Derivadas discretas por el lado derecho

Cesar Yael Gomez Gonzalez

29/02/2024

1 Demostraciones

1.1 Demostración segunda derivada

Definimos la serie de taylor en funcion de x + h:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 + \ldots$$

Nuestro objetivo es despejar la segunda derivada sin que quede en funcion de la primer derivada, esto se va a conseguir restando una segunda serie de taylor evaluada en (x + 2h) menos la primer serie multiplicada por 2, para conseguir en un termino identico en la primer derivada

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x) + \frac{(2h)^3}{6}f'''(x) + \ldots$$

$$2f(x+h) = 2f(x) + 2f'(x)(h) + f''(x)(h)^2 + \frac{2f'''(x)}{3!}(h)^3 + \frac{2f^{(4)}(x)}{4!}(h)^4 + \ldots$$

De tal modo que queda:

$$f(x+2h) - 2f(x+h) = f(x) + (h^2)(f''(x) + (h^3)(f'''(x) + \frac{8(h)^4}{120}f^{(4)}(x) + \ldots$$

Despejando la expresion anterior para tener solo la segunda derivada nos queda de la forma:

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h)$$

Donde O(h) representa el error que en realidasd son los terminios apartir de la segunda derivada.

1.2 Cuarta derivada y superiores

De la resolucion de la segunda derivada y la tercer derivada podemos notar que siguen un patron identico a los terminos escalares de una piramide de pascal:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Intercalando los signos como si se tratara de un binomio de la forma $(a-b)^n$, donde n nos indica el orden de la derivada que deseamos encontrar, así como la potencia de h que divide el nuevo polinomio. Mientras que la serie de funciones que vamos a acompañar con estos escalares se daría por f_{i+n}, comenzando desde la izquierda hacia la derecha descendiendo por n hasta 0. Siendo asi la 4ta derivada la podemos encontar analizando:

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

Quedaria de la forma:

$$f^{(4)}(x) = \frac{f_{i+4} - 4f_{i+3} + 6f_{i+2} - 4f_{i+1} + f_i}{h^4} + O(h)$$

En terminos del desplazamiento de h:

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x+4h) - 4f(x+3h) + 6f(x+2h) - 4f(x+h) + f(x)}{h^4} + O(h)$$