Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το διορθώσω: Georgepan

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής

Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

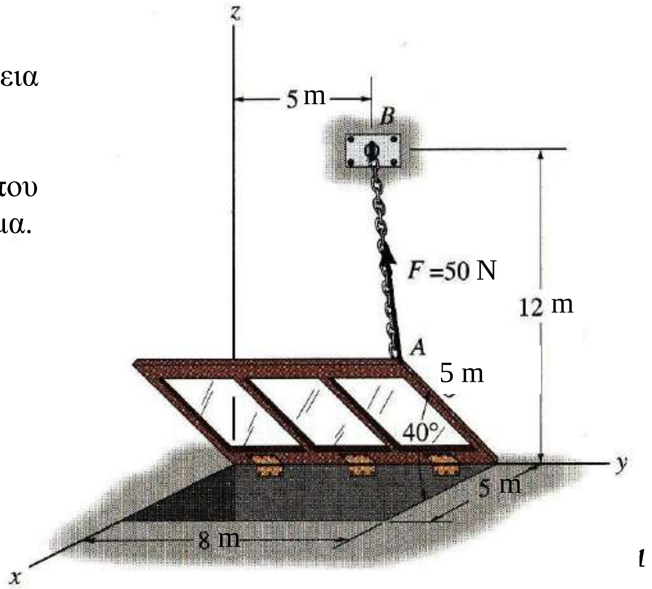
ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

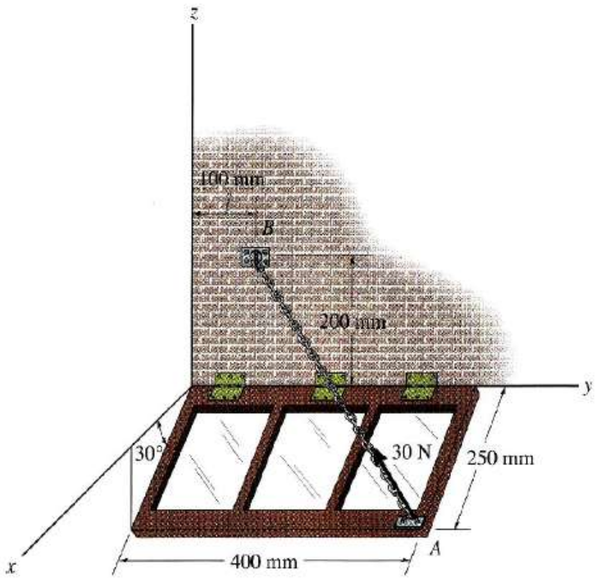
2η σειρά ασκήσεων: Διανυσματική έκφραση της δύναμης στο χώρο

Άσκηση 1

Το παράθυρο του Σχ.1 μένει ανοιχτό με τη βοήθεια της αλυσίδας ΑΒ.

1. Υπολογίστε το μήκος της αλυσίδας.
2. Εκφράστε τη δύναμη F=50 N της αλυσίδας που ασκείται στο σημείο Α ως καρτεσιανό διάνυσμα.





Σχήμα 2

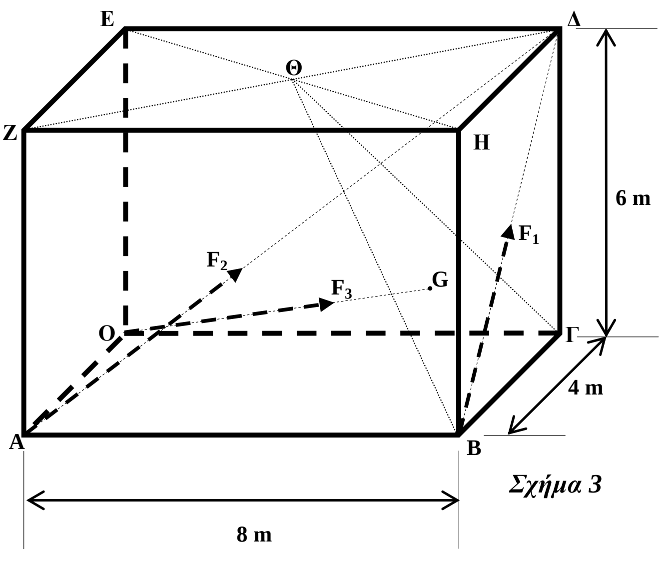
Άσκηση 2

Το παράθυρο του Σχ.2 μένει ανοιχτό με τη βοήθεια της αλυσίδας ΑΒ.

1. Υπολογίστε το μήκος της αλυσίδας.
2. Εκφράστε τη δύναμη F=30 N της αλυσίδας που ασκείται στο σημείο Α ως καρτεσιανό διάνυσμα.

Άσκηση 3

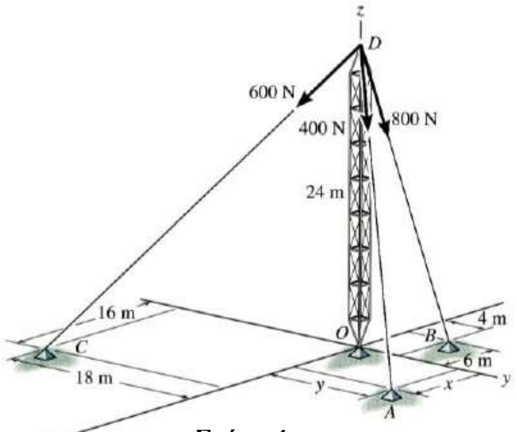
Στο ορθογώνιο παρελληλεπίπεδο του Σχ.3 δρουν τρεις δυνάμεις: Η $\mathbf{F_1}$ μέτρου 6N κατά μήκος της διαγωνίου ΒΔ, η $\mathbf{F_2}$ μέτρου 8N κατά μήκος της κυρίας διαγωνίου ΑΔ και η $\mathbf{F_3}$ μέτρου 6N κατά μήκος της OG (G το γεωμετρικό κέντρο του τριγώνου ΘΒΓ). Να γραφούν οι τρεις δυνάμεις ως καρτεσιανά διανύσματα.



Σχήμα 3

Άσκηση 4

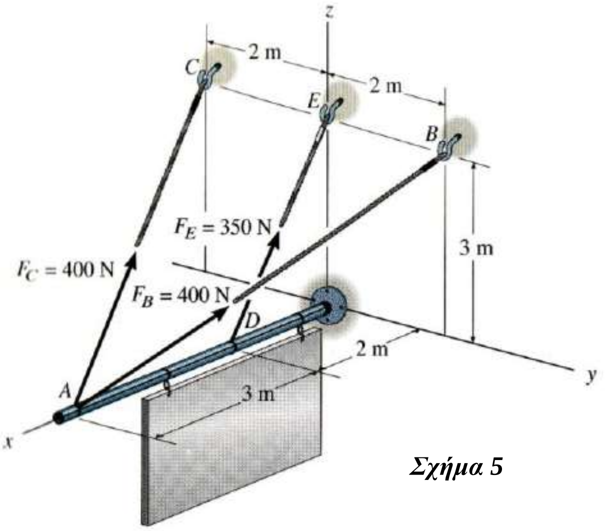
Ο ιστός OD στηρίζεται στη θέση του με τη βοήθεια τριών καλωδίων, όπως φαίνεται στο Σχ. 4. Θεωρώντας x=20 m και y=15 m, υπολογίστε τη συνισταμένη δύναμη που ασκούν τα καλώδια στον ιστό.



Σχήμα 4

Άσκηση 5

1. Εκφράστε τις τρεις δυνάμεις του Σχ.5 ως καρτεσιανά διανύσματα.
2. Υπολογίστε τη συνισταμένη των δυνάμεων F_B και F_C που δρουν στο σημείο A.

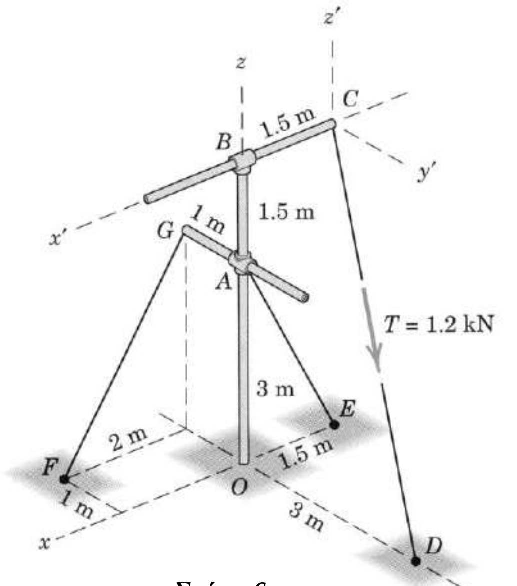


Σχήμα 5

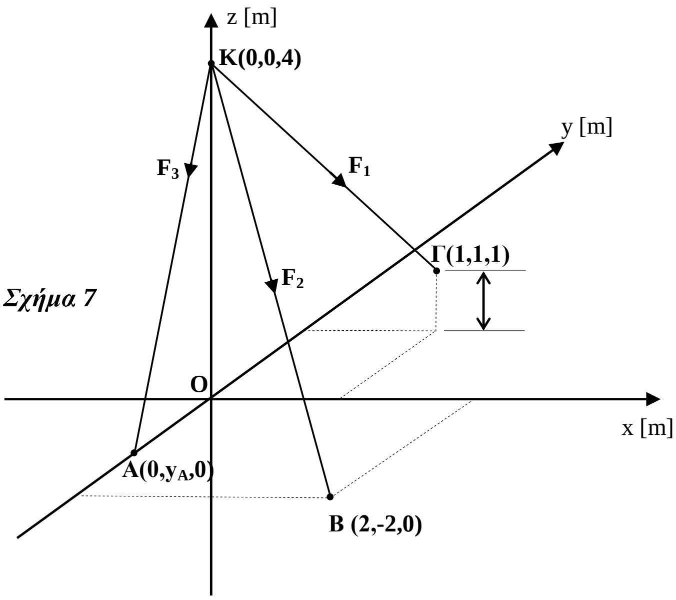
Άσκηση 6

Η κατασκευή του Σχ.5 στηρίζεται μέσω τριών καλωδίων. Ένας σφιγκτήρας επιβάλλει στο καλώδιο CD εφελκυστική δύναμη T=1.2 kN.

1. Εκφράστε τη δύναμη T ως διάνυσμα χρησιμοποιώντας το σύστημα αναφοράς Oxyz.
2. Εκφράστε τη δύναμη T ως διάνυσμα χρησιμοποιώντας το σύστημα Cx΄y΄z΄. Επηρεάζει το σύστημα αναφοράς το αποτέλεσμα;



Σχήμα 6



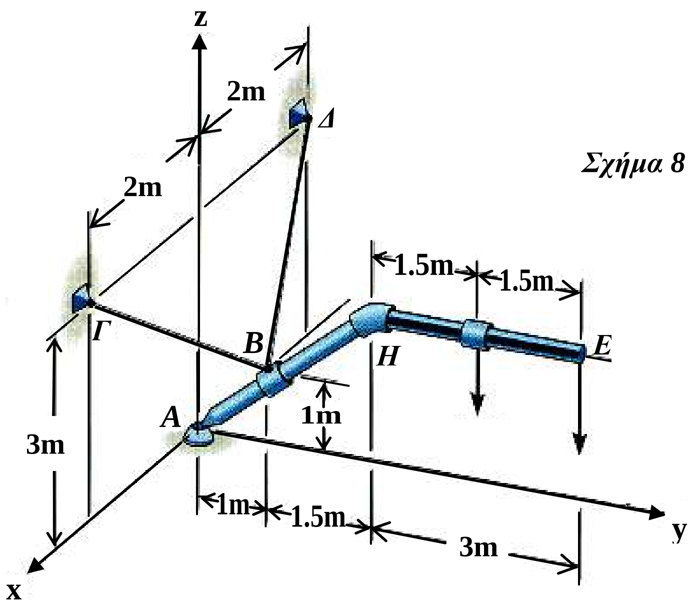
Σχήμα 7

Άσκηση 7

Τρεις συντρέχουσες δυνάμεις, $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$, μέτρων 2 kN, 3 kN και 1kN αντιστοίχως, εφαρμόζονται στο σημείο K όπως φαίνεται στο Σχ.7. Να υπολογισθεί η τιμή της συντεταγμένης y_A σημείου A (επί του άξονος Oy) έτσι ώστε το μέτρο της συνισταμένης των τριών δυνάμεων να λάβει την μέγιστη δυνατή τιμή.

Άσκηση 8

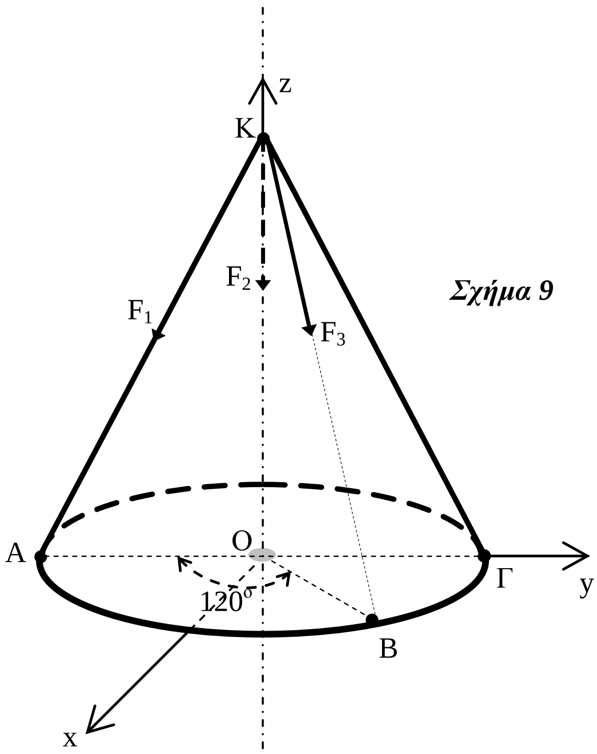
Ο ιστός ΑΒΗΕ του Σχ.8 ευρίσκεται ε-ντός του κατακορύφου επιπέδου yAz και ο βραχίονας ΗΕ είναι παράλληλος στον άξονα Ay. Το βάρος του ιστού και το σύνολο των εξωτερικώς ασκουμένων δυνάμεων δημιουργούν στα σχοινιά ΒΓ και ΒΔ δυνάμεις με συνισταμένη μέτρου 4 kN. Να ευρεθεί η διανυσματική έκφραση εκάστης των δυνάμεων που ασκούν τα σχοινιά.



Σχήμα 8

Άσκηση 9

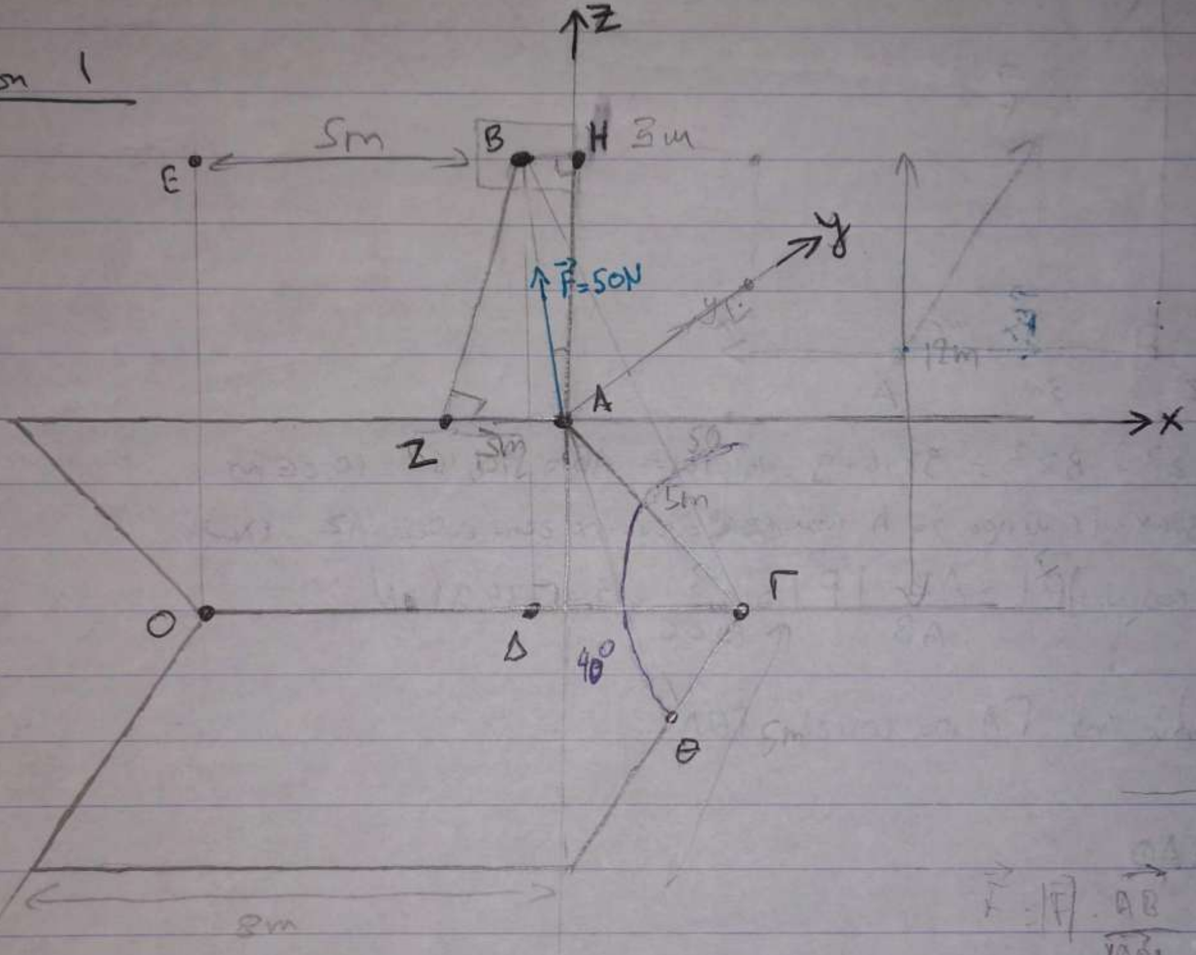
Στην κορυφή του κώνου του Σχ.9 α-σκούνται τρεις δυνάμεις F_1, F_2 και F_3 με μέτρα 16, 2 και 10 kN, αντίστοιχα. Γνωρίζοντας ότι η ακτίνα βάσεως του κώνου είναι R=2 m καθώς και ότι OK=4 m, να ευρεθεί η συνισταμένη των δυνάμεων.



Σχήμα 9

2η Σειρά ασκήσεων: Διανυσματική έκφραση της δύναμης στον χώρο

Άσκηση 1



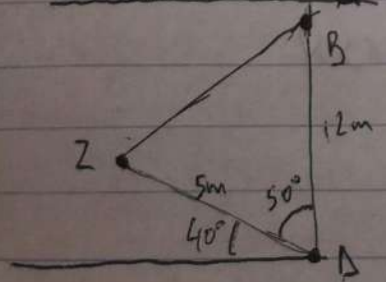
1ος Τρόπος

Έχω: $\left.\begin{array}{l} ΟΓ = 8m \\ ΕΒ = 5m \end{array}\right\} \Rightarrow ΔΓ = 3m,\ ΟΔ = 5m$

$ΒΓ = 12,37m$

Επιλέγω σημείο Ζ τέτοιο ώστε $ΑΖ=3m$: $ΒΖ \perp ΑΖ$

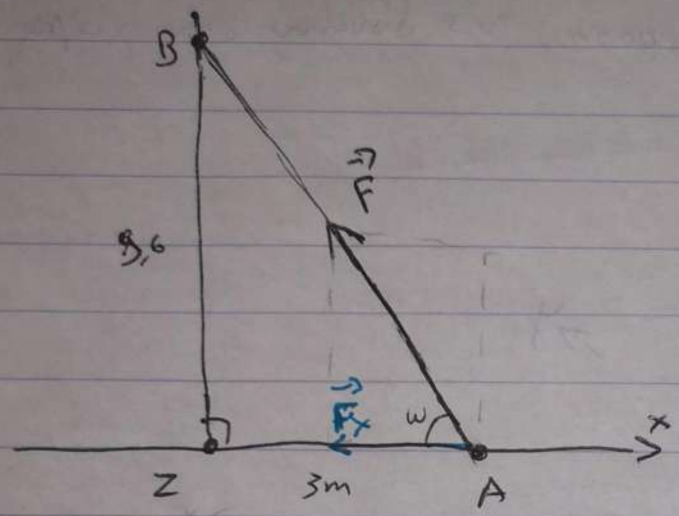
Το επίπεδο ΒΖΔ:



Έχω $BZ = \sqrt{ΔZ^2 + BΔ^2 - 2BΔ \cdot ΔZ \cdot \cos 50^\circ} = \sqrt{25+144-2\cdot 5 \cdot 12 \cdot 0,64}$

$= \sqrt{169-76,8} = \sqrt{92,2} = 9,6m$

Το επίπεδο ΒΖΑ:



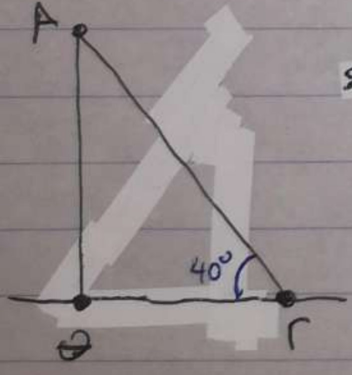
Έχω $AB^2 = AZ^2 + BZ^2 = 92,16 + 9 = 101,16 \Leftrightarrow AB = \sqrt{101,16} = 10,06m$

Θεωρώ σύστημα αξόνων με κέντρο το Α και άξονα x στην ευθεία ΑΖ έχω:

$|\vec{F_x}| = \cos\omega \cdot |\vec{F}| = \frac{AZ}{AB} |\vec{F}| = \frac{3}{10,06} \cdot 50 = 14,91N$

ΓΘ: Η προβολή της ΓΑ στο επίπεδο ΓΘΔ.

Το επίπεδο ΓΑΘ

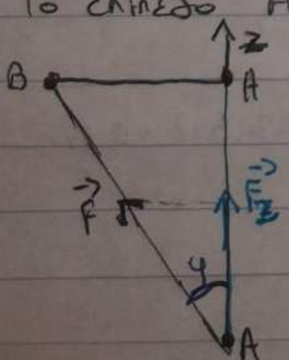


$\sin 40° = \frac{A\Theta}{A\Gamma} \Leftrightarrow A\Theta = A\Gamma \sin 40 = 0,64 \cdot 5 = 3,21m$

Άρα $AH = 12 - 3,21 = 8,79m$

επίσης $\Gamma\Theta = A\Gamma \cos(40) = 5 \cdot 0,77 = 3,83m$

Το επίπεδο ΑΒΗ



$\cos\varphi = \frac{|\vec{F_z}|}{|\vec{F}|} \Leftrightarrow \vec{F_z} = \cos\varphi |\vec{F}| = \frac{AH}{AB} |\vec{F}| = \frac{8,79}{10,06} \cdot 50 = 43,69N$

Άρα έχω $\vec{F} = -14,91\hat{i} + y\hat{j} + 43,69\hat{k}$

Όμως $|\vec{F}| = 50 \Leftrightarrow \sqrt{(14,91)^2 + y^2 + (43,69)^2} = 50 \Leftrightarrow (14,91)^2 + y^2 + (43,69)^2 = 2500$

$\Leftrightarrow 222,31 + y^2 + 1908,82 = 2500 \Leftrightarrow y^2 = 368,87 \Leftrightarrow y = 19,2$

Άρα $\vec{F} = -14,91\hat{i} + 19,2\hat{j} + 43,69\hat{k}$

<u>2ος Τρόπος</u>

Ξέρω ότι: $A\Theta = 3,21m$

$\Gamma\Theta = 3,83m$

~~Άρα~~ Παίρνοντας σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Ο και τον y πάνω ευθεία ΟΓ έχω:

$$\left.\begin{matrix} A(3,83,\ 8,\ 3,21) \\ B(0,\ 5,\ 12) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{AB} = -3,83\hat{i} + 3\hat{j} + 8,8\hat{k}$$

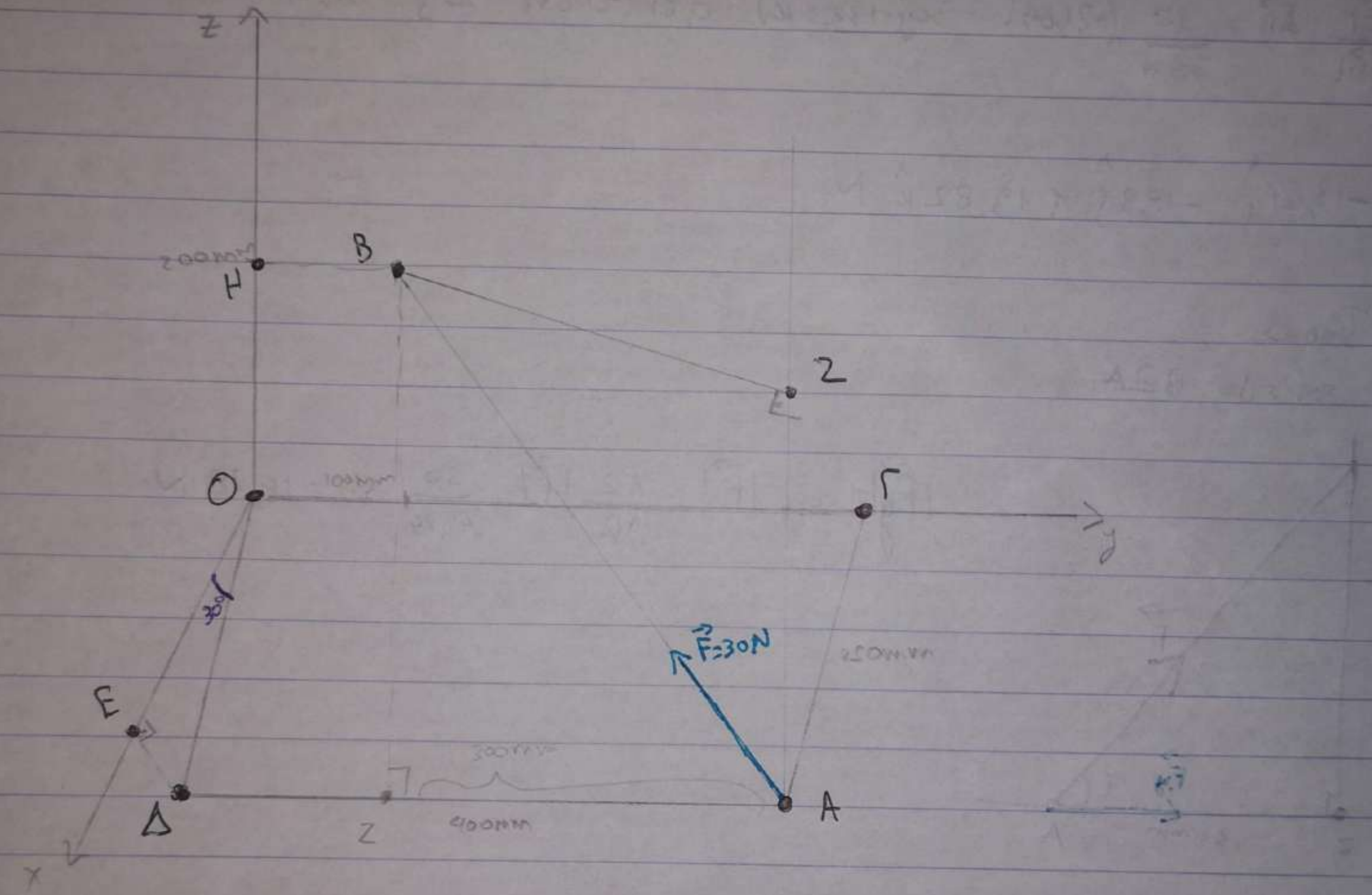
Άρα $|\vec{AB}| = \sqrt{(3,83)^2 + 9 + (8,8)^2} = 10,06m$

Επίσης έχω

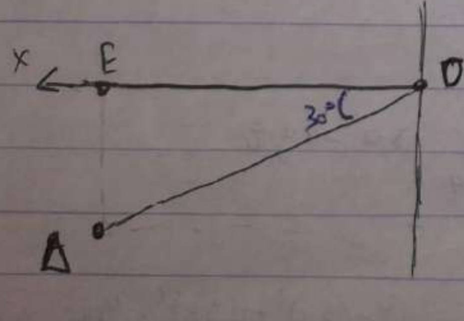
$$\vec{F} = \frac{|\vec{F}| \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{50}{10,06}\left(-3,83\hat{i} + 3\hat{j} + 8,8\hat{k}\right) = 4,97\left(-3,83\hat{i} + 3\hat{j} + 8,8\hat{k}\right) =$$

$$= -19,03\hat{i} + 14,91\hat{j} + 43,74\hat{k}$$

Άσκηση 2



Το επίπεδο ΟΕΔ



$$ΔE = \sin(30)\cdot OΔ = \frac{1}{2}\cdot 250 = 125mm$$

$$OE = \cos(30)\, OΔ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 250 = 125\sqrt{3} = 216,51\,mm$$

Άρα έχω: $\left.\begin{array}{l} A(216,51,\ 400,\ -125) \\ B(0,\ 100,\ 200) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AB} = -216,51\hat{i} - 300\hat{j} + 325\hat{k}$ mm

$= -21,65\hat{i} - 30\hat{j} + 32,5\hat{k}$ cm

Άρα $|\vec{AB}| = \sqrt{(21,65)^2 + 30^2 + (32,5)^2} = \sqrt{468,72 + 900 + 1056,25} = \sqrt{2424,97} = 49,24$ cm

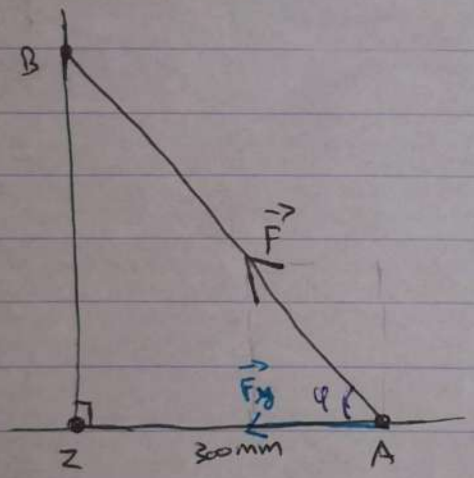
1ος Τρόπος

$\vec{F} = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{AB}|} \vec{AB} = \frac{30}{49,24}(-21,65\hat{i} - 30\hat{j} + 32,5\hat{k}) = 0,61(-21,65\hat{i} - 30\hat{j} + 32,5\hat{k})$

$= -13,21\hat{i} - 18,3\hat{j} + 19,82\hat{k}$ N

2ος Τρόπος

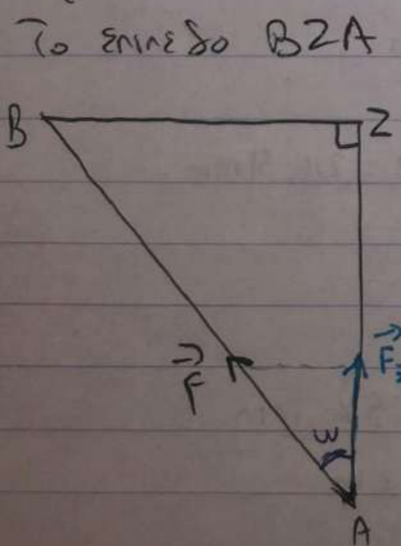
Το επίπεδο ΒΖΑ



$|\vec{F_y}| = \cos\varphi \cdot |\vec{F}| = \frac{AZ}{AB} \cdot |\vec{F}| = \frac{30}{49,24} \cdot 30 = 18,28$ N

Θεωρώ Ζ τέτοιο ώστε ΑΖ κάθετη στο επίπεδο ΔΓΑ και ΑΖ = ΔΕ + ΟΗ = 12,5 + 20 = 32,5 m

Το επίπεδο ΒΖΑ



$|\vec{F_z}| = \cos\omega \cdot |\vec{F}| = \frac{AZ}{AB} \cdot |\vec{F}| = \frac{32,5}{49,24} \cdot 30 = 19,8$

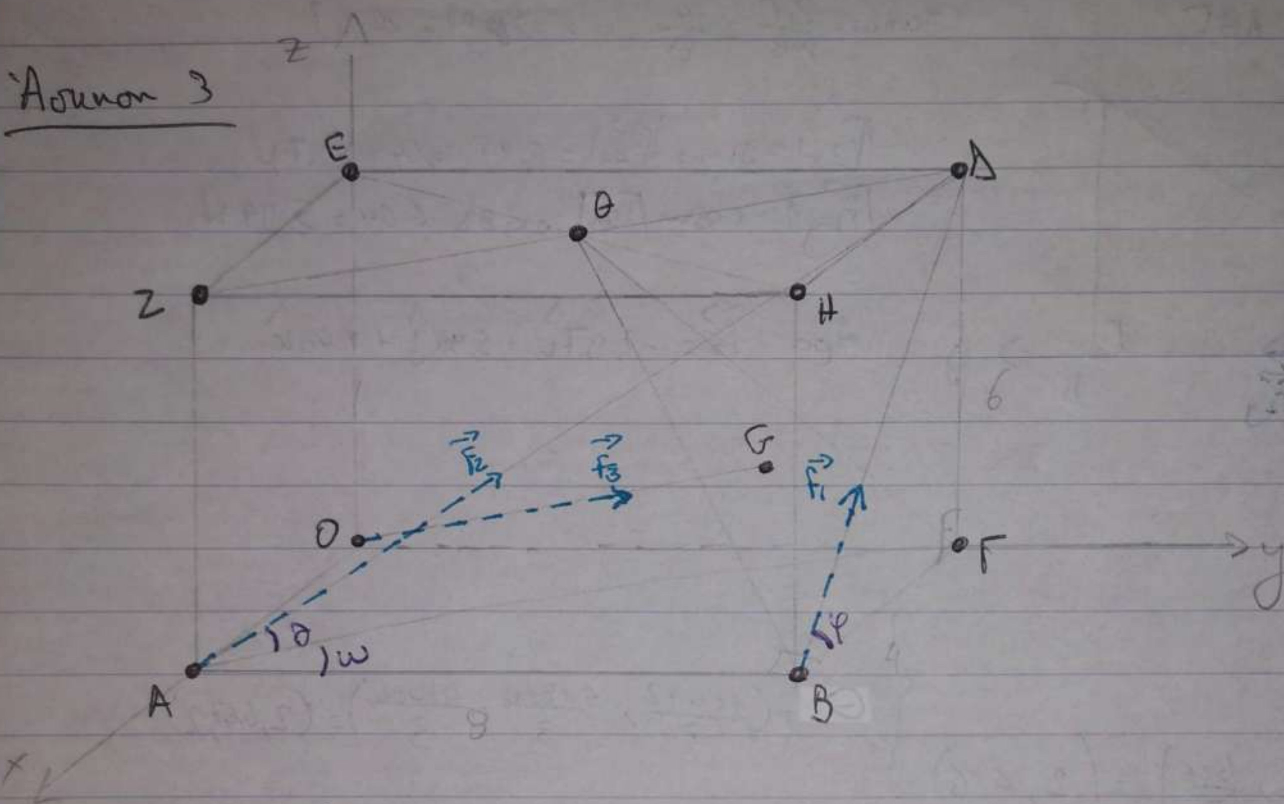
Άρα έχω $\vec{F} = -x\hat{i} - 18,3\hat{j} + 19,8\hat{k}$

όμως $|\vec{F}| = 30 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (18,3)^2 + (19,8)^2} = 30 \Leftrightarrow x^2 + (18,3)^2 + (19,8)^2 = 900$

$\Leftrightarrow x^2 + 334,89 + 392,04 = 900 \Leftrightarrow x^2 = 173,07 \Leftrightarrow x = 13,2$

Άρα $\vec{F} = -13,2\hat{i} - 18,3\hat{j} + 19,8\hat{k}$

Άσκηση 3



$AB = 8m$

$B\Gamma = 4m$

$\Gamma\Delta = 6m$

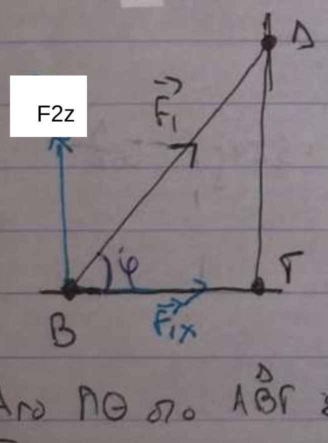
$|\vec{F_1}| = 6N$

$|\vec{F_2}| = 8N$

$|\vec{F_3}| = 6N$

Έχω $\tan\varphi = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \Rightarrow \varphi = 56,31^\circ$

Το επίπεδο ΒΓΔ:



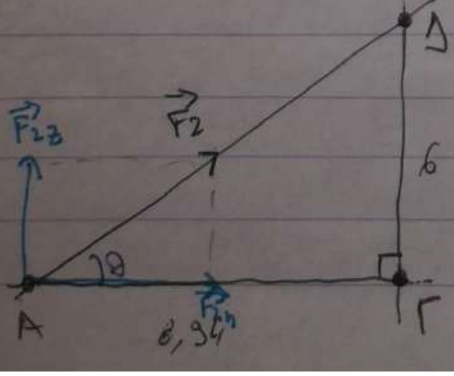
$|\vec{F_{1x}}| = \cos\varphi|\vec{F_1}| = \cos(56,31)\cdot 6 = 0,55\cdot 6 = 3,33N$

$|\vec{F_{1z}}| = \sin\varphi|\vec{F_1}| = \sin(56,31)\cdot 6 = 4,99N$

Άρα $\vec{F_1} = -3,33\hat{i} +$ 0j + 4,99k

Από ΠΘ στο $A\hat{B}\Gamma$ έχω $A\Gamma = \sqrt{AB^2 + B\Gamma^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} = 8,94m$

Το επίπεδο ΑΓΔ:



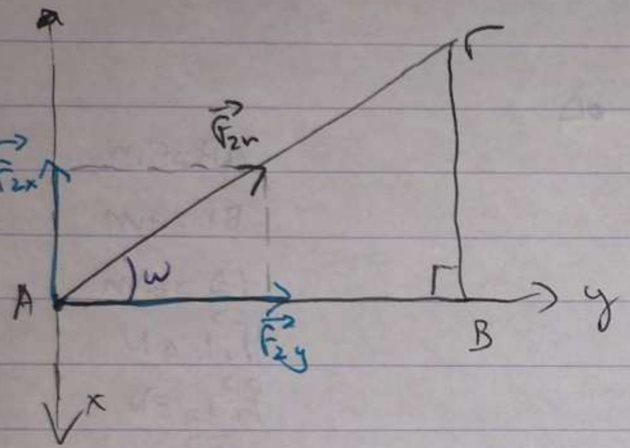
$\tan\theta = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{6}{8,94} = 0,67 \Rightarrow \theta = 33,87^\circ$

$|\vec{F_{2z}}| = \sin\theta|\vec{F_2}| = 0,56\cdot 8 = 4,46\,N$

$|\vec{F_{2n}}| = \cos\theta|\vec{F_2}| = 6,64N$

Άρα $\vec{F_2} = 6,64\hat{n}, +4,46\hat{k}$

Το επιπεδο ΑΒΓ



$\tan\omega = \frac{B\Gamma}{AB} = \frac{4}{8} = 0,5 \Rightarrow \omega = 26,57^\circ$

$|\vec{F}_{2x}| = \sin\omega \cdot |\vec{F}_{2n}| = 0,45 \cdot 6,64 = 2,97\,N$

$|\vec{F}_{2y}| = \cos\omega\, |\vec{F}_{2n}| = 0,89 \cdot 6,64 = 5,94\,N$

Άρα $\vec{F}_2 = -2,97\hat{i} + 5,94\hat{j} + 4,46\hat{k}$

Επισης εχω:

$B(4,8,0)$

$\Gamma(0,8,0)$

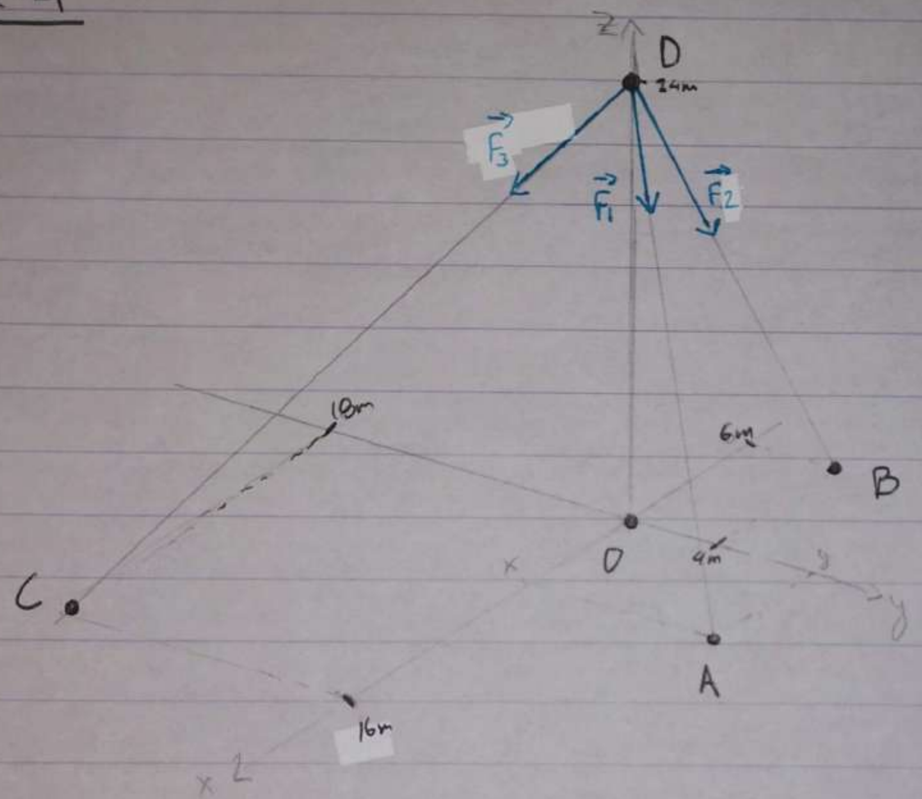
$\Theta\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+8}{2}, \frac{6+6}{2}\right) = (2,4,6)$

$\Rightarrow G\left(\frac{4+0+2}{3}, \frac{4+8+8}{3}, \frac{0+0+6}{3}\right) = (2, 6{,}67, 2)$

Άρα $\vec{OG} = 2\hat{i} + 6,67\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow |\vec{OG}| = \sqrt{4+4+(6,67)^2} = \sqrt{8+44,49} = 7,24\,m$

Άρα $\vec{F}_3 = \frac{|\vec{F}_3|}{|\vec{OG}|} \cdot \vec{OG} = \frac{6}{7,25}\left(2\hat{i} + 6,67\hat{j} + 2\hat{k}\right) = 0,83\left(2\hat{i} + 6,67\hat{j} + 2\hat{k}\right) = 1,66\hat{i} + 5,54\hat{j} + 1,66\hat{k}$

Άσκηση 4



$A(x, y, 0)$

$B(-6, 4, 0)$

$C(16, -18, 0)$

$D(0, 0, 24)$

$\vec{F_1} = 400N$

$\vec{F_2} = 800N$

$\vec{F_3} = 600N$

$x = 20m$

$y = 15m$

$\vec{DC} = 16\hat{i} - 18\hat{j} - 24\hat{k}$, $|\vec{DC}| = \sqrt{16^2 + 18^2 + 24^2} = \sqrt{1156} = 34\,m$

$\vec{DB} = -6\hat{i} + 4\hat{j} - 24\hat{k}$, $|\vec{DB}| = \sqrt{6^2 + 4^2 + 24^2} = \sqrt{628} = 25{,}06\,m$

$\vec{DA} = x\hat{i} + y\hat{j} - 24\hat{k} = 20\hat{i} + 15\hat{j} - 24\hat{k}$, $|\vec{DA}| = \sqrt{20^2 + 15^2 + 24^2} = \sqrt{1201} = 34{,}66\,m$

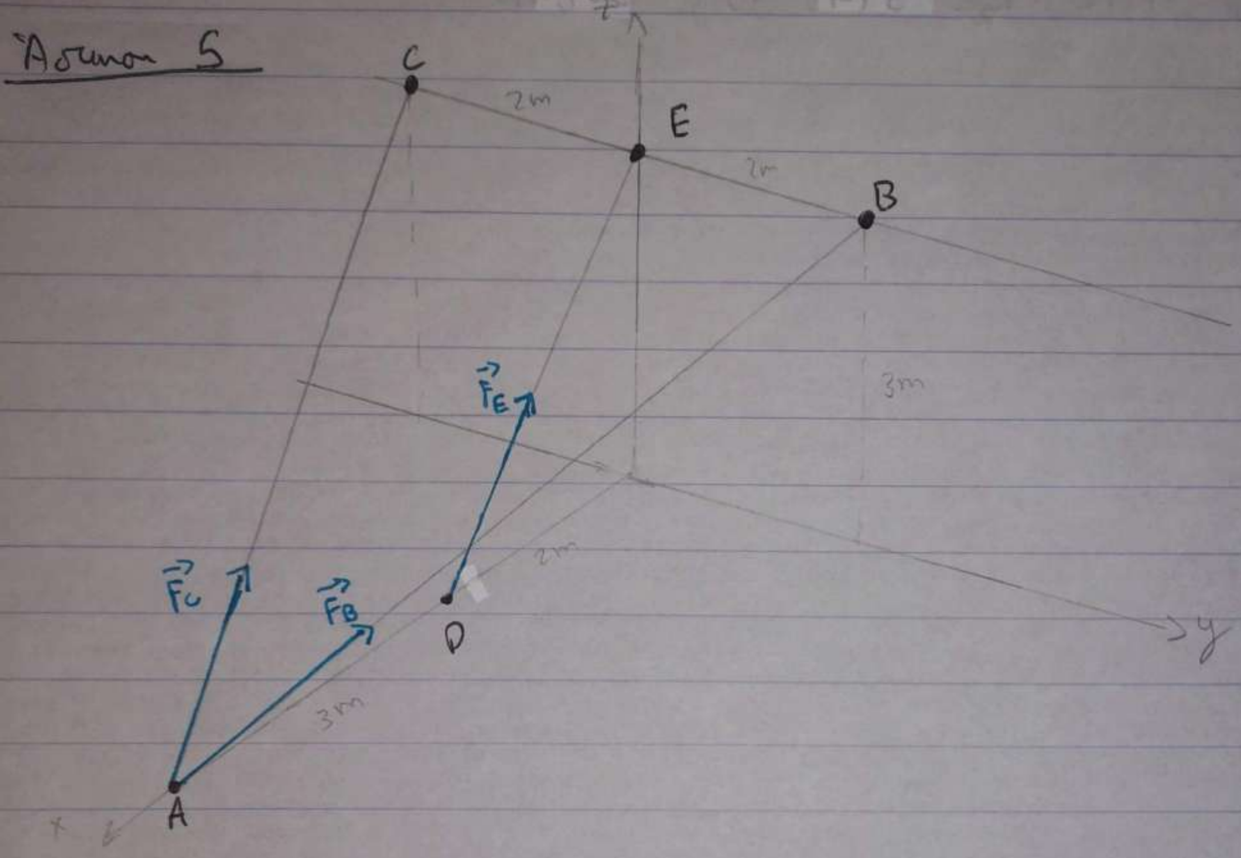
$$\vec{F_1} = \frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{DA}|}\vec{DA} = \frac{400}{34{,}66}(20\hat{i} + 15\hat{j} - 24\hat{k}) = 11{,}54\,(20\hat{i} + 15\hat{j} - 24\hat{k}) = 230\hat{i} + 173{,}1\hat{j} - 276{,}96\hat{k}$$

$$\vec{F_2} = \frac{|\vec{F_2}|}{|\vec{DB}|}\vec{DB} = \frac{800}{25{,}06}\vec{DB} = 31{,}92(-6\hat{i} + 4\hat{j} - 24\hat{k}) = -191{,}52\hat{i} + 127{,}68\hat{j} - 766{,}08\hat{k}$$

$$\vec{F_3} = \frac{|\vec{F_3}|}{|\vec{DC}|}\vec{DC} = \frac{600}{34}\vec{DC} = 17{,}65(16\hat{i} - 18\hat{j} - 24\hat{k}) = 282{,}4\hat{i} - 317{,}7\hat{j} - 423{,}6\hat{k}$$

Άρα $\vec{F} = 322{,}88\hat{i} - 16{,}92\hat{j} - 1466{,}64\hat{k}$

Άσκηση 5



Έχω $\vec{F_C} = 400N$, $\vec{F_E} = 350N$, $\vec{F_B} = 400N$ | $A(5,0,0)$ $C(0,-2,3)$ $D(2,0,0)$ $B(0,2,3)$ $E(0,0,3)$

$\vec{AC} = -5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $|\vec{AC}| = \sqrt{5^2+2^2+3^2} = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38} = 6{,}16\ m$

$\vec{AB} = -5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $|\vec{AB}| = 6{,}16m$

$\vec{DE} = -2\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}$, $|\vec{DE}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = 3{,}61m$

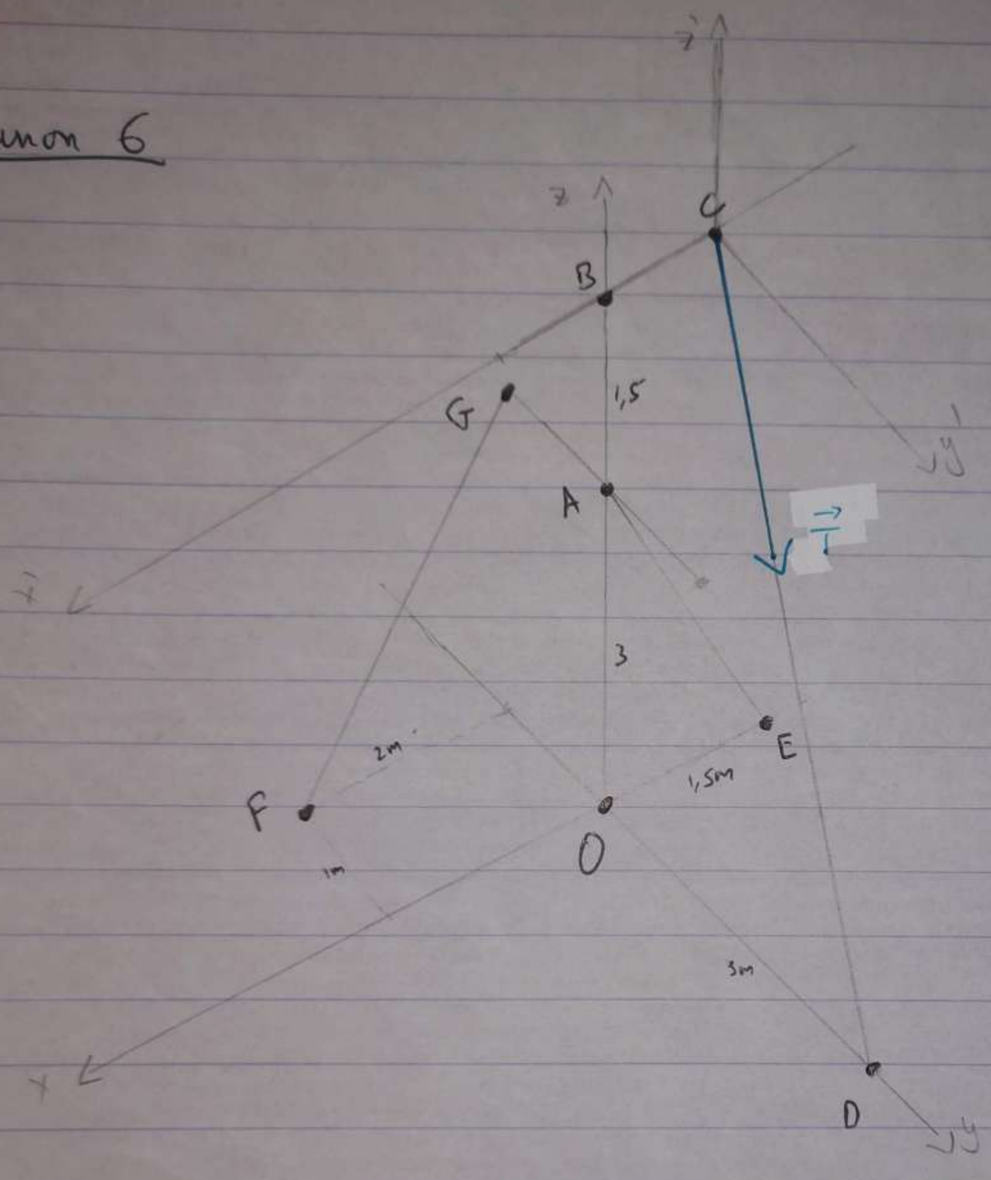
Άρα $\vec{F_C} = \frac{|\vec{F_C}|}{|\vec{AC}|}\vec{AC} = \frac{400}{6{,}16}\vec{AC} = 64{,}94(-5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = -324{,}7\hat{i} - 129{,}88\hat{j} + 194{,}82\hat{k}$

$\vec{F_B} = \frac{|\vec{F_B}|}{|\vec{AB}|}\vec{AB} = \frac{400}{6{,}16}\vec{AB} = 64{,}94(-5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = -324{,}7\hat{i} + 129{,}88\hat{j} + 194{,}82\hat{k}$

$\vec{F_E} = \frac{|\vec{F_E}|}{|\vec{DE}|}\vec{DE} = \frac{350}{3{,}61}\vec{DE} = 96{,}95(-2\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}) = -193{,}9\hat{i} + 0\hat{j} + 290{,}85\hat{k}$

Η συνισταμένη των $\vec{F}_B, \vec{F}_C$: $\vec{R}_{BC} = 649{,}4\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + 389{,}64\,\hat{k}$

Άσκηση 6



Έχω $|\vec{T}| = 1,2kN = 1200\,N$

Με σύστημα αναφοράς Oxyz: $\left.\begin{matrix} C(-1,5,\ 0,\ 4,5) \\ D(0,\ 3,\ 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{CD} = 1,5\hat{i} + 3\hat{j} - 4,5\hat{k}$

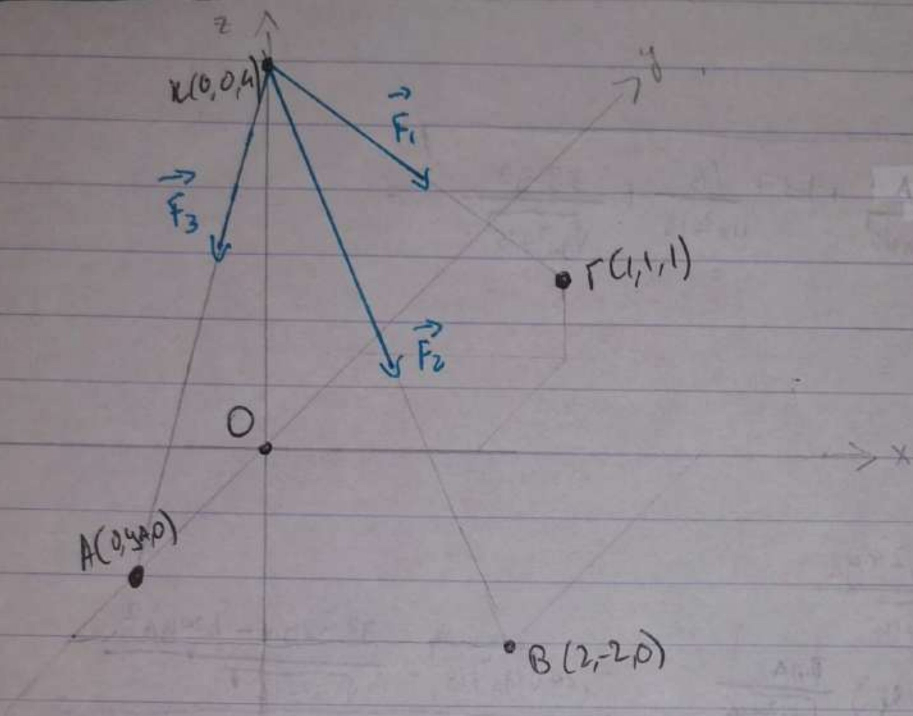
Άρα $|\vec{CD}| = \sqrt{1,5^2 + 3^2 + 4,5^2} = \sqrt{31,5} = 5,61m$

Άρα $\vec{T} = \frac{|\vec{T}|}{|\vec{CD}|} \cdot \vec{CD} = \frac{1200}{5,61}\vec{CD} = 213,9(-1,5\hat{i} + 3\hat{j} - 4,5\hat{k}) = -320,85\hat{i} + 641,7\hat{j} - 962,55\hat{k}$

Με σύστημα αναφοράς Cx'y'z': $C(0,0,0),\ D(1,5,\ 3,\ -4,5) \Rightarrow \vec{CD} = 1,5\hat{i} + 3\hat{j} - 4,5\hat{k} \Rightarrow |\vec{CD}| = 5,61m$

Άρα $\vec{T} = \frac{|\vec{T}|}{|\vec{CD}|} \cdot \vec{CD} = \frac{1200}{5,61}\vec{CD} = -320,85\hat{i} + 641,7\hat{j} - 962,55\hat{k}$

Άσκηση 7



$|\vec{F_1}| = 2kN$
$|\vec{F_2}| = 3kN$
$|\vec{F_3}| = 1kN$

$\vec{KA} = 0\hat{i} + y_A\hat{j} - 4\hat{k} \Rightarrow |\vec{KA}| = \sqrt{y_A^2+16}$

$\vec{KB} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k} \Rightarrow |\vec{KB}| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 4,9m$

$\vec{K\Gamma} = 1\hat{i} + 1\hat{j} - 3\hat{k} \Rightarrow |\vec{K\Gamma}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11} = 3,32 m$

Έχω $\vec{F_3} = \frac{|\vec{F_3}|}{|\vec{KA}|}\cdot\vec{KA} = \frac{1}{\sqrt{y_A^2+16}}(0\hat{i} + y_A\hat{j} - 4\hat{k}) = 0\hat{i} + \frac{y_A}{\sqrt{y_A^2+16}}\hat{j} - \frac{4}{\sqrt{y_A^2+16}}\hat{k}$

$\vec{F_2} = \frac{|\vec{F_2}|}{|\vec{KB}|}\cdot\vec{KB} = \frac{3}{4,9}\vec{KB} = 0,61(2\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}) = 1,22\hat{i} - 1,22\hat{j} - 2,44\hat{k}$

$\vec{F_1} = \frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{K\Gamma}|}\cdot\vec{K\Gamma} = \frac{2}{3,32}\vec{K\Gamma} = 0,6(1\hat{i} + 1\hat{j} - 3\hat{k}) = 0,6\hat{i} + 0,6\hat{j} - 1,8\hat{k}$

Άρα $\vec{R} = 1,82\hat{i} + \left(\frac{y_A}{\sqrt{y_A^2+16}} - 0,62\right)\hat{j} + \left(-4,24 - \frac{4}{\sqrt{y_A^2+16}}\right)\hat{k}$

$$|\vec{R}| = \sqrt{1,82^2 + \left(\frac{y_A}{\sqrt{y_A^2+16}} - 0,62\right)^2 + \left(4,24 + \frac{4}{\sqrt{y_A^2+16}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{3,31 + \frac{y_A^2}{y_A^2+16} + 0,38 - \frac{1,24y_A}{\sqrt{y_A+16}} + 18 + \frac{16}{y_A^2+16} + \frac{33,92}{\sqrt{y_A^2+16}}} =$$

$$= \sqrt{22,69 + \frac{33,92 - 1,24y_A}{\sqrt{y_A^2+16}}}$$

Θεωρώ $f(y_A) = 22,69 + \dfrac{33,92 - 1,24y_A}{\sqrt{y_A^2+16}}$

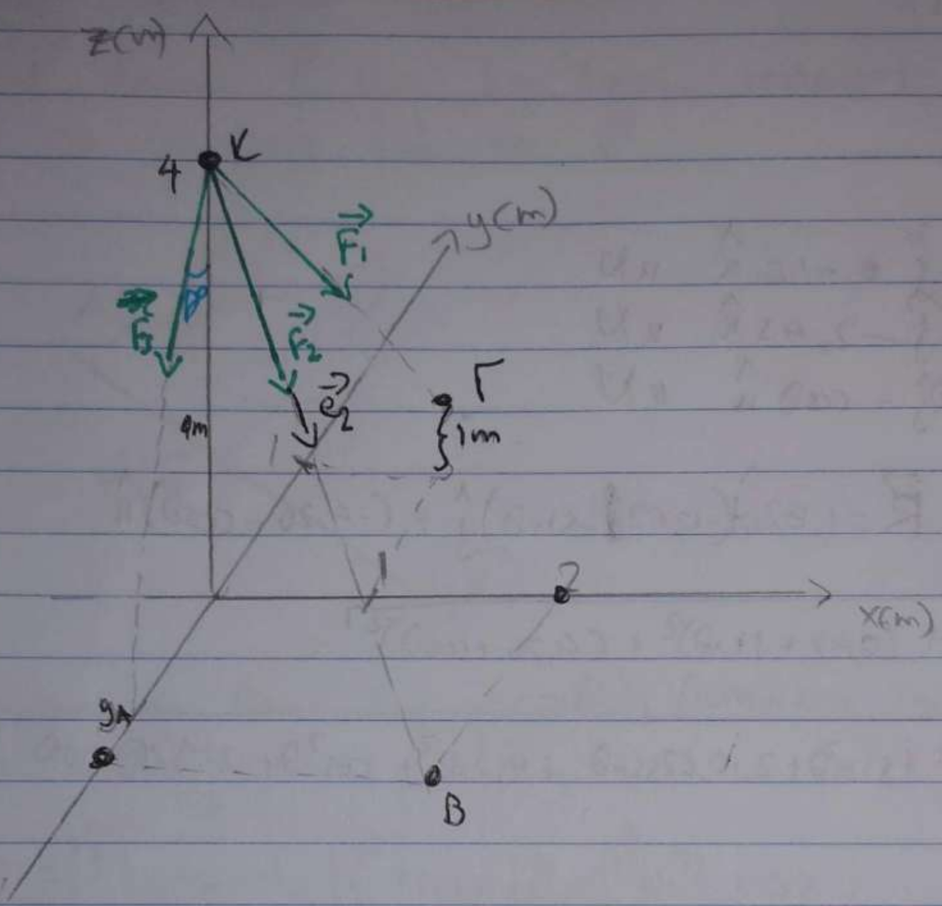
$$f'(y_A) = \frac{-1,24\sqrt{y_A^2+16} - (33,92 - 1,24y_A)\frac{y_A}{\sqrt{y_A^2+16}}}{y_A^2+16} = \frac{-1,24\sqrt{y_A^2+16} - \frac{33,92y_A - 1,24y_A^2}{\sqrt{y_A^2+16}}}{y_A^2+16} =$$

$$= \frac{\frac{-1,24(y_A^2+16) - 33,92y_A + 1,24y_A^2}{\sqrt{y_A^2+16}}}{y_A^2+16} = \frac{\cancel{-1,24y_A^2} - 19,84 - 33,92y_A + \cancel{1,24y_A^2}}{\sqrt{y_A^2+16}\,(y_A^2+16)} = -\frac{33,92y_A + 19,84}{\sqrt{y_A^2+16}\,(y_A^2+16)}$$

$f'(y_A) = 0 \Leftrightarrow 33,92y_A + 19,84 = 0 \Leftrightarrow y_A = \dfrac{-19,84}{33,92} = -0,58$

Άρα $y_A = -0,58$

Άσκηση 7 σελίδα 2 | 2ος Τρόπος



$|\vec{F_1}| = 2$ kN
$|\vec{F_2}| = 3$ kN
$|\vec{F_3}| = 1$ kN

Να αποδείξω την τιμή της y ώστε να ελαχιστοποιείται το μέτρο της συνισταμένης των 3 δυνάμεων

$\vec{F_3} = 0\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} - \cos\theta\,\hat{k}$ kN

Έχω $\vec{F_2} = 3\vec{e_2}$

Έχω $\vec{e_2} = \dfrac{\vec{KB}}{|\vec{KB}|}$

$\Rightarrow \vec{F_2} = \dfrac{3\cdot\vec{KB}}{|\vec{KB}|} = 3\,\dfrac{2i-2j-4\hat{k}}{\sqrt{2^2+2^2+4^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{24}}\,(2\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k})$

Άρα $\vec{F_2} = 1,22\hat{i} - 1,22\hat{j} - 2,45\hat{k}$ kN

Έχω $\vec{K\Gamma} = 1\hat{i} + 1\hat{j} - 3\hat{k}$ και $|\vec{K\Gamma}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

Ά

Άρα $\vec{F}_1 = \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{u_r}|}\vec{u_r} = 0,6\,\vec{u_r} = 0,6(\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}) = 0,6\hat{i}+0,6\hat{j}-1,81\hat{k}$

Άρα έχω

$\vec{F}_1 = 0,6\hat{i} + 0,6\hat{j} - 1,81\hat{k}$ kN
$\vec{F}_2 = 1,22\hat{i} - 1,22\hat{j} - 2,45\hat{k}$ kN
$\vec{F}_3 = 0\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} - \cos\theta\,\hat{k}$ kN

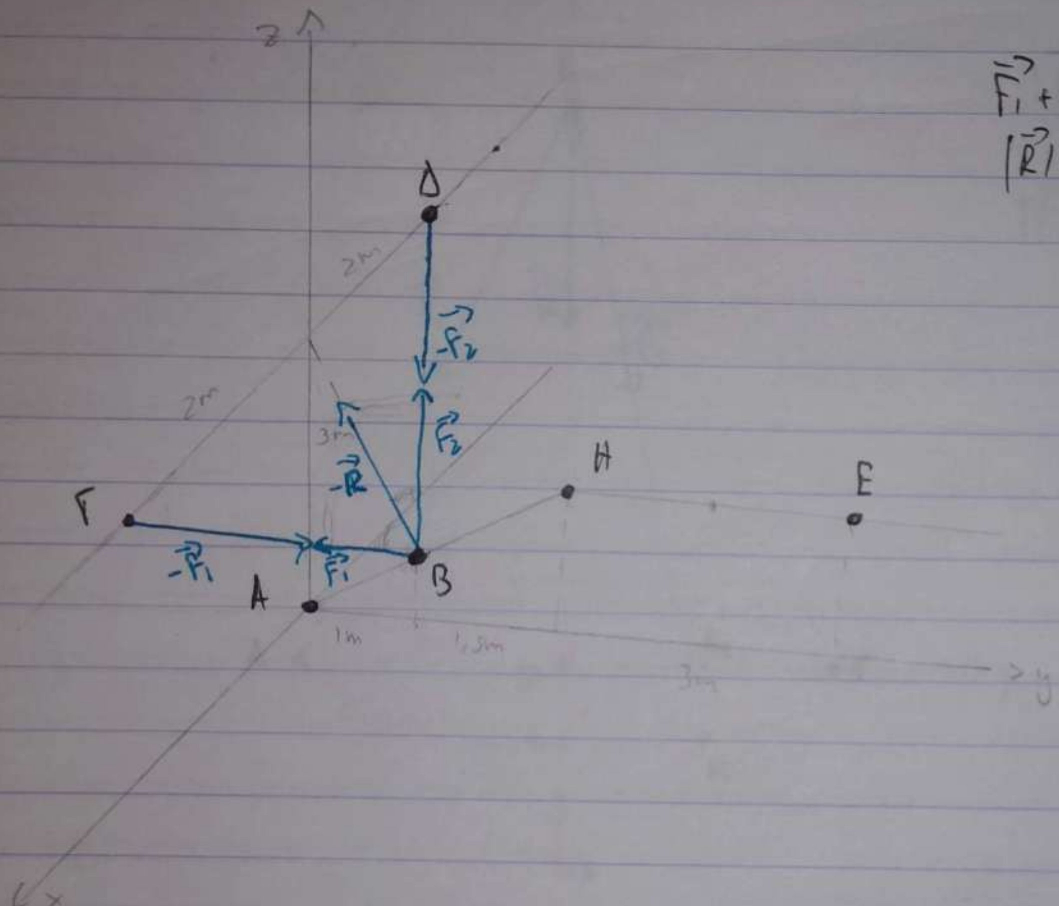
Η συνισταμένη $\vec{R} = 1,82\hat{i} + (-0,62 - \sin\theta)\hat{j} + (-4,26 - \cos\theta)\hat{k}$

$|\vec{R}| = \sqrt{(1,82)^2 + (0,62+\sin\theta)^2 + (4,26+\cos\theta)^2} =$

$= \sqrt{1,82^2 + 0,62^2 + \sin^2\theta + 2\cdot 0,62\sin\theta + 4,26^2 + \cos^2\theta + 2\cdot 4,26\cdot\cos\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = 8,2^\circ$

Άσκηση 8



$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{R}$

$|\vec{R}| = 4kN$

Έχω $\Gamma(2,0,3)$, $\Delta(-2,0,3)$, $B(0,1,1)$ $\Rightarrow$

$\vec{\Gamma B} = -2\hat{i} + 1\hat{j} - 2\hat{k} \Rightarrow |\vec{\Gamma B}| = \sqrt{4+1+4} = 3m$

$\vec{\Delta B} = 2\hat{i} + 1\hat{j} - 2\hat{k} \Rightarrow |\vec{\Delta B}| = \sqrt{4+1+4} = 3m$

Άρα $\vec{B\Gamma} = 2\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k}$, $|\vec{B\Gamma}| = |\vec{\Gamma B}| = 3m$

$\vec{\Delta B} = -2\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k}$, $|\vec{B\Delta}| = |\vec{\Delta B}| = 3m$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{F_1} = \frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{B\Gamma}|}\vec{B\Gamma} = \frac{|\vec{F_1}|}{3}\cdot(2\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k}) = |\vec{F_1}|(0,67\hat{i} - 0,33\hat{j} + 0,67\hat{k}) \\ \vec{F_2} = \frac{|\vec{F_2}|}{|\vec{\Delta B}|}\vec{\Delta B} = \frac{|\vec{F_2}|}{3}\cdot(-2\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k}) = |\vec{F_2}|(-0,67\hat{i} - 0,33\hat{j} + 0,67\hat{k}) \end{cases}$$

Έχω $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = |\vec{F_1}|(0,67\hat{i} - 0,33\hat{j} + 0,67\hat{k}) + |\vec{F_2}|(-0,67\hat{i} - 0,33\hat{j} + 0,67\hat{k})$

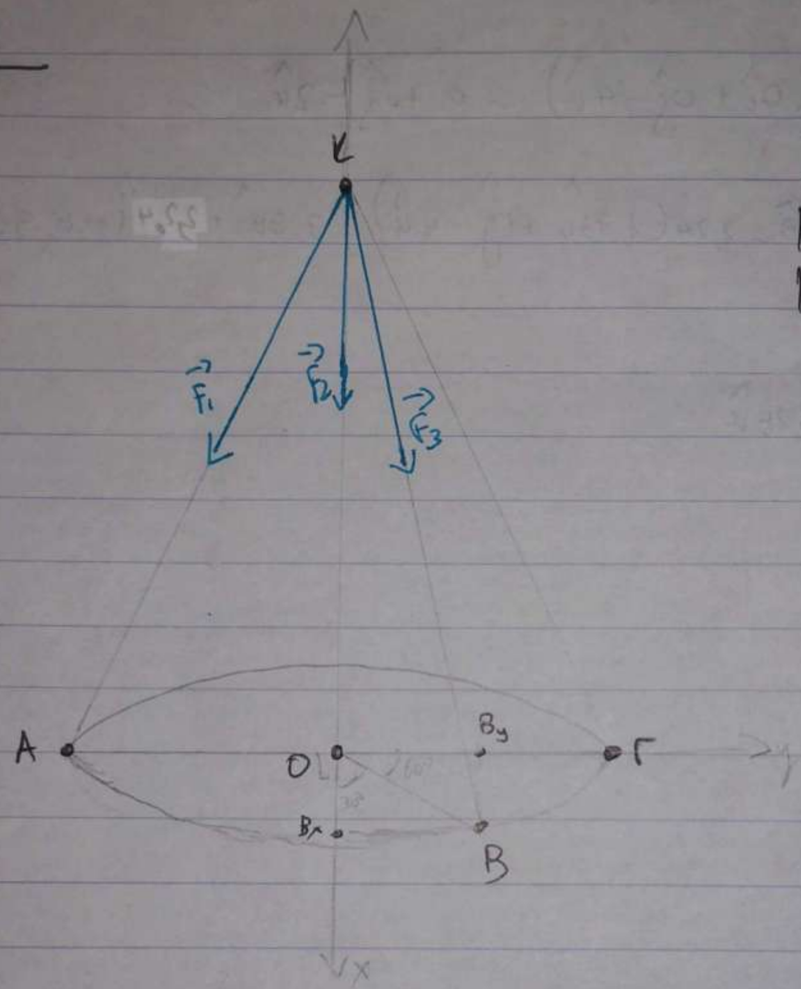
$= 0,67(|\vec{F_1}| - |\vec{F_2}|)\hat{i} - 0,33(|\vec{F_1}| + |\vec{F_2}|)\hat{j} + 0,67(|\vec{F_1}| + |\vec{F_2}|)\hat{k}$

Όμως $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}|$ λόγω συμμετρίας άρα $\vec{R} = 0\hat{i} - 0,66|\vec{F_1}|\hat{j} + 1,24|\vec{F_1}|\hat{k}$

Έχω $|\vec{R}| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(0,66|F_1|)^2 + (1,24|F_1|)^2} = 4 \Leftrightarrow (0,66|F_1|)^2 + (1,34|F_1|)^2 = 16 \Leftrightarrow 0,44|F_1|^2 + 1,8|F_1|^2 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\vec{F_1}|^2 = \frac{16}{2{,}24} \Leftrightarrow |\vec{F_1}| = \frac{4}{1{,}5} = 2{,}67\, kN$

Άσκηση 9



$|\vec{F_1}| = 16\,kN$ $\quad R = 2m$

$|\vec{F_2}| = 2\,kN$ $\quad OK = 4m$

$|\vec{F_3}| = 10\,kN$

$B_x = \sin(60°)\cdot OB = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R = \sqrt{3} = 1,73m$

$B_y = \cos(60°)\cdot OB = \frac{1}{2}\cdot R = 1m$

Άρα έχω: $\begin{cases} K(0,0,4) \quad O(0,0,0) \\ A(0,-2,0) \\ B(1{,}73,1,0) \\ \Gamma(0,2,0) \end{cases}$

Άρα $\vec{KA} = 0\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k} \Rightarrow |\vec{KA}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 4,47m$

$\vec{KO} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 4\hat{k} \Rightarrow |\vec{KO}| = \sqrt{4^2} = 4m$

$\vec{KB} = 1,73\hat{i} + 1\hat{j} - 4\hat{k} \Rightarrow |\vec{KB}| = \sqrt{1,73^2 + 1 + 4^2} = \sqrt{2,99+1+16} = \sqrt{19,99} = 4,47m$

Άρα $\vec{F_1} = \frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{KA}|}\vec{KA} = \frac{16}{4,47}(0\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}) = 3,58(0\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}) = 0\hat{i} - 7,16\hat{j} - 14,32\hat{k}$

$\vec{F_2} = \frac{|\vec{F_2}|}{|\vec{KO}|}\vec{KO} = \frac{2}{4}\vec{KO} = \frac{1}{2}(0\hat{i} + 0\hat{j} - 4\hat{k}) = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{F_3} = \frac{|\vec{F_3}|}{|\vec{KB}|}\vec{KB} = \frac{10}{4,47}\vec{KB} = 2,24\vec{KB} = 2,24(1,73\hat{i} + 1\hat{j} - 4\hat{k}) = 3,88\hat{i} + 2,24\hat{j} - 8,96\hat{k}$

Άρα $\vec{R} = 3,88\hat{i} - 4,92\hat{j} - 25,28\hat{k}$