Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το διορθώσω: Georgepan

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής

Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

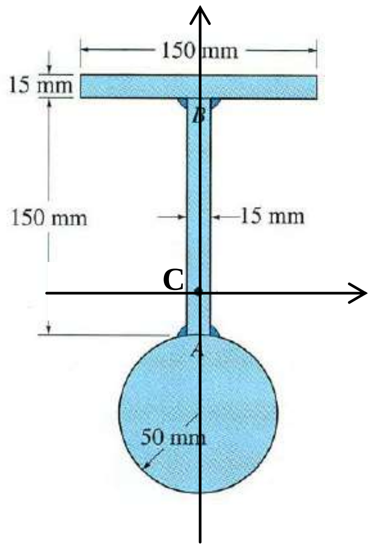
12^{η} σειρά ασκήσεων: Επιφανειακές ροπές 2^{ης} τάξης

Άσκηση 1

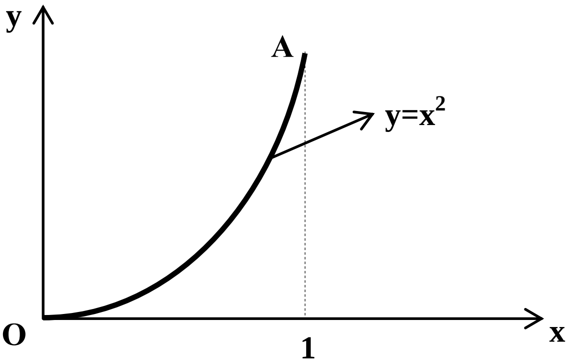
Για τη επιφάνεια του Σχ.1:

α. Να υπολογισθούν οι επιφανειακές ροπές 2^{ης} τάξης ως προς τους άξονες του σχήματος (οι άξονες διέρχονται από το γεωμετρικό κέντρο C της επιφάνειας).

β. Στη συνέχεια να προσδιορισθούν τα αυτά ως άνω μεγέθη ως προς σύστημα αναφοράς με κέντρο και πάλιν το C το το οποίο έχει όμως στραφεί κατά 30^{o} ΑΔΩ ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Άσκηση 2

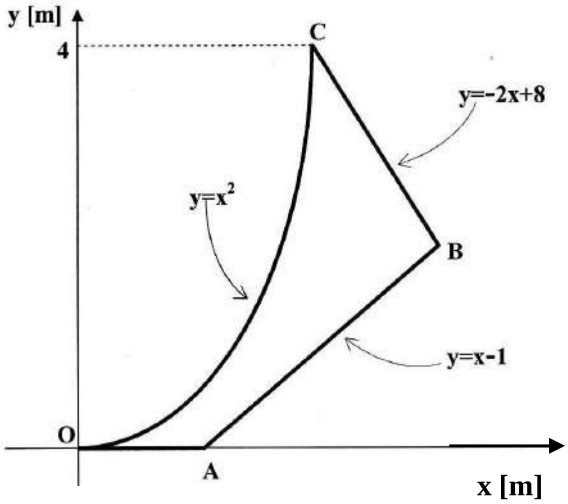
Για τη επιφάνεια (ΟΑ1Ο) του Σχ.2 να υπολογισθούν οι επιφανειακές ροπές 2^{ης} τάξης ως προς άξονες οι οποίοι διέρχονται από το γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας και σχηματίζουν γωνία 45^{o} ΣΔΩ με τους άξονες του αρχικού συστήματος αναφοράς.

Άσκηση 3

Για τη επιφάνεια του Σχ.3:

α. Να υπολογισθούν οι επιφανειακές ροπές 2^{ης} τάξης ως προς τους άξονες του σχήματος.

β. Στη συνέχεια να προσδιορισθούν τα αυτά ως άνω μεγέθη ως προς σύστημα αναφοράς του οποίου οι άξονες διέρχονται από το γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας και σχηματίζουν γωνία 45^{o} ΣΔΩ με τους άξονες του αρχικού συστήματος

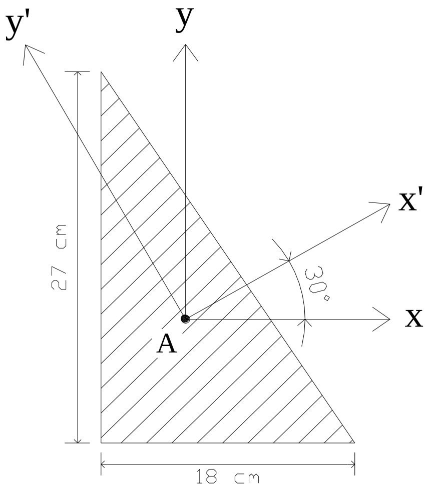


Σχήμα 3

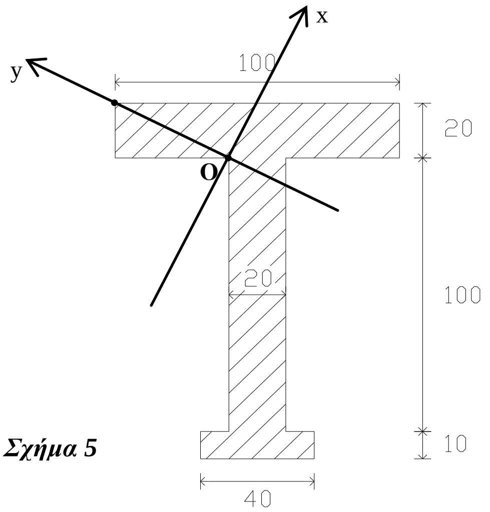
Άσκηση 4

Να υπολογισθούν οι επιφανειακές ροπές 2ης τάξης $I_{x'x'}$ και $I_{y'y'}$ της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του Σχ. 4.

Το σημείο Α είναι το γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Άσκηση 5

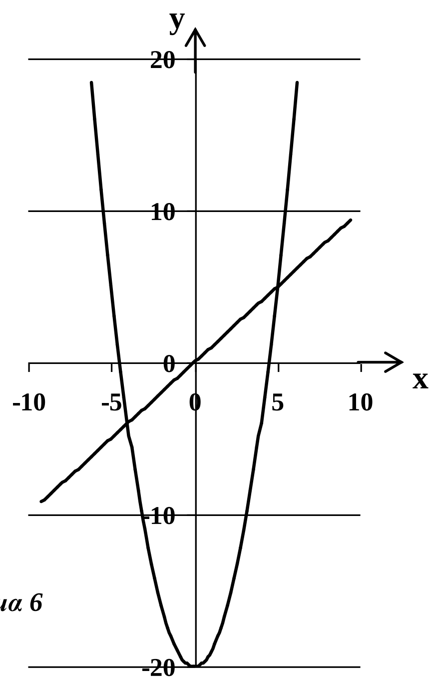
Υπολογίστε τον τανυστή των επιφανειακών ροπών 2ης τάξης I_{ij}, i,j=x,y της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του Σχ. 5.

Οι διαστάσεις του σχήματος είναι σε cm.

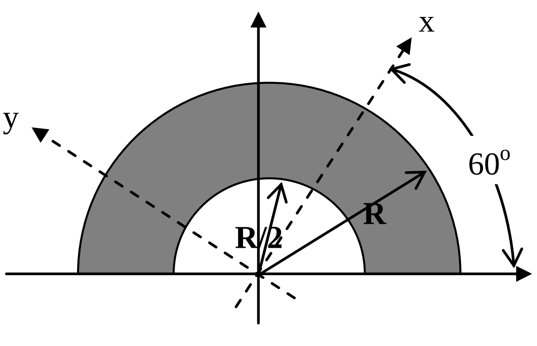
Άσκηση 6

Για την επιφάνεια που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y=x^2-20$ και της ευθείας y=x (Σχ.6), υπολογίστε τον τανυστή των επιφανειακών ροπών 2ης τάξης I_{ij}, i,j=x,y.

Οι διαστάσεις στο Σχ. 6 είναι σε cm



Σχήμα 6



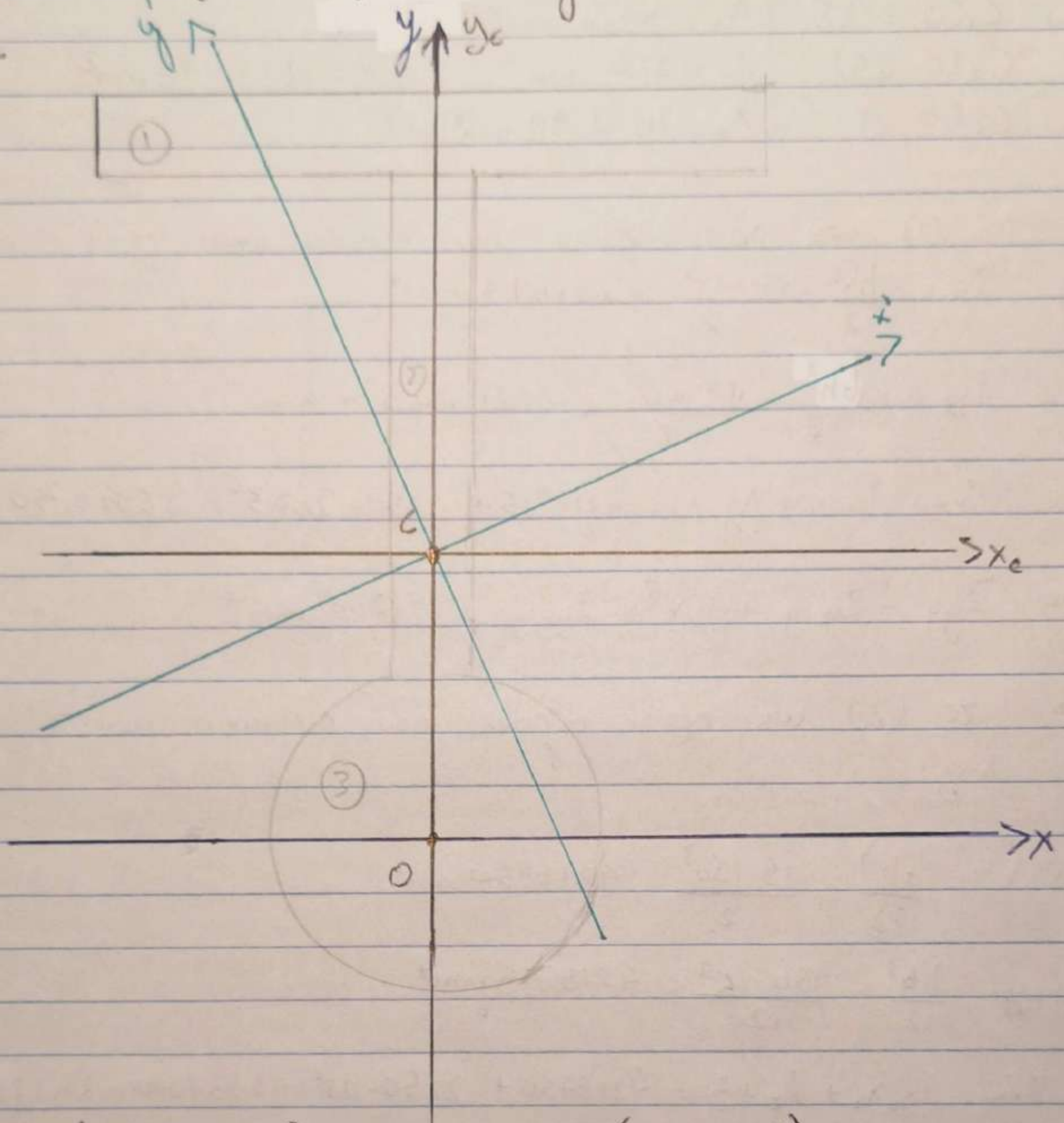
Σχήμα 7

Άσκηση 7

Για τον γραμμοσκιασμένο ημιδακτύλιο του Σχ.7 (R=20 cm) υπολογίστε τον τανυστή των επιφανειακών ροπών 2ης τάξης I_{ij}, i,j=x,y.

12η Σειρά Ασκήσεων: Επιφανειακές ροπές 2ης τάξης

Άσκηση 1



Από άσκηση 1 Σειρά 9 έχω στα C(0, 60,56) ως προς το σύστημα x-y

Βρίσκω $I_{i,j}$ για $i = x, y$

$I_{xx} = I_{xx_1} + I_{xx_2} + I_{xx_3}$

$I_{yy} = I_{yy_1} + I_{yy_2} + I_{yy_3}$

Έχω
$$\left.\begin{array}{l|l} C_1(0,\ 207{,}5) & A_1 = 2250\ mm^2 \\ C_2(0,\ 125) & A_2 = 2250\ mm^2 \\ C_3(0,\ 0) & A_3 = 7853{,}98\ mm^2 \end{array}\right\} A = 12353{,}98\ mm^2$$

Για το (1) ως προς άξονες που περνούν από το C_1 παράλληλα με x-y: $I_{x_{c_1}x_{c_1}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{150 \cdot 15^3}{12} = 42187{,}5\ mm^4$

$$I_{y_{c_1}y_{c_1}} = \frac{hb^3}{12} = \frac{15 \cdot 150^3}{12} = 4218750\ mm^4$$

Άρα $I_{xx_1} = I_{x_{c_1}x_{c_1}} + A_1 y_{c_1}^2 = 42187{,}5 + 2250 \cdot 207{,}5^2 = 96918750 = 9692 \cdot 10^4\ mm^4$

και $I_{yy_1} = I_{y_{c_1}y_{c_1}} + \cancel{A_1 x_{c_1}^2}^{\,0} = I_{y_{c_1}y_{c_1}} = 422 \cdot 10^4\ mm^4$

Για το (2) ως προς άξονες που περνούν από το C_2 παράλληλα με x-y:

$$I_{x_{c_2}x_{c_2}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{15 \cdot 150^3}{12} = 4218750\ mm^4$$

$$I_{y_{c_2}y_{c_2}} = \frac{hb^3}{12} = \frac{150 \cdot 15^3}{12} = 42187{,}5\ mm^4$$

Άρα $I_{xx_2} = I_{x_{c_2}x_{c_2}} + A_2 y_{c_2}^2 = 4218750 + 2250 \cdot 125^2 = 39375000 = 3937{,}5 \cdot 10^4\ mm^4$

και $I_{yy_2} = I_{y_{c_2}y_{c_2}} + \cancel{A_2 x_{c_2}^2}^{\,0} = I_{y_{c_2}y_{c_2}} = 4{,}22 \cdot 10^4\ mm^4$

Για το (3) ως προς άξονες x-y:

$$I_{xx_3} = \iint_{A_3} y^2\, dA = \iint_{A_3} R^2 \sin^2\theta\, R\, dR\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \left(\int_0^{50} R^3\, dR \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cdot \frac{50^4}{4}\, d\theta$$

$$= \frac{50^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{50^4}{8} \int_0^{2\pi} (1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{50^4}{8} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{50^4}{4} \pi\ mm^4$$

$$I_{yy_3} = \iint_{A_3} x^2\, dA = \iint_{A_3} R^2\cos^2\theta\, R\, dR\, d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\left(\int_0^{50} R^3\, dR\right) d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\cdot\frac{50^4}{4}\, d\theta =$$

$$= \frac{50^4}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos2\theta)\, d\theta = \frac{50^4}{8}\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{50^4\pi}{4} = \frac{(5\cdot10)^4}{4} = \frac{5^4\pi\cdot10^4}{4}$$

$= 490{,}87\cdot10^4$

Άρα $I_{xx} = 9692\cdot10^4 + 3937{,}5\cdot10^4 + 490{,}87\cdot10^4 = 14120{,}37\cdot10^4\ mm^4$

και $I_{yy} = 422\cdot10^4 + 4{,}22\cdot10^4 + 490{,}87\cdot10^4 = 917{,}09\cdot10^4\ mm^4$

Άρα $I_{x_cx_c} = I_{xx} - A\cdot y_c^2 = 14120{,}37\cdot10^4 - 12353{,}98\cdot(60{,}56)^2 = 9589{,}5\cdot10^4\ mm^4$

και $I_{y_cy_c} = I_{yy} - \overset{0}{\cancel{A x_c^2}} = I_{yy} = 917{,}09\cdot10^4$

Επειδή ο άξονας y_c είναι άξονας συμμετρίας, έχω $I_{xy_c}=0$

Άρα $I_{ij} = \begin{bmatrix} 9589{,}5\cdot10^4 & 0 \\ 0 & 917{,}09\cdot10^4 \end{bmatrix}$, $i,j = x_c, y_c$

Στρέφω το σύστημα x_c-y_c κατά $\theta=30^\circ$ αντίθετα δεικτών ρολογιού και έχω το σύστημα $x'-y'$

Άρα $I_{x'x'} = \frac{I_{x_cx_c}+I_{y_cy_c}}{2} + \frac{I_{x_cx_c}-I_{y_cy_c}}{2}\cos2\theta - \overset{0}{\cancel{I_{xy}}}\sin2\theta = 5253{,}3\cdot10^4 + 2168{,}1\cdot10^4$

$= 7421{,}4\ mm^4$

$I_{y'y'} = \frac{I_{x_cx_c}+I_{y_cy_c}}{2} - \frac{I_{x_cx_c}-I_{y_cy_c}}{2}\cos2\theta + \overset{0}{\cancel{I_{xy}}}\sin2\theta = 5253{,}3\cdot10^4 - 2168{,}1\cdot10^4 = 3085{,}2\cdot10^4\ mm^4$

$I_{x'y'} = \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\sin2\theta \mp \overset{0}{\cancel{I_{xy}\cos2\theta}} = 7510{,}53\cdot10^4\ mm^4$

Άσκηση 2

Από άσκηση 4 σειρά 9 έχω ότι το κέντρο της παραβολής $y = \frac{h}{b^2}x^2$ δίνεται από: $y_c = \frac{3h}{10}$ και $x_c = \frac{3b}{4}$

Άρα για $b = h = 1$ έχω $x_c = \frac{3}{4}$ και $y_c = \frac{3}{10} \Leftrightarrow x = 0{,}75$ και $y_c = 0{,}3$

Άρα $C(0{,}75, 0{,}3)$. Επίσης $A = \frac{hb}{3} \overset{h=b=1}{=} \frac{1}{3}\, m^2$

Από άσκηση 6 σειρά 11 έχω ότι

$$I_{i,j} = \begin{bmatrix} 0{,}05 , & 0{,}08 \\ 0{,}08 , & 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad i,j = x,y \quad [m^4]$$

Ψάχνω να βρω I_{ij}, $i,j = x_c, y_c$, όπου x_c, y_c άξονες παράλληλοι στους x και y που [redacted] έχουν κέντρο το C.

$$I_{x_cx_c} = I_{xx} - Ay_c^2 = 0{,}05 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}3^2 = 0{,}02\, m^4$$

$$I_{y_cy_c} = I_{yy} - Ax_c^2 = 0{,}2 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}75^2 = 0{,}0125\, m^4$$

$$I_{x_cy_c} = I_{xy} - A(-x_c)(-y_c) = 0{,}08 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 = 0{,}005\, m^4$$

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} 0{,}02 & 0{,}005 \\ 0{,}005 & 0{,}0125 \end{bmatrix} \quad i,j = x_c, y_c \quad [m^4]$$

Ψάχνω I_{ij}, $i,j = x', y'$, όπου x', y' άξονες με κέντρο το C και στραμμένοι κατά $\theta = 45°$ σύμφωνα δεικτών ρολογιού.

Άρα

$$I_{x'x'} = \frac{I_{x_cx_c} + I_{y_cy_c}}{2} + \frac{I_{x_cx_c} - I_{y_cy_c}}{2}\cancel{\cos 2\theta}^{\,0} - I_{x_cy_c} \cdot \sin 2\theta = 0{,}01625 - 0{,}005 = 0{,}01125\, m^4$$

$$I_{y'y'} = \frac{I_{x_cx_c} + I_{y_cy_c}}{2} - \frac{I_{x_cx_c} - I_{y_cy_c}}{2}\cancel{\cos 2\theta}^{\,0} + I_{x_cy_c} \sin 2\theta = 0{,}01625 + 0{,}05 = 0{,}02125\, m^4$$

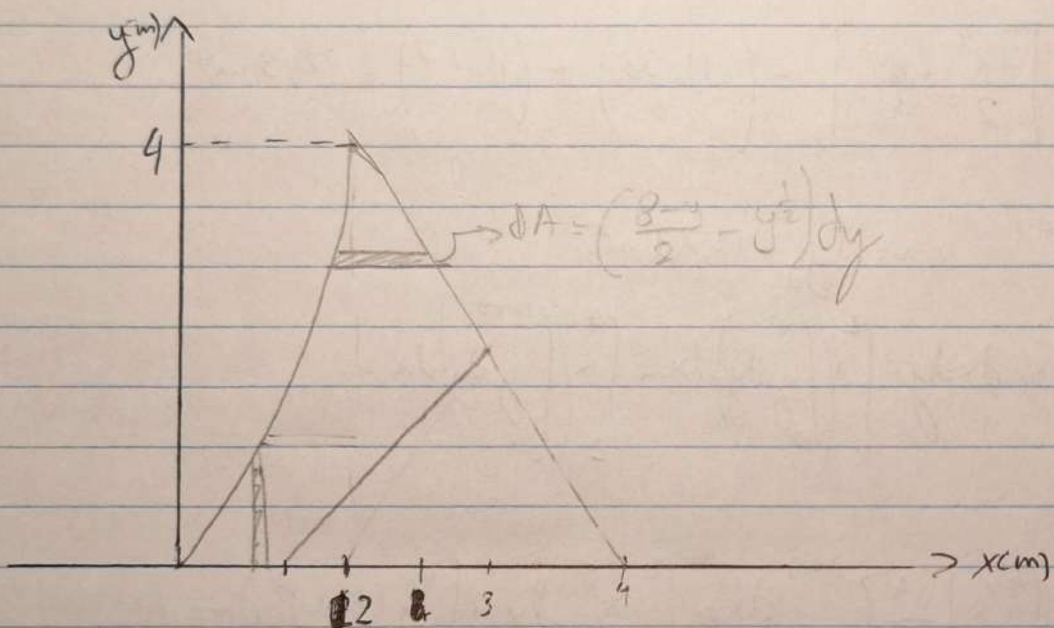
$$I_{x'y'} = \frac{I_{x_cx_c} - I_{y_cy_c}}{2} \sin 2\theta + I_{xy}\cancel{\cos 2\theta}^{\,0} = 0{,}00375\, m^4$$

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} 0{,}01125 & 0{,}00375 \\ 0{,}00375 & 0{,}02125 \end{bmatrix} \quad i,j = x', y'$$

Άσκηση 3

Από σειρά 9 άσκηση 6 έχω:

$A = 3{,}67\,m^2$ $\left|\begin{array}{l} x_c = 1{,}82m \\ y_c = 1{,}78m \end{array}\right\}$ $C(1{,}82,\ 1{,}78)$



Κάνοντας τον ίδιο διαμερισμό με την ασκ.6 έχω

$$I_{xx} = I_{xx_1} - I_{xx_2}$$

$$I_{xx_1} = \iint_A y^2\,dA = \int_0^4 y^2\left(4 - \frac{y}{2} - y^{\frac{1}{2}}\right)dy = \int_0^4 \left(4y^2 - \frac{y^3}{2} - y^{\frac{5}{2}}\right)dy = \left[\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{8} - \frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7}\right]_0^4 =$$

$$= \left[\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{8} - \frac{2}{7}y^3\sqrt{y}\right]_0^4 = 16{,}76\ m^4$$

$$I_{yy_1} = \iint x^2\,dA = \int_0^2 x^2\cdot x^2\,dx + \int_2^4 x^2(-2x+8)\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 + \int_2^4 \left(-2x^3 + 8x^2\right)dx =$$

$$= \frac{32}{5} + \left[-\frac{x^4}{2} + \frac{8}{3}x^3\right]_2^4 = \frac{32}{5} + \left[-\frac{4^4}{2} + \frac{8\cdot 4^3}{3} + \frac{2^4}{2} - \frac{8}{3}\cdot 2^3\right] = 6{,}4 + 29{,}33 = 35{,}73\ m^4$$

$$I_{xx_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{3\cdot 2^3}{12} = \frac{3\cdot 8}{12} = 2\,m^4$$

$$I_{yy_2} = \iint_{A_2} x^2\,dA = \int_1^3 x^2(x-1)\,dx + \int_3^4 x^2(-2x+8)\,dx = \int_1^3 (x^3-x^2)\,dx + \int_3^4 (-2x^3+8x^2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^3 + \left[\frac{-x^4}{2} + \frac{8x^3}{3}\right]_3^4 = (11{,}33) + (11{,}17) = 22{,}5\,m^4$$

Άρα $I_{xx} = 14{,}76\,m^4$ και $I_{yy} = 13{,}23\,m^4$

$$I_{xy_1} = \iint_A xy\,dA = \iint_A xy\,dx\,dy = \int_0^2 x\left(\int_0^{x^2} y\,dy\right)dx + \int_2^4 x\left(\int_0^{-2x+8} y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx + \int_2^4 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{-2x+8} dx = \int_0^2 \frac{x^5}{2}\,dx + \int_2^4 \frac{x(8-2x)^2}{2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^6}{12}\right]_0^2 + \int_2^4 \frac{x(64-32x+4x^2)}{2}\,dx = 5{,}33 + \int_2^4 \frac{64x-32x^2+4x^3}{2}\,dx =$$

$$= 5{,}33 + \frac{1}{2}\left[32x^2 - \frac{32}{3}x^3 + x^4\right]_2^4 = 5{,}33 + \frac{1}{2}(26{,}67) = 18{,}67\,m^4$$

$$I_{xy_2} = \iint_A xy\,dx\,dy = \int_1^3 x\left(\int_0^{x-1} y\,dy\right)dx + \int_3^4 x\left(\int_0^{(-2x+8)} y\,dy\right)dx = \int_1^3 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x-1} dx + \int_3^4 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{-2x+8} dx =$$

$$= \int_1^3 \frac{x(x^2-2x+1)}{2}\,dx + \int_3^4 \frac{x(8-2x)^2}{2}\,dx = \int_1^3 \frac{x^3-2x^2+x}{2}\,dx + \int_3^4 \frac{x(64-32x+4x^2)}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right]_1^3 + \int_3^4 \frac{64x - 32x^2 + 4x^3}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right]_1^3 + \frac{1}{2}\left[32x^2 - \frac{32}{3}x^3 + x^4\right]_3^4 =$$

$$= \frac{1}{2}(6,67) + \frac{1}{2}(4,33) = \frac{11}{2} = 5,5\ m^4$$

Άρα $I_{xy} = I_{xy_1} - I_{xy_2} = 18,67 - 5,5 = 13,17\ m^4$

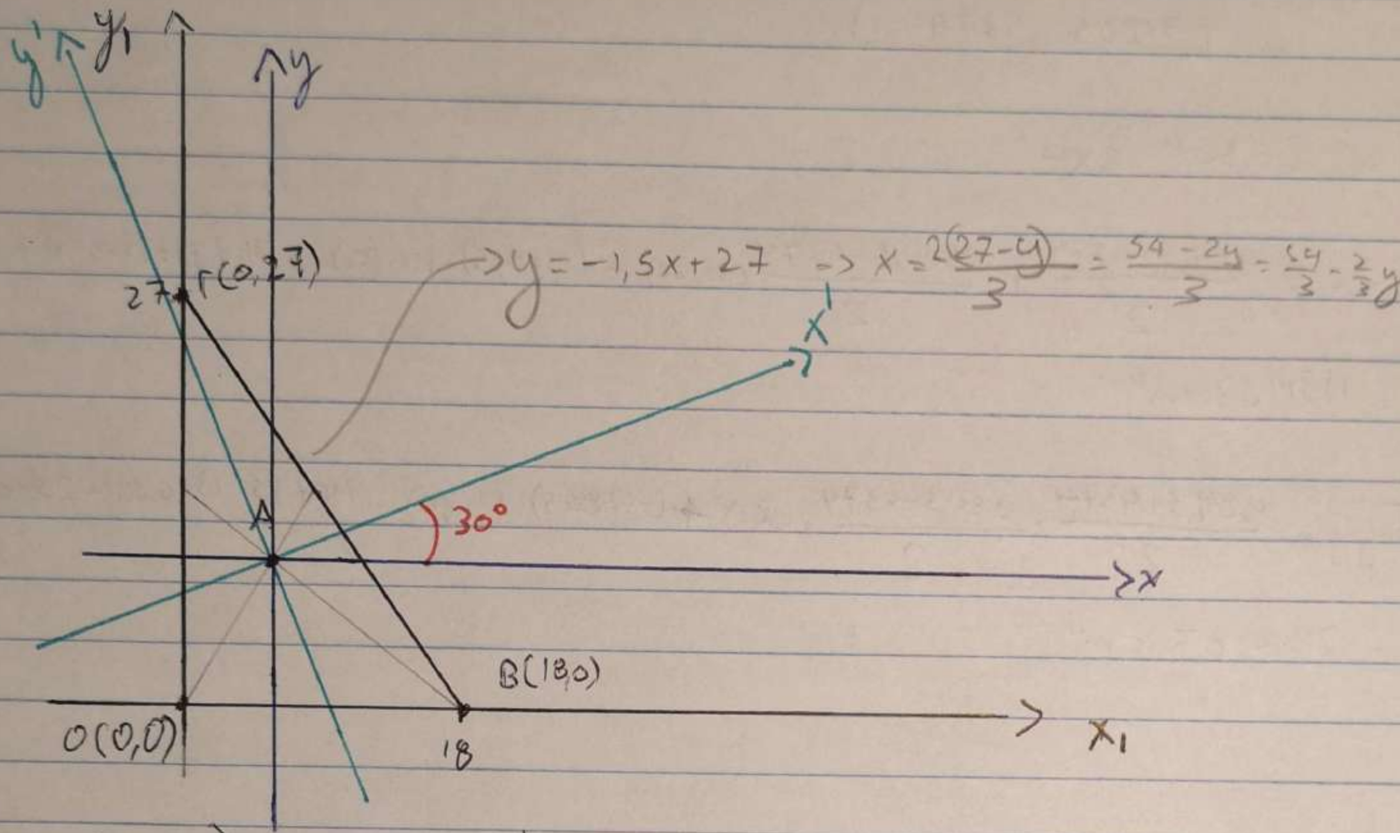
Άρα $I_{ij} = \begin{bmatrix} 14,76 & 13,17 \\ 13,17 & 13,23 \end{bmatrix} m^4,\ i,j = x,y$

$$\left.\begin{aligned} I_{x_cx_c} &= I_{xx} - Ay_c^2 = 14,76 - 3,67 \cdot 1,78^2 = 3,13\ m^4 \\ I_{y_cy_c} &= I_{yy} - Ax_c^2 = 13,23 - 3,67 \cdot 1,82^2 = 1,07\ m^4 \\ I_{x_cy_c} &= I_{xy} - A(-x_c)(-y_c) = 13,17 - 3,67 \cdot 1,82 \cdot 1,78 = 1,28\ m^4 \end{aligned}\right\} I_{ij} = \begin{bmatrix} 3,13 & 1,28 \\ 1,28 & 1,07 \end{bmatrix} i,j = x_c,y_c$$

Για σύστημα $x'-y'$ που είναι το x_cy_c στραμμένο κατά $\theta = -45^\circ$ έχω:

$$\left.\begin{aligned} I_{x'x'} &= \frac{3,13+1,07}{2} + \frac{3,13-1,07}{2}\cdot \cancelto{0}{\cos(-90^\circ)} - 1,28 \cdot \sin(-90^\circ) = 2,1 + 1,28 = 3,38\ m^4 \\ I_{y'y'} &= \frac{3,13+1,07}{2} - \frac{3,13-1,07}{2}\cancelto{0}{\cos(-90^\circ)} + 1,28 \cdot \sin(-90^\circ) = 2,1 - 1,28 = 0,82\ m^4 \\ I_{x'y'} &= \frac{3,13-1,07}{2}\sin(-90^\circ) + 1,28\cancelto{0}{\cos(-90^\circ)} = -1,03\ m^4 \end{aligned}\right\} I_{ij} = \begin{bmatrix} 3,38 & -1,03 \\ -1,03 & 0,82 \end{bmatrix} m^4,\ i,j = x',y'$$

Άσκηση 4



Έχω $\left.\begin{array}{l} O(0,0) \\ B(18,0) \\ \Gamma(0,27) \end{array}\right\} A(6,9)$

$A = \dfrac{18\cdot 27}{2} = 9\cdot 27 = 243\,cm^2$

$I_{x x_1} = \dfrac{bh^3}{12} = \dfrac{18\cdot 27^3}{12} = 29524,5\,cm^4$

$I_{y y_1} = \dfrac{hb^3}{12} = \dfrac{27\cdot 18^3}{12} = 13122\,cm^4$

$I_{xy_1} = \iint_A xy\,dx\,dy = \int_0^{18} x\left(\int_0^{-1,5x+27} y\,dy\right)dx = \int_0^{18} x\left[\dfrac{y^2}{2}\right]^{27-1,5x} dx =$

$= \int_0^{18} \dfrac{x}{2}(27-1,5x)^2\,dx = \int_0^{18} \dfrac{729}{2}x - \dfrac{81}{2}x^2 + \dfrac{2,25x^3}{2}\,dx = 9841,5\,cm^4$

Άρα $I_{xx} = I_{x_1x_1} - A\cdot y_c^2 = 29524,5 - 243\cdot 9^2 = 9841,5\,cm^4$

και $I_{yy} = I_{yy_1} - A\cdot x_c^2 = 13122 - 243\cdot 6^2 = 4374\,cm^4$

και $I_{xy} = I_{x_1y_1} - A(-x_c)(-y_c) = 9841,5 - 243\cdot 6\cdot 9 = -3280,5\,cm^4$

Άρα $I_{i,j} = \begin{bmatrix} 9841,5 & -3280,5 \\ -3280,5 & 4374 \end{bmatrix} cm^4$, $i,j = x,y$

Για $\theta = 30^\circ$ έχω

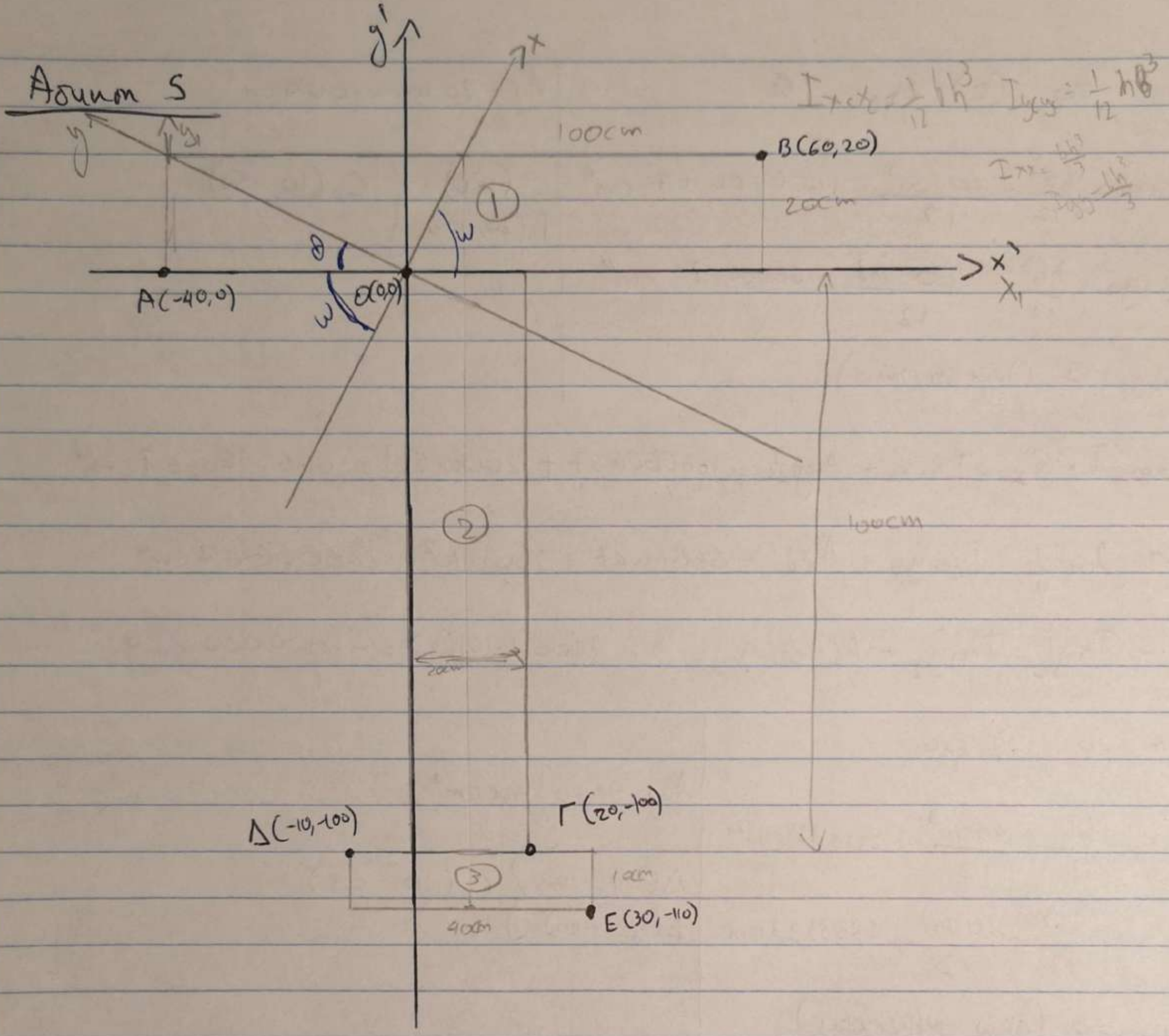
$I_{x'x'} = \frac{9841,5+4374}{2} + \frac{9841,5-4374}{2}\cos(60) - (-3280,5)\cdot\sin(60) = 7107,75 + 1366,88 + 2840$

$= 11314,63\ cm^4$

$I_{y'y'} = \frac{9841,5+4374}{2} - \frac{9841,5-4374}{2}\cos(60) + (-3280,5)\cdot\sin(60) = 7107,75 - 1366,88 - 2840 =$

$= 2900,87\ cm^4$

Άσκηση 5



Για το (1) έχω: σε άξονες x_c, y_c

$$I_{x_c x_{c1}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{100\cdot 20^3}{12} = 66666,67\ cm^4$$

$$I_{y_c y_{c1}} = \frac{hb^3}{12} = \frac{20\cdot 100^3}{12} = 1666666,67\ cm^4$$

$\left.\begin{array}{l} A(-40,0) \\ B(60,20) \end{array}\right\}$ $C_1(10,10)$

$A = 100\cdot 20 = 2000\ cm^2$

Για άξονες x'y':

$$I_{x'x'_1} = I_{x_c x_{c1}} + A y_c^2 = 66666,67 + 2000\cdot 100 = 266.666,67\ cm^4$$

$$I_{y'y'_1} = I_{y_c y_{c1}} + A x_c^2 = 1666666,67 + 2000\cdot 100 = 1866666,67\ cm^4$$

$I_{x_c y_{c1}} = 0$ λόγω συμμετρίας άρα $I_{x'y'} = A(-x_{c1})(-y_{c1}) = 2000\cdot 10\cdot 10 = 200.000\ cm^4$

Για το (2) έχω:

$$I_{x_{c2}x_{c2}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 100^3}{12} = 1666666,67 \ cm^4$$

$$I_{y_{c2}y_{c2}} = \frac{hb^3}{12} = \frac{100 \cdot 20^3}{12} = 66666,67 \ cm^4$$

$I_{x_{c2}y_{c2}} = 0$ (λόγω συμμετρίας)

$A_2 = 20 \cdot 100 = 2000 \ cm^2$

$O(0,0)$, $\Gamma(20,-100)$ $\Big\}$ $C_2(10,-50)$

Άρα $I_{x'x'_2} = I_{x_{c2}x_{c2}} + A_2 y_{c2}^2 = 1666666,67 + 2000 \cdot 50^2 = 6666666,67 cm^4$

και $I_{y'y'_2} = I_{y_{c2}y_{c2}} + A_2 x_{c2}^2 = 66666,67 + 2000 \cdot 10^2 = 266666,67 cm^4$

και $I_{x'y'_2} = I_{x_{c2}y_{c2}} + A_2(-x_{c2})(-y_{c2}) = 0 + 2000 \cdot (-10)(50) = -1.000.000 \ cm^4$

Για το (3) έχω:

$$I_{x_{c3}x_{c3}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{40 \cdot 10^3}{12} = 3333,33 \ cm^4$$

$$I_{y_{c3}y_{c3}} = \frac{hb^3}{12} = \frac{10 \cdot 40^3}{12} = 53333,33 cm^4$$

$I_{x_{c3}y_{c3}} = 0$ (λόγω συμμετρίας)

$A_3 = 40 \cdot 10 = 400 cm^2$

$\Delta(-10,-100)$, $E(30,-110)$ $\Big\}$ $C_3(10,-105)$

Άρα $I_{x'x'_3} = I_{x_{c3}x_{c3}} + A_3 y_{c3}^2 = 3333,33 + 400 \cdot 105^2 = 4413333,33 \ cm^4$

και $I_{y'y'_3} = I_{y_{c3}y_{c3}} + A_3 x_{c3}^2 = 53333,33 + 400 \cdot 10^2 = 93333,33 \ cm^4$

και $I_{x'y'_3} = I_{x_{c3}y_{c3}} + A(-x_{c3})(-y_{c3}) = 0 + 400(-10)(105) = -420.000 \ cm^4$

Άρα $I_{x'x'} = I_{x'x'_1} + I_{x'x'_2} + I_{x'x'_3} = 266.666,67 + 6.666.666,67 + 4.413.333,33 =$

$= 11.346.666 \ cm^4 \simeq 1135,67 \cdot 10^4 \ cm^4$

$I_{y'y'} = I_{y'y'_1} + I_{y'y'_2} + I_{y'y'_3} = 1.866.666,67 + 266.666,67 + 93.333,33 =$

$= 2.226.666,67 \simeq 222,67 \cdot 10^4 \ cm^4$

$I_{x'y'} = I_{x'y'_1} + I_{x'y'_2} + I_{x'y'_3} = 200.000 + (-1.000.000) + (-420.000) = -1.220.000 \ cm^4$

$= -122 \cdot 10^4 \ cm^4$

Άρα $I_{O,j} = \begin{bmatrix} 1135,67 \cdot 10^4 & -122 \cdot 10^4 \\ -122 \cdot 10^4 & 222,67 \cdot 10^4 \end{bmatrix} [cm^4] , \ i,j = x', y'$

Έχω $\tan\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 26,57^\circ$

Άρα $\omega = 90^\circ - 26,57^\circ = 63,43^\circ$

Άρα $I_{xx} = \dfrac{I_{x'x'} + I_{y'y'}}{2} + \dfrac{I_{x'x'} - I_{y'y'}}{2} \cos 2\omega - I_{x'y'} \cdot \sin 2\omega =$

$= \dfrac{1135,67 \cdot 10^4 + 222,67 \cdot 10^4}{2} + \dfrac{1135,67 \cdot 10^4 - 222,67 \cdot 10^4}{2} \cdot \cos(126,86^\circ) - (-122 \cdot 10^4) \cdot \sin(126,86^\circ)$

$= 679,17 \cdot 10^4 + 465,5 \cdot 10^4 (-0,6) + 122 \cdot 10^4 \cdot 0,8 = 679,17 \cdot 10^4 - 279 \cdot 10^4 + 97,6 \cdot 10^4$

$= 497,77 \cdot 10^4 \ cm^4$

$I_{yy} = \dfrac{I_{x'x'} + I_{y'y'}}{2} - \dfrac{I_{x'x'} - I_{y'y'}}{2} \cos 2\omega + I_{x'y'} \sin 2\omega = 679,17 \cdot 10^4 + 279 \cdot 10^4 - 97,6 \cdot 10^4$

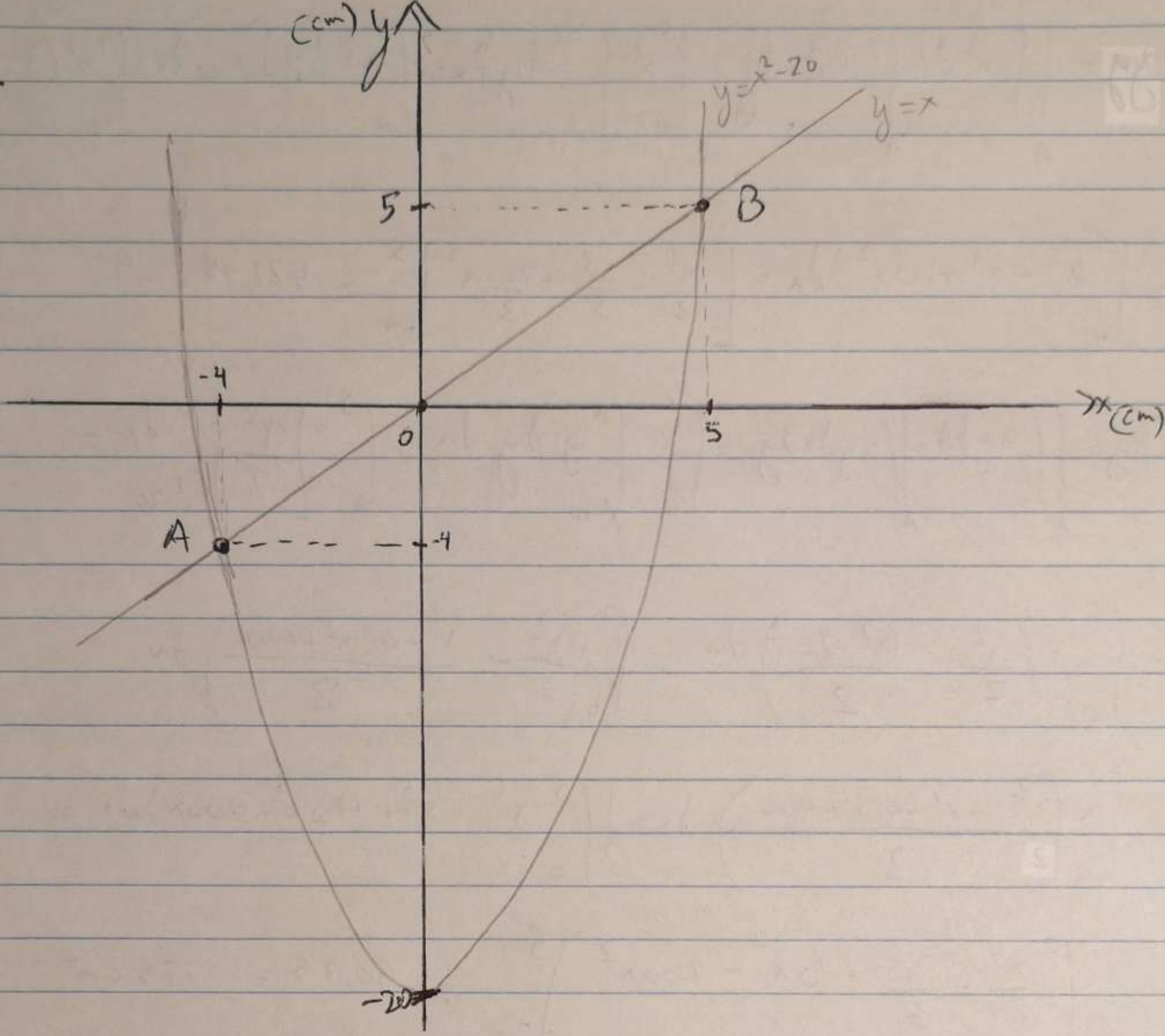
$= 860,57 \ cm^4$

$$I_{xy} = \frac{I_{x'x'} - I_{y'y'}}{2} \sin 2w + I_{x'y'} \cos 2w =$$

$$= 465{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 10^4 + (-122 \cdot 10^4)(-0{,}6) = 372{,}4 \cdot 10^4 + 73{,}2 \cdot 10^4 = 445{,}6 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

Άρα $I_{i,j} = \begin{bmatrix} 497{,}77 \cdot 10^4 & 445{,}6 \cdot 10^4 \\ 445{,}6 \cdot 10^4 & 860{,}57 \cdot 10^4 \end{bmatrix} [\text{cm}^4] \quad , i,j = x,y$

Άσκηση 6



Τα σημεία τομής $y=x^2-20$ και $y=x$:

$x^2-20=x \Leftrightarrow x^2-x-20=0$, $\Delta=81 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 9}{2}$ $\begin{matrix} 5 \\ -4 \end{matrix}$

$A(-4,-4)$ και $B(5,5)$

$$I_{xx}=\iint_A y^2 dA=\iint_A y^2 dx\,dy=\int_{-4}^{5}\left(\int_{x^2-20}^{x} y^2 dy\right)dx=\int_{-4}^{5}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2-20}^{x}dx=\int_{-4}^{5}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{(x^2-20)^3}{3}\right)dx$$

$$=\int_{-4}^{5}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^6-60x^4+1200x^2-8000}{3}\right)dx=\frac{1}{3}\int_{-4}^{5}\left(-x^6+60x^4+x^3-1200x^2+8000\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{x^7}{7}+12x^5+\frac{x^3}{3}-400x^3+8000x\right]_{-4}^{5}=\frac{1}{3}\cdot 32778{,}96=10926{,}32\ cm^4$$

$$I_{yy} = \iint_A x^2\, dA = \iint_A x^2\, dx\, dy = \int_{-4}^{5} x^2 \left(\int_{x^2-20}^{x} dy \right) dx = \int_{-4}^{5} x^2 \left[y \right]_{x^2-20}^{x} dx = \int_{-4}^{5} x^2 (x - x^2 + 20)\, dx =$$

$$= \int_{-4}^{5} (x^3 - x^4 + 20x^2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{20}{3} x^3 \right]_{-4}^{5} = 522{,}45\ cm^4$$

$$I_{xy} = \iint_A xy\, dA = \iint_A xy\, dx\, dy = \int_{-4}^{5} x \left(\int_{x^2-20}^{x} y\, dy \right) dx = \int_{-4}^{5} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2-20}^{x} dx =$$

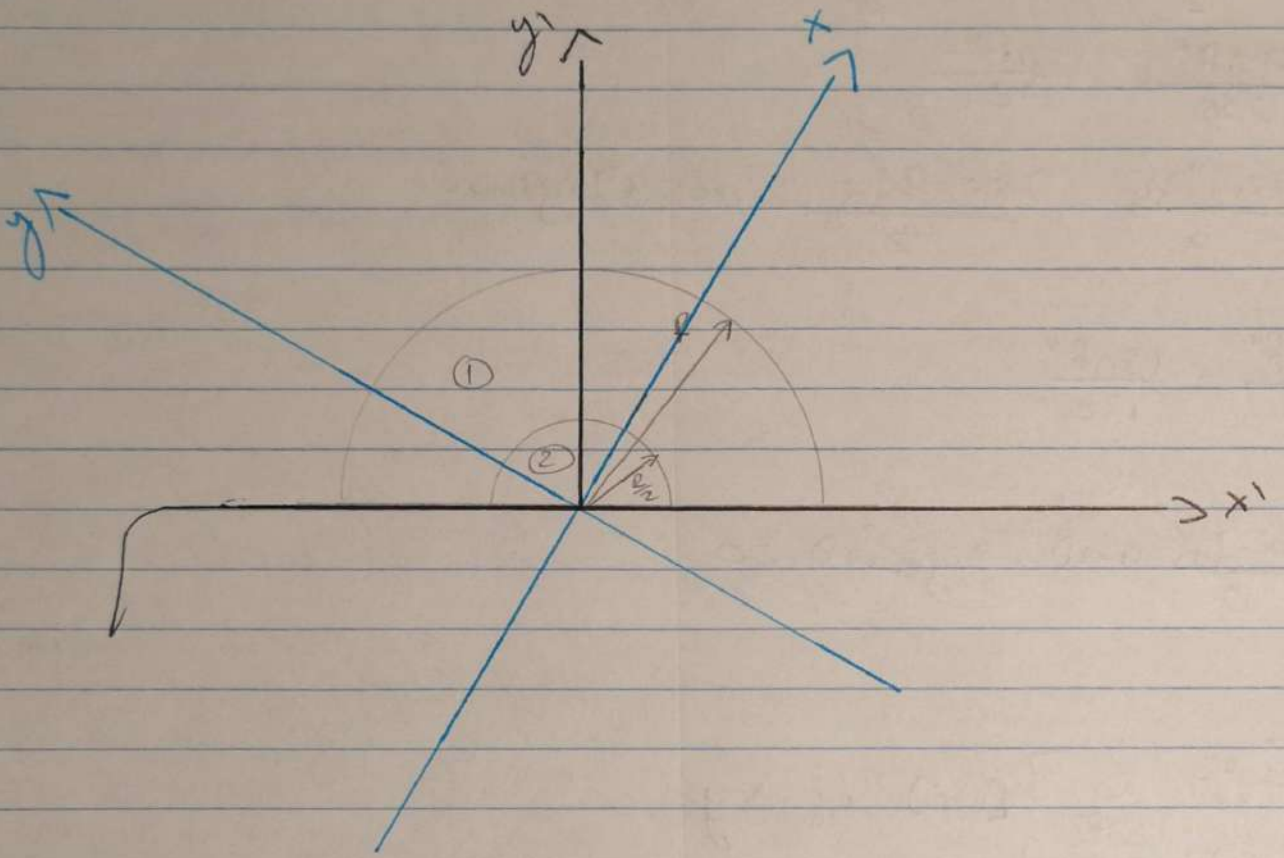
$$= \int_{-4}^{5} x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(x^2-20)^2}{2} \right) dx = \int_{-4}^{5} x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4 - 40x^2 + 400}{2} \right) dx$$

$$= \int_{-4}^{5} x \left(\frac{x^2 - x^4 + 40x^2 - 400}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-4}^{5} (x^3 - x^5 + 40x^3 - 400x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + 10x^4 - 200x^2 \right]_{-4}^{5} = \frac{1}{2} \cdot 60{,}75 = 30{,}375\ cm^4$$

Άρα $I_{i,j} = \begin{bmatrix} 10.926{,}32 & 30{,}375 \\ 30{,}375 & 522{,}45 \end{bmatrix} [cm^4],\ i,j = x, y$

Ασκηση 7



Για ημικύκλιο έχω :

$I_{x'x'_1} = \frac{\pi R^4}{8}$, $I_{y'y'_1} = \frac{\pi R^4}{8}$

$I_{x'x'_2} = \frac{\pi R^4}{8 \cdot 2^4} = \frac{\pi R^4}{128}$, $I_{y'y'_2} = \frac{\pi R^4}{8 \cdot 2^4} = \frac{\pi R^4}{128}$

$I_{x'y'_1} = 0$ λόγω συμμετρίας

$I_{x'y'_2} = 0$ λόγω συμμετρίας

Αρα $I_{x'x'} = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{1}{16}\frac{\pi R^4}{8} = \frac{15 \pi R^4}{16 \cdot 8} = \frac{15 \pi R^4}{128} = I_{y'y'}$ και $I_{x'y'} = 0$

Αρα $I_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{15\pi R^4}{128} & 0 \\ 0 & \frac{15\pi R^4}{128} \end{bmatrix}$ $[cm^4]$, $i,j = x', y'$

Για $\theta = 60°$ έχω

Άρα $I_{xx} = \frac{I_{x'x'} + I_{y'y'}}{2} + \cancel{\frac{I_{x'x'} - I_{y'y'}}{2}} \cos 120 - \cancel{I_{x'y'}} \sin 120$

$= \frac{30 \pi R^4}{256} = \frac{15 \pi R^4}{128}$

$I_{yy} = \frac{I_{x'x'} + I_{y'y'}}{2} - \cancel{\frac{I_{x'x'} - I_{y'y'}}{2}} \cos 120 + \cancel{I_{x'y'}} \sin 120$

$= \frac{30 \pi R^4}{256} = \frac{15 \pi R^4}{128}$

$I_{xy} = \cancel{\frac{I_{x'x'} - I_{y'y'}}{2}} \sin 2\theta + \cancel{I_{x'y'}} \cos 2\theta = 0$

Άρα $I_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{15 \pi R^4}{128} & 0 \\ 0 & \frac{15 \pi R^4}{128} \end{bmatrix} [cm^4]$, $i,j = x,y$

Άρα για $R = 20 cm$ έχω

$I_{i,j} = \begin{bmatrix} 58904,86 & 0 \\ 0 & 58904,86 \end{bmatrix} [cm^4]$, $i,j = x,y$