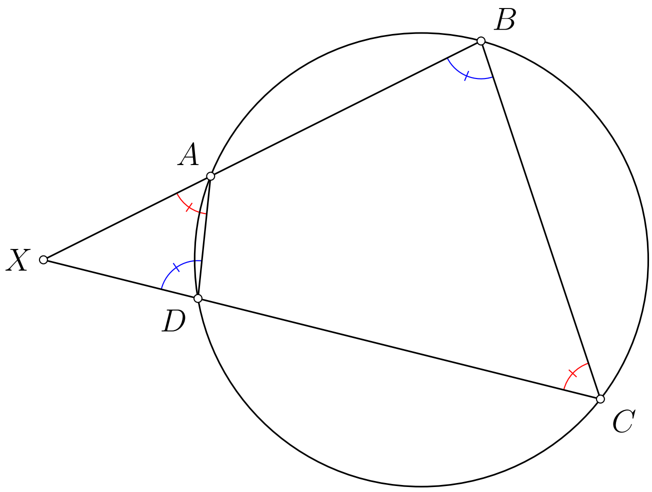
Exercice 11
Soit $ABCD$ un trapèze avec $AB < CD$ et les droites (AB) et (CD) parallèles. Soit P un point appartenant au segment $[CB]$. La parallèle à le droite (AP) passant par le point C coupe le segment $[AD]$ en le point R et la parallèle à la droite (DP) passant par le point B coupe le segment $[AD]$ en le point R'. Montrer que $R = R'$.

Exercice 12
Soit ABC un triangle et X un point situé à l'intérieur du triangle ABC. Les droites (AX), (BX) et (CX) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC en les points P, Q et R respectivement. Soit U un point appartenant au segment $[XP]$. Les parallèles à (AB), (AC) passant par U coupent les droites (XQ) et (XR) en les points V et W respectivement. Montrer que les points R, W, V, Q sont cocycliques.

Solutions

Exercice 1
(Puissance d'un point) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique et X l'intersection de AB et CD. Montrer que XBC est semblable à XDA.

Solution de l'exercice 1



Traitons le cas où le quadrilatère $ABCD$ est convexe (le cas où il est croisé se fait de même manière).

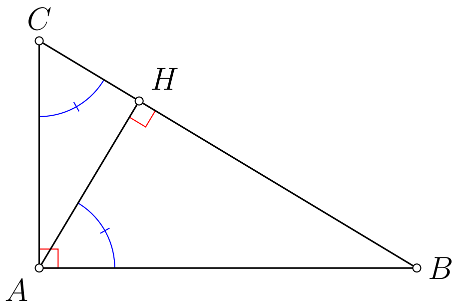
Dans ce cas, le point X se trouve à l'extérieur de $ABCD$ et puisque $ABCD$ est cyclique, on a

$$\widehat{XDA} = 180° - \widehat{ADC} = \widehat{ABC} = \widehat{XBC}$$

d'après le théorème de l'angle inscrit. De manière similaire, $\widehat{XAD} = \widehat{XCB}$. Les triangles XBC et XDA partagent donc deux angles égaux, ils sont bien semblables.

Exercice 2
Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que $AH^2 = HB \cdot HC$, $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times BC$.

Solution de l'exercice 2



Nous avons

$$\widehat{HAB} = 90^\circ - \widehat{HBA} = \widehat{ACH}$$

De même,

$$\widehat{HAC} = 90^\circ - \widehat{HAB} = \widehat{ABH}$$

Les triangles HAB et HCA ont deux angles en commun et sont donc semblables. On en déduit

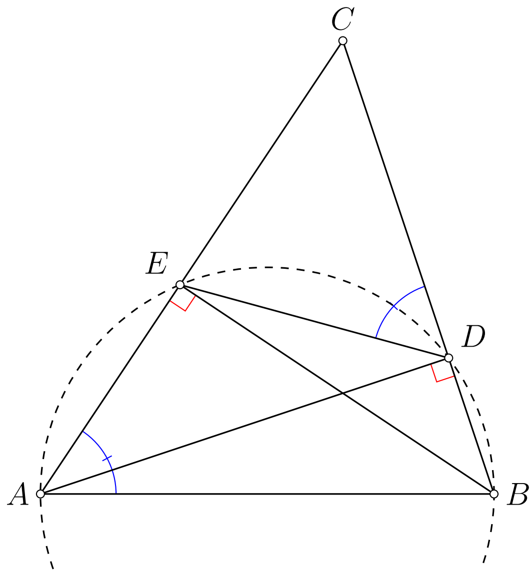
$$\frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HA}$$

ce qui se réécrit $HA^2 = HB \cdot HC$.

Notons ensuite que puisque $\widehat{ACH} = \widehat{ACB}$, les triangles ACH et BCA sont semblables. On a donc $\frac{AC}{CB} = \frac{CH}{AC}$ qui se réécrit $AC^2 = CB \cdot CH$. La relation $AB^2 = CB \cdot HB$ se démontre de la même façon.

Exercice 3
Soit ABC un triangle et D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Solution de l'exercice 3



Puisqu'on a

$$\widehat{ADB} = 90° = \widehat{AEB}$$

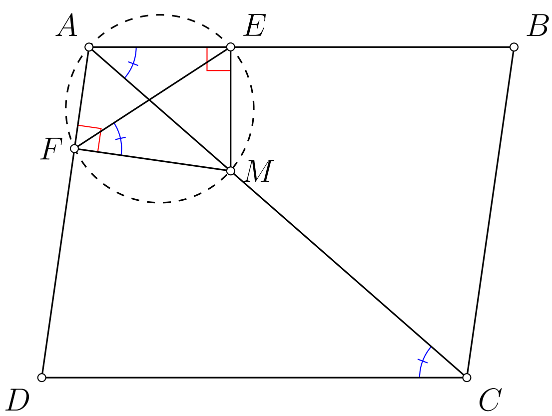
les points E, D, B et A sont cocycliques. On a alors, de même que pour le premier exercice, d'après le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{EDC} = 180° - \widehat{EDB} = \widehat{BAE} = \widehat{BAC}$$

et donc les triangles CDE et CAB partagent deux angles égaux et sont bien semblables.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un parallèlogramme, M un point du segment $[AC]$. Soit E le projeté orhtogonal de M sur le segment $[AB]$ et F le projeté orhtogonal sur le segment $[AD]$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$.

Solution de l'exercice 4



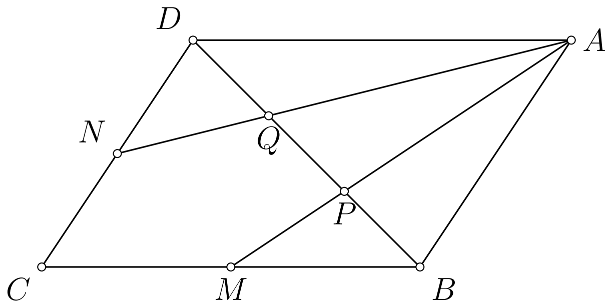
Puisque $\widehat{AEM} = 90° = 180 - \widehat{AFM}$, les points A, E, M et F sont cocycliques. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a donc que $\widehat{MFE} = \widehat{MAE} = \widehat{CAB}$ et $\widehat{MEF} = \widehat{MAF} = \widehat{CAD} = \widehat{ACB}$. Les triangles MFE et BAC sont donc semblables.

Dans le parallélogramme $ABCD$, $CD = AB$ donc on déduit l'égalité de rapport

$$\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}$$

Exercice 5
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et N le milieu du segment $[CD]$. Les droites (AN) et (BD) se coupent en Q et les droites (AM) et (BD) se coupent en P. Montrer que $BP = PQ = QD$.

Solution de l'exercice 5



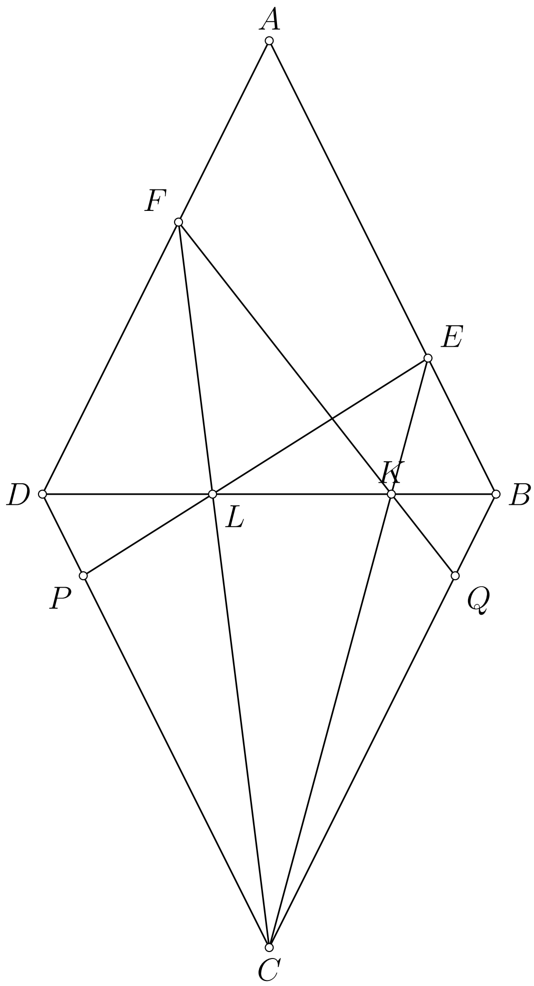
D'après le théorème de Thalès dans le papillon $DNQAB$, $\frac{DQ}{QB} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2}$. Donc $QB = 2DQ$ et $DQ = \frac{1}{3}DB$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $BMPAD$, $\frac{PB}{PD} = \frac{MB}{AD} = \frac{1}{2}$ et donc $PB = \frac{1}{3}DB$.

En conséquence, on a aussi $QP = \frac{1}{3}DB$ donc on a les égalités de longueurs voulues.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un losange. Soit F un point du segment $[AD]$ et E un point du segment $[AB]$. Les droites (FC) et (BD) se coupent en L, les droites (EC) et (BD) se coupent en K. Les droites (FK) et (BC) se coupent en Q et les droites (EL) et (DC) se coupent en P. Montrer que $CP = CQ$.

Solution de l'exercice 6



On dispose de plusieurs papillons, on va donc les examiner chacun et tirer les informations utiles.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $QBKDF$, $\frac{QB}{DF} = \frac{BK}{DK}$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $EBKDC$, $\frac{EB}{DC} = \frac{BK}{DK}$ et ainsi, en combinant les deux égalités $QB = \frac{DF \cdot DF}{DC}$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $DPLEB$, $\frac{DP}{EB} = \frac{DL}{LB}$.

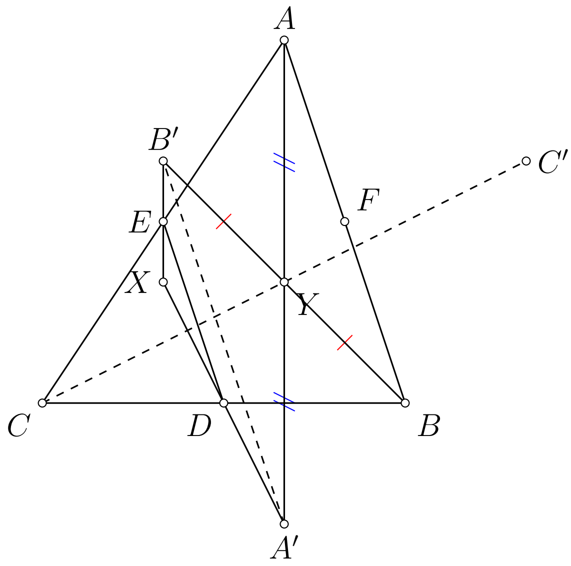
D'après le théorème de thalès dans le papillon $DFLCB$, $\frac{DF}{CB} = \frac{DL}{LB}$. Ainsi, en combinant les deux égalités, $DP = \frac{DF \cdot EB}{BC} = \frac{DF \cdot EC}{CD} = QB$.

On a donc bien $CP = CQ$.

Exercice 7

Soit ABC un triangle et soit D, E et F les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit X un point à l'intérieur du triangle ABC. Soient A', B' et C' les symétriques du point X par rapport respectivement aux points D, E et F. Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourrantes.

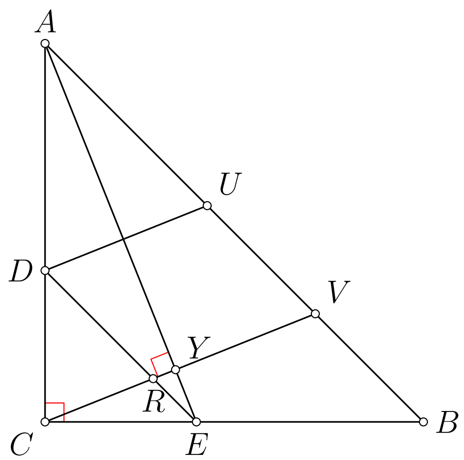
Solution de l'exercice 7



Par le théorème de Thalès, les points D et E étant les milieux des segment $[XA']$ et $[XB']$, les droites (ED) et $(A'B')$ sont parallèles et $EF = \frac{1}{2}A'B'$. Les droites (AB) et $(A'B')$ sont donc parallèles et $AB = A'B'$. Le quadrilatère $ABA'B'$ est donc un parallélogramme. Le point d'intersection des droites (AA') et (BB') est donc le milieu commun des segments $[AA']$ et $[BB']$. On trouve de même pour le point d'intersection des droites (BB') et (CC'). Le point d'intersection est donc commun.

Exercice 8
Soit ABC un triangle rectangle isocèle en C, et D, E deux points sur $[CA]$ et $[CB]$ tel que $CD = CE$. Puis, soit U et V deux points sur $[AB]$ tels que (DU) et (CV) sont perpendiculaires à (AE). Montrer que $UV = VB$.

Solution de l'exercice 8



Commençons par remarquer que les droites (DE) et (AB) sont parallèles d'après le théorème de Thalès. Notons alors $k = \frac{CE}{CB}$.

Soit R le point d'intersection de $[DE]$ et (CV) et Y le point d'intersection des droites (CV) et (AE). On a donc $RE = VB \cdot k$ et $DR = k \cdot AV$.

Puisque le quadrilatère $DRUV$ est un parallélogramme, on a $UV = DR$. On veut donc montrer que $DR = VB$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $REYAV$, $\frac{RE}{AV} = \frac{YE}{YA}$

Donc, on a

$$DR = kAV = kRE \cdot \frac{YA}{YE} = k^2VB \cdot \frac{YA}{YE}$$

Il nous reste donc à montrer que $k^2 \cdot \frac{YA}{YE} = 1$.

Les triangles ACE,CYE et AYC sont semblables donc

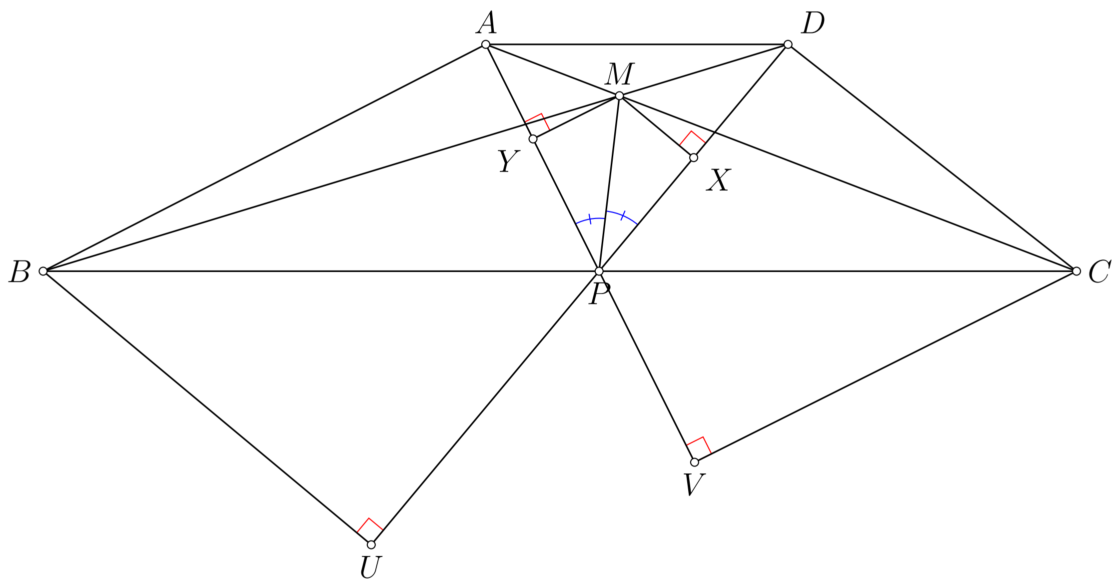
$$k = \frac{CE}{CB} = \frac{YE}{YC} = \frac{YC}{YA}$$

Donc $k^2 \cdot \frac{YA}{YE} = \frac{YE}{YC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{YA}{YE} = 1$, ce qui conclut.

Exercice 9

Soit $ABCD$ trapèze avec $(AD) \parallel (BC)$, M l'intersection de ses diagonales et P un point de $[BC]$ tel que $\widehat{APM} = \widehat{DPM}$. Montrer que la distance de B à (DP) est égale à la distance de C à (AP).

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



Soit U le projeté orthogonal de B sur (PD) et V le projeté orthogonal de C sur (AP). Le but est de montrer que $BU = CV$. Introduisons de plus X et Y, les projetés orthogonaux de M sur (DP) et (AP) respectivement.

Comme

$$\widehat{PXM} = \widehat{PYM} = 90°$$

et

$$\widehat{YPM} = \widehat{XPM}$$

et que les triangles PXM et PYM partagent le côté $[PM]$, ces derniers sont isométriques, d'où $MX = MY$. Il en découle que nous avons gagné si on réussit à montrer que

$$\frac{MX}{BU} = \frac{MY}{CV}$$

Comme les droites (MX) et (BU) sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallélèles. Donc d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{DM}{DB} = \frac{MX}{BU}$$

De même,

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MY}{CV}$$

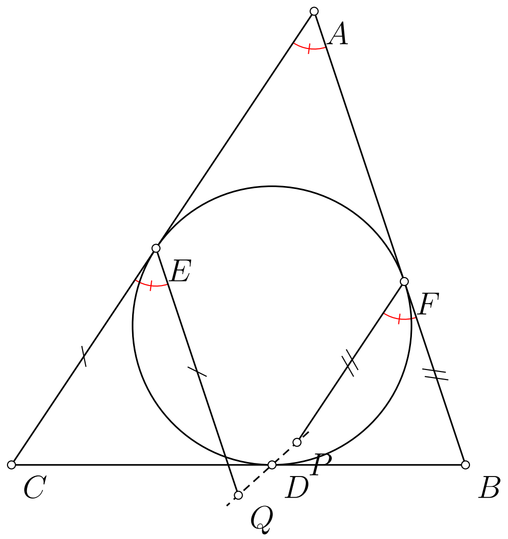
Et on a

$$\frac{AM}{AC} = \frac{DM}{DC}$$

car $(AD) \parallel (BC)$, ce qui conclut.

Exercice 10
Soit ABC un triangle et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit respectivement avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit P un point tel que $PF = FB$, les droites (FP) et (AC) sont parallèles et les points P et C sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Soit Q un point tel que $QE = EC$, les droites (EQ) et (AB) sont parallèles et les points Q et B sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Montrer que les points P, D et Q sont alignés.

Solution de l'exercice 10



Le triangle PFB est isocèle en F et $\widehat{PFB} = \widehat{EAF}$ car les droites (FP) et (AC) sont parallèles. Donc les triangles AEF et PFB sont semblables. De même, on trouve que les triangles QEC, EAF et FPB sont semblables. On déduit que $\widehat{PBF} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{QCE}$

Ainsi, par chasse aux angles,

$$\widehat{PBC} = \widehat{CBA} - \widehat{PBF} = \widehat{CBA} - 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{BCA} + 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

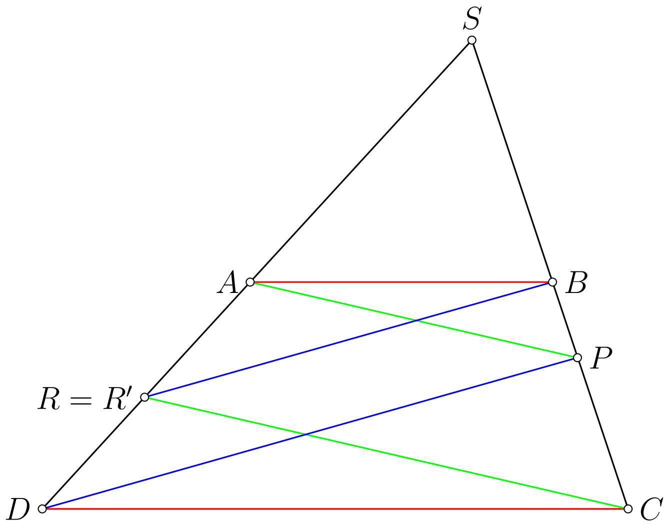
donc les droites (PB) et (CQ) sont parallèles. Puisque

$$\frac{PB}{CQ} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD}$$

d'après la réciproque du théorème de Thalès, les points P, Q et D sont bien alignés.

Exercice 11
Soit $ABCD$ un trapèze avec $AB < CD$ et les droites (AB) et (CD) parallèles. Soit P un point appartenant au segment $[CB]$. La parallèle à le droite (AP) passant par le point C coupe le segment $[AD]$ en le point R et la parallèle à la droite (DP) passant par le point B coupe le segment $[AD]$ en le point R'. Montrer que $R = R'$.

Solution de l'exercice 11



Soit S le point d'intersection des droites (CB) et (AD). Comme les droites (AP) et (RC) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{AS}{RS} = \frac{PS}{CS}$$

soit $RS \cdot PS = AS \cdot CS$.
Comme les droites (DP) et (BR') sont parallèles, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{DS}{R'S} = \frac{PS}{BS}$$

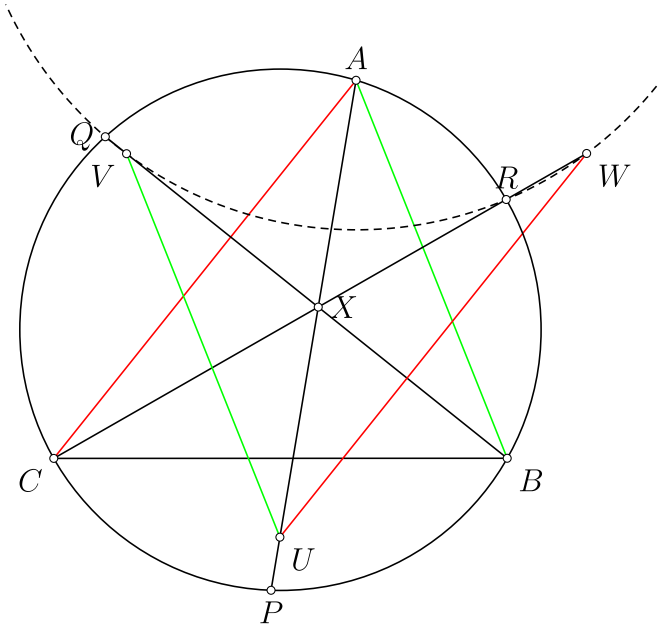
soit $DS \cdot BS = PS \cdot R'S$.
Enfin, les droites (AB) et (CD) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AS}{DS} = \frac{BS}{CS}$$

soit $AS \cdot CS = BS \cdot DS$. On conclut que $PS \cdot RS = PS \cdot R'S$ donc $RS = R'S$ et comme les points S, R et R' sont sur la même droite, on trouve bien $R = R'$.

Exercice 12
Soit ABC un triangle et X un point situé à l'intérieur du triangle ABC. Les droites $(AX), (BX)$ et (CX) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC en les points P, Q et R respectivement. Soit U un point appartenant au segment $[XP]$. Les parallèles à $(AB), (AC)$ passant par U coupent les droites (XQ) et (XR) en les points V et W respectivement. Montrer que les points R, W, V, Q sont cocycliques.

Solution de l'exercice 12



Nous allons traduire les diverses hypothèses en terme d'égalité de rapport.

Puisque les droites (UV) et (AB) sont parallèles, par le théorème de Thalès, $\frac{AX}{UX} = \frac{BX}{VX}$. Puisque les droites (UW) et (AC) sont parallèles, par le théorème de Thalès : $\frac{AX}{UX} = \frac{CX}{WX}$.

On obtient $\frac{CX}{WX} = \frac{BX}{VX}$ soit $\frac{CX}{BX} = \frac{WX}{VX}$. Par puissance du point X par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC, on a aussi $BX \cdot QX = CX \cdot RX$ donc $\frac{CX}{BX} = \frac{QX}{RX}$.

On obtient donc $\frac{WX}{VX} = \frac{QX}{RX}$, ou encore $WX \cdot RX = VX \cdot QX$ ce qui signifie, par réciproque de la puissance d'un point, que les points Q, V, R et W sont cocycliques.

4 THÈME

5 THÈME

6 THÈME

2 Entraînement de mi-parcours

3 Deuxième partie : Arithmétique & Combinatoire

1 Modulos

Critères de divisibilité

Exercice 1
Prouver le critère de divisibilité pour $2, 5, 4, 9, 11$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>
On utilise le fait que $\overline{a_n \dots a_1 a_0}^{10} = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n$.

— 2
$10^n \equiv 0 \mod 2$ pour $n \geq 1$, donc $a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n \equiv a_0 \mod 2$. Donc un entier est divisible par 2 ssi son dernier chiffre l'est.

— 5
$10^n \equiv 0 \mod 5$ pour $n \geq 1$, donc $a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n \equiv a_0 \mod 5$. Donc un entier est divisible par 5 ssi son dernier chiffre l'est.

— 4
$10^n \equiv 0 \mod 2$ pour $n \geq 2$, donc $a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n \equiv a_0 + 10a_1 = \overline{a_1 a_0}^{10}$. Donc un entier est divisible par 4 ssi ses deux derniers chiffres le sont.

— 9
$10 \equiv 1 \mod 9$, donc $10^n \equiv 1^n = 1 \mod 9$ et $a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Donc un entier est divisible par 9 ssi la somme de ses chiffres l'est.

— 11
$10 \equiv -1 \mod 11$, donc $10^n \equiv (-1)^n = 1 \mod 9$ et $a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n \equiv a_0 - a_1 + \cdots \pm a_n$. Donc un entier est divisible par 11 ssi la somme alternée de ses chiffres l'est.

Exercice 2
Montrer que $\overline{a_n \dots a_0}^{10}$ est divisible par 7 (resp. 11, resp. 13) ssi $\overline{a_n \dots a_3}^{10} - \overline{a_2 a_1 a_0}^{10}$ est divisible par 7 (resp. 11, resp. 13).

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>
L'idée est de remarquer que $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ainsi, on peut "transformer" des milliers en des moins unités.

Précisément, $\overline{a_n \dots a_0}^{10} = 1000 \cdot \overline{a_n \dots a_3}^{10} + \overline{a_2 a_1 a_0}^{10} \equiv \mod 7, 11, 13$, ce qui est exactement ce qu'on veut puisque multiplier par -1 ne change pas la divisibilité.

Modulo bash

Exercice 3
Quels sont les entiers x tels que $x^3 \equiv -1[7]$? Quels sont les entiers x tels que $7 \mid x^2 - x + 1$?

Exercice 4
Quelles valeurs prennent x^2 et x^3 modulo 7 ? modulo 13 ? Quel rapport entre p et le nombre de valeurs que prend x^a modulo p ?

Exercice 5
Trouver tous les naturels a, b, c tels que $2^a = 3^b + 6^c$.

Exercice 6
Trouver tous les naturels a, b, c tels que $2^a + 15^b = c^3$.

Exercice 7
Montrer qu'il n'y a pas de solution rationnelle à $x^2 + y^2 = 7$.

Petit Fermat

Exercice 8
Montrer que $n \mid \varphi(2^n - 1)$.

Exercice 9
Montrer que $3n \mid \varphi(8^n - 1)$.

Exercice 10
Quel rapport entre p et le nombre de valeurs que prend x^n modulo p ? Modulo quels p peut-on modulo basher efficacement x^n (càd x^n prend peu de valeurs différentes modulo p) ?

Exercice 11
Trouver toutes les solutions entières de $x^2 + y^2 = 4242$.

Exercice 12
Trouver toutes les solutions entières de $x^3 + y^3 + z^3 = 995$. Attention, elles peuvent être négatives.

Exercice 13
Trouver toutes les solutions entières de $w^5 + x^5 + y^5 + z^5 = 60$.

Exercice 14
Montrer que si $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1687$, alors l'une des variables est divisible par 2 mais pas par 4.

Exercice 15
Calculer 2^{103} modulo 3. Calculer $23^{23^{23^{23}}}$ modulo 29.

Théorème de Wilson

Exercice 16
Montrer l'autre sens du théorème de Wilson : Si $(p-1)! \equiv -1[p]$, alors p est premier.

Solution de l'exercice 3
Réécrivons la condition de modulo comme étant $p \mid (p-1)! + 1$. Supposons que p n'est pas premier. Prenons donc $a \mid p$ avec $1 < a < p$. $a \mid (p-1)! + 1$ et, comme $a \leq p - 1$, $a \mid (p-1)!$. Donc

Exercice 17
Soit a naturel et p premier. Montrer que p divise $(0! + a^0) \cdot (1! + a^1) \cdot \cdots \cdot (p! + a^p)$.

Solution de l'exercice 4
Si $p \mid a$, alors $p \mid p!$ et $p \mid a^p$, donc $p \mid p! + a^p$ et p divise bien le produit.

Si $p \nmid a$, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$. Comme $(p-1)! \equiv -1[p]$, $p \mid (p-1)! + a^{p-1}$ et p divise bien le produit.

2 Invariants, Monovariants, Pavages et Coloriages

Introduction

Le concept d'invariant n'est que rarement utilisé dans des problèmes "statiques", où la situation est immuable. Par contre, certains problèmes sont "dynamiques" : il s'agit de passer d'une configuration initiale à une configuration finale, en respectant certaines règles sur les transformations effectuées. Dans ce cas, un invariant est une quantité que l'on peut associer à chaque état du problème et qui ne varie jamais lorsqu'on applique une des transformations autorisées. Si les quantités associées aux configurations initiale et finale sont différentes, on a alors démontré l'impossibilité de passer de l'une à l'autre.

Exercice 1
On se donne le tableau rempli de signes suivant :

$$\begin{matrix} + + - + \\ - - + + \\ + + + + \\ + - + - \end{matrix}$$

Un coup consiste à choisir une ligne ou une colonne et changer les signes présents dedans. Est-il possible d'arriver en un nombre fini de coups à un tableau rempli de signes $+$?

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>
La parité du nombre de signes $-$ est un invariant. Ce nombre est impair dans la position initiale, on ne peut donc pas atteindre une position qui aurait 0 signe $-$.

De même, il peut arriver qu'une quantité associée à chaque configuration croisse (resp. décroisse) à chaque transformation appliquée. On parle alors de monovariant. Il est bien entendu impossible de parvenir à une configuration où ce monovariant est plus petit (resp. plus grand) que la configuration initiale. De plus, si le monovariant est majoré et augmente d'au moins une certaine quantité non nulle fixée à chaque transformation, on peut conclure que le processus d'application des transformations prend forcément fin.

Exercice 2
Sur un tableau, on écrit n fois le chiffre 1. Une opération consiste à choisir deux nombres a et b écrits au tableau, à les effacer et à écrire $\frac{a+b}{4}$ à la place. Montrer que le nombre écrit au tableau au bout de $n-1$ étapes est supérieur ou égal à $\frac{1}{n}$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>
On peut remarquer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$ (il suffit de tout mettre au même dénominateur et de faire apparaître $(a-b)^2 \geqslant 0$). Dès lors, la somme des inverses des nombres écrits au tableau est décroissante lorsqu'on applique une transformation. Elle vaut n dans la position initiale, donc dans la position finale elle est inférieure à n : le dernier nombre est dès lors supérieur à $\frac{1}{n}$.

Exercice 3
Il y a 2021 mésanges qui nichent sur 120 arbres. Essayant de les déloger, un chasseur maladroit

leur tire dessus. A chaque fois, il manque sa cible mais effraie une mésange qui quitte alors son arbre et se réfugie sur un arbre avec au moins autant de mésanges que son arbre de départ (elle se compte sur ce dernier). Montrer qu'après un certain nombre fini de tirs, toutes les mésanges seront sur le même arbre.

Solution de l'exercice 3
L'ordre lexicographique entre listes dont les éléments font partie d'un ensemble totalement ordonné est défini comme suit. Une liste est toujours plus petite qu'une liste plus longue. Si les listes ont la même longueur, on regarde le premier élément de chaque liste. S'ils sont différents, la liste ayant le plus petit premier élément est la plus petite. Si ils sont égaux, on passe au deuxième élément, et ainsi de suite. Par exemple, si on considère les mots comme des listes de lettres, l'ordre lexicographique entre listes de même longueur correspond à l'ordre du dictionnaire.
Représentons une configuration par la liste du nombre de mésanges sur chaque arbre, triée par ordre croissant. Quand le chasseur tire, un des nombres de la liste diminue de 1 et un nombre situé plus loin dans la liste augmente de 1. Dès lors, la nouvelle liste est strictement plus petite par ordre lexicographique que la première. Comme il n'y a qu'un nombre fini de listes de 120 éléments naturels dont la somme fait 2021, on finira par atteindre en un nombre fini d'étapes la plus petite, qui correspond à avoir toutes les mésanges sur un même arbre.

Parfois, on peut montrer l'impossibilité d'une construction en coloriant la surface sur laquelle elle doit se dérouler. On peut voir le coloriage comme une façon de créer un invariant.

Exercice 4
Sur une grille 2022×2022, on peut bouger un jeton d'une case vers une autre si ces deux cases ont un côté commun. Est-il possible, en partant avec le jeton dans le coin inférieur gauche, d'amener le jeton dans le coin supérieur droit en passant une et une seule fois par toutes les cases ?

Solution de l'exercice 4
En coloriant la grille comme un damier, on voit qu'un déplacement vers une case ayant un côté commun change la couleur de la case sur laquelle on se trouve. De plus, les cases de départ et d'arrivée sont de la même couleur, il faut donc avoir réalisé un nombre pair de mouvements pour passer de l'une à l'autre. Mais si l'on visite toutes les cases de la grille, on aura fait $2018^2 - 1$ déplacements, ce qui est impair, d'où une impossibilité.

Exercices

Exercice 5
Les nombres entiers de 1 à 2018 sont écrits au tableau. Une opération consiste à en choisir deux, les effacer et réécrire sur le tableau la valeur absolue de leur différence. Montrer que le dernier nombre écrit au tableau est impair.

Exercice 6
On a 2018 piles de jetons. Sur la i-ème pile, il y a p_i jetons, où p_i est le i-ème nombre premier. On s'autorise :

— à séparer une pile en deux autres et ajouter un jeton à l'une des deux piles ainsi créées.

— à fusionner deux piles et ajouter un jeton à la pile créée.

Peut-on aboutir à la situation avec 2018 piles de 2018 jetons chacune ?

Exercice 7
Dans l'espace, on part de l'ensemble de 7 sommets d'un cube. On s'autorise à remplacer un point par son symétrique par rapport à un autre point. Peut-on atteindre le huitième sommet de cette façon ?

Exercice 8
On écrit un signe $+$ ou $-$ sur chaque case d'un tableau 8×8. Une opération consiste à choisir un carré 3×3 ou 4×4 et inverser les signes présents dedans. Peut-on toujours atteindre un tableau rempli de $+$?

Exercice 9
Un sol rectangulaire est pavé par des rectangles 4×1 et 2×2. Si l'on casse un des carreaux, peut-on le remplacer par un carreau de l'autre type et repaver le sol ?

Exercice 10
n points du plan sont coloriés en rouge, n autres le sont en bleu. Ces $2n$ points ne sont pas 3 à 3 alignés. Est-il possible de tracer n segments reliant un point rouge à un point bleu, chaque point étant utilisé une seule fois, de manière à ce que deux segments ne s'intersectent jamais ?

Exercice 11
Est-il possible de paver (sur plusieurs couches) un rectangle 5×7 par des trominos en L de manière à ce que chaque case soit recouverte par le même nombre de trominos ?

Exercice 12
Sur une ligne, on écrit 2018 entiers naturels. Ensuite, pour chaque ligne, on écrit en-dessous de chaque entier le nombre de fois qu'il apparaît dans la ligne, créant ainsi une nouvelle ligne en-dessous de la première, sur laquelle on réapplique le processus. Montrer qu'au bout d'un certain temps toutes les lignes qu'on écrit deviennent identiques.

Exercice 13
De combien de manières peut-on paver un damier 10×10 par des tétraminos en T ?

Exercice 14
2009 cartes, ayant chacune un côté bleu et un côté jaune, sont alignées côté bleu sur une table. Deux personnes situées du même côté de la table jouent alors en alternance. Un coup consiste à choisir un bloc de 50 cartes dont la carte la plus à gauche est bleue et à retourner toutes les cartes du bloc. La personne qui ne peut plus jouer perd. Le jeu se termine-t-il forcément ? Si oui, qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 15
Chaque case d'un damier de taille $n \times n$ contient une lampe. Au début, deux lampes situées dans deux coins opposées sont allumées, et les autres sont éteintes. Une opération consiste à choisir une ligne (rangée ou colonne) du damier et à changer l'état de toutes les lampes dans cette ligne.
Avant de commencer les opérations, Alice peut choisir d'allumer individuellement autant de

lampes qu'elle veut. Combien de lampes doit-elle allumer au minimum pour qu'il existe une suite d'opérations après laquelle toutes les lampes sont éteintes ?

Exercice 16
Sur le plan, on part du point $(1, \sqrt{2})$. Quand on est en (x, y), on peut se déplacer en $(x, y+2x)$, $(x, y-2x)$, $(x+2y, y)$ ou $(x-2y, y)$, mais sans revenir immédiatement au point dont on venait. Montrer qu'on ne peut revenir au point de départ.

Exercice 17
Alex et Bobette jouent sur une grille 20×20 où les cases sont carrées et de côté 1. La *distance* entre deux cases est la distance entre leurs centres. Ils jouent à tour de rôle de la manière suivante : Alex met une pierre rouge sur une case, de manière à ce que la distance entre deux cases portant des pierres rouges ne soit jamais $\sqrt{5}$, puis Bobette met une pierre bleue sur la grille, sans restriction. Le jeu s'arrête quand un des deux ne sait plus poser de pierre. Trouver le plus grand K tel qu'Alex peut toujours placer au moins K pierres, quelles que soient les réponses de Bobette.

Exercice 18
Des entiers positifs en nombre fini sont écrits de gauche à droite sur une ligne. Lucie choisit deux nombres voisins x et y tels que x est à gauche de y et $x > y$ et remplace la paire (x, y) par $(x-1, x)$ ou $(y+1, x)$ au choix, puis recommence tant que possible. Montrer qu'elle ne peut continuer indéfiniment.

Exercice 19
Les participants du stage Animath s'appellent $C_1, \ldots, C_n$ et font la file devant le restaurant selon les règles suivantes :

— Les animatheurs choisissent l'ordre initial des participants.

— A chaque étape, les animatheurs choisissent un entier i avec $1 \leqslant i \leqslant n$. Si le participant C_i a au moins i personnes devant lui dans la queue, il paie 1 euro aux animatheurs et avance de i places. Sinon, le restaurant ouvre et le processus se termine.

Montrer que le processus se termine forcément et déterminer la quantité maximale d'argent que les animatheurs peuvent extorquer aux participants.

Exercice 20
Il y a une lampe sur chaque case d'une grille 5×5. Lorsqu'on allume ou éteint une lampe, ses voisines par un côté changent également d'état. Initialement, toutes les lampes sont éteintes. Martin arrive et active certains interrupteurs. Au final, une seule lampe est allumée. Quelles sont ses positions possibles ?

Solutions

Solution de l'exercice 5
A chaque étape, la somme des nombres impliqués dans la transformation passe de $a+b$ à $a-b$ ou $b-a$, elle est donc modifiée d'une quantité paire ($2b$ ou $2a$ respectivement). La parité de la somme des nombres écrits au tableau est donc un invariant. Dans la situation initiale, elle vaut $\frac{2018 \cdot 2019}{2} = 1009 \cdot 2019$ qui est impair. Après 2017 étapes, il ne reste plus qu'un nombre au tableau, qui doit être impair.

Solution de l'exercice 6

En traitant les diverses possibilités de mouvement, on remarque que la parité du nombre de piles de hauteur paire reste inchangée. Comme ce nombre est impair dans la position initiale et pair dans la position à atteindre, il est impossible d'aboutir à cette dernière.

Solution de l'exercice 7

Plaçons-nous dans un repère orthonormé où les sept points du cube ont pour coordonnées $(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1)$ et $(1,1,0)$. Le symétrique du point (a,b,c) par rapport au point (a',b',c') est le point $(2a'-a, 2b'-b, 2c'-c)$. En particulier, la parité des coordonnées est invariante par ces symétries. On ne peut donc atteindre le point $(1,1,1)$ puisque ses trois coordonnées sont impaires.

Solution de l'exercice 8

Ici, la parité du nombre de signes $-$ n'est plus un invariant, mais on peut remarquer que la parité du nombre de signes $-$ en dehors des troisième et sixième colonnes en est un. La configuration demandée n'est donc pas toujours atteignable.

Solution de l'exercice 9

On colorie le sol en répétant le motif

$$\begin{array}{l} ABAB\dots \\ CDCD\dots \\ ABAB\dots \\ CDCD\dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

Un rectangle 2×2 couvre une case de chaque couleur, tandis qu'un rectangle 1×4 en couvre 2 d'une couleur et 2 d'une autre. Ils ne sont donc pas interchangeables. (La parité du nombre de cases de chaque couleur pavées doit rester constante, or elle ne le sera pas ici).

Solution de l'exercice 10

Si deux segments AB et CD, avec A et C rouges, ont une intersection, alors les segments AD et CB n'en ont pas et la somme de leurs longueurs est plus petite que celle des longueurs de AB et CD. Il n'y a que $n!$ manières d'apparier les points. En prenant celle où la somme des longueurs des segments est la plus petite, et vu la remarque précédente, il n'y aura aucune intersection. Cet exercice illustre le lien entre les méthodes par monovariant et les méthodes à base d'extremum.

Solution de l'exercice 11

Si on réutilise le coloriage de l'exercice 19 en plaçant un A dans le coin en haut à gauche, on a 12 A sur le rectangle, mais chaque tromino ne peut recouvrir qu'un A. Si chaque case est recouverte k fois, il faut utiliser au moins $12k$ trominos pour recouvrir tous les A, mais alors on a un total d'au moins $36k$ cases recouvertes et non $35k$. Il n'est donc pas possible de réaliser un tel pavage.

Solution de l'exercice 12

Considérons un nombre a en dehors de la première ligne. Il représente le nombre d'occurrences d'un des nombres de la ligne du dessus. Ce dernier est donc présent a fois dans la ligne du dessus, et a est présent au moins a fois dans sa ligne. Dès lors, si on regarde une colonne, tous les nombres à l'exception du premier sont triés par ordre croissant. Comme de plus la somme des nombres d'une ligne autre que la première fait 2018, toutes les lignes deviennent identiques au bout d'un certain temps (sinon, la somme de chaque ligne augmenterait de 1 autant de fois que voulu, tout en restant inférieure à 2018).

Solution de l'exercice 13

Cela est impossible. En coloriant le damier comme un damier, chaque tétramino couvre 3 cases d'une couleur et une de l'autre. En notant n le nombre de tétraminos couvrant 3 cases noires et b celui de tétraminos couvrant 3 cases blanches, on a

$$\begin{aligned} 3n + b &= 50 \\ n + b &= 25 \end{aligned}$$

En soustrayant, on a $2n = 25$ ce qui est impossible.

Solution de l'exercice 14

Ecrivons un 1 sur chaque face bleue et un 0 sur chaque face jaune. A toute configuration est alors associé un nombre écrit en binaire et ayant 2009 chiffres. Quand on fait un coup, on modifie 50 chiffres consécutifs, dont le plus grand passe de 1 à 0. Le nombre associé à la position baisse donc strictement. Puisqu'il ne peut être négatif, la partie finit par s'arrêter.
Pour savoir qui gagne, considérons les cartes en positon $50k$ à partir de la droite, et le nombre de cartes bleues parmi celles-ci. Au début, il est de 40, et il change de 1 à chaque coup puisqu'exactement une de ces cartes est retournée à chaque coup. Dès lors, quand c'est au tour du second joueur, le nombre de cartes bleues parmi celles considérées est impair, donc non nul. Le second joueur a donc toujours quelque chose à jouer, et ne peut donc perdre. Puisque le jeu se finit, le second joueur gagne toujours.

Solution de l'exercice 15

Notons déjà qu'il existe une solution en allumant $2n-4$ lampes : si l'on numérote les lignes et les colonnes de façon à ce que les lampes en cases $(1,1)$ et (n,n) soient initialement allumées, il suffit d'allumer en plus toutes les lampes en cases $(m,1)$ ou (n,m) avec m entre 2 et $n-1$, puis d'appliquer les opérations à la colonne 1 et à la ligne n. Montrons maintenant que $2n-4$ est la solution optimale.

On remarque que si l'on choisit n'importe quel rectangle de cases du damier, la parité du nombre de lampes allumées parmi les quatre coins de ce rectangle est un invariant. Dès lors, dans tout rectangle ayant pour coin une des cases $(1,1)$ ou (n,n), on doit allumer au moins un autre des coins pour espérer qu'une suite d'opérations demandée existe.

Nous allons donc exhiber $2n-4$ rectangles dont un des coins est une des cases initialement allumées et dont les coins sont disjoints. Ainsi, on aura montré qu'il faut allumer au moins $2n-4$ cases. Les $2n-4$ rectangles annoncés sont les suivants :

— Les $n-2$ rectangles dont les coins sont $(1,1), (1,m), (m,1)$ et (m,m), pour m entre 2 et $n-1$.

— Les $n-3$ rectangles dont les coins sont $(m,m-1), (m,n), (n,m-1)$ et (n,n) pour m entre 3 et $n-1$

— Le rectangle de coins $(2,n-1), (2,n), (n,n-1)$ et (n,n).

Ceci conclut.

Solution de l'exercice 16

Donnons des noms aux différentes transformations : partant de (x,y), appelons N le passage

à $(x, y+2x)$, S pour $(x, y-2x)$, E pour $(x+2y, y)$ et O pour $(x-2y, y)$. La règle de ne pas revenir immédiatement en arrière signifie que l'on ne peut pas faire un déplacement N puis S, ou E puis O (et de même dans l'autre sens). On peut remarquer que les coordonnées du point sont toujours de la forme $(a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2})$. De plus, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, a et c sont indépendants de b et d. On peut donc montrer que partant de $(1,0)$ et suivant les mêmes règles, on ne peut revenir au point de départ, et ce sera suffisant.
Les mouvements E et O n'ont aucun effet au point de départ, toute séquence de coups peut donc se réécrire a_1N+a_2E+a_3N+$\ldots$, avec $a_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, en notant kN le mouvement N répété k fois, si $k>0$, et S répété k fois si $k<0$, et de même pour E/O. Le mouvement kN correspond à passer de (x,y) à $(x, y+2kx)$ tandis que kE correspond à passer à $(x+2ky, y)$. On peut montrer par récurrence qu'après un mouvement kN on a $|c|>|a|$, et $|a|>|c|$ après un mouvement kE. Dès lors, la distance à l'origine du point (a,c) est strictement croissante (puisqu'on augmente la valeur absolue de la coordonnée la plus petite en valeur absolue, et que l'autre reste inchangée), et il est donc impossible de revenir au point de départ.

Solution de l'exercice 17
Montrons que $K=100$. Alex peut toujours poser 100 pierres : il suffit qu'il colorie la grille en damier et qu'il joue toujours sur une case blanche. En effet, deux cases blanches ne sont jamais à distance $\sqrt{5}$ l'une de l'autre. Montrons que Bobette peut empêcher Alex de poser plus de 100 pierres : on pave la grille par des copies du rectangle

$$\begin{array}{c} ACBD \\ BDAC \\ CADB \\ DBCA \end{array}$$

Si Alex joue sur une case, Bobette joue dans le même rectangle, sur la case de la même couleur qui n'est pas à distance $\sqrt{5}$ de la première. Ainsi, Alex est privé des deux autres cases de même couleur du même rectangle. Au final, Alex ne peut recouvrir plus d'un quart de la grille qui comporte 400 cases.

Solution de l'exercice 18
On peut remarquer que le maximum des entiers reste constant, et que leur somme augmente sauf si $y=x-1$ et qu'on remplace (x,y) par $(x-1,x)$. De plus, il n'est pas possible de faire ce coup indéfiniment, puisque si l'on considère le nombre de paires "inversées" (x est à gauche de y et $x>y$), il diminue de 1 à chaque coup de cette forme. Dès lors, si Lucie pouvait continuer indéfiniment, elle serait forcée d'augmenter régulièrement la somme des nombres de la liste, mais cette somme ne peut dépasser le maximum de la liste multiplié par sa taille, ce qui est constant.

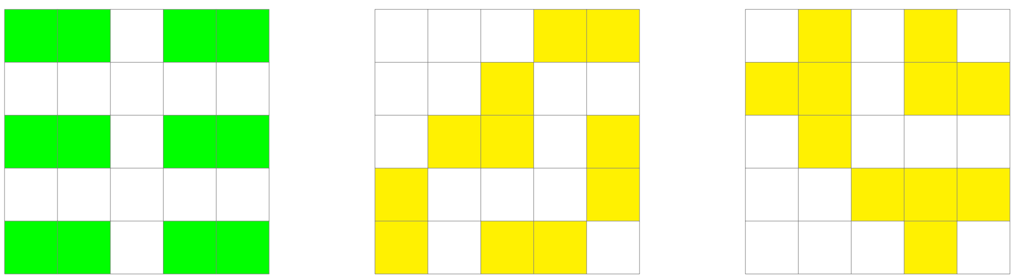
Solution de l'exercice 19
Tout d'abord, montrons par récurrence que les animatheurs peuvent récolter 2^n-n-1 euros. La construction est la suivante :
Les participants sont placés dans l'ordre inverse (C_n est en premier, puis C_{n-1}, etc). Dans un premier temps, les animatheurs remettent en ordre croissant les $n-1$ derniers élèves de la file, de la manière qui leur fait gagner le plus d'argent. On a donc l'ordre $C_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$. Ensuite, ils font avancer une fois chaque participant de 1 à $n-1$. On a donc l'ordre

$C_{n-1}, \ldots, C_2, C_1, C_n$. Enfin, ils remettent à nouveau les $n-1$ premiers éléments de la file dans l'ordre croissant. En notant S_n la quantité d'argent obtenue sur une file de n participants par cette méthode, on a $S_n = 2S_{n-1} + n - 1$ et $S_1 = 0$. On a donc bien $S_n = 2^n - n - 1$.
Montrons à présent qu'on ne peut récolter plus de $2^n - n - 1$ euros :
Si C_i avance, il passe devant i autres participants. En particulier, il passe devant un participant qui a un numéro supérieur au sien. Dès lors, à une configuration x de la file, associons la quantité

$$Q(x) = \sum_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ i<j}} 2^i \cdot \delta_{ij} \text{ avec } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est avant } j \text{ dans la file} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(il s'agit d'un comptage pondéré des paires de participants qui sont dans l'ordre inverse). Lorsque les animatheurs font avancer un participant j, il passe devant un participant avec un numéro supérieur, rétablissant ainsi l'ordre "correct" d'une paire dont j est le plus petit élément, donc Q baisse d'au moins 2^j. Il peut arriver que j passe devant des participants au numéro inférieur, mais Q ne peut de toutes façons augmenter de plus de $\sum_{i=1}^{j-1} 2^i = 2^j - 2$. Q baisse donc d'au moins 2 à chaque étape. D'autre part, Q est maximal lorsque toutes les paires sont inversées, et vaut alors $\sum_{i=1}^{n}(n-i)2^i = 2(2^n - n - 1)$, et ne peut être négatif. On ne peut donc pas faire avancer un candidat plus de $2^n - n - 1$ fois, et ce nombre est bien la somme maximale que les animatheurs peuvent percevoir.

Solution de l'exercice 20
Sur la première figure ci-dessus, le parité du nombre d'ampoules vertes allumés est invariante. Il en est bien sûr de même par rotation de $90°$. Ainsi, seules les ampoules du centre et entre le centre et les coins sont des solutions possibles. En appuyant sur les interrupteurs jaunes dans la deuxième figure, seule l'ampoule du centre est allumée. De même dans la troisième figure, seule l'ampoule entre le centre et le coin supérieur droit sera allumée, le reste s'en déduit par rotation.



3 THÈME

4 THÈME

5 THÈME

6 THÈME

4 Entraînement de fin de parcours

5 Derniers cours

1 THÈME

2 THÈME

V. Groupe C

Contenu de cette partie

1 Première partie : Arithmétique & Combinatoire

1 Double comptage

Ce cours est inspiré du livre "Olympiad Combinatorics" de Pranav A. Sriram, du cours "Double Counting" de Yufei Zhao, et des polycopiés des années précédentes, notamment du cours de Colin de 2019.

Commençons par un problème introductif :

Exercice 1
À Valbonne, n problèmes ont été accrochés sur un mur. Chacun des m stagiaires a résolu au moins $\frac{n}{2}$ problèmes. Montrer qu'il existe un problème qui a été résolu par au moins $\frac{m}{2}$ stagiaires.

Solution de l'exercice 1
Notons p_i le nombre de problèmes résolus par le i-ème stagiaire, et s_j le nombre de stagiaires qui ont résolu le j-ème problème. Considérons la quantité Q, qui est le nombre total de résolutions. On peut exprimer Q de deux manières différentes :

$$Q = \sum_{i=1}^{m} p_i$$
$$Q = \sum_{j=1}^{n} s_j$$

En utilisant les informations données par le problème, on trouve une inégalité sur Q :

$$Q = \sum_{i=1}^{m} p_i \geqslant \frac{nm}{2}$$

Puis, en exprimant Q de l'autre manière, on obtient l'inégalité :

$$Q = \sum_{j=1}^{n} s_j \geqslant \frac{nm}{2}$$

D'où l'on déduit que l'un des s_j vaut au moins $\frac{m}{2}$.

Le principe du double-comptage est alors le suivant :

— On trouve une quantité Q que l'on peut exprimer de deux manières différentes.

— On utilise les données du problème pour prouver des (in)égalités sur les deux expressions différentes.

— On relie les (in)égalités trouvées sur les deux expressions via Q.

Cela permet de transformer un problème avec des objets combinatoires complexes en (in)égalités plus simples à manipuler. La difficulté de cette technique est souvent de trouver la quantité Q.

Géométrie combinatoire

Regardons maintenant d'autres applications du double-comptage à la géométrie combinatoire.

Exercice 2 (Iran 2010)
Soit S un ensemble de n points dans le plan tel que trois points de S ne soient jamais sur une même droite. Montrez que le nombre de triangles d'aire 1 dont les trois sommets sont dans S est d'au plus :

$$\frac{2n(n-1)}{3}$$

Solution de l'exercice 2
Soit Q la quantité qui compte le nombre de triplets $(X, Y, Z) \in S^3$ tels que XYZ soit d'aire 1. Le nombre de triangles d'aire 1 vaut exactement $\frac{Q}{6}$, car un triangle XYZ d'aire 1 est compté 6 fois, une fois pour chacun des $3!$ ordres possibles sur X, Y et Z.

Si l'on fixe X, Y, les points Z tels que l'aire de XYZ soit 1 sont situés sur deux droites parallèles à (XY). Comme chacune de ces droites peut contenir au plus 2 points, il existe au plus 4 points Z de S qui conviennent. On obtient donc :

$$Q \leqslant 4n(n-1)$$

la borne demandée en découle.

Exercice 3 (IMO 1987)
Soit k un entier naturel. Soit S un ensemble de n points dans le plan tel que :

— trois points de S ne soient jamais sur une même droite

— pour tout point P de S, il existe un réel r tel qu'il y ait au moins k points à distance r de P.

Montrez que :

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

Solution de l'exercice 3
Soit Q la quantité qui compte le nombre de triplets $(X, Y, Z) \in S^3$ tels que X, Y et Z soient distincts et $XY = YZ$.

D'une part, si l'on fixe X et Z, les points Y qui conviennent se trouvent sur la médiatrice de $[XZ]$, sur laquelle il y a au plus 2 points, car 3 points ne sont jamais alignés. On obtient donc $Q \leqslant 2n(n-1)$.

D'autre part, si l'on fixe Y, si r est tel qu'il y ait au moins k points à distance r de P, il suffit de prendre X et Z deux points distincts à distance r de Y pour avoir la propriété recherchée. Il y a donc au moins $k(k-1)$ paires (X, Z) qui conviennent. On obtient donc $Q \geqslant nk(k-1)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} nk(k-1) &\leqslant 2n(n-1) \\ k(k-1) &\leqslant 2(n-1) \\ (k-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} &\leqslant 2(n-1) \\ (k-\frac{1}{2})^2 &< 2n \\ k &< \frac{1}{2} + \sqrt{2n} \end{aligned}$$

Graphes

Souvent, on ne travaille pas tel quel sur un problème de combinatoire, on commence par représenter ce problème sous une forme abstraite, et l'on travaille sur celle-ci. La plupart des problèmes utilisent un nombre restreint de ces formes abstraites. En étudiant ces quelques formes, on peut s'y habituer, et généraliser une astuce d'un exercice à de nombreux autres. Le graphe est l'une de ces formes.

Un graphe est constitué d'un ensemble d'objets, que l'on appelle sommets, qui sont mis en relations deux par deux par ce qu'on appelle des arrêtes. On présente souvent un graphe de manière "graphique", en représentant les sommets par des points, et les arrêtes par des courbes qui relient ces points.

Exercice 4 (Indian TST 2001)
Considérons un graphe à n sommets et m arrêtes sans 4-cycle, montrez que :

$$m \leqslant \frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})$$

Solution de l'exercice 4
Soit Q la quantité qui compte le nombre de triplets (x, y, z) de sommets tels que x, y et z soient distincts, et tels que x et z soient reliés à y.

D'une part, si on fixe x et z, il n'y a qu'un seul y qui peut convenir, vu qu'il n'y a pas de 4-cycle, d'où :

$$Q \leqslant n(n-1)$$

D'autre part, si on fixe y, alors il y a exactement $d_y(d_y-1)$ manières de choisir une paire (x, z) qui convient, où d_y désigne le degré de y, d'où :

$$\begin{aligned} Q &= \sum_y d_y(d_y-1) \\ &= \sum_y d_y^2 - d_y \\ &\geqslant \frac{\left(\sum_y d_y\right)^2}{n} - \sum_y d_y \\ &= \frac{4m^2}{n} - 2m \end{aligned}$$

Où l'on a utilisé l'inégalité des "mauvais élèves". On en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{4m^2}{n} - 2m &\leqslant n(n-1) \\
m^2 - m\frac{n}{2} &\leqslant \frac{n^2(n-1)}{4} \\
\left(m - \frac{n}{4}\right)^2 &\leqslant \frac{n^2}{16} + \frac{n^2(n-1)}{4} \\
m &\leqslant \frac{n}{4} + \frac{n}{4}\sqrt{4n-3} = \frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})
\end{aligned}$$

Les triplets utilisés dans l'exercice précédent sont appelés des "coudes" ou des "V", ils apparaissent dans de nombreux problèmes de double-comptage. Nous les retrouverons sur la partie sur les graphes bipartis.

Exercice 5 (APMO 1989)
Considérons un graphe à n sommets et m arrêtes. Soit T le nombre de triangles de ce graphe. Montrez que :

$$T \geqslant \frac{m(4m-n^2)}{3n}$$

Solution de l'exercice 5
Considérons la quantité Q qui compte le nombre de triplets (x, y, z) de sommets qui sont tous les trois reliés deux à deux.

D'une part, Q vaut au moins $6T$, car chaque triangle donne $3!$ triplets de points, un pour chaque manière d'ordonner les sommets du triangle.

D'autre part, si on fixe (x, y), tel que x et y soit reliés, il y a au moins :

$$(d_x - 1) + (d_y - 1) - (n-2) = d_x + d_y - n$$

manières de choisir un z qui convient, d'où :

$$6T \geqslant \sum_{(x,y), x\sim y} d_x + d_y - n = 2\left(\sum_x d_x^2\right) - 2nm \geqslant \frac{8m^2}{n} - 2nm$$

D'où :

$$T \geqslant \frac{m(4m-n^2)}{3n}$$

En fixant $T = 0$, on obtient :

$$m \leqslant \frac{n^2}{4}$$

Il s'agit du théorème de Mantel.

Ce dernier trouve sa généralisation dans le théorème de Turàn :

Théorème 1.
Soit $k \geqslant 3$ un entier naturel, considérons un graphe à n sommets et m arrêtes sans k-clique. Alors :

$$m \leqslant \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)$$

Graphes bipartis

Dans certains problèmes, on nous donne deux types d'objets qui sont mis en relation, par exemple des éléments et des ensembles, pour la relation d'appartenance, ou, comme dans le problème introductif, des stagiaires et des problèmes, qui sont mis en relation par "résolution".

On peut représenter ces problèmes par un graphe biparti, c'est à dire un graphe dont on peut partitionner les sommets en deux ensembles X et Y, tels que deux sommets de X, ou deux sommets de Y, ne soient jamais en relation.

Exercice 6 (Lemme de Corradi)
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des sous-ensembles à r éléments d'un ensemble X, tels que $|A_i \cap A_j| \leqslant k$ pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Montrez que :

$$|X| \geqslant \frac{nr^2}{r + (n-1)k}$$

Solution de l'exercice 6
Notons Q le nombre de triplets (i, j, z), où $i \neq j$ et $z \in X$ appartient à A_i et A_j.

D'une part, si on fixe i et j, on a au plus k éléments de X qui peuvent convenir pour z, d'où :

$$Q \leqslant n(n-1)k$$

D'autre part, si on note d_z le nombre de sous-ensembles qui contiennent l'élément z, on a :

$$Q = \sum_z d_z(d_z - 1)$$

et :

$$\sum_z d_z = \sum_i |A_i| = nr$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} Q &= \left(\sum_z d_z^2\right) - nr \\ &\geqslant \frac{(nr)^2}{|X|} - nr \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité des mauvais élèves.

Finalement :

$$\begin{aligned} n(n-1)k &\geqslant \frac{(nr)^2}{|X|} - nr \\ r + (n-1)k &\geqslant \frac{nr^2}{|X|} \\ |X| &\geqslant \frac{nr^2}{r + (n-1)k} \end{aligned}$$

De manière générale, lorsqu'on a de l'information sur des intersections d'ensembles, il est intéressant de compter des objets de type (ensemble, ensemble, élément). Regardons un autre exemple de cette idée :

Exercice 7 (P2 IMO 1998)
Dans une compétition, il y a a élèves, et b juges, où $b \geqslant 3$ est un entier impair. Chaque juge donne son jugement, **passe** ou **échoue**, sur chaque élève. Supposons que k est un entier tel que pour chaque paire de juges, leurs verdicts coïncident pour au plus k élèves. Prouvez que :

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$$

Solution de l'exercice 7
Soit Q la quantité qui compte le nombre de triplets (J_1, J_2, E), où J_1 et J_2 sont deux juges qui ont donné le même verdict à l'élève E.

Si on fixe J_1 et J_2, alors d'après l'énoncé, au plus k élèves peuvent convenir pour E, d'où :

$$Q \leqslant b(b-1)k$$

Si on fixe un élève E, et qu'on note p le nombre de juges qui ont donné le verdict **passe** à E, il y a exactement :

$$p(p-1) + (b-p)(b-p-1)$$

paires de juges qui peuvent convenir, or :

$$p(p-1) + (b-p)(b-p-1) \geqslant \frac{b-1}{2}\frac{b-3}{2} + \frac{b+1}{2}\frac{b-1}{2} = \frac{(b-1)^2}{2}$$

par convexité, d'où :

$$Q \geqslant a\frac{(b-1)^2}{2}$$

On en déduit :

$$b(b-1)k \geqslant a\frac{(b-1)^2}{2}$$
$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$$

Exercice 8 (Iran 1999)
Soient $n \geqslant 2$ cercles de rayon 1 dans le plan, tels que deux d'entre eux ne sont jamais tangents, et tel que le sous-ensemble du plan formé par l'union de tous les cercles soit connexe.

Soit S l'ensemble des points qui appartiennent à au moins deux cercles. Montrez que $|S| \geqslant n$.

Solution de l'exercice 8
Considérons le graphe biparti dont X est l'ensemble des cercles, $Y = S$, et tel qu'un cercle de

X est relié à un point de Y si le second se situe sur le premier. On a :

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{y \in Y} 1 \\ &= \sum_{(x,y), x\sim y} \frac{1}{d_y} \\ &\geqslant \sum_{(x,y), x\sim y} \frac{1}{d_x} \\ &= \sum_{x \in X} 1 = n \end{aligned}$$

En effet, si y est un point sur le cercle x, chaque autre cercle passant par y donne un nouveau point de S sur x, d'où $d_x \geqslant d_y$.

2 THÈME

3 THÈME

4 TD - Modulo Bashing

Premiers exercices

Exercice 1
Trouver tous les entiers n strictement positifs tels que $1! + 2! + \ldots + n!$ soit un carré parfait.

Exercice 2
Trouver tous les (x, y) entiers positifs tels que $x^2 = y^2 + 7y + 6$.

Exercice 3
Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 = y^5 + 7$.
(Indication : Regarder modulo un nombre premier p à conjecturer avec Fermat.)

Exercice 4
Montrer que si $n \geq 2$ divise $2^n + 1$, alors n est un multiple de 3.

Exercice 5
Trouver tous les entiers n tels que $n^3 - 3n^2 + n + 2$ soit une puissance de 5.

Encore plus d'exercices

Exercice 6
Trouver tous les triplets d'entiers naturels (x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$.

Exercice 7
Trouver tous les couples d'entiers positifs (a, b) tels que $|3^a - 2^b| = 1$

Exercice 8
Trouver tous les couples de nombres premiers (p, q) tels que $p \mid 5^q + 1$ et $q \mid 5^p + 1$.

Exercice 9
Trouver tous les entiers x tels que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ est un carré parfait.

Exercice 10
Trouver tous les entiers positifs a, b, c tels que $2^a 3^b + 9 = c^2$

Exercice 11
Soient n et m deux entiers strictement positifs. Montrer que $5^m + 5^n$ s'écrit comme une somme de deux carres si et seulement si n et m ont même parité.

Exercice 12
Si p est un nombre premier, montrer que $7p + 3^p - 4$ n'est pas un carré.

Plus exotique...

Exercice 13
Soient $a_1, ..., a_n \in \{-1, 1\}$ tels que : $a_1 a_2 + a_2 a_3 + ... + a_{n-1} a_n + a_n a_1 = 0$. Montrer que $4 \mid n$.

Exercice 14
Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer qu'il existe un multiple de n dont la somme des chiffres vaut n.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Si $n \geqslant 5$, alors $1! + 2! + \ldots + n! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 \equiv 3[5]$. Or, modulo 5, on a :

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

.
Ainsi, $n \leqslant 5$. En testant manuellement, on trouve que seuls $n = 1$ et $n = 3$ conviennent.

Solution de l'exercice 2
Soit (x, y) une éventuelle solution. Pour $y > 3$, on a $(y+3)^2 = y^2 + 6y + 9 < y^2 + 7y + 6 = x^2 < y^2 + 8y + 16 = (y+4)^2$, absurde. Donc $y \in$ '$\{0; 1; 2.3\}$. En testant les trois cas, seul $y = 3$ donne un carré parfait ($x = 6$).

La seule solution est donc $(6, 3)$.

Solution de l'exercice 3
On travaille modulo $p = 2 \cdot 5 + 1 = 11$ qui est premier et on a :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
x^5	0	1	10	1	1	1	10	10	10	1	10

Ainsi, il n'y a aucune solution possible.

Explication : Après s'être convaincu qu'on ne trouverait pas de solutuion, on choisit p premier de manière à limiter le nombre de valeurs que prennent les restes des x^2 et des x^5 modulo p.

On remarque plus généralement que si q premier ne divise pas $p - 1$, alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \; x^q \equiv y^q[p] \Longrightarrow x \equiv y[p]$$

donc $x \mapsto x^q$ est injectif, donc bijectif dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$! C'est pourquoi on choisit p tel que $p-1$ est divisible par 2 et 5, le plus petit possible pour limiter les cas à tester.

Solution de l'exercice 4

Comme $n \geq 2$, considérons un de ses diviseurs premiers p. Alors $2^n \equiv -1[p]$ donc $2^{2n} \equiv 1[p]$. On en déduit que p divise $2^{2n}-1 \wedge 2^{p-1}-1$ par petit Fermat. Un lemme classique (quon va redémontrer plus tard) garantit que p divise $2^{(2n)\wedge(p-1)}-1$. Supposons alors que p est le plus petit diviseur premier de n, de sorte que $p-1 \wedge n = 1$. Alors $p \mid 2^2-1 = 3$ d'où $p = 3$.

Solution de l'exercice 5

On a alors : $(n-2)(n^2-n-1) = 5^a$. Ainsi, on a : $n-2 = 5^x$ et $n^2-n-1 = 5^y$. Il suit $5^y - 5^{2x} - 3 \cdot 5^x = 1$. Donc, si $x, y \geqslant 1$ alors $0 \equiv 1[5]$, ce qui est absurde. Donc $x = 0$ ou $y = 0$. Si $x = 0$, alors $y = 1$, ce qui donne $n = 3$. Si $y = 0$, alors $5^{2x} + 3 \cdot 5^x = 0$, ce qui est absurde. La seule solution est ainsi $n = 3$.

Solution de l'exercice 6

On suppose $z \geqslant 1$, comme $7 \mid 2016$, $x^2 + y^2 \equiv 0[7]$. Or, modulo 7, on a :

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

Ainsi, le seul cas possible est $x \equiv y \equiv 0[7]$. On a alors $x = 7a, y = 7b$. Il suit : $7(a^2 + b^2) = 11 + 3 \cdot 288 \cdot 2016^{z-1}$. Si, $z \geqslant 2$, alors la partie de droite ne serait pas divisible par 7. Donc, $z = 1$. On a alors : $7(a^2+b^2) = 11 + 3 \cdot 288 = 875$, donc $a^2 + b^2 = 125$, donc nécessairement, $a, b < 12$. On trouve manuellement : $\{a, b\} \in \{\{11, 2\}, \{10, 5\}\}$. Ce qui donne $(x, y, z) \in \{(77, 14, 1), (14, 77, 1), (70, 35, 1), (35, 70, 1)\}$. Sinon, on a $z = 0$, et alors $x^2 + y^2 = 80$, donc $x, y < 9$. On teste manuellement et on obtient comme autres solutions : $(x, y, z) \in \{(8, 4, 0), (4, 8, 0)\}$.

Solution de l'exercice 7

On fait une disjonction de cas.

Premier cas : $3^a - 2^b = 1$. On a donc : $-(-1)^b \equiv 1[3]$, d'où $b \equiv 1[2]$. Ainsi, avec $b = 2c+1$, $3^a - 2 \cdot 4^c = 1$. Si $c \geqslant 1$, alors $3^a \equiv 1[8]$, donc $a = 2d$. Il suit : $3^{2d} - 2^{2b+1} = 1$. Ainsi : $(3^d-1)(3^d+1) = 2^{2b+1}$. Il suit qu'il existe x, y tels que $x + y = 2b+1$ et $3^d - 1 = 2^x$ et $3^d + 1 = 2^y$. Donc $2^x + 2 = 2^y$. Si $x \geqslant 2$, alors $2^y \equiv 2[4]$ mais $2^y \geqslant 4$, ce qui est absurde. D'où $x \in \{0, 1\}$. Un rapide calcul mène à $x = 1$ et $y = 2$, il suit $b = 1$ et $d = 1$ soit : $(a, b) = (2, 3)$. Sinon, $c = 0$, et alors, $3^a = 3$, d'où $a = 1$. Donc $(a, b) = (1, 1)$ est une autre solution.

Deuxième cas : $2^b - 3^a = 1$. On a donc, si $a \geqslant 1$, $(-1)^b \equiv 1[3]$, donc $b = 2c$, ainsi, $2^{2c} - 3^a = 1$. Donc $(2^c+1)(2^c-1) = 3^a$. Donc $2^c - 1 = 3^x$ et $2^c + 1 = 3^y$ avec $x + y = a$. Il suit, $3^x + 2 = 3^y$. Si $y \geqslant 1$, alors $x = 0$, donc $y = 1$. Sinon, $y = 0$, ce qui est impossible. Donc, on a $(a, b) = (1, 2)$. Dans le dernier cas, $a = 0$, et ainsi, $b = 1$: on a comme autre solution $(a, b) = (0, 1)$

Solution de l'exercice 8

On se donne une solution (p, q) et on suppose $q \leq p$ sans perte de généralité. Alors $5^p \equiv -1[q]$ donc $5^{2p} \equiv 1[q]$: l'ordre ω de 5 modulo q divise donc $2p$.

- Si $\omega = 1$, alors $q = 2$, donc $p \mid 5^2 + 1 = 26$: $p \in \{2; 13\}$.
- Si $\omega = 2$, alors $q \mid 5^2 - 1$ mais pas $5 - 1$ donc $q = 3$, puis $p \mid 126$ donc $p \in \{3; 7\}$.
- Si $\omega = p$ ou $\omega = 2p$, par le petit théorème de Fermat, $p \mid q-1$ (ou même $2p \mid q-1$) donc $p \leq q-1 < q$, absurde.

On vérifie aisément que toutes ces solutions conviennent ainsi que leur permutation.

Solution de l'exercice 9

On se donne une éventuelle solution x. Encadrons alors $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par deux carrés consécutifs comme à l'exercice 2. On remarque que $A = 4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ est encore un carré parfait et :

$$(2x^2 + x)^2 = 4x^4 + 4x^3 + x^2 < A < 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = (2x^2 + x + 1)^2$$

dès que $3x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + (x+2)^2 > 0$ (toujours vrai) et $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) > 0$.

Nécessairement on a donc $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

En testant les 5 cas à la main, on obtient comme seules solutions $-1, 0, 3$.

Solution de l'exercice 10

On a donc $2^a 3^b = (c+3)(c-3)$. D'où, il existe x, y, u, v tels que $x+u = a, y+v = b, c-3 = 2^x 3^y$ et $c+3 = 2^u 3^v$. Ainsi, $2^x 3^y + 6 = 2^u 3^v$. Si $y \geqslant 2$, alors $2^u 3^v \equiv 6[9]$, donc $v = 1$. Si $x \geqslant 2$, alors $2^u 3^v \equiv 2[4]$, donc $u = 1$. Donc, si $x, y \geqslant 2$, alors $u = v = 1$, d'où $2^x 3^y = 0$: absurde. Ainsi, on a nécessairement $y \leqslant 1$ ou $x \leqslant 1$. En testant les derniers cas restants (et en utilisant l'exercice 7), on trouve comme solutions : $(a, b, c) \in \{(4, 0, 5), (4, 5, 51), (3, 3, 15), (4, 3, 21), (3, 2, 9)\}$

Solution de l'exercice 11

Cf envoi d'arithmétique 2012-2013, exercice 5, page 6 :

https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/10/ofm-2012-2013-envoi3-corrige.pdf

Solution de l'exercice 12

Ce n'est déjà pas le cas pour $p = 2$. Supposons dorénavant p impair.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $7p + 3^p - 4 = a^2$. Alors $a^2 \equiv 0$ ou 1 modulo 4 et $7p + 3^p - 4 \equiv -p + (-1)^p \equiv -p - 1$. Comme p est impair, $p \equiv -1[4]$.

Mais alors en regardant modulo p par petit Fermat : $a^2 \equiv 0 + 3 - 4 \equiv -1[p]$. Donc avec le petit théorème de Fermat, comme clairement p ne divise pas a :

$$1 \equiv a^{p-1} \equiv \left(a^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$$

car $p - 1$ est divisible par 2 mais pas par 4. C'est absurde.

Solution de l'exercice 13

On pose $a_{n+1} = a_1$. En regardant modulo 2, on a

$$n \equiv a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 \equiv 0[2]$$

On écrit $n = 2m$. Alors exactement m des $a_i a_{i+1}$ valent 1 et exactement m valent -1. Comme leur produit vaut le produit des a_i au carré (chacun étant présent deux fois) donc 1, on en déduit que $1 = 1^m \cdot (-1)^m$ donc m est pair donc $4 \mid n$.

Solution de l'exercice 14

On considère la suite des $(10^k)_{k \geq 0}$. Par le principe des tiroirs, l'un des résidus r modulo n est pris par une infinité de termes de la suite : notons-les $(10^{a_k})_{k \geq 0}$. On a alors que :

$$m = 10^{a_0} + 10^{a_1} + \cdots + 10^{a_{n-1}} \equiv n \cdot r \equiv 0[n]$$

Donc $n \mid m$ et m s'écrit avec n chiffres 1 et que des 0.

5 Les Restes Chinois

Ce cours est inspiré du cours "The Chinese Remainder Theorem" de Evan Chen, et des polycopiés des années précédentes. Comme nous allons le voir, le théorème des restes chinois permet de casser un problème entre différents sous-problèmes, chacun associé à un nombre premier, et de construire la solution au problème original à partir des différentes solutions des sous-problèmes.

Théorème 1 (Existence d'un inverse modulaire)**.**
Soit r, m deux entiers premiers entre eux. Il existe un unique $s \in \{0, \ldots, m-1\}$ tel que :

$$rs \equiv 1 \; [m]$$

Pour calculer cet inverse modulaire, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide étendu.

Exercice 1
Calculez l'inverse de 36 modulo 101.

Théorème 2 (Théorème des restes chinois (TRC))**.**
Soit $m_1, m_2 \in$ deux entiers premiers entre eux. Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. Il existe un unique $r \in \{0, \ldots, m_1m_2 - 1\}$ tel que :

$$x \equiv r_1 \; [m_1] \text{ et } x \equiv r_2 \; [m_2] \iff x \equiv r \; [m_1m_2]$$

Démonstration. Soit s_1 l'inverse de m_1 modulo m_2 et s_2 l'inverse de m_2 modulo m_1. Pour montrer l'existence, il suffit de prendre :

$$x \equiv r_2s_1m_1 + r_1s_2m_2 \; [m_1m_2]$$

Démontrons maintenant l'unicité : soient x_1, x_2 qui vérifient $x_1 \equiv x_2 \; [m_1], x_1 \equiv x_2 \; [m_2]$. On a donc $m_1 \mid x_1 - x_2$ et $m_2 \mid x_1 - x_2$, d'où $m_1m_2 \mid x_1 - x_2$, puis $x_1 \equiv x_2 \; [m_1m_2]$. ☐

Exercice 2
Si $x \equiv 9 \; [17]$ et $x \equiv 5[11]$, que peut-on dire sur x modulo 187 ?

Exercice 3
Trouvez tous les $x \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x^2 + x - 6 \equiv 0 \; [143]$$

Exercice 4
Trouvez tous les entiers n à 3 chiffres tels que l'écriture de x^2 en base 10 se termine par l'écriture de x en base 10.

Par exemple, pour 1 chiffre, on a $5^2 = 25, 6^2 = 36$, et pour 2 chiffres, on a $25^2 = 625$ et $76^2 = 5776$.

Exercice 5
Soit n un nombre entier impair. Montrez qu'il existe un entier x tel que :

$$n^2 \mid x^2 - nx - 1$$

Exercice 6
Prouvez que pour tout entier positif n, il existe des entiers a et b tels que $4a^2 + 9b^2 - 1$ est divisible par n.

Exercice 7 (IMO 1989)
Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe n entiers positifs consécutifs tel qu'aucun d'entre eux est une puissance d'un nombre premier.

Exercice 8
Prouvez que, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, il existe des nombres premiers deux à deux $k_0, \ldots, k_n$, tous strictement plus grands que 1, tels que $k_0 k_1 \ldots k_n - 1$ soit le produit de deux entiers consécutifs.

Exercice 9 (P1 IMO 2009)
Soit $n \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des éléments distincts de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, tels que n divise $a_i(a_{i+1} - 1)$ pour $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Montrez que n ne divise pas $a_k(a_1 - 1)$.

Exercice 10
Soient $a > b > c \geqslant 3$ des entiers naturels. Sachant que :

$$\begin{aligned} a &\mid bc + b + c \\ b &\mid ca + c + a \\ c &\mid ab + a + b \end{aligned}$$

montrez que a, b et c ne sont pas tous les trois des nombres premiers.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1

$$\begin{aligned} 0 \times 36 + 1 \times 101 &= 101 \\ 1 \times 36 + 0 \times 101 &= 36 \\ -2 \times 36 + 1 \times 101 &= 29 \\ 3 \times 36 - 1 \times 101 &= 7 \\ -14 \times 36 + 5 \times 101 &= 1 \end{aligned}$$

L'inverse de 36 modulo 101 est donc $-14 \equiv 87\ [101]$.

Solution de l'exercice 2
L'inverse de 11 modulo 17 est -3, l'inverse de 17 modulo 11 est 2, on en déduit que $x \equiv 9 \times 11 \times -3 + 5 \times 17 \times 2 \equiv 60\ [187]$

Solution de l'exercice 3
On doit avoir :

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \text{ ou } -3\ [11] \\ x &\equiv 2 \text{ ou } -3\ [13] \end{aligned}$$

L'inverse de 11 modulo 13 est 6, l'inverse de 13 modulo 11 est 6. Ainsi, les solutions de x modulo 143 sont :

$$\begin{aligned} 2\times 13\times 6 + 2\times 11\times 6 &\equiv 2\ [143] \\ -3\times 13\times 6 + -3\times 11\times 6 &\equiv -3\ [143] \\ 2\times 13\times 6 + -3\times 11\times 6 &\equiv -42\ [143] \\ -3\times 13\times 6 + 2\times 11\times 6 &\equiv 41\ [143] \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4
On cherche tous les x tels que :

$$1000 \mid x^2 - x = x(x-1)$$

Comme d'habitude, on casse le problème en les différents facteurs premiers. On cherche donc tous les x tels que :

$$\begin{aligned} 125 &\mid x(x-1) \\ 8 &\mid x(x-1) \end{aligned}$$

Comme x est premier avec $x-1$, on a :

$$x \equiv 0 \text{ ou } 1\ [125] x \equiv 1 \text{ ou } 1\ [8]$$

En appliquant le TRC, on retrouve les x qui fonctionnent modulo 1000. Pour cela, on doit calculer l'inverse de 125 modulo 8, et l'inverse de 8 modulo 125, qui valent respectivement 5 et 47. Ainsi, les solutions sont :

$$125\times 5 = 625 \text{ et } 8\times 47 = 376$$

Solution de l'exercice 5
Comme n est impair, n^2 est premier avec 2, donc 2 admet un inverse modulo n^2, que l'on note i_2. On peut donc essayer de mettre le polynôme sous forme canonique. On a :

$$x^2 - nx - 1 \equiv (x - i_2 n)^2 - 1\ [n^2]$$

Il suffit donc de prendre $x = i_2 n + 1$.

Solution de l'exercice 6
Par le TRC, il suffit de trouver a et b lorsque n est une puissance d'un nombre premier p. Si $n = 2^k$, on prends $a \equiv 0\ [2^k]$ et $b \equiv 3^{-1}\ [2^k]$. Si $n = p^k$, $p \neq 2$, on prends $a \equiv 2^{-1}\ [p^k]$ et $b \equiv 0\ [p^k]$.

Solution de l'exercice 7
Prenons $2n$ nombres premiers distincts, que l'on note $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$. Si x est tel que :

$$\begin{aligned} x+1 &\equiv 0\ [p_1 q_1] \\ x+2 &\equiv 0\ [p_2 q_2] \\ &\dots \\ x+n &\equiv 0\ [p_n q_n] \end{aligned}$$

alors aucun des n entiers consécutifs $\{x+1, \dots, x+n\}$ ne peut être une puissance de nombre premier. Un tel x existe d'après le TRC.

Solution de l'exercice 8
On peut reformuler le problème de la manière suivante : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouvez $x \in \mathbb{N}$ tel que x^2+x+1 a au moins $n+1$ facteurs premiers distincts.

Par le TRC, il suffit de montrer qu'il y a une infinité de nombre premiers qui divisent un nombre de la forme x^2+x+1.

Soit P l'ensemble des nombres premiers qui divisent un nombre de la forme x^2+x+1. Supposons que P soit fini, alors, si on pose $N = \prod_{p \in P} p$, un diviseur premier de N^2+N+1 ne peut pas être dans P, ce qui est absurde. Ainsi P est infini, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9
https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/IMO2009_1.shtml#solution

Solution de l'exercice 10
Supposons par l'absurde que a, b, c sont tous les trois des nombres premiers. On a :

$$\begin{aligned} bc+b+c &\equiv 0 \ [a] \\ (b+1)(c+1) &\equiv 1 \ [a] \\ (a+1)(b+1)(c+1) &\equiv 1 \ [a] \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} (a+1)(b+1)(c+1) &\equiv 1 \ [b] \\ (a+1)(b+1)(c+1) &\equiv 1 \ [c] \end{aligned}$$

Ainsi, par le TRC :

$$(a+1)(b+1)(c+1) \equiv 1 \ [abc]$$

D'où :

$$\begin{aligned} abc &\mid (a+1)(b+1)(c+1)-1 \\ abc &\mid ab+bc+ca+a+b+c \end{aligned}$$

Puis :

$$abc \leqslant ab+bc+ca+a+b+c \leqslant 3ab+3a \leqslant 4ab$$

Ce qui est absurde si $c \geqslant 5$. Si $c = 3$, on a :

$$\begin{aligned} 3ab &\leqslant ab+4b+4a+3 \\ 2ab &\leqslant 4a+4b+3 \leqslant 8a+3 \leqslant 9a \end{aligned}$$

Ce qui est absurde si $b > 5$. Si $b = 5$, on a :

$$\begin{aligned} 10a &\leqslant 4a+23 \\ 6a &\leqslant 23 \end{aligned}$$

Ce qui est absurde si $a \geqslant 7$.

6 TD - Graphes

Ce TD est très fortement inspiré par le chapitre "Graphs" du livre "Problem-Solving Methods in Combinatorics" de Pablo Soberón.

Exercices classiques/lemmes utiles

Exercice 1

On considère un graphe $G = (V, E)$. Montrer que $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot \mid E \mid$.

Exercice 2

Est-ce qu'un graphe peut posséder un nombre impair de sommets de degré impair ?

Exercice 3

Tout graphe connexe G possède un arbre couvrant.

Exercice 4

Montrer qu'un arbre avec n sommets a exactement $n - 1$ arêtes.

Exercice 5

Montrer que tout graphe connexe avec n sommets a au moins $n - 1$ arêtes. Il possède exactement $n - 1$ arêtes si, et seulement si le graphe est un arbre.

Exercice 6

Dans une petite classe de six étudiants, certains élèves sont amis et d'autres non. La relation d'amitié est réciproque : si A est ami avec B, alors B est ami avec A. Montrer qu'il existe trois étudiants qui sont deux à deux amis ou trois étudiants qui sont deux à deux non-amis.

Exercices divers

Exercice 7

Dans un graphe G chaque sommet est de degré $k \geqslant 2$. Montrer que G possède un cycle de longueur au moins $k + 1$.

Exercice 8

Soit G un graphe. Montrer qu'on peut séparer les sommets en deux groupes de sorte qu'au moins la moitié des voisins de chaque sommet se retrouve dans l'autre groupe.

Exercice 9

(Olympiade de Mathématique Balkanique 2002)

Soit G un graphe dont tous les sommets sont de degré au moins 3. Montrer que G possède au moins un cycle de longueur paire.

Exercice 10

Soit G un graphe avec n sommets qui ne contiennent pas de triangles (cycles de longueurs 3). Montrer que G ne possède pas plus de $n^2/4$ arêtes.

Exercice 11

(OMM 2009)

Dans une assemblée de n personnes, on sait que parmi n'importe quel groupe de 4 personnes il y a soit 3 qui se connaissent deux à deux, soit 3 qui ne se connaissent pas deux à deux. Montrer qu'on peut séparer l'assemblée en deux groupes de sorte que toute paire de personnes se connaisse dans le premier groupe et aucune paire de personnes ne se connaissent dans le deuxième groupe.

Exercice 12

Olympiades allemandes 2020

Les habitants d'un village de druides ne s'entendent pas très bien. Il se trouve même qu'il est impossible de placer 4 druides ou plus en cercle de sorte que chaque druide veuille bien serrer la main de ses deux voisins. Jugeant qu'un tel état des choses ternit la réputation de la tribu, le chef essaie d'entreprendre une action pacifiste pour apaiser la situation. Il collecte 3 pièces d'or de chaque druide, puis à toute paire de personne qui accepte de se serrer la main il paie une pièce d'or à chacun. Montrer que le chef peut se mettre au moins 3 pièces d'or dans la poche à la fin de l'action.

Exercice 13

(Allemagne 2004)

Dans un graphe avec des sommets noirs ou blancs, on nous permet de choisir un sommet v et inverser la couleur de v ainsi que de tous ses voisins. Est-ce qu'il est possible d'obtenir à partir d'un graphe avec que des sommets blancs un graphe avec que des sommets noirs ?

Exercice 14

(IMO 2020)

Soit $n > 1$ un entier. Il y a n^2 stations sur le versant d'une montagne, toutes à des altitudes différentes. Chacune des deux compagnies de téléphériques, A et B, gère k téléphériques ; chaque téléphérique permet de se déplacer d'une des stations vers une station plus élevée (sans arrêt intermédiaire). Les k téléphériques de A ont k points de départ différents et k points d'arrivée différents et un téléphérique qui a un point de départ plus élevé a aussi un point d'arrivée plus élevé. Les mêmes conditions sont satisfaites pour B. On dit que deux stations sont reliées par une compagnie s'il est possible de partir de la station la plus basse et d'atteindre la plus élevée en utilisant un ou plusieurs téléphériques de cette compagnie (aucun autre mouvement entre les stations n'est autorisé). Déterminer le plus petit entier strictement positif k qui garantisse qu'il existe deux stations reliées par chacune des deux compagnies.

Exercice 15
(IMO 2006)

Soit P un polygone régulier à 2006 côtés. Une diagonale de P est appelée bonne si ses extrémités partagent le contour de P en deux parties ayant chacune un nombre impair de côtés de P. Les côtés de P sont aussi appelés bons. On suppose que P a été subdivisé en triangles par 2003 diagonales n'ayant deux à deux aucun point commun à l'intérieur de P. Trouver le nombre maximum de triangles isocèles ayant deux côtés bons qui peuvent apparaître dans une telle subdivision.

Exercice 16

(IMO 2007)

Dans une compétition mathématique certains participants sont des amis. L'amitié est toujours réciproque. Un groupe de participants est appelé une clique si toute paire d'entre eux est formée de deux amis. (En particulier, chaque groupe d'au plus un participant constitue une clique.) Le nombre de participants dans une clique est appelé sa taille. On suppose que, dans cette compétition, la plus grande taille des cliques est paire. Montrer que les participants peuvent être répartis dans deux pièces de telle sorte que la plus grande taille des cliques contenues dans une de ces pièces soit égale à la plus grande taille des cliques contenues dans l'autre.

Solutions

Solution de l'exercice 1

On remarque que dans la somme de gauche, chaque arête est comptée deux fois, ce qui implique l'égalité.

Solution de l'exercice 2

La réponse est non. En fait, si c'était le cas, la somme de gauche dans la question précédente serait impaire, ce qui est impossible.

Solution de l'exercice 3

Soit G un graphe connexe. Si G n'a pas de cycles, alors G est un arbre et nous avons fini. Si G a un cycle $(v_0, v_1, \dots, v_k = v_0)$, alors on peut supprimer l'arête (v_0, v_{k-1}) de G, sans que cela modifie la connexité du graphe. On continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cycles.

Solution de l'exercice 4

Nous allons procéder par récurrence sur n. Si $n = 1$, l'affirmation est triviale. Supposons donc que la propriété est vraie pour n et considérons un arbre G avec $n + 1$ sommets. Montrons que G contient un sommet de degré 1. Notons que puisque $n + 1 > 1$, pour que le graphe soit connexe tous les sommets doivent avoir au moins degré 1. Une façon de montrer qu'il y a un sommet de degré au plus 1 est de considérer le plus long chemin possible $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ de G. Alors, v_1 est de degré 1. En effet, v_1 ne peut pas être connecté à un sommet parmi $v_1, v_2 \ldots v_k$, car dans ce cas on aurait un cycle. Il ne peut pas non plus être relié à un sommet à l'extérieur du chemin par maximalité de ce dernier. Donc, v_1 est de degré 1. Ainsi, nous pouvons supprimer v_1 du graphe avec son arête. Le nouveau graphe G' a n sommets. Il est connexe et sans cycles. Ainsi G' est un arbre avec n sommets, ce qui signifie qu'il a exactement $n-1$ arêtes. Donc, G a n arêtes.

Solution de l'exercice 5

Par l'exercice précédant, G possède un arbre couvrant T qui contient $n-1$ arêtes. Si $G = T$, alors G est un arbre. Si $G \neq T$, alors G contient une arête (x, y) qui n'est pas contenue dans T. Puisque T est connexe, il existe un chemin qui lie x et y dans T (qui ne contient pas (x, y)). Mais dans ce cas G contient un cycle et n'est donc pas un arbre.

Solution de l'exercice 6

On considère un graphe G à six sommets représentants les étudiants, où deux sommets sont reliés par une arête rouge si les étudiants correspondants sont amis, et par une arête bleue dans le cas contraire. Nous voulons montrer que G possède un triangle monochrome (soit complètement bleu, soit complètement rouge).

Soit v un sommet arbitraire du graphe. Par principe des tiroirs, on peut supposer sans perte de généralité que v est relié à un moins trois étudiants (disons v_1, v_2 et v_3) par une arête rouge. Si parmi les arêtes qui relient v_1, v_2, v_3 il y a une arête rouge (v_i, v_j), alors v, v_i, v_j forment un triangle monochrome rouge. Si ce n'est pas le cas, alors v_1, v_2, v_3 forme un triangle monochrome bleu. L'affirmation que nous voulons démontrer est donc vérifiée.

Solution de l'exercice 7

On construit une suite de sommets $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$ de la manière suivante : v_0 est un sommet arbitraire du graphe ; v_1 est un sommet adjacent à v_0, v_2 est un sommet adjacent à v_1 et différent de v_0 ; si nous avons construit $v_0, v_1, \ldots, v_{t-1}$, alors on choisit v_t de telle sorte qu'il soit adjacent à v_{t-1} et différent de $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{t-2}$ si $t-1 < k$, ou différent de $v_{t-2}, v_{t-3}, \ldots, v_{t-k}$, si $t-1 \geqslant k$. Cela peut être fait puisque $\deg(v_{t-1}) \geqslant k$. Puisque G est un graphe fini, la suite ne peut pas continuer indéfiniment sans sommets répétitifs : il doit y avoir deux sommets v_t et v_{t-l} tels que $v_t = v_{t-l}$. On peut supposer que t est le premier moment où cela se produit. Étant donné la construction de la suite, on a que $l \geqslant k+1$. Ainsi $(v_{t-l}, v_{t-l+1}, \ldots, v_{t-1}, v_t = v_{t-l})$ est le cycle que nous cherchions.

Solution de l'exercice 8

Séparons les sommets en deux groupes A et B de sorte que le nombre d'arêtes entre A et B soit maximal. Démontrons qu'au moins la moitié des voisins de chaque sommet se retrouve dans l'autre groupe. En effet, supposons par l'absurde qu'il y ait un sommet v dans notre graphe, tel que plus de la moitié de ses voisins sont dans le même groupe que lui. Alors, déplacer v dans l'autre groupe augmente strictement le nombre d'arêtes entre A et B.

Contradiction. Ainsi, la séparation satisfait les conditions de l'énoncé.

Solution de l'exercice 9
Soit $v_1, v_2, \ldots, v_k$ le chemin le plus long du graphe. v_1 est adjacent à au moins trois sommets, et donc à au moins à deux sommets différents de v_2. Ces deux sommets doivent être dans le chemin, sans quoi on a une contradiction de la maximalité. Disons que v_1 est adjacent à v_i, v_j. Par le principe des tiroirs, deux des nombres $2, i, j$ sont de même parité. Mais alors, la partie du chemin entre leurs sommets correspondants et v_1 forme un cycle de longueur paire.

Solution de l'exercice 10

Solution 1. Supposons que G est un graphe sans triangles et soit e le nombre d'arêtes dans G. Soit u un sommet de degré maximal d et A l'ensemble des sommets adjacents à u. Comme il n'y a pas de triangles, les sommets de A forment un ensemble indépendant (il n'y a pas d'arêtes entre elles), donc leur degré est au plus $n-d$. Les autres $n-d$ sommets en dehors A (ceux-ci incluent u) ont au plus le degré d. Ainsi, par le lemme des poignées de mains, on a

$$2e = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \notin A} \deg(v) \leqslant 2 \cdot (n-d) \cdot d$$

$$\Leftrightarrow e \leqslant (n-d)d \leqslant \frac{n^2}{4}$$

par l'IAG.

Solution 2. Il est aussi possible de résoudre le problème par récurrence de type $P_n \Rightarrow P_{n+2}$. Pour cela, on note qu'une arête à au plus $(n-2)$ arêtes adjacentes à elle. Donc, si on utilise l'hypothèse de récurrence sur $n-2$, le nombre d'arêtes maximal dans un graphe sans triangles à n sommets n'est pas plus grand que $1 + n\breve{}2 + \frac{(n-2)^2}{4} = \frac{n^2}{4}$.

Solution 3.

Double comptage avec cette même idée :

On observe que pour toute arête (x, z), on doit avoir $deg(x) + deg(y) \leqslant n$. En sommant sur toutes les arêtes, on obtient

$$\sum_{x \in V} \deg(x)^2 = \sum_{(x,y) \in E} (\deg(x) + \deg(y)) \leqslant ne.$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{x \in V} \deg(x)\right)^2 \leqslant \sum_{x \in V} \deg(x)^2$$

En appliquant le lemme des poignées de mains, on obtient l'inégalité voulue.

Solution de l'exercice 11
Solution 1.

Considérons un graphe avec un sommet par personne. Deux personnes sont reliées par une arête rouge si elles se connaissent, et par une arête bleue si elles ne se connaissent pas.

Soit A un ensemble de taille maximale tel que tous les sommets de A ne sont reliés que par des arêtes rouges. Soient à présent x, y des sommets à l'extérieur de A. Nous allons montrer que l'arête (x, y) est bleue. Nous supposons donc que (x, y) est rouge pour aboutir à une contradiction. Notons d'abord que A doit contenir des sommets qui sont connectés à x par une arête bleue. Dans le cas contraire, on pourrait ajouter x à A, ce qui contredirait la maximalité de A. Il en va de même pour y. Considérons tous les sommets dans A qui sont connectés soit à x soit à y par une arête bleue. S'il n'y a qu'un seul de tels sommets, nous pouvons le supprimer et ajouter x et y à A à sa place, ce qui contredit sa maximalité. Ainsi, il y a deux sommets z, w dans A tels que les arêtes (w, x) et (z, y) soient bleues. Cela signifie que dans l'ensemble x, y, z, w nous ne pouvons pas trouver 3 sommets qui satisfont la condition du problème. C'est la contradiction que nous voulions.

Solution 2.

On résout le problème par récurrence sur n. Si $n \leqslant 4$ l'affirmation est vraie. Supposons que cela soit vrai pour un certain k et prouvons-le pour $k+1$. Pour cela, construisons un graphe comme dans la solution précédente. Soit v_0 un sommet arbitraire. Comme les k sommets restants satisfont la condition du problème, on peut les séparer en deux ensembles, A et B, de sorte que les sommets de A ne soient reliés aux sommets B que par des arêtes rouges. On choisit cette division de telle sorte que la somme T d'arêtes bleues de v_0 à A et du nombre d'arêtes rouges de v_0 à B soit minimale.

Supposons que nous ne puissions pas ajouter v_0 à A. Cela signifie qu'il existe un sommet a dans A tel que (v_0, a) est bleue. De la même manière, il doit y avoir un sommet b dans B tel que (b, v_0) est rouge. Supposons sans perte de généralité que (a, b) est rouge. Soit x un autre sommet de A. Cela signifie que (x, a) est rouge. Si (b, x) était bleue, alors les sommets $\{v_0, a, b, x\}$ ne satisferaient pas les conditions du problème. Donc (b, x) est rouge. Comme cela est vrai pour n'importe quel sommet x de A, on peut placer b dans A. En faisant ainsi, nous réduisons le nombre d'arêtes rouges de v_0 à B, ce qui contredit la minimalité de T. Ainsi v_0 peut être ajouté à l'un des ensembles.

Solution de l'exercice 12

Plaçons-nous dans un graphe dans lequel chaque sommet représente un druide et deux sommets sont reliés par une arête ssi les druides correspondants sont d'accord de se serrer la main. Nous savons que ce graphe ne contient pas de cycles de longueur supérieure ou égale à 4. Soit n le nombre de sommets et e le nombre d'arêtes dans ce graphe. On doit montrer que

$$3n - 2e \geqslant 3.$$

Supposons pour commencer que le graphe est connexe. Dans ce cas, on peut écrire $e = n-1+u$ avec u un entier positif ou nul. Considérons un arbre couvrant de G et colorions toutes les arêtes dans cet arbre en bleu, le reste du graphe en vert. L'inégalité que nous voulons montrer devient

$$3n - 2(n-1+u) \geqslant 3$$

$$\Leftrightarrow n - 1 \geqslant 2u,$$

ou, autrement dit, que le nombre d'arêtes bleues est au moins fois plus grand que le nombre d'arêtes vertes. Pour cela, notons que chaque arête verte fait partie d'exactement un triangle ayant deux côtés bleus et un côté vert. En effet, comme une arête verte ne fait partie de l'arbre couvrant, ces deux extrémités sont reliées par un chemin bleu. Comme notre graphe n'a pas de cycles de longueur strictement supérieure à 3, ce chemin bleu doit être de longueur 2.

Comme en particulier on n'a pas de cycle de longueur 4, chaque arête fait partie d'au plus un triangle, et donc en particulier, chaque arête bleue fait partie d'au plus un triangle avec deux côtés bleus et un côté vert. Ainsi, il doit y avoir au moins deux fois plus d'arêtes bleues que d'arêtes vertes, ce qui conclut. Pour un qui n'est pas connexe, il suffit de sommer les inégalités pour chaque composante connexe.

Solution de l'exercice 13

Nous allons montrer par récurrence sur le nombre de sommets du graphe qu'il est toujours possible de rendre tous les sommets noirs. Soit n le nombre de sommets de G. Si n vaut 1, nous ne changeons que ce sommet.

Supposons maintenant que nous puissions le faire pour $n-1$ sommets et nous voulons prouver que nous pouvons le faire pour aussi pour n sommets. Étant donné un sommet v arbitraire d'un graphe G, considérons le graphe induit par les autres $n-1$ sommets. Par hypothèse de récurrence, il y a une série de mouvements qui rend tous les sommets de ce graphe noirs. Appliquons ces mouvements à G. Alors, soit v devient noir, soit il ne le devient pas. Si v est noir alors nous avons fini. Nous pouvons donc supposer que pour chaque sommet p de G il y a un moyen de changer la couleur de tous les sommets sauf p. Si n pair, nous pouvons appliquer cette nouvelle opération pour chaque sommet. Après ces opérations, chaque sommet aura changé de couleur $n-1$ fois, on se retrouve donc avec un graphe complètement noir.

Si n est impair, alors par le lemme des poignées de mains, il doit y avoir un sommet v_0 de degré pair. Soit B l'ensemble formé par v_0 et tous ses voisins. Si nous effectuons la nouvelle opération pour chaque sommet de B, alors chaque sommet à l'extérieur de B change de couleur tandis que les sommets de B restent blancs. Il nous reste qu'à utiliser le mouvement d'origine sur v_0 et nous avons terminé.

Solution de l'exercice 14

Nous commençons par montrer que pour tout $k \leqslant n^{2\,\breve{}}n$ il peut ne pas y avoir deux stations reliées par les deux entreprises. De toute évidence, il est suffisant de fournir un exemple $k = n^2 - n$. Supposons que A relie les stations i et $i+1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n^2$ avec $n \nmid i$, et B relie les stations i et $i+n$ pour $1 \leqslant i \leqslant n^{2\,\breve{}}n$. Il est facile de vérifier qu'aucune paire de stations n'est reliée par les deux compagnies.

Maintenant, montrons que pour $k = n^2 - n + 1$ il doit y avoir une paire de stations qui sont reliées par les deux compagnies. Supposons par l'absurde qu'il existe une configuration pour laquelle ce n'est pas le cas.

Regardons les différentes stations comme des graphes dans lesquels deux sommets sont reliées par arête bleue si la compagnie A lie les deux stations, et par une arête rouge si elles sont reliés la compagnie B. Par les conditions de l'énoncé les deux graphes rouges et bleus qu'on obtient sont des arbres (en fait, ce sont même des „chaines“). Soit k le nombre de composantes connexes dans le graphe rouge. Le graphe a alors $n^2 - k$ arêtes, d'où $k = n - 1$. Il en de même pour le graphe bleu. De plus, par hypothèse il n'y a pas deux sommets d'une même composante connexe bleue qui se trouvent dans une même composante connexe rouge. Donc, chaque composante connexe bleue a au plus $n-1$ sommets. Comme le graphe bleu a $n-1$ composantes connexes, cela implique qu'il y a au plus $(n-1)\cdot(n-1) < n^2-n+1$ arêtes au total. On a la contradiction voulue.

Solution de l'exercice 15

Nous allons nous aider d'un graphe G ayant sommet pour chacun des 2004 triangles et une arête entre deux sommets si les triangles correspondants partagent un mauvais côté (c-à-d, un côté qui n'est pas bon). Chaque sommet est de degré 1 ou 3.

Les bons triangles ont le degré 1 (mais pas tous sommets dont le degré 1 représentent des triangles isocèles). Notons aussi que le graphe que nous obtenons ne contient pas de cycles. Soit $N_1, N_2, \ldots, N_k$ les composantes connexes de G (chacune d'elles est un arbre).Si N_i a n_i sommets, supposons que x d'entre eux sont de degré 1 et y de degré 3. On a

$$x + y = n_i,$$
$$x + 3y = 2(n_i - 1).$$

Donc $x = \frac{ni+2}{2}$. Par conséquent, le nombre total de sommets de degré 1 est $\frac{n_1+n_2++n_k}{2} + k = 1002 + k$. Notez que les sommets de N_i représentent des triangles qui forment un polygone, et que l'union des polygones formés par toutes les composantes connexes est le 2006-gone d'origine. Considérons un nouveau graphe H avec un sommet pour chaque composante connexe et une arête entre eux si les polygones correspondants partagent un côté. Notez que H est connexe. Il a donc au moins $k-1$ arêtes. Si δ_1 et δ_2 sont triangles dans différents composants connectés qui partagent un côté, ce côté doit être un bon segment. Cela implique que δ_1 et δ_2 sont représentées dans G par des sommets de degré 1. De plus, il est facile de voir qu'au plus l'un d'eux est un bon triangle. Ainsi au moins $k-1$ sommets de degré 1 ne sont pas de bons triangles. Cela implique qu'il y a aux plus 1003 bons triangles. On obtient une triangulation avec 1003 bons triangles en considérant 1003 diagonales disjointes qui laissent chacune exactement 1 sommet d'un côté puis 1000 autres diagonales pour compléter la triangulation.

Exercice 16.
Solution de l'exercice 16
Solution.

Abordons le problème en considérant un graphe ayant un sommet pour chaque étudiant et une arête pour chaque amitié. Désignons les deux pièces par X et Y. Soit K une clique de taille maximale et supposons qu'elle a $2k$ sommets. On place initialement les sommets de K en Xet le reste en Y . La taille de la plus grande clique de Xest $2k$ et la taille de la plus grande clique en Y est au plus $2k$. Si elles ont la même taille, alors on s'arrête, car nous avons la partition désirée. Sinon, la taille maximale d'une clique en X est strictement plus grande qu'en Y. À présent, nous allons déplacer les sommets de X en Y un par un. Notez qu'à chaque étape la taille de la plus grande clique dans X est réduite de 1, tandis que la taille de la plus grande clique de Y augmente d'au plus un. Nous déplaçons les sommets tant que la taille de la clique maximale en X est strictement plus grande qu'en Y. Quand ce n'est plus le cas, il y a deux possibilités. Soit les deux chambres possèdent la même taille de la clique maximale, dans quel cas on a gagné, soit la taille de la plus grande clique en Y est supérieur de 1 à la taille de la plus grande clique en X.

Dans le second cas, on peut supposer que la taille maximale d'une clique en Y est $r+1$, la taille maximale d'une clique en X est r,

Observons que Y peut avoir au plus k sommets de K.

En effet, dans le cas contraire, il resterait dans X au plus $k-1$ sommet, et la différence entre les tailles maximales d'une clique en Y et X serait supérieure ou égale à $k+1-(k-1)=2$. Contradiction. Ainsi, il reste au moins k sommets de K en X.

Regardons à présent de plus près les sommets qui ont déplacé de K vers Y. S'il existe un sommet $y \in Y \cap K$ qui ne soit pas dans une clique maximale de Y, alors en le déplaçant de Y en X, augmente la taille de la clique maximale dans cette pièce (puisqu'il fait partie de K) sans diminuer la taille maximale d'une clique de taille maximale dans Y. Cela signifierait que les deux salles ont maintenant une taille de clique maximale de $r+1$, et nous avons terminé. Ainsi, on peut supposer que pour toute clique maximale M de Y , $Y \cap K \in M$. Cependant, nous savons que $Y \cap K$a au plus k sommets de K. Ainsi, chaque clique maximale de Y doit avoir sommets qui ne sont pas dans $Y \cap K$. Tant que la clique maximale de Yest de taille $r+1$, on va faire la chose suivante. On prend une clique maximale M dans Y et déplace un sommet de M (YK) en X. À la fin de ce processus, la taille maximale d'une clique dans Yest r. Il nous reste à montrer que la taille d'une clique maximale en X est toujours r. Soit N une clique maximale de X. Les sommets de N sont soit des sommets de K restés en X soit des sommets que nous avons ramenés de Y dans ce processus. Dans les deux cas, ils sont adjacents à tous les sommets de $Y \cap K$. Cela signifie que $N \cup (Y \cap K)$ est une clique.

On a

$$2k = |K| = |X \cap K| + |Y \cap K| = r + |Y \cap K|.$$

et par hypothèse

$$N \cup (Y \cap K)| \leqslant 2k \Leftrightarrow |N| + |(Y \cap K)| \leqslant 2k = r + |Y \cap K|.$$

Donc

$$|N| \leqslant r.$$

Cela signifie que X et Yont tous deux une taille de clique maximale r, comme nous le voulions.

2 Entraînement de mi-parcours

3 Deuxième partie : Algèbre & Géométrie

1 THÈME

2 THÈME

3 THÈME

4 THÈME

5 THÈME

6 THÈME

4 Entraînement de fin de parcours

5 Derniers cours

1 Langages et Automates Finis

L'objectif de ce cours est de montrer une des manières dont la combinatoire peut se trouver en dehors du contexte olympique. Nous introduirons les notions de langage, d'automate fini déterministe ou non et le lien entre ces deux notions. Nous illustrerons ensuite ces objets dans quelques exercices.

Langages

Les notions de mot et de langage sont un formalisme permettant de travailler avec des suites de symboles.

Définition 1.
Un *alphabet* est un ensemble fini, dont les éléments sont appelés *lettres*. Un *mot* est une suite finie de lettres, le nombre de lettres dans un mot est sa *longueur*. Il existe un unique mot de longueur 0, appelé *mot vide* et noté ε. Si l'alphabet est noté A, l'ensemble des mots de longueur n est noté A^n, l'ensemble de tous les mots est noté $A^\star$ et l'ensemble de tous les mots non vides A^+. Enfin, un *langage* est un sous-ensemble de $A^\star$.

Un langage est un ensemble de mots : si l'alphabet est $\{a, b\}$, des exemples de langages sont l'ensemble des mots comportant un nombre pair de a, l'ensemble des mots formés d'un certain nombre de a suivis d'un certain nombre de b, le langage $\{abba, baab\}$ ou encore le langage des mots formés d'un nombre premier de lettres.

Une question intéressante à se poser est celle de déterminer la "complexité" d'un langage. Est-il possible de donner un algorithme répondant de manière générale à la question "Le mot w fait-il partie du langage ?" ? Si oui, quelles contraintes supplémentaires peut-on mettre sur cet algorithme ? Intuitivement, il semble que si le langage L est obtenu en tirant au sort l'appartenance ou non de chaque mot à celui-ci, il ne sera pas possible de construire un tel algorithme. De l'autre côté de l'échelle, il est très facile de déterminer si un mot fait partie d'un ensemble fini de mots ou s'il contient un nombre pair de lettres. Déterminer si un mot contient un nombre premier de lettres, ou est un palindrome, sont des questions d'une difficulté intermédiaire.

Nous allons nous intéresser à l'échelon le plus bas dans ce spectre de complexités possibles, en introduisant les opérations régulières puis les langages réguliers.

Les trois opérations régulières sont l'union, la concaténation et l'étoile de Kleene. L'union est définie naturellement : des langages sont des ensembles de mots, et l'union de langages est l'union ensembliste : si L et M sont deux langages, un mot est dans $L \cup M$ s'il est dans L ou s'il est dans M.

Pour définir la concaténation de langages, il faut d'abord définir la concaténation de mots. Ceci est fait de la manière suivante : si $u = u_1..u_m$ et $v = v_1..v_n$ sont des mots, leur concaténation est le mot $uv = u_1..u_m v_1..v_n$ de longueur $m + n$. Cette opération est associative, mais pas commutative, et le mot ε est neutre. De là, la concaténation de langages est définie via celle des mots. La concaténation de L et M est l'ensemble des mots qui sont concaténation d'un élément de L et d'un élément de M :

$$LM = \bigcup_{\substack{u \in L \\ v \in M}} uv.$$

Par exemple, la concaténation de $\{ab, abb\}$ avec $\{a, ba\}$ est $\{aba, abba, abbba\}$. Ici aussi, cette opération est associative. On peut donc définir L^n comme étant la concaténation de n copies du langage L. On a alors $L^0 = \{\varepsilon\}$.

Enfin, l'étoile de Kleene $\star$ est une opération unaire qui au langage L associe le plus petit langage qui contient L et ε et est stable pour la concaténation (tel que s'il contient u et v il contient aussi uv). De manière équivalente, l'étoile du langage L est

$$L^\star = \cup_{n \in \mathbb{N}} L^n.$$

Par exemple, l'étoile du langage $\{a\}$ est $\{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, ..\}$.

On peut alors définir l'ensemble des langages réguliers sur A : il s'agit du plus petit ensemble de langages qui contient les langages finis et qui est stable pour les trois opérations ci-dessus (à savoir, si L et M sont réguliers alors $L \cup M$, LM et $L^\star$ sont réguliers également). Il s'agit encore de l'ensemble des langages qu'on peut obtenir à partir des langages finis en appliquant un nombre fini de fois des opérations régulières.

Exercice 1
Les trois langages suivants sont-ils réguliers ?

1. Le langage $\{abba, baab\}$.
2. Le langage des mots formés d'un certain nombre de lettres a suivis d'un certain nombre de lettres b.
3. Le langage des mots sur $\{a, b\}$ contenant un nombre pair de a.

Il est possible de montrer que l'ensemble des longueurs des mots d'un langage régulier est une union finie de progressions arithmétiques, ce qui permet de déduire que l'ensemble des mots formés d'un nombre premier de lettres n'est pas régulier.

Par définition, l'ensemble des langages réguliers est stable par union, concaténation et étoile de Kleene. On peut se demander ce qu'il en est d'opérations telles que le complément ou l'intersection ; on verra grâce à la section suivante qu'on a toujours la stabilité, mais ce n'est pas si facile à montrer sans les outils que nous allons développer.

Automates finis

Un automate fini peut être vu comme une "boîte noire", dont le fonctionnement est régi par certaines contraintes, qui prend comme arguments des mots sur un alphabet donné et qui renvoie "oui" ou "non". Il est alors possible d'associer à tout automate un langage, celui des mots auxquels l'automate répond "oui". Le processus inverse est plus compliqué, donc plus intéressant.

Définition 2.
Un *automate fini* est la donnée d'un quintuple $(Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$.

- Q est l'ensemble des états de l'automate, c'est un ensemble fini.
- q_0 est l'état initial de l'automate, c'est un élément de Q.
- F est l'ensemble des états finaux de l'automate, c'est un sous-ensemble de Q.
- Σ est l'alphabet d'entrée de l'automate.
- δ est la fonction de transition, c'est une fonction de $Q \times \Sigma$ dans Q qui décrit le comportement de l'automate.

Un *chemin de lecture* d'un mot $w_1..w_n$ est la donnée d'états $q_1, .., q_n$ tels que

$$\delta(q_{i-1}, w_i) = q_i \ \forall i \in \{1, .., n\}.$$

Un tel chemin est déterminé uniquement par le mot lu.

Un mot de $\Sigma^\star$ est *accepté* par un automate fini $\mathcal{A}$ si son chemin de lecture se termine dans un état final (i.e. si $q_n \in F$ avec les notations ci-dessus).

Intuitivement, un automate lit un mot d'entrée lettre par lettre, en se déplaçant d'un état à l'autre au fur et à mesure de sa lecture. La fonction de transition précise le comportement de l'automate : elle permet de déterminer comment ces déplacements s'effectuent. Comme dit dans l'introduction de cette section, on peut alors associer à un automate le langage des mots acceptés par celui-ci, on parlera du langage accepté (ou reconnu) par l'automate.

On représente visuellement les automates par des graphes. Les états sont représentés par des cercles, doublés si l'état est final. Les transitions sont représentées par des flèches, étiquetées par la lettre correspondante. Une flèche sans origine ni étiquette indique l'état initial. L'automate de la figure 1 est un exemple d'une telle représentation. Par exemple, le chemin de lecture du mot $abbab$ est $(q_0), q_2, q_1, q_0, q_2, q_1$ et ce mot est accepté. On peut montrer que le langage accepté est le langage des mots qui contiennent un nombre impair de b et jamais deux a consécutifs, à savoir le langage régulier $(\{ab, b\}\{ab, b\})^\star\{ab, b\}\{\varepsilon, a\}$, ou encore $\{abab, bab, abb, bb\}^\star\{ab, aba, b, ba\}$.

Remarque 3.
On peut également définir un automate fini en autorisant des fonctions de transition partielles, dont le domaine est une partie stricte de $Q \times \Sigma$. On peut en effet ajouter un nouvel état, appelé puits, duquel ne partent que des boucles et tel que toutes les transitions non définies arrivent à cet état. On est alors ramené au cas d'une fonction de transition totale.

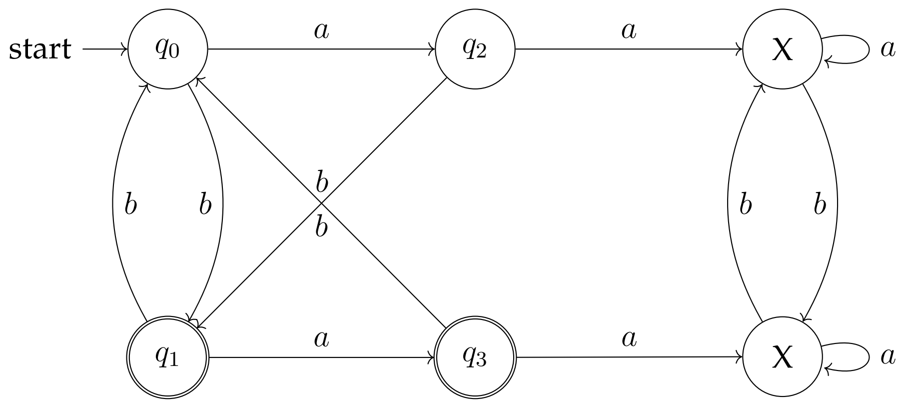


FIGURE 1 – Un automate fini.

Il est souvent utile de tolérer plusieurs possibilités de lecture, car cela permet par exemple d'explorer (de manière théorique) toutes les branches d'un arbre de possibilités en même temps. C'est l'objet de la notion suivante.

Définition 4.
Un *automate fini non-déterministe* est la donnée d'un quintuple $(Q, I, F, \Sigma, \Delta)$. Ici,

— I est un ensemble d'états initiaux. C'est un sous-ensemble de Q.

— Δ est une relation de transition. C'est un sous-ensemble de $Q \times \Sigma^\star \times Q$.

Les autres éléments sont définis comme dans le cas déterministe.

Un chemin de lecture d'un mot w depuis un état q_0 vers un état q_n est un n-uple de mots $u_1, .., u_n$ et un $n-1$-uple d'états $q_1, .., q_{n-1}$ avec $u_1..u_n = w$ et $(q_{i-1}, u_i, q_i) \in \Delta\ \forall i \in \{1, .., n\}$.

Un mot est accepté s'il existe un chemin de lecture de w depuis q_0 vers q_n pour des $q_0 \in I$ et $q_n \in F$.

L'idée est de pouvoir choisir son propre point de départ de la lecture, d'avoir plusieurs possibilités au cours de la lecture et de pouvoir lire plusieurs lettres en même temps. Ceci permet d'explorer en même temps plusieurs branches d'un arbre, et il suffit qu'une d'elles soit valide pour que l'on soit satisfait.

Remarque 5.
On peut sans perte de généralité limiter la relation de transition à un sous-ensemble de $Q \times (\varepsilon \cup \Sigma) \times Q$, puisqu'on peut supprimer une transition étiquetée par $w_1..w_n$ de q_0 à q_n et la remplacer par $n-1$ nouveaux états $q_1, .., q_{n-1}$ et n nouvelles transitions de q_{i-1} à q_i étiquetées par w_i, et ce sans changer les mots acceptés par l'automate.

Il est clair que si un langage est reconnu par un automate fini déterministe, il sera également reconnu par un automate fini non-déterministe (le même). L'inverse n'est pas évident, mais nous allons le montrer de manière constructive.

Proposition 6.
Si un langage L sur un alphabet Σ est tel qu'il existe un automate fini non-déterministe $\mathcal{A}$ reconnaissant L, alors il existe également un automate fini déterministe $\mathcal{B}$ reconnaissant L.

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (Q_A, I, F_A, \Sigma, \Delta)$ l'automate fini non-déterministe reconnaissant L. Par la remarque ci-dessus, on peut supposer que Δ est inclus dans $Q_A \times (\varepsilon \cup \Sigma) \times Q_A$. On propose alors la construction suivante d'un automate $\mathcal{B} = (Q_B, q_0, F_B, \Sigma, \delta)$:

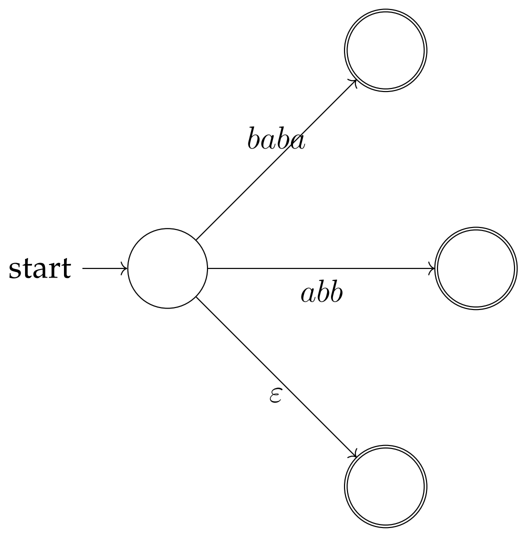


FIGURE 2 – Un automate fini non-déterministe acceptant $\{\varepsilon, abb, baba\}$.

— L'ensemble d'états Q_B est l'ensemble 2^{Q_A} des sous-ensembles de Q_A.

— L'état initial q_0 est l'ensemble des états $r \in Q_A$ tels qu'il existe un chemin de lecture du mot ε depuis un état de I vers r (à savoir l'ensemble des états atteignables depuis I en utilisant uniquement des flèches étiquetées par ε).

— Un état de Q_B est final si et seulement si cet état a une intersection non-vide avec F.

— L'image de (q, a) par δ, avec $q \in Q_B$ et $a \in \Sigma$, est l'ensemble des $r \in Q_A$ tels qu'il existe un chemin de lecture du mot a depuis un état de q vers r (à savoir l'ensemble des états vers lesquels on peut se rendre depuis un état de q en empruntant un certain nombre de flèches étiquetées par ε et exactement une flèche étiquetée par a).

Il reste ensuite à montrer que ce nouvel automate $\mathcal{B}$ accepte bien le même langage que $\mathcal{A}$. Pour ce faire, on va montrer par récurrence sur la longueur de w que l'état dans lequel on se trouve après la lecture de w par $\mathcal{B}$ est exactement l'ensemble des $r \in Q_A$ tels qu'il existe un chemin de lecture de w entre un état de I et r.

Cette affirmation est vraie si w est de longueur 0 ou 1 vu la définition de $\mathcal{B}$. Supposons qu'elle est vraie pour tous les mots de longueur l et soit w de longueur $l + 1$. Alors, w s'écrit ua avec u de longueur l et $a \in \Sigma$. On a alors que l'état q' dans lequel on se trouve après la lecture de w par $\mathcal{B}$ est $\delta(q, a)$ où q est l'état dans lequel on se trouve après la lecture de u par $\mathcal{B}$. Par hypothèse de récurrence, ce dernier est l'ensemble des $r \in Q_A$ tels qu'il existe un chemin de lecture de u dans $\mathcal{A}$ entre un état de I et r. De plus, par définition de δ, q' est l'ensemble des $r \in Q_A$ tels qu'il existe un chemin de lecture de a entre un état de q et r'. Tout chemin de lecture de ua se décomposant en un chemin de lecture de u et un chemin de lecture de a, on a la conclusion voulue.

Reprenons la preuve : on a alors qu'un mot w est accepté par $\mathcal{B}$ si et seulement si on est dans un état de F_B après la lecture de w par $\mathcal{B}$. Un état de F_B contient toujours un état $r \in F_A$. On a alors qu'il y a un chemin de lecture de w entre un état de I et r vu le lemme montré par récurrence. Ceci indique bien que w est accepté par $\mathcal{A}$. Réciproquement, si w est accepté par $\mathcal{A}$ car il y a un chemin de lecture vers $r \in F_A$, l'état de $\mathcal{B}$ après lecture de w contiendra r et sera donc final pur $\mathcal{B}$. Ainsi, les deux automates acceptent les même mots, comme demandé. $\square$

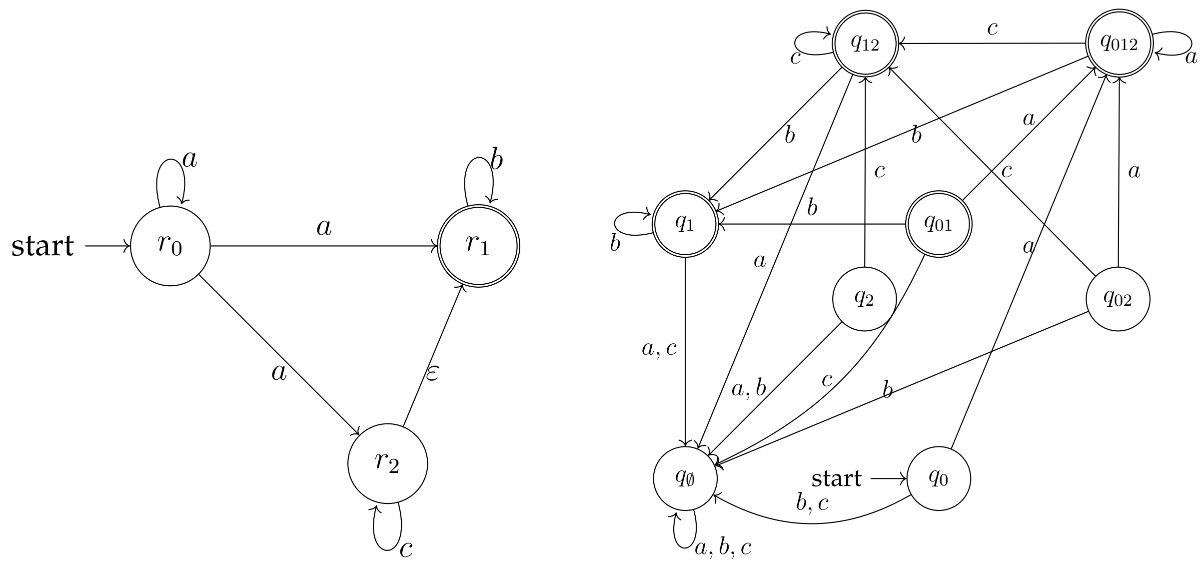


FIGURE 3 – Un automate fini non-déterministe et l'automate déterminisé correspondant. Les états q_2, q_{01} et q_{02} peuvent être omis sans changer le langage de ce dernier.

Remarque 7.
Cette construction vient sans garantie d'optimalité : il est courant que l'automate ainsi construit aie des états inatteignables et qui peuvent donc être supprimés. En pratique, on peut appliquer un algorithme "tache d'huile", en partant de q_0 et en ne calculant les valeurs de δ qu'en les états qui sont déjà apparus, ce qui évite les états supplémentaires inutiles.

On peut donc passer d'un automate non-déterministe à un automate déterministe, et les premiers permettent une liberté de construction bien plus grande. Ceci sera utile pour faire le lien avec les langages réguliers évoqués dans la première partie du cours.

Théorème 8 (Kleene, 1951)**.**
Un langage est régulier si, et seulement si, il est reconnu par un automate fini (déterministe ou non).

Démonstration. Montrons d'abord que tout langage régulier est accepté par un automate fini non-déterministe. C'est clairement le cas des langages finis (en suivant une construction similaire à celle de la figure 2). Il suffit donc de montrer que si deux langages L et M sont acceptés par deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, c'est également le cas de $L \cup M$, LM et $L^\star$. On procède constructivement.

Pour avoir un automate acceptant $L \cup M$, il suffit de prendre l'union des automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, à savoir l'automate dont l'ensemble d'états (d'états initiaux, d'états finaux) est l'union des deux ensembles d'états (initiaux, finaux) et la relation de transition est l'union des relations de transition. Alors, il existe un chemin de lecture d'un mot w d'un état initial vers un état final dans l'union si et seulement si il existe un tel chemin dans un des deux automates, ce qui est bien ce qu'on veut.

Pour construire la concaténation des deux langages, on prend l'union des deux ensembles d'états, les états initiaux de $\mathcal{A}$, les états finaux de $\mathcal{B}$, et l'union des deux relations de transition ainsi que des transitions (f, ε, i) pour tous f final de $\mathcal{A}$ et i initial de $\mathcal{B}$. Ainsi, un chemin de lecture d'un mot w qui conduit à son acceptation emprunte forcément exactement une de ces nouvelles transitions, ce qui définit une expression de w comme concaténation d'un mot de L et d'un mot de M, comme désiré.

Enfin, pour construire un automate acceptant $L^\star$, on introduit en plus des états de $\mathcal{A}$ un état q initial et accepteur, on prive les états de A de leur ancien statut éventuel, et on rajoute aux transitions de $\mathcal{A}$ des transitions (q, ε, i) pour tous les anciens états initiaux i de $\mathcal{A}$ et (f, ε, q) pour tous les anciens états finaux f de $\mathcal{A}$. Ainsi, un chemin de lecture de w qui conduit à son acceptation est formé d'un certain nombre de boucles correspondant chacune à un mot accepté par $\mathcal{A}$, ce qui donne une décomposition de w comme concaténation de mots de L. A nouveau, c'est ce qu'on cherchait. Dans les trois cas, on a montré que les mots acceptés par l'automate étaient dans le langage cherché, on peut également vérifier que tous les mots qui doivent être acceptés le sont en faisant construisant les chemins voulus. Ainsi, les langages acceptés par automates finis forment une famille stable pour les opérations régulières et contenant les langages finis, cette famille contient donc celle des langages réguliers.

Montrons maintenant que si L est un langage accepté par un automate $\mathcal{A}$, alors L est régulier. On procède par récurrence sur le nombre d'états de l'automate, qu'on suppose déterministe et pour lequel on autorise les fonctions de transition partielles. Si ce nombre d'états est 0 ou 1, le langage accepté est soit $\emptyset$, qui est fini, soit l'étoile d'un langage fini, celui des lettres qui étiquettent une boucle sur l'unique état. Passons à l'induction.

Soit q_0 l'état initial. Pour chaque paire d'autres états q et r, on considère l'automate obtenu en retirant de $\mathcal{A}$ l'état q_0 et toutes les transitions en partant ou y aboutissant, en nommant q initial et r final. Le langage accepté par cet automate modifié est régulier par hypothèse de récurrence (il y a un état de moins). Notons-le L_{qr}.

Dans l'automate $\mathcal{A}$, un chemin de q_0 vers un état final f prend forcément la forme de la concaténation d'un certain nombre éventuellement nul de boucles autour de q_0 ne passant pas par q_0 en dehors de leurs extrémités, puis d'un chemin de q_0 vers f ne passant pas par q_0. Dès lors, le langage accepté par $\mathcal{A}$ est

$$\left(\Big(\bigcup_{a\in\Sigma:\delta(q_0,a)=q_0} a\Big) \cup \Big(\bigcup_{\substack{a\in\Sigma,\, q=\delta(q_0,a)\\ b\in\Sigma,\, r\in Q:\delta(r,b)=q_0}} aL_{qr}b\Big) \right)^\star \left(\bigcup_{\substack{a\in\Sigma,\, q=\delta(q_0,a)\\ f\in F}} aL_{qf} \right)$$

qui est bien régulier, puisqu'on n'a fait que des unions, concaténations et étoiles de langages réguliers. □

Ainsi, nous avons montré que la reconnaissabilité par automate fini et la régularité forment une seule et même notion, qui fournit un échelon de complexité adapté pour les langages dont la structure est "non-triviale mais assez simple".

Exercices

Exercice 2
Si L et M sont deux langages réguliers sur un alphabet Σ, les langages suivants sont-ils réguliers ?

1. Le complémentaire de L, L^c
2. L'intersection de L et M

3. Le langage des préfixes de L,

$$Pre(L) = \{u \in \Sigma^\star : \exists v \in \Sigma^\star,\, uv \in L\}$$

Exercice 3

1. Décrire un automate fini déterministe sur le langage $\{a, n, s\}$ qui accepte un mot si, et seulement si, celui-ci contient le mot "ananas".
2. Si L est un langage régulier, décrire un automate qui accepte un mot si et seulement si celui-ci contient un mot de L.

Exercice 4
On rappelle que, si n est un nombre naturel, l'écriture de n en base b, chiffre le plus significatif d'abord, est le mot $w = w_l..w_0$ sur l'alphabet $\{0, .., b-1\}$ qui est tel que $w_l \neq 0$ et $\sum_{i=0}^{l} w_i b^i = n$. L'écriture de n en base b, chiffre le moins significatif d'abord est alors $w_0..w_l$. Par convention, l'écriture de 0 est ε dans les deux cas.

1. Décrire un automate acceptant exactement les représentations en base 3 des nombres pairs, chiffre le plus significatif d'abord, puis un automate faisant de même chiffre le moins significatif d'abord. Si nécessaire, vous pouvez admettre les représentations qui contiennent des zéros de tête (resp. de queue).
2. Faire de même pour les multiples de 7 en base 10.

Ces constructions se généralisent à n'importe quelle base et n'importe quel critère de divisibilité.

Exercice 5
Dans cet exercice, on considère des représentations en base 2, chiffre le moins significatif d'abord. On permet également de laisser des zéros de queue. Un nombre est dit odieux si sa représentation contient un nombre impair de chiffres 1.

1. Décrire un automate acceptant exactement les représentations binaires des nombres odieux.
2. On note $\Sigma = \{0, 1\}^3$. Décrire un automate sur Σ qui accepte les mots de triplets tels que les troisièmes composantes forment la représentation d'un nombre qui est la somme des nombres représentés par les deux premières composantes. Par exemple, le mot

   $$(0, 0, 0)(1, 0, 1)(0, 1, 1)(1, 1, 0)(0, 0, 1)$$

   sera accepté : les trois composantes sont les représentations de 10, 12 et 22 respectivement, et on a bien $10 + 12 = 22$.
3. En déduire un automate sur Σ qui accepte les mots de triplets tels que les deux premières composantes sont des représentations de nombres odieux et la troisième est la représentation de la somme des deux premières.
4. En déduire un automate sur $\{0, 1\}$ qui accepte les représentations de nombres qui sont sommes de deux nombres odieux.
5. Comment répondre à la question "Quels nombres sont sommes de deux nombres odieux" ?

Solutions

Solution de l'exercice 1

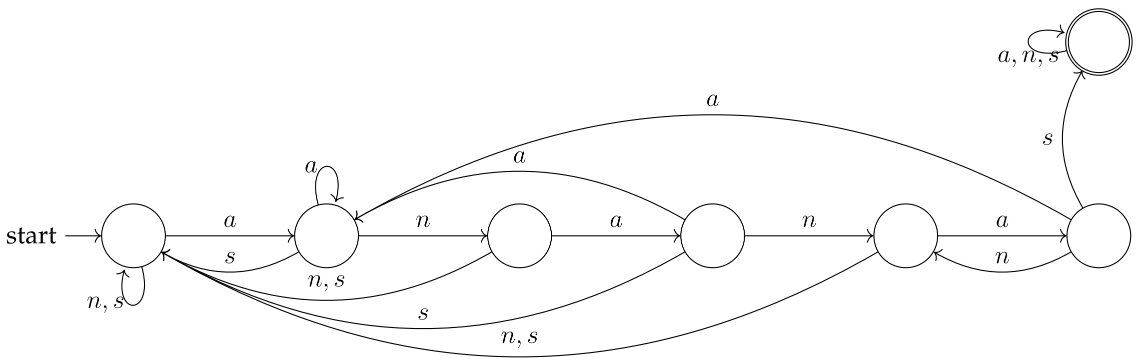
1. Ce langage est régulier puisqu'il est fini.
2. Il s'agit du langage $(\{a\}^\star)(\{b\}^\star)$, qui est donc régulier.
3. Il s'agit du langage $(\{b\}^\star)(\{a\}\{b\}^\star\{a\}\{b\}^\star)^\star$, qui est donc régulier.

Solution de l'exercice 2

1. Notons $\mathcal{A}$ un automate fini déterministe reconnaissant L. Alors l'automate $\mathcal{A}'$ obtenu en remplaçant l'état final de $\mathcal{A}$ par son complémentaire accepte le complémentaire de L, qui est donc régulier.
2. Le langage est régulier car il s'agit de $(L^c \cap M^c)^c$. On peut également construire directement un automate l'acceptant, et la figure 1 est un exemple de cette construction : on prend le produit cartésien des états et on définit tout "composante à composante", par exemple les états finaux sont ceux dont les deux composantes sont finales.
3. Il s'agit encore d'un langage régulier. Pour obtenir un automate fini correspondant, on part d'un automate fini pour L et on rend finaux tous les états à partir duquel il y a un chemin (dans l'automate vu en tant que graphe orienté) vers un état final.

Solution de l'exercice 3

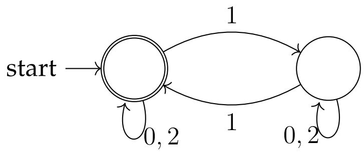
1. L'automate suivant convient :



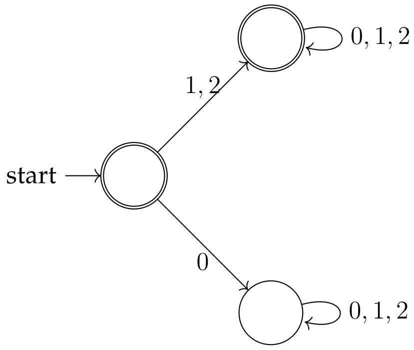
2. Soit $\mathcal{A}$ un automate fini qui accepte L. On apporte les modifications suivantes à $\mathcal{A}$. D'une part, on crée un nouvel état i qui devient l'unique état initial, on munit cet état de transitions vers lui-même étiquetées par chaque lettre de l'alphabet et de transitions vers chaque ancien état initial étiquetées par ε. D'autre part, on crée un nouvel état f qui devient l'unique état final, on munit cet état de transitions vers lui-même étiquetées par chaque lettre de l'alphabet et de transitions depuis chaque ancien état final étiquetées par ε. L'automate obtenu est alors celui cherché.

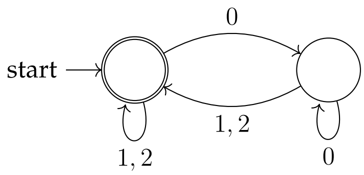
Solution de l'exercice 4

1. On peut montrer qu'un nombre en base 3 est pair si et seulement si la somme de ses chiffres l'est (il s'agit du même argument que pour les nombres multiples de 3 en base 10). On peut ensuite créer un automate qui retient la somme des chiffres déjà lus, modulo 2. L'automate suivant fonctionne si on tolère les zéros de tête ou de queue :



Pour refuser les zéros de tête ou de queue, il faut faire le produit, comme expliqué à la solution 2, avec un des automates suivants :





2. Commençons par la construction chiffre le moins significatif d'abord. On sait que les valeurs des puissances de 10 modulo 7[1] sont $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, ...$ Notons c_i le reste de la division de 10^i par 7. Si la représentation de n en base 10 est $w_0..w_l$, on sait alors que n sera multiple de 7 si et seulement si $\sum_{i=0}^{l} w_i c_i$ l'est. On va donc construire un automate qui, dans son état, retient deux informations : l'endroit où on en est dans le cycle $1, 3, 2, 6, 4, 5$ et la valeur actuelle de $\sum_{i=0}^{l} w_i c_i$ modulo 7.
Dès lors, l'automate cherché a pour ensemble d'états $\{0, .., 5\} \times \{0, .., 6\}$. L'état initial est $(0, 0)$, les états finaux sont $(0, 0), (1, 0), .., (5, 0)$ et on a $\delta((i, j), k) = (i + 1 \mod 6, j + kc_i \mod 7)$. On peut alors vérifier par récurrence sur l que l'état de l'automate après avoir lu $w = w_0..w_l$ est $(l + 1 \mod 6, w \mod 7)$, toujours en abusant des notations modulo. C'est donc bien l'automate désiré.
Pour la construction chiffre le plus significatif d'abord, on peut constater que

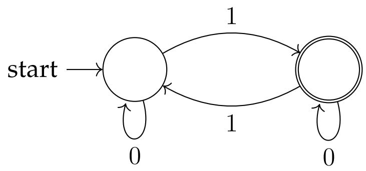
$$\sum_{i=0}^{l} w_i 10^i = (...((w_l.10 + w_{l-1}).10 + w_{l-2})...).10 + w_0.$$

Dès lors, on peut construire un automate qui ne retient que la valeur modulo 7 du mot déjà lu. Un tel automate a pour ensemble d'états $\{0, .., 6\}$, l'état 0 étant initial et final, et on pose $\delta(i, j) = i.10 + j \mod 7$. Ainsi, on peut montrer par récurrence qu'après avoir lu $w_l..w_k$ l'automate est dans l'état qui est la valeur de ce nombre modulo 7, et on a bien le langage cherché.

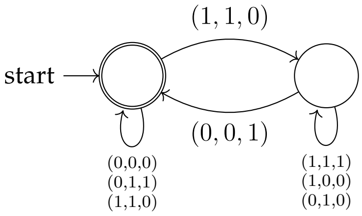
Solution de l'exercice 5

1. On se permettra d'abuser du vocabulaire et de désigner le reste de la division par 7 comme la valeur modulo 7.

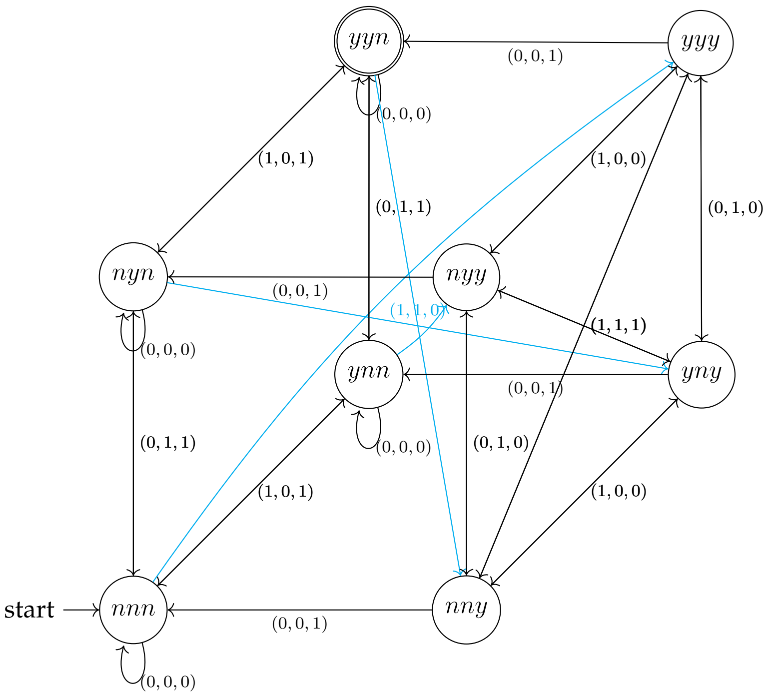
1. L'automate suivant convient :



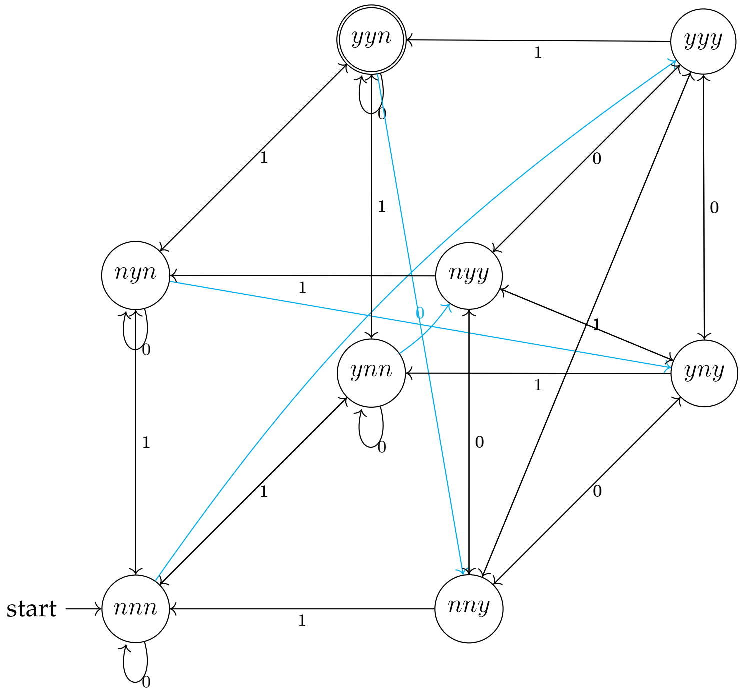
2. L'automate suivant convient. L'idée est de retenir s'il y a ou non un report dans l'addition qu'on est en train d'effectuer. On commence sans report, le report et les chiffres qu'on lit permettent de déterminer si l'addition est correcte et le report suivant, et on doit finir sans report.



3. En combinant les deux points précédents, on construit un automate qui retient trois choses dans ses états : le caractère odieux ou non de ce qu'on a lu à la première ligne, puis de ce qu'on a lu à la deuxième ligne, et enfin la présence ou non d'un report dans l'addition. On prend donc pour ensemble d'états $\{n, y\}^3$. On obtient l'automate suivant.

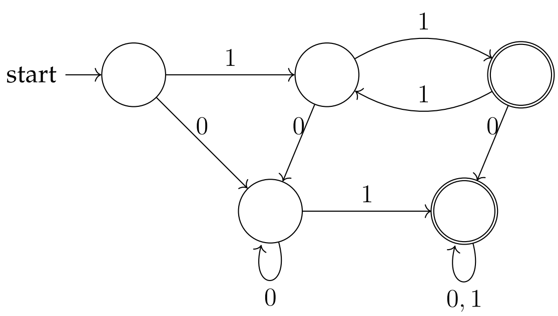


4. Cette fois, le choix des deux termes de la somme est libre, on va donc se servir du non-déterminisme pour deviner ces termes. Considérons l'automate suivant.



D'une part, si un nombre est somme de deux nombres odieux, le triplet des représentations de ces deux nombres odieux et du nombre lui-même est accepté par l'automate du point précédent, donc la représentation du nombre lui-même est acceptée par cet automate-ci. D'autre part, si une représentation est acceptée par cet automate-ci, en lisant les étiquettes des mêmes flèches dans l'automate précédent, les deux premières composantes fournissent des représentations de deux nombres qui sont odieux et ont la somme voulue. Donc cet automate est bien celui cherché.

5. Puisqu'on a un automate qui accepte exactement les représentations des nombres cherchés, on peut trouver son langage, ce qui répondra à la question. La méthode décrite dans la preuve du théorème de Kleene est une façon de faire, ce n'est pas la seule. On peut également déterminiser l'automate et le simplifier en espérant avoir un résultat suffisamment simple pour que le langage puisse en être déduit. Tous ces calculs peuvent se faire à la main, mais aussi par ordinateur. On trouvera que l'automate précédent est équivalent à l'automate suivant :



De là, on vérifie que tous les nombres sont sommes de deux nombres odieux, sauf 0 et les nombres de la forme $2^{2i+1} - 1$ pour i naturel.

2 THÈME

VI. Groupe D

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre & Arithmétique

1 THÈME

2 THÈME

3 THÈME

4 THÈME

5 La Revanche des Inégalités

En 2020, après 8 ans d'absence (autant dire une éternité), surgissait dans le sujet des IMO un ennemi que l'on ne craignait plus : un problème d'inégalité, une menace fantôme.

Dans le sujet de 2021, confirmant nos pire craintes, un nouveau problème d'inégalité, particulièrement redoutable, faisait à nouveau office de problème 2 . Voilà qui marquait définitivement l'avènement de l'attaque des inégalités.

Notre objectif ici est, et celles et ceux qui ont vu la prélogie de Star Wars l'auront compris, d'éviter d'avoir à subir la revanche des inégalités, et que nos jeunes olympistes français, pas assez préparés à cet exercice, soient contraints de s'incliner devant les problèmes.

Exercices

Exercice 1
Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3$.

Exercice 2
(BXMO 2014) Soients a, b, c et d des entiers strictement positifs. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre l'expression :

$$S = \left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+b+d}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+c+d}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor$$

Exercice 3
(TST belge 2010) Soient $a_1, a_2, \ldots a_n$ des réels vérifiant $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n |a_i| = 1$. Montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^n i a_i \right| \leqslant \frac{n-1}{2}$$

Exercice 4
(IMO 2012 P2) Soit $n \geqslant 3$ un entier et soient $a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs tels que : $a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$.

Montrer que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

Exercice 5
(IMO SL 2017 A1) Soient $a_1, \ldots, a_n, k$ et M des entiers strictement positifs. On suppose que

$$\tfrac{1}{a_1} + \ldots + \tfrac{1}{a_n} \quad = \quad k \quad \text{et} \quad a_1 a_2 \ldots a_n \quad = \quad M$$

On suppose que $M > 1$. Montrer que le polynôme $M(1+X)^k - (X+a_1)\ldots(X+a_n)$ ne possède pas de racine strictement positive.

Exercice 6
(IMO SL 2019 A2)
Soient $u_1, \ldots, u_{2019}$ des réels satisfaisant

$$u_1 + \ldots + u_{2019} \quad = \quad 0 \quad \text{et} \quad u_1^2 + \ldots + u_{2019}^2 \quad = \quad 1$$

On note $a = \max(u_1, \ldots, u_{2019})$ et $b = \min(u_1, \ldots, u_{2019})$. Montrer que

$$ab \leqslant -\frac{1}{2019}$$

Exercice 7
(IMO 2020 P2) Soit a, b, c, d des réels tels que $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ et $a+b+c+d = 1$. Montrer que

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$$

Exercice 8
(EGMO 2014 P1) Déterminer tous les réels t tels que pour tout triplet (a, b, c) désignant les longueurs des côtés d'un triangle, $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ et $c^2 + abt$ sont également les longueurs des côtés d'un triangle.

Exercice 9
(EGMO 2016 P1) Soit n un entier positif impair, et soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des nombres réels positifs ou nuls. Montrer que :

$$\min_{i=1,\ldots,n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant \max_{j=1,\ldots,n} (2x_j x_{j+1}),$$

où $x_{n+1} = x_1$.

Exercice 10
(IMO SL 2020 A3) Soient a, b, c, d des réels strictement positifs vérifiant $(a+c)(b+d) = ac+bd$. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$$

Exercice 11
(BXMO 2012) Déterminer tous les quadruplets (a, b, c, d) de réels strictement positifs vérifiant $abcd = 1$ et :

$$a^{2012} + 2012b \quad = \quad 2012c + d^{2012} \quad \text{et} \quad 2012a + b^{2012} \quad = \quad c^{2012} + 2012d$$

Exercice 12
(BXMO 2019) Soit $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$ des réels.
1) Montrer que

$$ab(a-b) + bc(b-c) + cd(c-d) + da(d-a) \leqslant \frac{8}{27}$$

2) Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 13
(IMO SL 2015 A1) Soit (a_k) une suite de réels strictement positifs telle que pour tout entier k :

$$a_{k+1} \geqslant \frac{k a_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$.

Solutions

Exercice 1
Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3$.
Solution de l'exercice 1
Nous faisons le changement de variables dit de Ravi : $a = y+z$, $b = z+x$ et $c = x+y$, avec la seule propriété vérifiée par x, y, z est $x, y, z > 0$. Ce changement de variables est facile à comprendre une fois qu'on trace le cercle inscrit du triangle. Ainsi, l'inégalité à montrer devient :

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geqslant 6.$$

Ensuite, on utilise le fait que pour tout $X > 0$, on a :

$$X + \frac{1}{X} \geqslant 2.$$

Ce qui termine l'exercice.

Exercice 2
(BXMO 2014) Soient a, b, c et d des entiers strictement positifs. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre l'expression :

$$S = \left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+b+d}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+c+d}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor$$

Solution de l'exercice 2
Avec des parties entières, il n'y a pas grand chose à faire : on applique l'inégalité $\lfloor x \rfloor > x - 1$ pour trouver, en réarrangeant les termes

$$S > \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{d}{b} + \frac{b}{d}\right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) - 4$$

et chaque terme entre parenthèse est minoré par 2 par IAG. On a donc $S > 8$, soit $S \geqslant 9$. En tatonnant, on trouve la construction $(5, 5, 5, 4)$.

Exercice 3
(TST belge 2010) Soient $a_1, a_2, \ldots a_n$ des réels vérifiant $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n |a_i| = 1$. Montrer que

$$\left|\sum_{i=1}^n ia_i\right| \leqslant \frac{n-1}{2}$$

Solution de l'exercice 3
On peut imaginer au moins deux manières de résoudre cet exercice. À vous de choisir laquelle vous trouvez la plus naturelle ou la plus élégante.

Solution n°1 : échanger les signes somme

Si on utilise l'inégalité triangulaire à tours de bras, cela ne va pas donner quelque chose de concluant. En revanche, la forme de la somme donne envie de séparer les termes comme suit, puis d'échanger l'ordre des signe somme (on a le droit de le faire car le résultat ne dépend pas de l'ordre de sommation) :

$$\sum_{i=1}^n ia_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_i$$

Par inégalité triangulaire on a donc :

$$\left|\sum_{i=1}^n ia_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^n \left|\sum_{i=j}^n a_i\right|$$

Pour rajouter un peu de symétrie, on est tenté d'introduire un terme de la forme $|\sum(n-i)a_i|$. Cela est d'ailleurs bien commode puisque

$$|\sum(n-i)a_i| = |n\sum a_i - \sum ia_i| = |\sum ia_i|$$

Or ce terme vérifie de même que plus haut :

$$\left|\sum_{i=1}^n (n-i)a_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^n \left|\sum_{i=1}^j a_i\right|$$

En résumé :

$$\begin{aligned}
2\left|\sum_{i=1}^{n} i a_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(n-i)a_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} i a_i\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=j}^{n} a_i\right| + \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{j} a_i\right| \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\left|\sum_{i=j}^{n} a_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{j} a_i\right|\right) \\
&\leqslant \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i| \\
&= n-1
\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité voulue.

Solution n°2 : Séparer les positifs des négatifs

On peut utiliser une technique souvent utile quand on a affaire à des réels de signe quelconque qui est de les séparer en deux équipes : les positifs et les négatifs. Notez que ceux qui sont nuls peuvent rejoindre l'équipe qu'ils veulent, cela ne change rien. Ainsi, on note P et N deux ensemble d'indices (i.e. $P \subset \{1, ..., n\}$ et $N \subset \{1, .., n\}$) disjoints (i.e. $P \cap N = \emptyset$) et tels que tout indice est soit dans P soit dans N (i.e. $P \cup N = \{1, ..., n\}$), tels que

$$\forall i \in P, \quad a_i \geqslant 0,$$

et

$$\forall i \in N, \quad a_i \leqslant 0.$$

Maintenant, qu'on a séparé les réels selon leur signe, la seule information qui nous intéresse sur chacun d'entre eux est leur valeur absolue. C'est pour cela qu'il est commode d'introduire de nouvelles variables qui nous donnent la valeur ansolue de chaque réel qui nous intéresse. On pose, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$,

$$b_i := |a_i|.$$

Nous pouvons donc réécrire les deux hypothèses de l'énoncé avec les nouvelles variables. Le fait que la somme des réels est nulle veut dire la même chose que la somme des positifs est égale à la somme des négatifs. Ainsi, la première hypothèse s'écrit comme :

$$\sum_{i \in P} b_i = \sum_{i \in N} b_i.$$

La deuxième hypothèse peut se réécrire comme :

$$\sum_{i \in P} b_i + \sum_{i \in N} b_i = 1.$$

Finalement, on peut résumer les deux hypothèses en une seule :

$$\sum_{i\in P} b_i = \sum_{i\in N} b_i = \frac{1}{2}.$$

On peut en particulier en déduire que P et N sont non vides.

Enfin, ce qu'on nous demande de démontrer peut se réécrire comme :

$$-\frac{n-1}{2} \leqslant \sum_{i\in P} ib_i - \sum_{i\in N} ib_i \leqslant \frac{n-1}{2}.$$

Démontrons l'inégalité à droite, il est clair que l'inégalité de gauche se démontre de la même manière.

Observons pour cela que

$$\sum_{i\in P} 2b_i = 1.$$

Ainsi, on peut voir les $2b_i$, pour $i \in P$ comme des poids d'une moyenne (ils sont tous positifs et leur somme fait 1). Ainsi, $2\sum_{i\in P} ib_i$ est une moyenne pondérée de $\{i, i \in P\}$. En particulier, elle est majorée par le plus grand des $i \in P$. Chose qu'on peut résumer par la ligne suivante :

$$2\sum_{i\in P} ib_i \leqslant \max P.$$

Autrement dit,

$$\sum_{i\in P} ib_i \leqslant \frac{\max P}{2} \leqslant \frac{n}{2},$$

car $\max P$ est évidemment majoré par n.

De même, $2\sum_{i\in N} ib_i$ est une moyenne pondérée de $\{i, i \in N\}$. En particulier, elle est minorée par le plus petit des $i \in N$, ce qu'on peut écrire comme suit :

$$2\sum_{i\in N} ib_i \geqslant \min N.$$

Autrement dit,

$$\sum_{i\in N} ib_i \geqslant \frac{\min N}{2} \geqslant \frac{1}{2},$$

car $\min N$ est évidemment majoré par 1.

On est maintenant à deux pas de conclure :

$$\sum_{i\in P} ib_i - \sum_{i\in N} ib_i \leqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

Exercice 4

(IMO 2012 P2) Soit $n \geqslant 3$ un entier et soient $a_2, ..., a_n$ des réels strictement positifs tels que : $a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$.

Montrer que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

Voilà un exercice qui montre l'importance de penser à l'inégalité arithmético-géométrique, même dans un exercice de niveau olympique ! Les puissances qu'on voit dans l'énoncé nous soufflent les poids à utiliser dans les moyennes.

D'après l'inégalité arithmético-géométrique pondérée,

$$\frac{1}{k}(1+a_k) = \frac{k-1}{k}\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}a_k \geqslant \left(\frac{1}{k-1}\right)^{\frac{k-1}{k}} a_k^{\frac{1}{k}},$$

avec égalité si et seulement si $a_k = \frac{1}{k-1}$.

Autrement dit,

$$(1+a_k)^k \geqslant k^k \frac{1}{(k-1)^{k-1}} a_k.$$

En faisant le produit (on obtient un produit téléscopique), on obtient

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \geqslant n^n a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = n^n,$$

avec égalité si et seulement si pout tout k, $a_k = \frac{1}{k-1}$. Ce qui est exclus grâce à l'hypothèse $a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, d'où l'inégalité stricte.

Exercice 5

(IMO SL 2017 A1) Soient $a_1, \ldots, a_n, k$ et M des entiers strictement positifs. On suppose que

$$\tfrac{1}{a_1} + \ldots + \tfrac{1}{a_n} \quad = \quad k \quad \text{et} \quad a_1a_2\ldots a_n \quad = \quad M$$

On suppose que $M > 1$. Montrer que le polynôme $M(1+X)^k - (X+a_1)\ldots(X+a_n)$ ne possède pas de racine strictement positive.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

<u>*Première solution :*</u> Il suffit de montrer que pour tout $x > 0$, on a $M(1+x)^k > (x+a_1)\ldots(x+a_n)$. Or, d'après l'inégalité de Bernouilli : $(1+y)^a > 1+ya$ si $y > 0$:

$$(x+a_1)\ldots(x+a_n) < a_1(x+1)^{1/a_1}a_2(1+x)^{1/a_2}\ldots a_n(1+x)^{1/a_n} = M(1+x)^k$$

ce qui donne le résultat voulu.

<u>*Deuxième solution :*</u> La première solution est peut-être trop astucieuse, mais cet exercice peut être vu comme un deuxième exemple de l'application de l'IAG au niveau olympique.

Commençons par remarquer que 0 est bien une racine du polynôme. Nous allons donc montrer que pour tout $x > 0$, on a $M(1+x)^k > (x+a_1)\ldots(x+a_n)$, ou ce qui revient au même qu'on a $a_1(1+x)^{1/a_1} \cdot a_2(1+x)^{1/a_2} \cdots a_n(1+x)^{1/a_n} > (x+a_1)\ldots(x+a_n)$.

Il suffit donc de montrer que pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $a_j(1+x)^{1/a_j} > (x+a_j)$ pour tout $x > 0$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique pondérée, on a

$$x+a_j = (x+1)+(a_j-1) = a_j\left[\frac{1}{a_j}(x+1) + \frac{a_j-1}{a_j}1\right] \geqslant a_j(x+1)^{1/a_j},$$

avec égalité si et seulement si $x+1=1$, i.e. $x=0$, ce qui est exclus. D'où, l'inégalité stricte.

Exercice 6

(IMO SL 2019 A2)

Soient $u_1, \ldots, u_{2019}$ des réels satisfaisant

$$u_1 + \ldots + u_{2019} = 0 \quad \text{et} \quad u_1^2 + \ldots + u_{2019}^2 = 1$$

On note $a = \max(u_1, \ldots, u_{2019})$ et $b = \min(u_1, \ldots, u_{2019})$. Montrer que

$$ab \leqslant -\frac{1}{2019}$$

Solution de l'exercice 6

Encore un exercice où il est une bonne idée de séparer les positifs des négatifs ! On peut d'ailleurs remarquer que $b < 0 < a$ puisqu'il y a au moins un réel non nul par la deuxième égalité, et donc un réel strictement positif (resp négaitf) parmi les u_i.

Quitte à renuméroter les u_i, on peut donc supposer que $u_1 \leqslant, u_k \leqslant 0$ et $0 < u_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant u_{2019}$, avec $1 \leqslant k \leqslant 2019$. On s'attend donc à devoir raisonner avec les réels positifs d'un côté, dont notera $\sum_P u_i$ la somme, et les négatifs de l'autre, dont on note $\sum_N u_i$ la somme. On obtient par la première égalité que $\sum_P u_i = -\sum_N u_i$.

La deuxième chose est qu'il faut, dans le calcul, faire apparaître d'une façon ou d'une autre les nombres a et b. On n'a pas encore utilisé la deuxième égalité sur la somme des carrés. Majorer brutalement chaque terme par a^2 ou b^2 ne fonctionne pas, il faut donc être plus fin :

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_P u_i^2 + \sum_N u_i^2 \\
&\leqslant \sum_P u_i a + \sum_N (-u_i)(-b) \\
&= a(-\sum_N u_i) + (-b)\sum_P u_i \\
&\leqslant -abk + (-b)a(2019-k) \\
&= -2019ab
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Alternative pour finir l'exercice Il est possible que vous trouviez que la deuxième partie de la solution précédente est trop astucieuse. En effet, il faut y penser à faire les majorations qui marchent ! On voudrait proposer ici une façon alternative de terminer l'exercice après avoir séparé les positifs des négatifs. Il est possible de résoudre cet exercice avec les multiplicateurs de Lagrange. Celui qui voudrait apprendre les multiplicateurs de Lagrange pourrait consulter le cours de Jean-François Martin dans le poly de 2014, il s'agit d'une très bonne introduction.

Vous pouvez remarquer que 2019 est choisi arbitrairement dans l'énoncé. On se permet donc de remplacer 2019 par n et ceci nous autorise à réaliser un raisonnement par récurrence forte sur $n \geqslant 2$ (il est assez clair que l'énoncé est vide pour $n = 1$, c'est pour cela qu'on peut exclure cette situation). On rappelle au lecteur qu'une récurrence forte ne demande pas de faire une initialisation. Essayons de formuler l'assertion qu'on veut montrer par récurrence.

On peut reformuler le problème de façon suivante. Soient $P \geqslant 1$ et $N \geqslant 1$ tels que $n = P + N$. Soient $x_1 \geqslant ... \geqslant x_P \geqslant 0$ et $y_1 \geqslant ... \geqslant y_N \geqslant 0$ tels que

$$x_1 + ... + x_P = y_1 + ... + y_N,$$

et

$$x_1^2 + ... + x_P^2 + y_1^2 + ... + y_N^2 = 1.$$

On veut montrer que

$$x_1 y_1 \geqslant \frac{1}{n}.$$

Vous l'avez compris : les x_i désignent les positifs et les y_j désignent les négatifs ! Remarquez qu'on a fixé le nombre des variables positives et le nombre des variables négatives dans cet énoncé : ceci n'est pas gênant car la preuve marche pour une répartition quelconque. Observons que l'on peut jouer sur l'homogénéité de cet énoncé en le reformulant de façon suivante :

Soient $P \geqslant 1$ et $N \geqslant 1$ tels que $n = P + N$. Soient $x_1 \geqslant ... \geqslant x_P \geqslant 0$ et $y_1 \geqslant ... \geqslant y_N \geqslant 0$ tels que

$$x_1 + ... + x_P = y_1 + ... + y_N = 1.$$

On veut montrer que

$$\frac{x_1 y_1}{x_1^2 + ... + x_P^2 + y_1^2 + ... + y_N^2} \geqslant \frac{1}{n}.$$

C'est ce dernier énoncé que nous allons montrer avec les multiplicateurs de Lagrange par récurrence forte sur n, on le désigne donc par $\mathcal{P}_n$. On suppose que pour $k < n$, $\mathcal{P}_k$ est établi.

On définit la fonction

$$f(x_1, ..., x_P, y_1, ..., y_N) = \frac{x_1 y_1}{x_1^2 + ... + x_P^2 + y_1^2 + ... + y_N^2}.$$

Notez que cette fonction est bien définie et continue sur $K = \{(x_1, ..., x_P, y_1, ..., y_N) \in [0,1]^n,\ x_1 \geqslant x_2 \geqslant ... \geqslant x_P,\ y_1 \geqslant y_2 \geqslant ... \geqslant y_N,\ x_1 + ... + x_P = y_1 + ... + y_N = 1\}$. C'est l'ensemble sur lequel on voudrait la minorer par $\frac{1}{n}$. Cet ensemble est ce qu'on appelle en analyse un compact, i.e. il contient ses bords (ce qui s'obtient avec des conditions qui sont des inégalités larges) et il est borné (en effet, il est inclus dans $[0,1]^n$). Un théorème général en analyse nous apprend qu'une fonction continue définie sur un compact atteint son minimum en un point donné de ce compact (pas forcément unique). Notre travail maintenant est de trouver un point en lequel le minimum est atteint. On peut déjà vérifier que si $x_1 = ... = x_P = \frac{1}{P}$ et $y_1 = ... = y_N = \frac{1}{N}$, alors la fonction f atteint $\frac{1}{n}$. Ainsi, le minimum de f ne pourra être que plus petit ou égal que $\frac{1}{n}$. On veut donc montrer que le minimum de f vaut $\frac{1}{n}$.

Grâce à l'hypothèse de récurrence, on peut tout de suite dire que f ne peut pas atteindre son minimum en un point où certains x_i ou y_j sont nuls. En effet, l'hypothèse de récurrence nous apprend que dans ce cas, f est minorée par $\frac{1}{n-1}$. Ainsi, le point où f atteint son minimum est nécessairement dans $M = \{(x_1, ..., x_P, y_1, ..., y_N) \in]0,1]^n,\ x_1 \geqslant x_2 \geqslant ... \geqslant x_P,\ y_1 \geqslant y_2 \geqslant ... \geqslant y_N,\ x_1 + ... + x_P = y_1 + ... + y_N = 1\}$.

Distinguons maintenant trois cas en fonction de la partition choisie. D'abord, on traite le cas où $P \geqslant 2$ et $N \geqslant 2$, puis le cas où $P = 1$ et $N \geqslant 2$ (ce qui est équivalent au cas où $P \geqslant 2$ et $N = 1$), enfin le cas où $P = 1$ et $N = 1$ (c'est le cas où $n = 2$, ce qui peut être vu comme l'initialisation de cette récurrence).

Premier cas :

Soit $(x_1, ..., x_P, y_1, ..., y_N)$ un élément de M où f atteint son minimum. Dans ce cas, tout x_i et tout y_j est strictement inférieur à 1. Parmi les inégalités $x_1 \geqslant x_2 \geqslant ... \geqslant x_P$ et $y_1 \geqslant y_2 \geqslant ... \geqslant y_N$, il y en a qui sont des inégalités strictes et il y en a qui sont des égalités. Supposons qu'il y a $P' \geqslant 1$ variables distinctes parmi les x_i et $N' \geqslant 1$ variables distinctes parmi les y_j. On peut donc voir ce minimum comme le minimum d'une fonction g de $P' + N'$ variables définie et régulière sur l'ouvert $O = \{(a_1, ..., a_{P'}, b_1, ..., b_{N'} \in]0, 1[^n,\ a_1 > ... > a_{P'},\ b_1 > ... > b_{N'}\}$ (un ouvert s'obtient avec des inégalités strictes, il est très important de se placer sur un ouvert pour appliquer les multiplicateurs de Lagrange). Par exemple, si $x_1 = x_2$ et $y_1 > y_2$ avec $P = N = 2$ désigne le point où le minimum de f est atteint, on a $P' = 1$ et $N' = 2$, et g est une fonction de 3 variables définie comme suit : $g(a_1, b_1, b_2) = f(a_1, a_1, b_1, b_2)$. On généralise cette définition pour le cas général. Pour chaque a_i, on note $\alpha_i > 0$ la multiplicité de a_i, i.e. le nombre de variables de f qu'il désigne ; de même, on note $\beta_j > 0$ la multiplicité de b_j.

Ainsi, on a un extrémum local de g en $(a_1, ..., a_{P'}, b_1, ..., b_{N'})$ sur O, lorsqu'on impose les deux conditions suivantes : $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_{P'} a_{P'} = 1$ et $\beta_1 b_1 + ... + \beta_{n'} b_{N'} = 1$. On a ainsi deux multiplicateurs de Lagrange λ et ν tels que les égalités suivantes sont vérifiées après simplifications (pour les obtenir, on a dérivé la fonction par rapport à chacune de ses variables, cf. le cours de Jean-François Martin pour davantage de détails) :

$$-\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2 + ... + \alpha_{P'} a_{P'}^2 + \beta_1 b_1^2 + ... + \beta_{N'} b_{N'}^2 = \alpha_1 \lambda,$$

pour $2 \leqslant i \leqslant P'$,

$$-2a_1 a_i = \lambda,$$

$$\alpha_1 a_1^2 + ... + \alpha_{P'} a_{P'}^2 - \beta_1 b_1^2 + \beta_2 b_2^2 + ... + \beta_{N'} b_{N'}^2 = \beta_1 \mu,$$

et pour $2 \leqslant j \leqslant N'$,

$$-2b_1 b_j = \mu.$$

On en déduit ainsi que les a_i, pour $i \geqslant 2$ sont tous égaux. De même pour les b_j pour $j \geqslant 2$. Ce qui est exclus d'après la définition de O, à moins que $P' \leqslant 2$ et $N' \leqslant 2$. On en déduit donc que $P' \leqslant 2$ et $N' \leqslant 2$. Supposons par l'absurde que $P' = 2$ et $N' = 2$. Dans ce cas, les égalités obtenues grâce aux multiplicateurs de Lagrange se réécrivent en les deux lignes suivantes :

$$\alpha_2 a_2^2 + \beta_1 b_1^2 + \beta_2 b_2^2 + 2\alpha_1 a_1 a_2 = \alpha_1 a_1^2,$$

$$\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2 + \beta_2 b_2^2 + 2\beta_1 b_1 b_2 = \beta_1 b_1^2.$$

En particulier, on en déduit que $\beta_1 b_1^2 < \alpha_1 a_1^2$ et $\alpha_1 a_1^2 < \beta_1 b_1^2$. Ce qui est exclus et est une contradiction.

Supposons maintenant par l'absurde que $P' = 1$ et $N' = 2$ (cette configuration est bien entendu équivalente à $P' = 2$ et $N' = 1$). Dans ce cas, $a_1 = \frac{1}{P}$, $\alpha_1 = P$ (car toutes les variables x_i sont égales) et on écrit β à la place de β_1 et $N - \beta$ à la place de β_2, on écrit y à la place de b_1 et $\frac{1-\beta y}{N-\beta}$ à la place de b_2, ce qu'on peut faire car $\beta b_1 + (N - \beta) b_2 = 1$. Comme $b_1 > b_2$, on a que $\frac{1}{N} < y < \frac{1}{\beta}$. On pourrait à nouveau utiliser les multiplicateurs de Lagrange ou tout simplement chercher les extrémums d'une fonction d'une variable (ici, cela revient au même). On va utiliser la deuxième méthode ici. On veut trouver $y \in]1/N, 1/\beta[$ qui minimise la fonction g qui a l'expression suivante :

$$\frac{\frac{1}{P} y}{\frac{1}{P} + \beta y^2 + \frac{1}{N-\beta} - 2\frac{2\beta y}{N-\beta} + \frac{\beta^2 y^2}{N-\beta}}.$$

Sa dérivée par rapport à y a le même signe que

$$\frac{1}{P} - \beta y^2 + \frac{1}{N-\beta} - \frac{\beta^2 y^2}{N-\beta}.$$

On en déduit la valeur de y où cette dérivée s'annule :

$$y = \sqrt{\frac{N+P-\beta}{\beta}\frac{1}{NP}}.$$

Pour savoir si ce point correspond à un minimum local ou un maximum local, il faut regarder le signe de la dérivée seconde de g par rapport à y. On voit que cette dernière a le même signe que :

$$-2\beta y - 2\frac{\beta^2 y}{N-\beta} < 0.$$

On a donc affaire à une fonction concave et y correspond à un maximum local de cette fonction. Cette fonction n'admet donc pas de minimum dans l'ouvert considéré, ce qui est une contradiction.

On en déduit donc que $P' = 1$ et $N' = 1$, ce qui correspond au cas où tous les x_i sont égaux et tous les y_j sont égaux. Par élimination des cas, ceci correspond au minimum de f. On a déjà vérifié que dans ce cas, f vaut $\frac{1}{n}$. Ce qui termine la démonstration.

Deuxième cas : $P = 1$ et $N \geqslant 2$

On démontre de la même manière que ci-dessus que $N' \leqslant 2$, puis que $N' = 1$. Ainsi, le minimum qu'on trouve vaut bien $\frac{1}{n}$.

Troisième cas : $P = 1$ et $N = 1$

Il est immédiat que dans ce cas le minimum vaut $\frac{1}{2}$ (sachant qu'on est dans le cas $n = 2$).

Exercice 7

(IMO 2020 P2) Soit a, b, c, d des réels tels que $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ et $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$$

Solution de l'exercice 7

Le voilà donc, cet exercice responsable de tous nos maux. Néanmoins, il n'est pas dénué d'intérêt.

On présente deux solutions avec deux philosophies différentes. Ne pas s'y tromper, aucune de ces solutions n'est vraiment facile.

Solution n°1 : la méthode élégante

On regarde le terme $a^a b^b c^c d^d$ comme un terme complètement artificiel, et on décide de s'en débarasser.

a, b, c, d peuvent être vus comme des poids dans une moyenne car ils sont positifs et $a + b + c + d = 1$. Ainsi, d'après l'inégalité arithmético-géométrique

$$a^a b^b c^c d^d \leqslant a * a + b * b + c * c + d * d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Il nous suffit donc de montrer que

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1$$

La deuxième idée, assez classique, est d'homogénéiser l'inégalité en utilisant l'hypothèse que $a + b + c + d = 1$ (ainsi, on se débarasse de cette hypothèse). On désire donc montrer que

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < (a + b + c + d)^3$$

Cette inégalité n'est pas aussi facile à montrer qu'elle en a l'air. Il existe deux approches pour la montrer, la première est plus astucieuse, la deuxième est plus généralisable.

Première approche : On n'a pas encore utilisé l'ordre donné aux variables. Cela va venir maintenant. Un peu d'analyse : si on développe tout à droite, on aura $4^3 = 64$ termes, tandis que si on développe tout à gauche, on aura $4 \cdot 10 = 40$ termes. On peut donc espérer qu'on pourra simplement minorer certains termes de $(a + b + c + d)^3$ par 0. C'est ainsi que l'on va se contenter de considérer uniquement les termes du développement qui contiennent un facteur a^2, b^2, c^2 ou d^2 :

$$(a+b+c+d)^3 > a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2(b+c+d)+3b^2(a+c+d)+3c^2(a+b+d)+3d^2(a+b+c)$$

On a donc

$$(a+b+c+d)^3 > a^2(a+3b+3c+3d)+b^2(3a+b+3c+3d)+c^2(3a+3b+c+3d)+d^2(3a+3b+3c+d)$$

Dû à l'ordre des variables, chaque somme entre parenthèse est minorée par $a+2b+3c+4d$, ce qui conclut.

Deuxième approche : On applique le principe "peu de variables petites et positives", c'est pourquoi on pose le changement de variables suivant :

$$a = x + y + z + t, \quad b = x + y + z, \quad c = x + y, \quad d = x,$$

et la seule hypothèse vérifiée par x, y, z, t est qu'elles sont positives (ainsi, on a réduit au minimum le nombre d'hypothèses sur nos variables). On peut réécrire l'inégalité qu'on veut montrer avec les nouvelles variables

$$(10x + 6y + 3z + t)((x + y + z + t)^2 + (x + y + z)^2 + (x + y)^2 + x^2) < (4x + 3y + 2z + t)^3.$$

On laisse le lecteur développer cette expression. La fin de la preuve ne pose alors plus de difficulté.

Solution n°2 : la méthodé brutale

L'idée ici est de se ramener à une seule variable en utilisant les majorations à disposition. Par exemple, on a

$$a + 2b + 3c + 4d \leqslant a + 3b + 3c + 3d = 3 - 2a$$

et

$$a^a b^b c^c d^d \leqslant a^a a^b a^c a^d = a$$

Et pour $a < 1/2$, on a bien $(3-2a)a < 1$.
Il faut donc traiter le cas où $a \geqslant 1/2$. On est encore plus bourrin puisque l'on écrit

$$b^b c^c d^d < (1-a)^b (1-a)^c (1-a)^d = (1-a)^{1-a}$$

On veut donc montrer que $(3-2a)a^a(1-a)^{1-a} < 1$. On appelle $f(a)$ le membre de gauche, et on désire étudier les variations de f. Une façon sympathique de procéder est d'étudier les variations du logarithme de f, noté g, plus facile à dériver et donc à étudier.

Une étude exhaustive de g'' montre que g est convexe, elle atteint donc son maximum au bord de l'intervalle $]1/2, 1]$. Puisque $g(1/2) = 0$ et que $g(1^-) = 0$, on déduit que $g \leqslant 0$, donc $f \leqslant 1$, comme voulu.

Exercice 8
(EGMO 2014 P1) Déterminer tous les réels t tels que pour tout triplet (a, b, c) désignant les longueurs des côtés d'un triangle, $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ et $c^2 + abt$ sont également les longueurs des côtés d'un triangle.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>
Quand on voit un exercice qui parle des longueurs des côtés d'un triangle, on pense au changement de variables, dit de Ravi :

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y,$$

où x, y, z n'ont pour seule propriété que d'être positives.

Pour un $t \in \mathbb{R}$, on se demande si quelque soient $x, y, z > 0$, le triplet $(A, B, C) = (a^2 + bct, b^+ cat, c^2 + abt)$ désigne les longueurs des côtés d'un triangle. On exprime A, B, C en fonction de (x, y, z) :

$$\begin{aligned} A &= y^2 + z^2 + x^2 t + zxt + xyt + zy(2+t), \\ B &= z^2 + x^2 + y^2 t + xyt + yzt + xz(2+t), \\ C &= x^2 + y^2 + z^2 t + yzt + zxt + yx(2+t). \end{aligned}$$

Par symétrie des rôles, il suffit qu'on cherche la condition nécessaire et suffisante sur t pour que $A + B - C > 0$ pour tout $x, y, z > 0$.

Tout d'abord,

$$A + B - C = x^2 t + y^2 t + z^2(2-t) + xy(t-2) + yz(2+t) + zx(2+t).$$

Étudions plusieurs cas de figure. Dans le cas où $x = y > 0$ et $z = 0$,

$$A + B - C = 2x^2 t + x^2(t-2) = (3t-2)x^2.$$

Ainsi, $A + B - C < 0$ si et seulement si $t < \frac{2}{3}$. Ainsi, pour $t < \frac{2}{3}$, par continuité, en choisissant des z petits, on trouve des $A + B - C$ strictement négatifs.

Dans le cas où $x = y = 0$ et $z > 0$,

$$A + B - C = z^2(2-t).$$

Ainsi, $A + B - C < 0$ si et seulement si $t > 2$. Ainsi, pour $t > 2$, par continuité, en choisissant des x, y suffisament petits, on trouve des $A + B - C$ strictement négatifs.

Ainsi, les seuls t qui ont une chance de marcher sont tels que $\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 2$. Vérifions que $t \in [2/3, 2]$ convient. On a

$$A + B - C > x^2t + y^2t + xy(t-2) = t\left(x^2 + y^2 + \frac{t-2}{t}xy\right) \geqslant t(x^2 + y^2 - 2xy) = (x-y)^2 \geqslant 0,$$

car $-2 \leqslant \frac{t-2}{t} \leqslant 0$ pour tout $t \in [2/3, 2]$.

Exercice 9
(EGMO 2016 P1) Soit n un entier positif impair, et soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des nombres réels positifs ou nuls. Montrer que :

$$\min_{i=1,\dots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant \max_{j=1,\dots,n}(2x_jx_{j+1}),$$

où $x_{n+1} = x_1$.

Solution de l'exercice 9
L'inégalité est contre-intuitive puisqu'on a un produit d'un côté et une somme de carrés de l'autre.

On est forcé de travailler avec l'hypothèse de n impaire. a bonne façon de voir les variables en utilisant n impaire est de placer les x_i sur un cercle. entre x_i et x_{i+1}, on mettra un $+$ si $x_{i+1} \geqslant x_i$ et un $-$ sinon. On obtient un nouveau cercle composé de $+$ et de $-$ contenant exactement n signes. Puisque n est impaire, on a deux signes consécutifs identiques, par exemple deux signes $+$ côte-à-côte ou deux signes $-$. Quitte à renverser l'ordre des x_i, on peut supposer que les deux signes identiques côte-à-côte sont identiques et donc que $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.

Alors

$$min_{1\leqslant i \leqslant n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant x_0^2 + x_1^2 \leqslant x_1^2 + x_1^2 = 2x_1^2 \leqslant 2x_1x_2 \leqslant max_{1\leqslant j \leqslant n}(2x_jx_{j+1})$$

et on a bien l'inégalité.

Exercice 10
(IMO SL 2020 A3) Soient a, b, c, d des réels strictement positifs vérifiant $(a+c)(b+d) = ac+bd$. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$$

Solution de l'exercice 10
L'hypothèse suggère de mettre ensemble les termes en a et c d'une part, et les termes en b et d d'autre part. On peut donc regrouper comme suit (et cela conserve une certaine symétrie en a et c et en b et d) :

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{a}\right)$$

Pour faire apparaître des facteurs ac et bd, on utilise l'IAG :

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{a}\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{ac}{bd}} + 2\sqrt{\frac{bd}{ac}}$$

On voudrait alors utiliser l'IAG à nouveau en reconnaissant un terme de la forme $x + 1/x$. Mais cela est très gourmand : on n'a pas encore utilisé l'hypothèse de l'énoncé et un petit raisonnement montre qu'il n'existe pas de réels a, b, c, d vérifiant $ac = bd$ et $(a+c)(b+d) = ac+bd$. En revanche, on peut tout de même poser $x = \sqrt{ac/bd}$ et déterminer la plus petite valeur que peut prendre $x + 1/x$. La fonction en x étant convexe, il suffit de déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre x pour pouvoir minorer f.

Or d'après IAG et l'hypothèse

$$ac + bd = (a + c)(b + d) \geqslant 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bd} \geqslant 4\sqrt{acbd}$$

En divisant des deux côtés par $\sqrt{acbd}$, on obtient que $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 4$. Ainsi, la somme est toujours supérieure ou égale à 8.

Pour vérifier que la valeur est bien atteignable, on utilise les cas d'égalité établis précédemment. On voit donc qu'il faut $a = c$ et $b = d$. Injecté dans l'hypothèse, cela donne $4ab = a^2 + b^2$. On déduit une équation quadratique en a/b, qui donne pour solution $a/b = 2 \pm \sqrt{3}$. La valeur 8 est donc atteinte par exemple pour $b = d = 1$ et $a = c = 2 + \sqrt{3}$.

Exercice 11
(BXMO 2012) Déterminer tous les quadruplets (a, b, c, d) de réels strictement positifs vérifiant $abcd = 1$ et :

$$a^{2012} + 2012b \quad = \quad 2012c + d^{2012} \quad \text{et} \quad 2012a + b^{2012} \quad = \quad c^{2012} + 2012d$$

Solution de l'exercice 11
Face à un tel exercice, la stratégie est la suivante :

1. Déterminer des solutions simples et se douter qu'il n'y en a pas d'autres.
2. Réinterpréter le problème comme un problème d'inégalité, et imaginer que les réels vérifiant les hypothèses sont en fait des réels vérifiant le cas d'égalité d'une certaine inégalité.
3. Démontrer une inégalité dans le cas général et conclure.

Ici, on voit que les quadruplets vérifiant $a = d$ et $b = c$, couplé avec $abcd = 1$, c'est-à-dire les quadruplets de la forme $(t, 1/t, 1/t, t)$, sont bien solutions. On devine qu'il n'y en a pas d'autres.

On réinterprète le problème comme un problème d'inégalité : on suppose que le quadruplet (a, b, c, d) vérifie $a^{2012} + 2012b = 2012c + d^{2012}$ et $2012a + b^{2012} = c^{2012} + 2012d$ et on souhaite comparer $abcd$ avec 1.

Dans la suite, on suppose que $a \neq d$ et $b \neq c$. On réécrit les deux égalités comme $a^{2012} - d^{2012} = 2012(c - b)$ et $b^{2012} - c^{2012} = 2012(d - a)$.

En multipliant les deux égalités, on trouve

$$(a^{2012} - d^{2012})(b^{2012} - c^{2012}) = 2012^2(d - a)(c - b)$$

que l'on réécrit :

$$1 = \frac{a^{2011} + a^{2010}d + \ldots + ad^{2010} + d^{2011}}{2012} \cdot \frac{b^{2011} + b^{2010}c + \ldots + bc^{2010} + c^{2011}}{2012}$$

L'inégalité des moyennes donne alors,

$$\frac{a^{2011} + a^{2010}d + \ldots + ad^{2010} + d^{2011}}{2012} > (ad)^{2011/2}$$

L'inégalité est stricte car les variables ne sont pas égales. De même

$$\frac{b^{2011} + b^{2010}c + \ldots + bc^{2010} + c^{2011}}{2012} > (bc)^{2011/2}$$

Le produit est donc strictement plus grand que 1, contredisant l'égalité établie plus haut. Les solutions sotn donc bien celles annoncées.

Exercice 12
(BXMO 2019) Soit $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$ des réels.

1) Montrer que

$$ab(a-b) + bc(b-c) + cd(c-d) + da(d-a) \leqslant \frac{8}{27}$$

2) Déterminer les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 12
Il s'agit d'un exercice de factorisation.

1) L'idée est de rassembler ensemble les termes en a et c. Si on appelle S le membre de gauche de l'inégalité :

$$\begin{aligned} S &= a[b(a-b) + d(d-a)] + c[b(b-c) + d(c-d)] \\ &= a(b-d)(a-b-d) + c(d-b)(c-b-d) \\ &= (b-d)(c-a)(b+d-a-c) \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $b + d \geqslant a + c$, $b \geqslant d$ et $c \geqslant a$. Alors par IAG

$$S \leqslant \left(\frac{b-d+c-a+b+d-c-a}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}(b-a)^3 \leqslant \frac{8}{27}$$

2) On regarde le cas dégalité du raisonnement précédent. Il faut notamment que $b = 1$ et $a = 0$. Il faut ensuite pour l'IAG que $c - a = b - d$, soit $c + d = 1$ et il faut $b + d - a - c = c - a$ soit $b + d = 2c$. On déduit que le cas d'égalité est réalisé pour $(0, 1, 2/3, 1/3)$ et ses variantes.

Exercice 13
(IMO SL 2015 A1) Soit (a_k) une suite de réels strictement positifs telle que pour tout entier k :

$$a_{k+1} \geqslant \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$.

Solution de l'exercice 13
Un exercice plus difficile qu'il n'y paraît. Il faut bien entendu commencer par regarder l'énoncé pour des petites valeurs.

Pour $n = 2$, on a $a_2 \geqslant \dfrac{1}{a_1}$, si bien que par IAG la somme est bien $\geqslant 2$.

Pour $n = 3$, cela se complique. Une observation facile est que si $a_3 \geqslant 1$, alors $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 2 + a_3 \geqslant 3$ comme voulu. Cette remarque nous encourage à procéder par récurrence.

Ainsi, pour l'hérédité, si $a_n \geqslant 1$, on a déjà gagné. Dans le cas contraire, il est désormais nécessaire de mettre se salir les mains. En passant la relation à l'inverse, on a

$$\frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k} \leqslant a_k$$

En sommant et en télescopant (c'est magnifique !) et en utilisant que $\frac{1}{a_n} \geqslant 1.$:

$$a_1 + \ldots + a_n \geqslant \frac{n-1}{a_n} + a_n \geqslant n - 2 + \frac{1}{a_n} + a_n \geqslant n$$

ce qui achève la récurrence.

6 THÈME

2 Entraînement de mi-parcours

3 Deuxième partie : Combinatoire & Géométrie

1 THÈME

2 THÈME

3 THÈME

4 THÈME

5 THÈME

6 THÈME

4 Entraînement de fin de parcours

5 Derniers cours

1 THÈME

2 THÈME

VII. Activités

VIII. Soirées

IX. Muraille

Énoncés

X. Citations mémorables