



Rapport du projet de Traitement du Signal

Lauriol François, Gras Yael

Département Sciences du Numérique - Première année
2021-2022

Table des matières

1	Introduction	4
2	Construction du signal MF-TDMA à décoder	4
2.1	Paramètres	4
2.2	Etude théorique	4
2.2.1	Calcul de la densité spectrale de puissance	4
2.2.2	Expression de la puissance du bruit à ajouter	6
2.3	Implantation	7
2.3.1	Modulation bande base	7
2.3.2	Construction du signal MF-TDMA	8
3	Mise en place du récepteur MF-TDMA	11
3.1	Démultiplexage des porteuses	11
3.1.1	Synthèse du filtre passe-bas	11
3.1.2	Synthèse du filtre passe-haut	13
3.1.3	Filtrage	15
3.2	Retour en bande de base	16
3.3	Détection du slot utile	16
3.4	Démodulation bande de base	17
4	Conclusion	18
5	Références	18

Table des figures

1	Construction du signal MF-TDMA à décoder	4
2	Signal m1	7
3	Signal m2	7
4	Densité Spectrale de Puissance de m1	8
5	Densité Spectrale de Puissance de m2	8
6	Signal à envoyer sur porteuse pour m1	9
7	Signal à envoyer sur porteuse pour m2	9
8	Signal émis sans bruit	10
9	Signal émis avec bruit	10
10	Densité Spectrale de Puissance du signal émis	11
11	Récepteur MF-TDMA à implanter	11
12	Réponse impulsionnelle du filtre passe-bas	12
13	Réponse en fréquence du filtre passe-bas	13
14	Densité Spectrale de Puissance du signal reçu avant (en bleu) et après (en orange) filtrage	13
15	Réponse impulsionnelle du filtre passe-haut	14
16	Réponse en fréquence du filtre passe-haut	15
17	Densité Spectrale de Puissance du signal reçu avant (en bleu) et après (en orange) filtrage	15

18	Signal reçu par l'utilisateur 1 après filtrage	16
19	Signal reçu par l'utilisateur 2 après filtrage	16
20	Signal reçu par l'utilisateur 1 avant démodulation	17
21	Signal reçu par l'utilisateur 2 avant démodulation	17
22	Signal reçu par l'utilisateur 1 après démodulation	18
23	Signal reçu par l'utilisateur 2 après démodulation	18

1 Introduction

L'objectif de ce projet était de simuler un échange entre un émetteur, un satellite et deux récepteurs selon certaines conventions en considérant des signaux émis dans de différents slots à des fréquences différentes avec un bruit Gaussien en fond. Cette simulation nous permettra de recevoir un indice concernant l'un des professeurs nous encadrant de ce projet.

2 Construction du signal MF-TDMA à décoder

La figure 1 présente la trame MF-TDMA à étudier, implanter puis décoder.

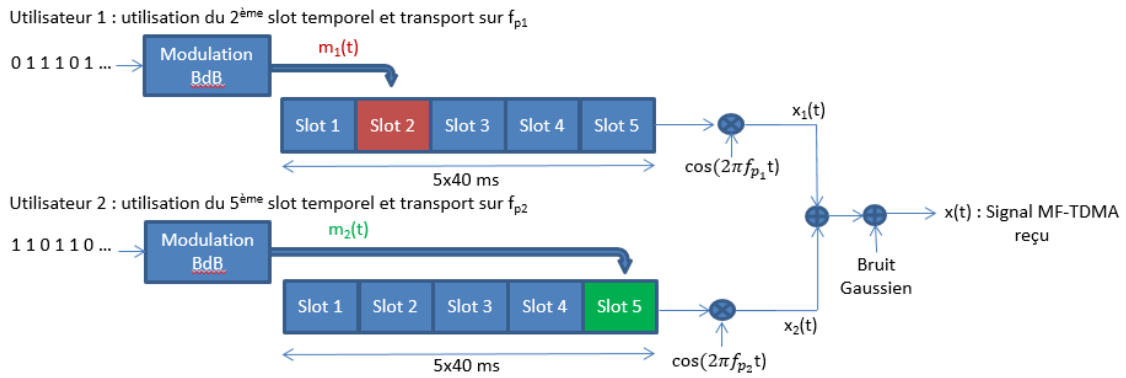


FIGURE 1 – Construction du signal MF-TDMA à décoder

2.1 Paramètres

La trame MF-TDMA est composée de 2 porteuses, $f_{p1} = 0$ kHz et $f_{p2} = 46$ kHz, contenant chacune 5 timeslots de durées $T = 40$ ms. La fréquence d'échantillonnage est fixée à 128 kHz. Les deux utilisateurs vont accéder au système en utilisant la trame de la manière suivante :

- L'utilisateur n° 1 exploite le 2^{ème} timeslot de la porteuse n° 1 (f_{p1}).
- L'utilisateur n° 2 exploite le 5^{ème} timeslot de la porteuse n° 2 (f_{p2}).

Le canal de transmission considéré sera à bruit additif blanc et Gaussien (canal AWGN : Additive White Gaussian Noise). La puissance du bruit à ajouter devra être déduite du rapport signal sur bruit (SNR : Signal to Noise Ratio) souhaité donné en dB.

2.2 Etude théorique

Le signal MF-TDMA non bruité peut s'écrire de la manière suivante :

$$x(t) = m_1(t) \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + m_2(t) \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

2.2.1 Calcul de la densité spectrale de puissance

On note $x_i(t) = m_i(t) \cos(2\pi f_i t + \phi_i)$, $i \in \{1, 2\}$

Le cosinus est stationnaire à l'ordre 0, et m_1 et ϕ_1 sont indépendants ainsi on obtient que :

$$E(x_1(t)) = E(m_1(t)) \times E(\cos(2\pi f_1 t + \phi_1)) = 0 \text{ car } E(\cos(2\pi f_1 t + \phi_1)) = 0$$

Ainsi $E(x_1(t))$ est indépendant de t .

$$\begin{aligned}
E(x_1(t) * x_1(t - \tau)) &= E(m_1(t)m_1(t - \tau) \times \cos(2\pi f_{p1}t + \phi_1)\cos(2\pi f_{p1}(t - \tau) + \phi_1)) \\
&= E(m_1(t)m_1(t - \tau)) \times E(\cos(2\pi f_{p1}t + \phi_1)\cos(2\pi f_{p1}(t - \tau) + \phi_1)) \\
&= R_{m_1}(\tau) \times \frac{1}{2}\cos(2\pi f_{p1}\tau) = R_{x_1}(\tau)
\end{aligned}$$

Comme R_{x_1} est indépendant de t , on en déduit que :

$$\begin{aligned}
S_{x_1}(f) = TF[R_{x_1}(\tau)] &= S_{m_1}(f) * \left(\frac{1}{4}(\delta(f - f_{p1}) + \delta(f + f_{p1}))\right) \\
&= \frac{1}{4}(S_{m_1}(f - f_{p1}) + S_{m_1}(f + f_{p1}))
\end{aligned}$$

Pour finir, nous savons que m_1 , m_2 , ϕ_1 , ϕ_2 sont indépendants et comme x_1 et x_2 ont la même densité alors :

$$\begin{aligned}
S(f) &= S_{x1}(f) + S_{x2}(f) \\
&= \frac{1}{4}(S_{m_1}(f - f_{p1}) + S_{m_1}(f + f_{p1}) + S_{m_2}(f - f_{p2}) + S_{m_2}(f + f_{p2}))
\end{aligned}$$

En considérant les signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$ comme déterministes à énergie finie et occupant la même bande de fréquence $[-b, b]$ autour de 0, avec $b \ll f_{p1}$ et $b \ll f_{p2}$ (et en prenant $\phi_1 = \phi_2 = 0$ pour simplifier les calculs), on obtient de même :

$$S(f) = S_{x1}(f) + S_{x2}(f) = |TF(x_1(t))(f)|^2 + |TF(x_2(t))(f)|^2$$

Or

$$TF(x_i(t))(f) = \frac{1}{2}(TF(m_i(t))(f - f_{pi}) + TF(m_i(t))(f + f_{pi}))$$

Et

$$TF(m_i(t))(f - f_{pi}) = 0$$

lorsque $TF(m_i(t))(f + f_{pi}) \neq 0$ et vice-versa car $b \ll f_{pi}$ et le signal m_i occupe la bande de fréquence $[-b, b]$.

Ainsi on a de même :

$$\begin{aligned}
S(f) &= \left|\frac{1}{2}TF(m_1(t))(f - f_{p1})\right|^2 + \left|\frac{1}{2}TF(m_1(t))(f + f_{p1})\right|^2 \\
&\quad + \left|\frac{1}{2}TF(m_2(t))(f - f_{p2})\right|^2 + \left|\frac{1}{2}TF(m_2(t))(f + f_{p2})\right|^2 \\
S(f) &= \frac{1}{4}(S_{m_1}(f - f_{p1}) + S_{m_1}(f + f_{p1}) + S_{m_2}(f - f_{p2}) + S_{m_2}(f + f_{p2}))
\end{aligned}$$

2.2.2 Expression de la puissance du bruit à ajouter

$$P_b = \frac{P_s}{10^{SNR_{db}}}$$

P_b : puissance du bruit à ajouter

P_s : puissance connue du signal MF-TDMA non bruité

SNR_{db} : rapport signal sur bruit souhaité en dB

2.3 Implantation

2.3.1 Modulation bande base

1. Calcul de N_s
 $N_s = \frac{T_s}{T_e \text{Taille}}$ avec Taille qui est la longueur du message à envoyer.
2. Tracés des signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$

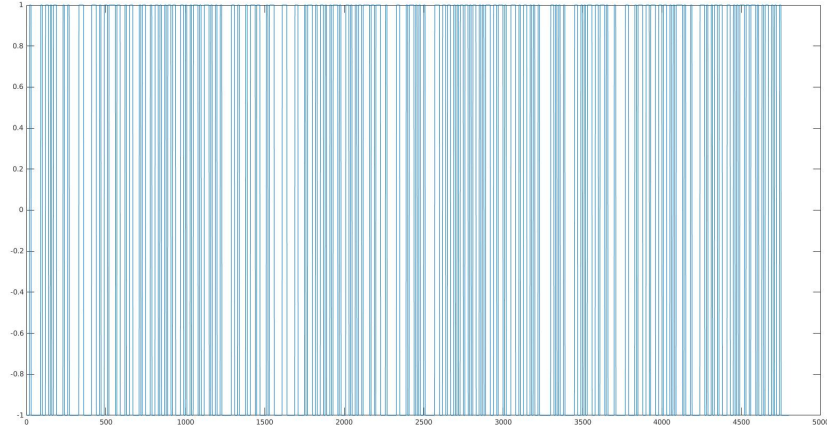


FIGURE 2 – Signal m1

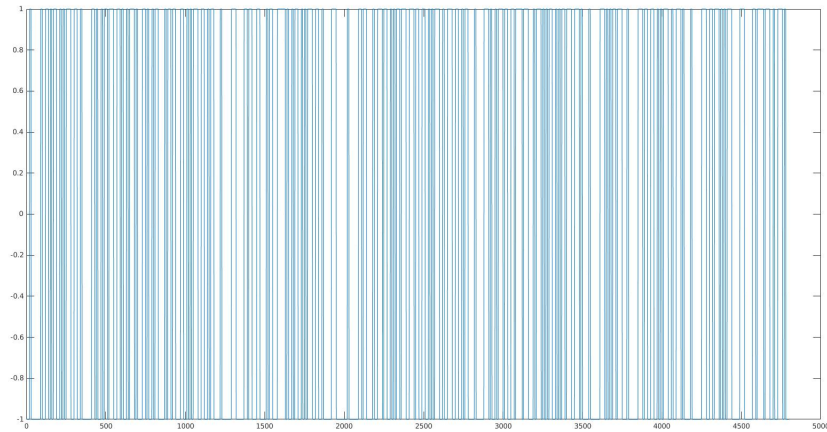


FIGURE 3 – Signal m2

3. Estimation et tracé des densités spectrales de puissance des signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$.
Concernant l'estimation on donnera notamment l'estimateur utilisé.
Estimateurs utilisés : périodogrammes

$$S_{m_1} = \frac{|fft(m_1)|^2}{length(m_1)}$$

$$S_{m_2} = \frac{|fft(m_2)|^2}{length(m_1)}$$

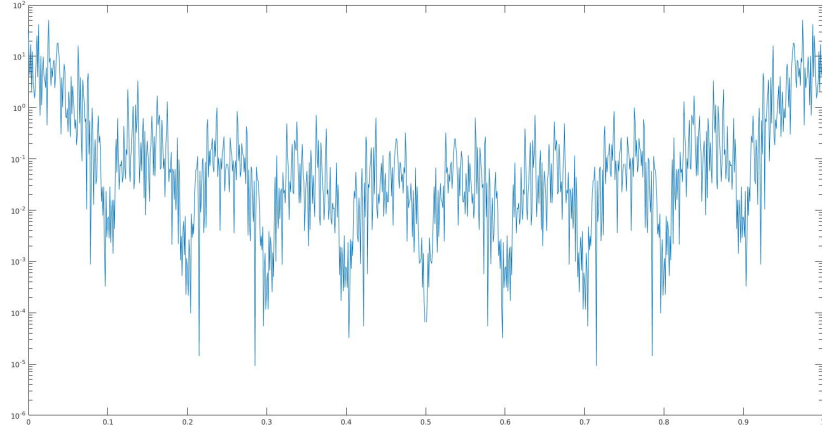


FIGURE 4 – Densité Spectrale de Puissance de m1

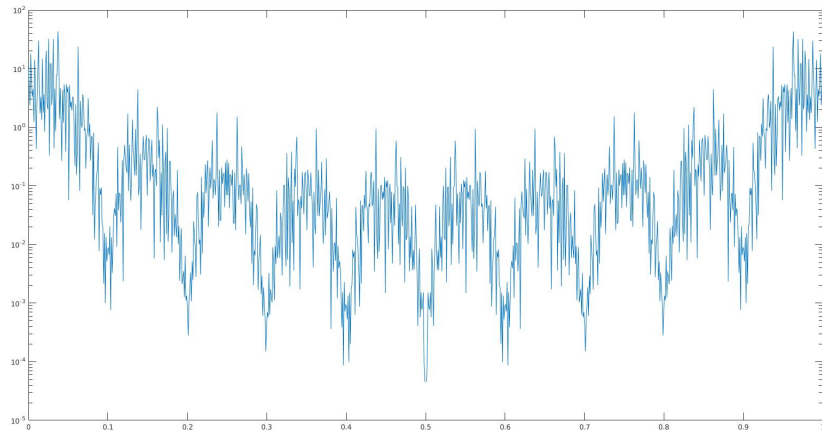


FIGURE 5 – Densité Spectrale de Puissance de m2

2.3.2 Construction du signal MF-TDMA

1. Tracé des signaux à envoyer sur porteuse pour chaque utilisateur.

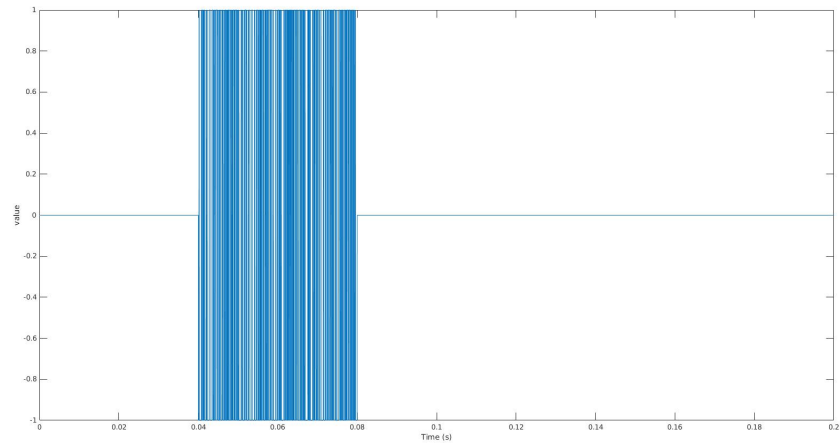


FIGURE 6 – Signal à envoyer sur porteuse pour m1

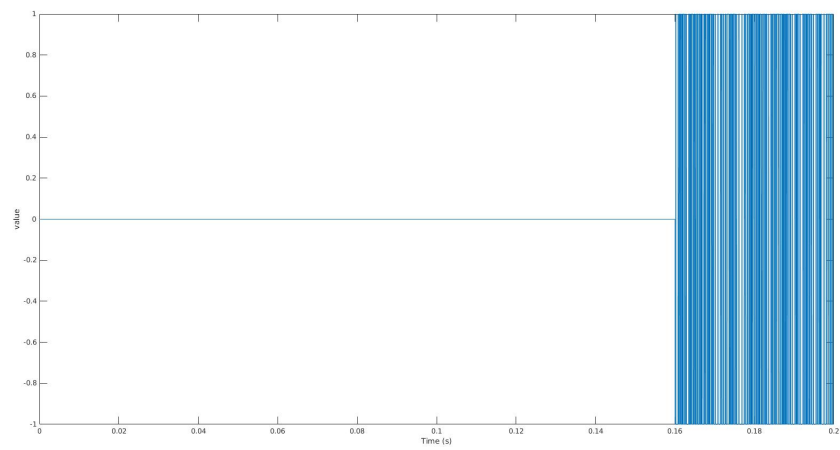


FIGURE 7 – Signal à envoyer sur porteuse pour m2

2. Tracé du signal MF-TDMA. Le tracé observé est-il conforme à ce qui est attendu ?
Explications.

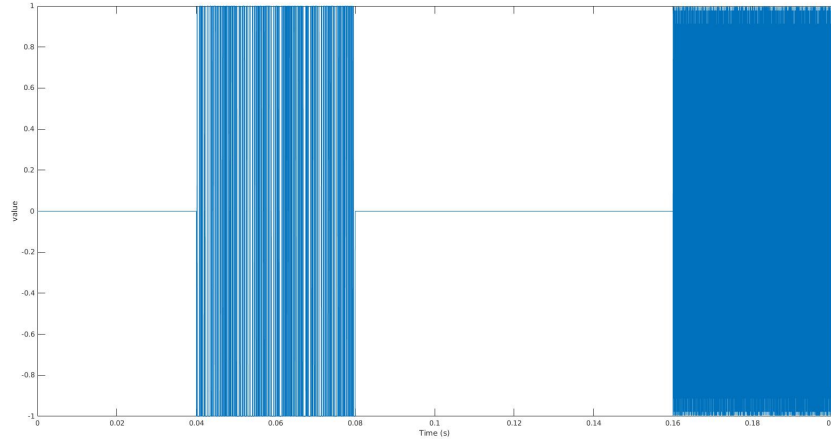


FIGURE 8 – Signal émis sans bruit

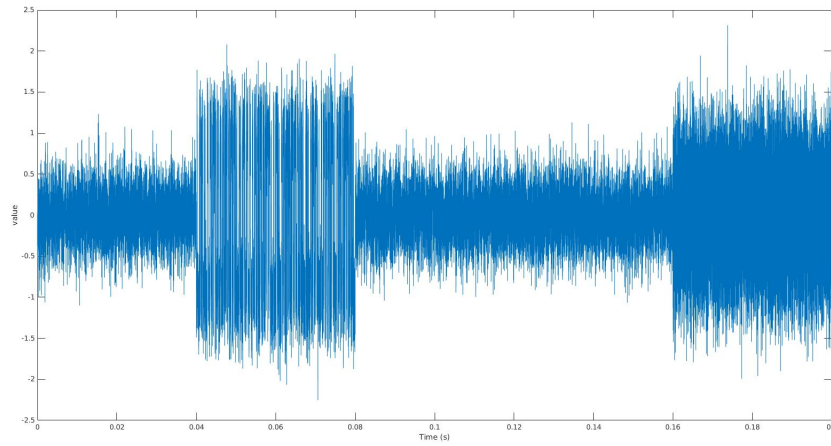


FIGURE 9 – Signal émis avec bruit

3. Estimation puis tracé de la densité spectrale de puissance du signal MF-TDMA. Le tracé observé est-il conforme à l'expression théorique obtenue précédemment ? Explications. Pour faire un appel à section : on retrouve bien le résultat obtenu dans la partie théorique (paragraphe 2.2.1).

En effet, le tracé est bien conforme à l'expression théorique obtenue précédemment. On observe bien 4 pics à 0 Hz ($f - f_0$), 46 kHz ($f - f_1$), 82 kHz ($f + f_1$) et 128 kHz ($f + f_0$).

Estimateur utilisé : périodogramme

$$S_{MF-TDMA} = \frac{|fft(x_{MF-TDMA})|^2}{length(x_{MF-TDMA})}$$

Estimateur utilisé : corrélogramme non biaisé :

$$S_{MF-TDMA} = \text{fft}(\text{xcorr}(x_{MF-TDMA}, 'unbiased'))$$

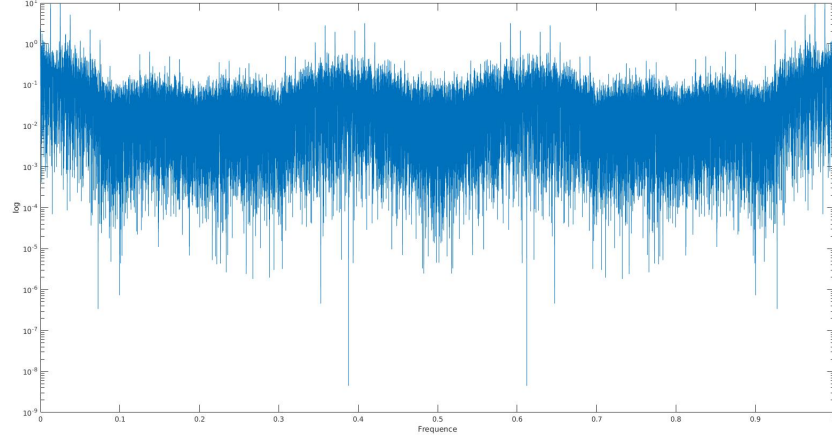


FIGURE 10 – Densité Spectrale de Puissance du signal émis

3 Mise en place du récepteur MF-TDMA

La figure 11 présente le récepteur à implanter pour retrouver, à partir du signal MF-TDMA bruité, les messages binaires envoyés par les deux utilisateurs.

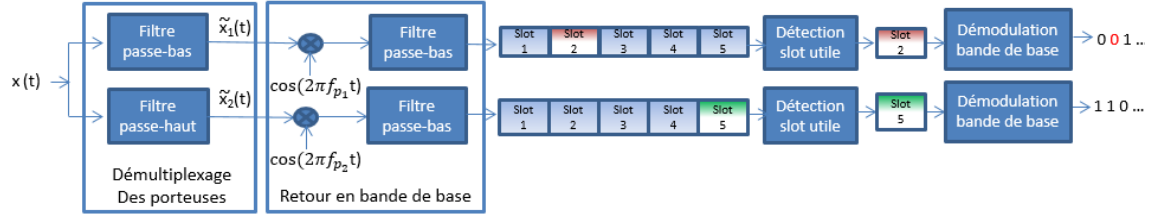


FIGURE 11 – Récepteur MF-TDMA à implanter

3.1 Démultiplexage des porteuses

Le démultiplexage des porteuses se fait par filtrage : à partir du signal MF-TDMA reçu, un filtre passe-bas permet de récupérer le signal porté par le cosinus à la fréquence f_{p1} (provenant de l'utilisateur 1), tandis qu'un filtre passe-haut permet de récupérer le signal porté par le cosinus à la fréquence f_{p2} (provenant de l'utilisateur 2).

3.1.1 Synthèse du filtre passe-bas

1. Rappel de la réponse impulsionnelle idéale du filtre passe-bas à implanter (calcul effectué dans le TP2).

$$h_{IPB}(k) = 2 \times f_c \times \text{sinc}(2 \times \pi \times f_c \times k)$$

f_c : fréquence de coupure du passe-bas sur fréquence d'échantillonnage (ici la fréquence de coupure a été choisie à 20 kHz)

$k \in [-N; N]$ (avec $2N+1$: Ordre du filtre)

2. Explications implémentation.

On effectue l'implémentation en suivant l'équation :

$$y_{\text{passe-bas}}(n) = \sum_{j=-N}^N x_{MF-TDMA}(n+j) \times h_{IPB}(j)$$

Pour que Matlab respecte cette écriture, nous devons mettre en place un retard (N). Ainsi l'implantation matlab donne :

$$\begin{aligned} y_{\text{inter}}(n) &= \text{filter}(h_{IPB}([-N..N]), 1, [x_{MF-TDMA} \text{zeros}(1, N)]) \\ y_{\text{passe-bas}} &= y_{\text{inter}}[N+1..end] \end{aligned}$$

3. Tracé de la réponse impulsionnelle et de la réponse en fréquence du filtre implanté.

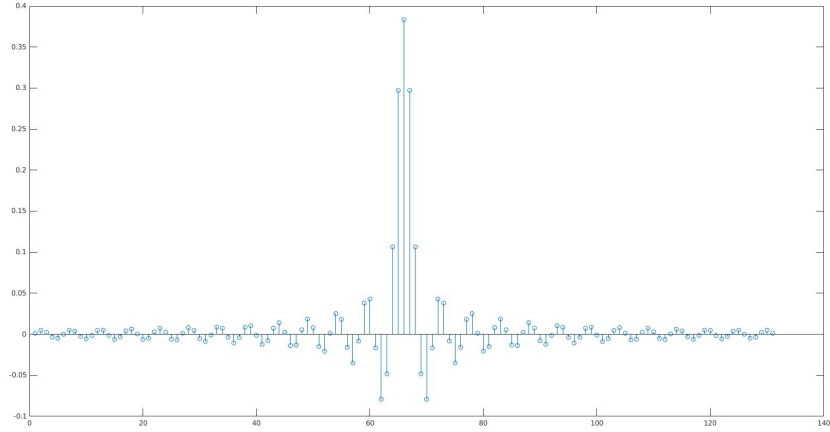


FIGURE 12 – Réponse impulsionnelle du filtre passe-bas

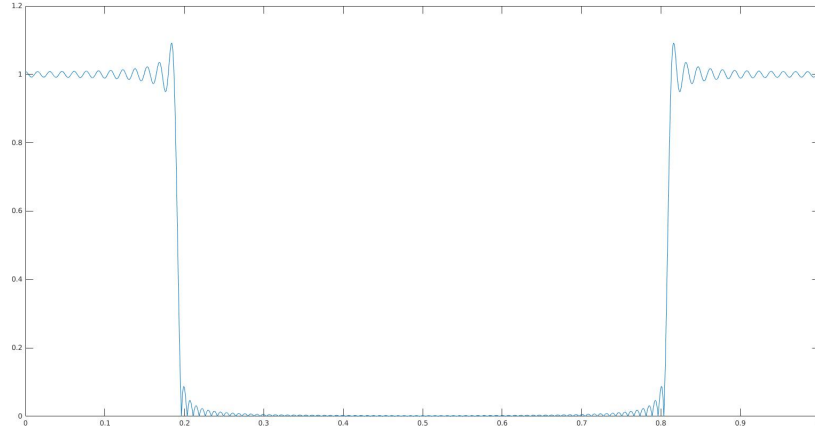


FIGURE 13 – Réponse en fréquence du filtre passe-bas

4. Tracé de la densité spectrale de puissance du signal MF-TDMA reçu et du module de la réponse en fréquences du filtre implanté. Le filtre implanté vous paraît-il réaliser la fonction souhaitée ? Explications.

Le filtre implanté semble effectivement bien réalisé la fonction souhaitée en atténuant fortement les signaux avec une fréquence supérieur à la fréquence de coupure (les signaux que l'on voit après la fréquence de Nyquist-Shannon ne sont l'image que de la périodisation des signaux à la fréquence d'échantillonnage).

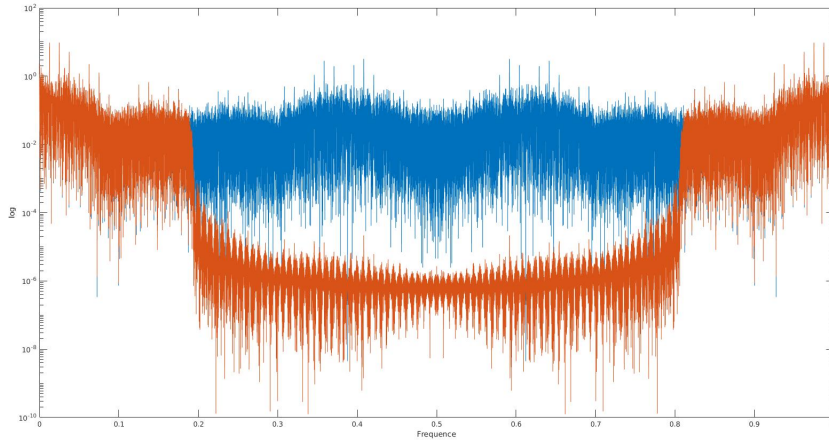


FIGURE 14 – Densité Spectrale de Puissance du signal reçu avant (en bleu) et après (en orange) filtrage

3.1.2 Synthèse du filtre passe-haut

1. Calcul de la réponse impulsionnelle idéale du filtre passe-haut à planter.

$$h_{IPH}(k) = \delta(k) - h_{IPB}(k)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} h_{IPH}(k) &= -2 \times f_c \times \text{sinc}(2 \times \pi \times f_c \times k) & \text{si } k \neq 0 \\ &= 1 - 2 \times f_c & \text{si } k = 0 \end{aligned}$$

f_c : fréquence de coupure du passe-bas sur fréquence d'échantillonnage (ici la fréquence de coupure a été choisie à 20 kHz)

$k \in [-N; N]$ (avec $2N+1$: Ordre du filtre)

2. Explications implémentation.

On effectue l'implémentation en suivant l'équation :

$$y_{\text{passe-haut}}(n) = \sum_{j=-N}^N x_{MF-TDMA}(n+j) \times h_{IPH}(k)$$

Pour que Matlab respecte cette écriture, nous devons mettre en place un retard (N). Ainsi l'implantation matlab donne :

$$\begin{aligned} y_{\text{inter}}(n) &= \text{filter}(h_{IPH}([-N..N]), 1, [x_{MF-TDMA}\text{zeros}(1, N)]) \\ y_{\text{passe-haut}} &= y_{\text{inter}}[N+1..end] \end{aligned}$$

3. Tracé de la réponse impulsionnelle et de la réponse en fréquence du filtre implanté.

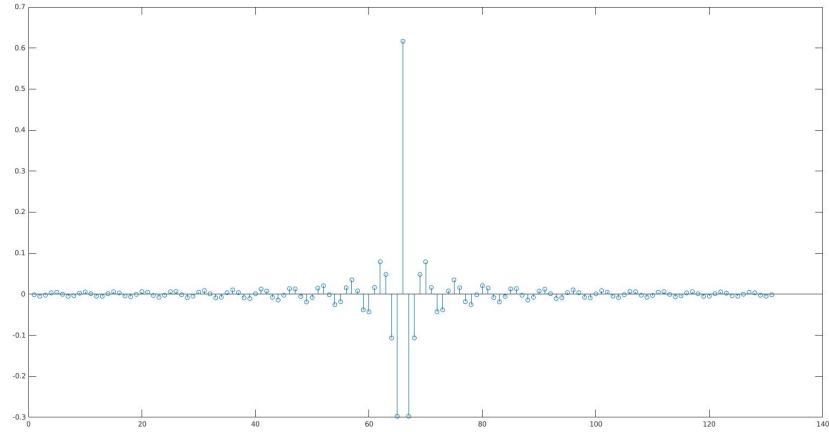


FIGURE 15 – Réponse impulsionnelle du filtre passe-haut

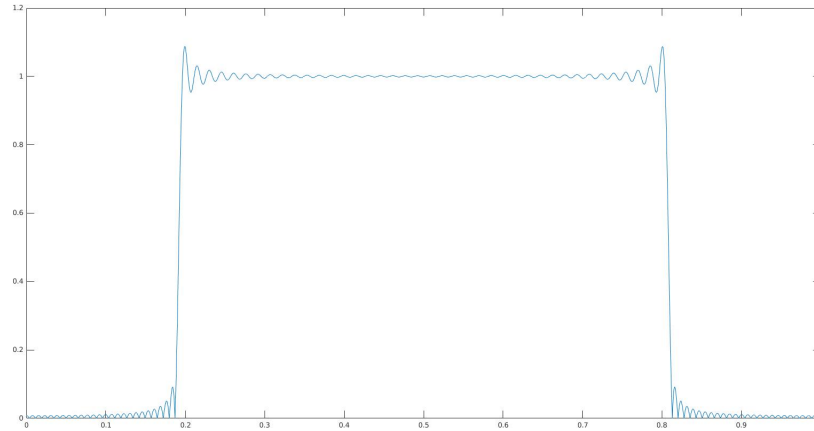


FIGURE 16 – Réponse en fréquence du filtre passe-haut

4. Tracé de la densité spectrale de puissance du signal MF-TDMA reçu et du module de la réponse en fréquences du filtre implanté. Le filtre implanté vous paraît-il réaliser la fonction souhaitée ? Explications.

Le filtre implanté semble effectivement bien réalisé la fonction souhaitée en atténuant fortement les signaux avec une fréquence inférieure à la fréquence de coupure (les signaux que l'on voit après la fréquence de Nyquist-Shannon ne sont l'image que de la périodisation des signaux à la fréquence d'échantillonnage).

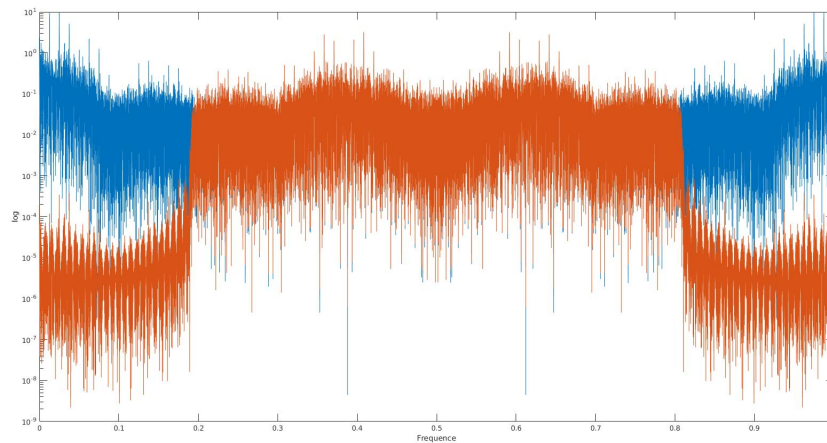


FIGURE 17 – Densité Spectrale de Puissance du signal reçu avant (en bleu) et après (en orange) filtrage

3.1.3 Filtrage

Tracés des signaux après filtrage.

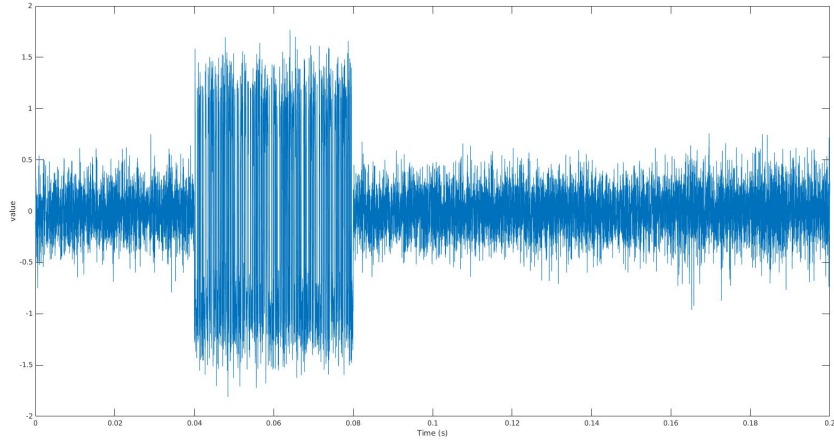


FIGURE 18 – Signal reçu par l'utilisateur 1 après filtrage

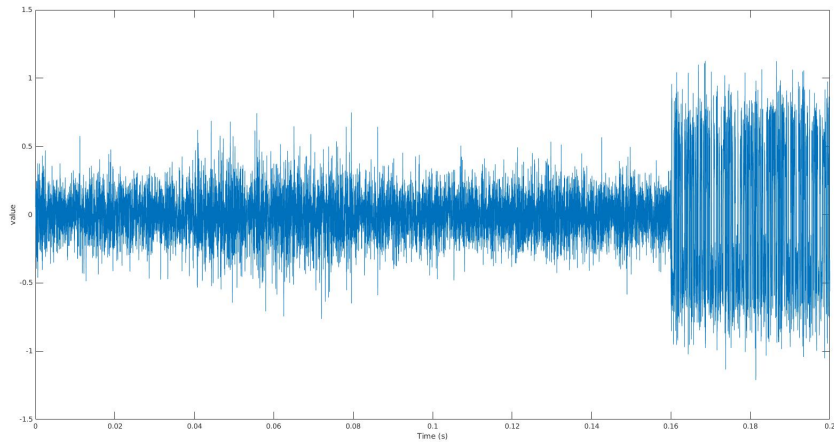


FIGURE 19 – Signal reçu par l'utilisateur 2 après filtrage

3.2 Retour en bande de base

On multiplie le message initial avec le même cosinus (même fréquence, même phase) que celui qui a servi à réaliser la transposition sur fréquence porteuse et à filtrer le résultat obtenu par un filtre-passe-bas. (avec ici une fréquence de coupure de $1.5f_{p2}$ pour seulement l'utilisateur 2 car $f_{p1} = 0$)

3.3 Détection du slot utile

Pour chaque utilisateur, afin de procéder à la détection du slot utile, on divise la trame après retour en bande de base en tranches de durée $T = 40$ ms. Afin de détecter le slot utile, on utilise un détecteur d'énergie qui résout sous la forme d'un problème d'optimisation.

$$S = \underset{i \in \{1,2,3,4,5\}}{\operatorname{argmax}} \sum_{j=1}^{\frac{T}{T_e}} X_i(j)^2$$

S : slot utile

X_i : slot $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, c'est un tableau qui contient tous les données reçues dans le slot i par l'utilisateur

3.4 Démodulation bande de base

Pour chaque utilisateur, à partir du message retrouvé dans le slot utile, on réalise une démodulation bande de base qui permet de retrouver les messages binaires envoyés. On utilise ensuite la fonction *bin2str.m* fournie afin de retrouver les messages texte.

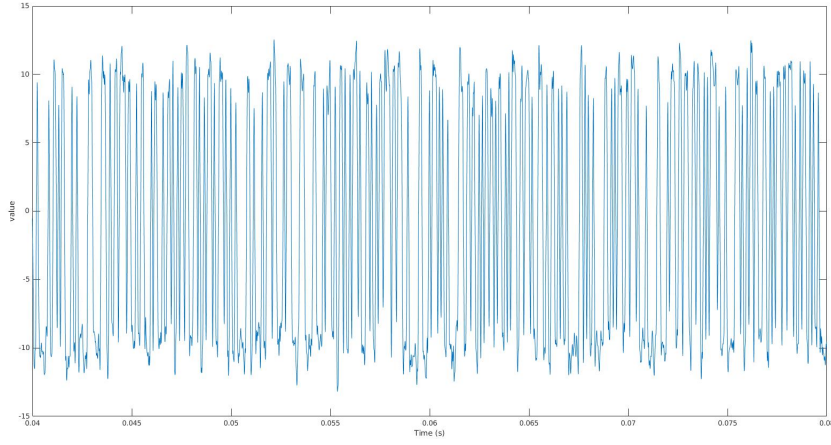


FIGURE 20 – Signal reçu par l'utilisateur 1 avant démodulation

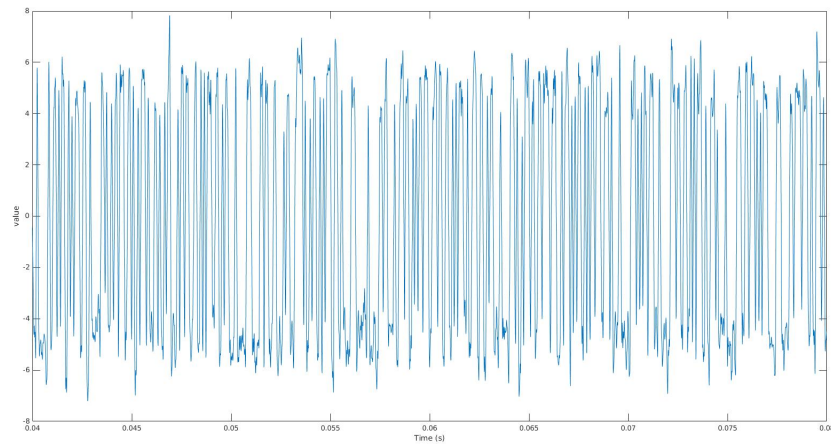


FIGURE 21 – Signal reçu par l'utilisateur 2 avant démodulation

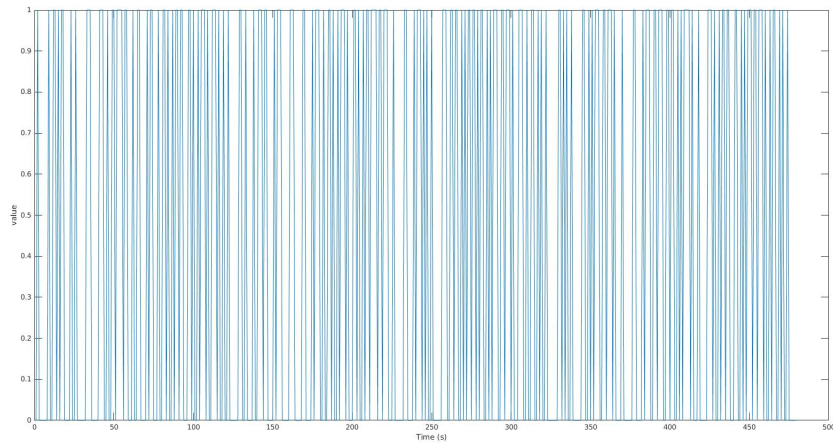


FIGURE 22 – Signal reçu par l'utilisateur 1 après démodulation

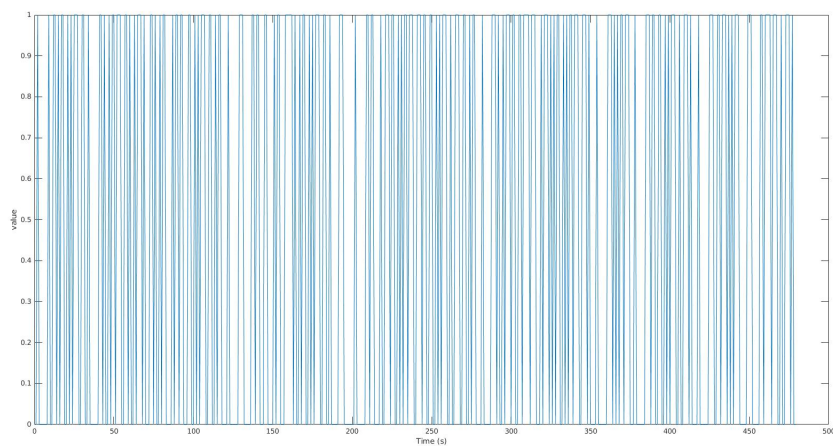


FIGURE 23 – Signal reçu par l'utilisateur 2 après démodulation

4 Conclusion

Pour conclure, nous avons découvert la méthode de traitement du signal sur l'émission et la réception d'un signal fini. Nous avons pu remarquer que si nous avons un rapport signal sur bruit inférieur à 10, le message n'est plus forcément déchiffrer. De plus, nous avons remarquer l'importance de connaître la phase car au départ nous avons ajouter un phase aléatoire qui rendait impossible de déchiffrer le bon message car cela rendait le message aléatoire. Après avoir remarquer tout cela, nous avons réussi à déchiffrer avec certitude le message envoyé sans avoir un seul bit d'erreur.

5 Références

Cours de Traitement du Signal de J-Y. Tournet et C. Pouillat

