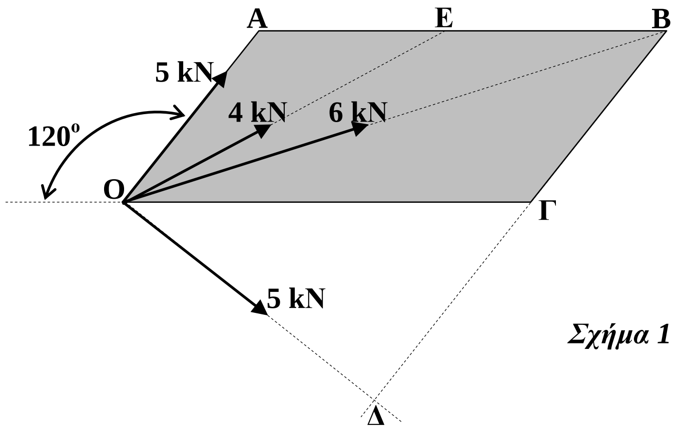
Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το διορθώσω: Georgepan

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής
Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

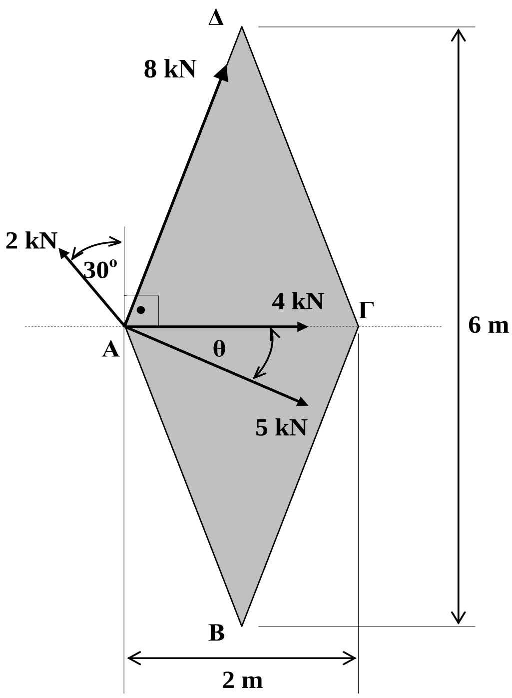
ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)
1η σειρά ασκήσεων: Διανυσματική έκφραση της δύναμης στο επίπεδο

Άσκηση 1

Στην κορυφή Ο παραλληλογράμμου ΟΑΒΓ (ΟΓ=3m, ΟΑ=2m) ασκούνται τέσσερεις δυνάμεις (Σχ.1). Αν ΑΕ=ΕΒ και η γωνία (ΟΔΒ) είναι ορθή, να υπολογιστεί η συνισταμένη των δυνάμεων.



Σχήμα 1

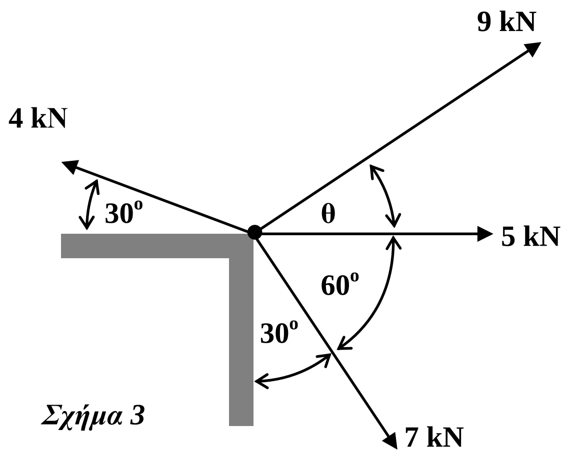


Σχήμα 2

Άσκηση 2
Στην κορυφή Α ρόμβου ΑΒΓΔ ασκούνται τέσσερεις δυνάμεις όπως φαίνεται στο Σχ.2. Να προσδιορισθεί η γωνία θ έτσι ώστε η συνισταμένη των τεσσάρων δυνάμεων να διέρχεται από το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ.

Άσκηση 3

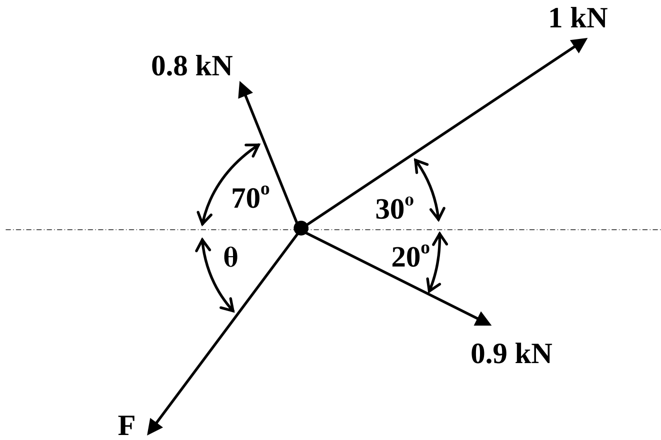
Να προσδιορισθεί η γωνία θ ώστε να μεγιστοποιηθεί το μέτρο της συνισταμένης των τεσσάρων δυνάμεων του Σχ.3. (Η άσκηση να λυθεί με δύο τρόπους).



Σχήμα 3

Άσκηση 4

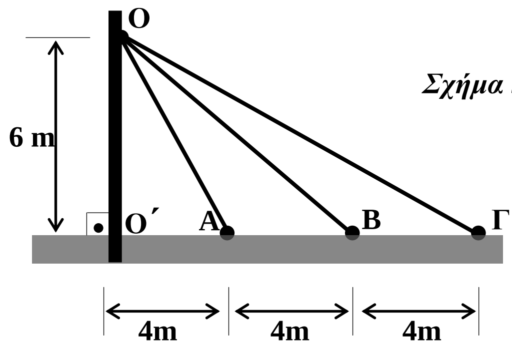
Να προσδιορισθεί η γωνία θ και το μέτρο της δυνάμεως F του Σχ. 4, αν γνωρίζετε ότι η συνισταμένη των τεσσάρων δυνάμεων είναι ίση με μηδέν.



Σχήμα 4

Άσκηση 5

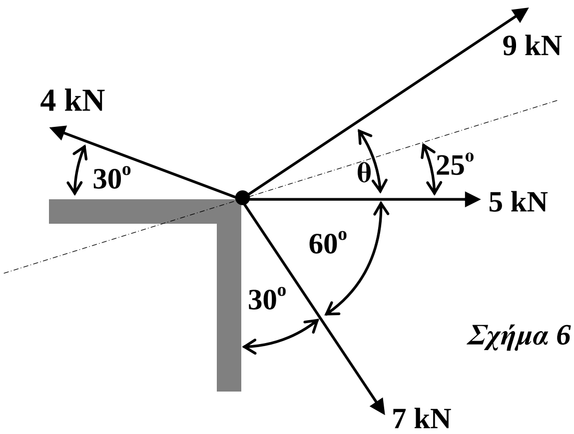
Τα τρία συρματόσχοινα του Σχ.5 ασκούν στον κατακόρυφο στύλο ΟΟ΄ δυνάμεις ίσου μέτρου F. Γνωρίζοντας ότι η συνισταμένη των τριών δυνάμεων έχει μέτρο 200 N να προσδιορισθεί η τιμή της παραμέτρου F.



Σχήμα 5

Άσκηση 6

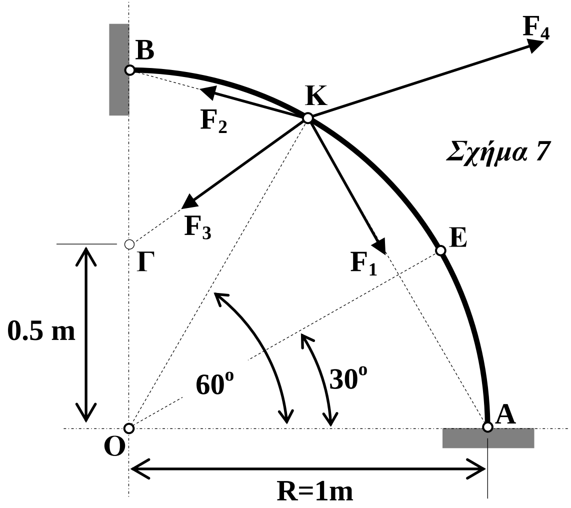
Να προσδιορισθεί η γωνία θ η συνισταμένη των τεσσάρων δυνάμεων του Σχ.6 να κείται επί της διακεκομμένης ευθείας.



Σχήμα 6

Άσκηση 7

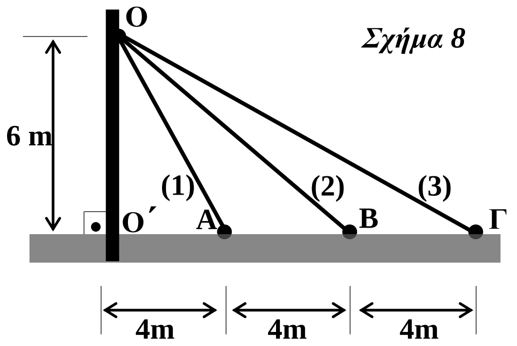
Ο φορέας ΑΕΚΒ του Σχ.7 έχει σχήμα τεταρτοκυκλίου. Στο σημείο Κ ασκούνται τέσσερεις δυνάμεις $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$, $\mathbf{F_4}$ μέτρων 3, 2, 3 και F_4 kN, αντιστοίχως. Να προσδιορισθεί ο προσανατολισμός και το μέτρο της δυνάμεως $\mathbf{F_4}$, ούτως ώστε η συνισταμένη των τεσσάρων δυνάμεων να είναι παράλληλη με την εφαπτομένη του τεταρτοκύκλιου στο σημείο Ε και να έχει μέτρο 5 kN.



Σχήμα 7

Άσκηση 8

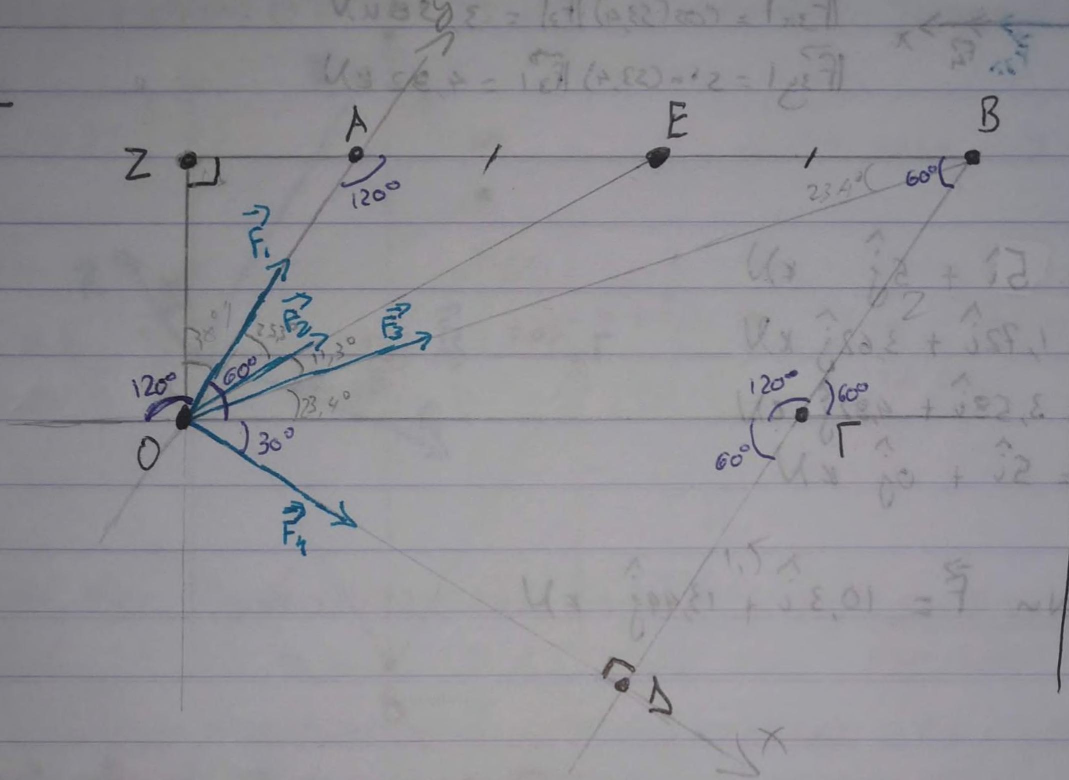
Τα συρματόσχοινα του Σχ.8 ασκούν στον κατακόρυφο στύλο ΟΟ΄ δυνάμεις F_A, F_B, $F_Γ$. Γνωρίζοντας ότι $F_A=F_B$, και ότι η συνισταμένη των τριών δυνάμεων έχει μέτρο 430 kN και διέρχεται από το μέσον του ΑΒ να προσδιορισθούν τα μέτρα των δυνάμεων.



Μηχανική Ι

1η Σειρά ασκήσεων : Διανυσματική έκφραση της δύναμης στο επίπεδο.

Άσκηση 1



$OA = 2m$

$O\Gamma = 3m$

$AE = EB$

$O\hat{\Delta}B = 90°$

$\vec{F}_1 = 5kN$

$\vec{F}_2 = 4kN$

$\vec{F}_3 = 6kN$

$\vec{F}_4 = 5kN$

Αφού $\Delta\hat{O}\Gamma = 30°$, τότε $\Delta\Gamma = \frac{O\Gamma}{2} = 1,5m \Rightarrow \Delta B = 3,5m$

Επίσης $O\Delta^2 = O\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2 \Rightarrow O\Delta = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36-9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{27} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,m$

Έχω $\tan(B\hat{O}\Delta) = \frac{B\Delta}{O\Delta} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \frac{7}{3\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{9} = 1,35 \Rightarrow B\hat{O}\Delta = 53,4°$

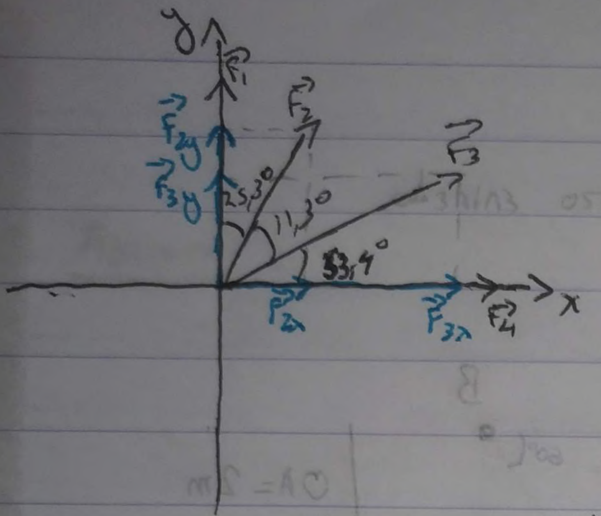
$B\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta - \Gamma\hat{O}\Delta = 53,4° - 30° = 23,4°$

$ZA = \sin\frac{\pi}{6} \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1m \Rightarrow ZE = 2,5m$

$ZO = \sqrt{OA^2 - ZA^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$\tan(Z\hat{O}E) = \frac{ZE}{ZO} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{3,46} = 1,45 \Rightarrow Z\hat{O}E = 55,3° \Rightarrow A\hat{O}E = 25,3°$

Άρα $E\hat{O}B = 90° - 30° - 25,3° - 23,4° = 11,3°$



$$|\vec{F_{2x}}| = \sin(25{,}3^\circ)\cdot|\vec{F_2}| = 0{,}43\cdot 4 = 1{,}72\,kN$$

$$|\vec{F_{2y}}| = \cos(25{,}3)\,|\vec{F_2}| = 0{,}9\cdot 4 = 3{,}62\,kN$$

$$|\vec{F_{3x}}| = \cos(53{,}4)\,|\vec{F_3}| = 3{,}58\,kN$$

$$|\vec{F_{3y}}| = \sin(53{,}4)\,|\vec{F_3}| = 4{,}82\,kN$$

Άρα έχω: $\vec{F_1} = 0\hat{i} + 5\hat{j}$ kN

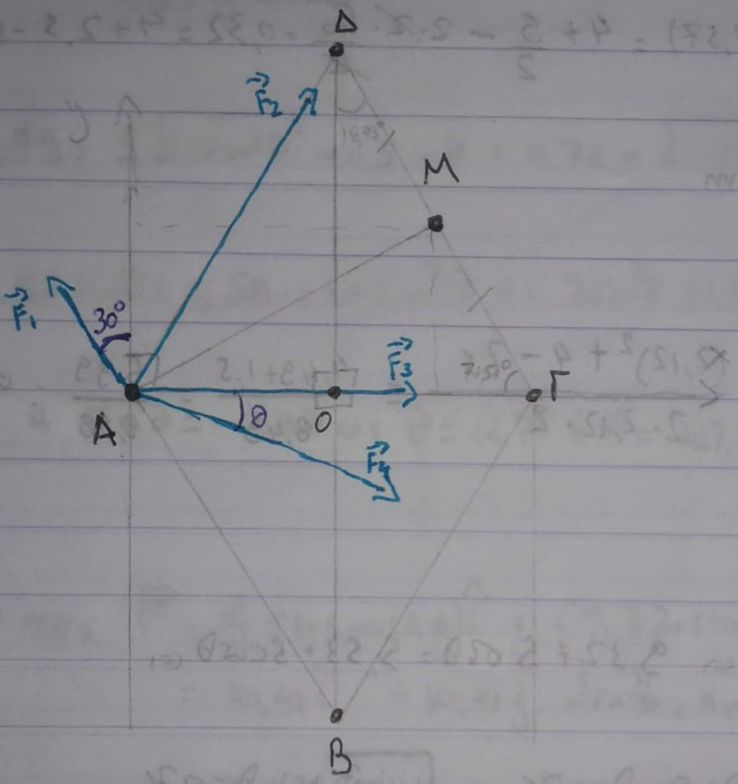
$\vec{F_2} = 1{,}72\hat{i} + 3{,}62\hat{j}$ kN

$\vec{F_3} = 3{,}58\hat{i} + 4{,}82\hat{j}$ kN

$\vec{F_4} = 5\hat{i} + 0\hat{j}$ kN

Άρα η συνισταμένη $\vec{F} = 10{,}3\hat{i} + 13{,}44\hat{j}$ kN

Άσκηση 2



$BΔ = 6m$

$AΓ = 2m$

$\vec{F_1} = 2kN$

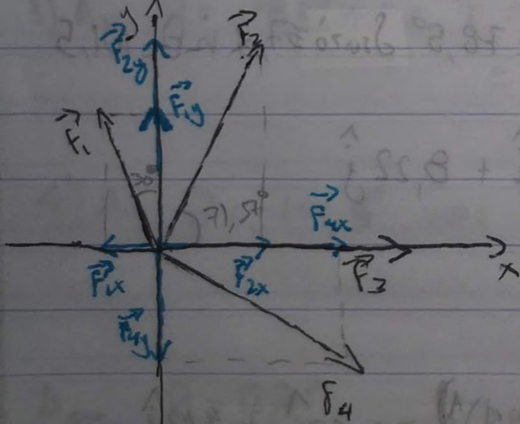
$\vec{F_2} = 8kN$

$\vec{F_3} = 4kN$

$\vec{F_4} = 5kN$

Από ΠΘ: $ΔΓ^2 = OΔ^2 + OΓ^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Leftrightarrow ΔΓ = \sqrt{10}\, m$

$\tan(O\hat{Δ}Γ) = \frac{OΓ}{OΔ} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow O\hat{Δ}Γ = 18{,}43° \Rightarrow O\hat{Γ}Δ = 71{,}57°$



$|\vec{F_{1x}}| = \sin(30°)|\vec{F_1}| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\, kN$

$|\vec{F_{1y}}| = \cos(30°)|\vec{F_1}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}\, kN$

$|\vec{F_{2x}}| = \cos(71{,}57°)|\vec{F_2}| = 2{,}53\, kN$

$|\vec{F_{2y}}| = \sin(71{,}57°)|\vec{F_2}| = 7{,}59\, kN$

$|\vec{F_{4x}}| = \cos\theta\, |\vec{F_4}| = 5\cos\theta$

$|\vec{F_{4y}}| = \sin\theta\, |\vec{F_4}| = 5\sin\theta$

Επομένως:

$\vec{F_1} = -1\hat{i},\ \sqrt{3}\hat{j}\ kN$

$\vec{F_2} = 2{,}53\hat{i},\ 7{,}59\hat{j}\ kN$

$\vec{F_3} = 4\hat{i},\ 0\hat{j}\ kN$

$\vec{F_4} = 5\cos\theta\hat{i},\ +5\sin\theta\hat{j}\ kN$

$\vec{F} = (5{,}53 + 5\cos\theta)\hat{i} + (\sqrt{3} + 7{,}59 + 5\sin\theta)\hat{j}\ kN$

$= (5{,}53 + 5\cos\theta)\hat{i} + (9{,}32 + 5\sin\theta)\hat{j}\ kN$

Από Νόμο των Συνημιτόνων έχω:

$$AM^2 = A\Gamma^2 + M\Gamma^2 - 2A\Gamma M\Gamma \cos(71{,}57) = 4 + \frac{5}{2} - 2 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\cancel{2}} \cdot 0{,}32 = 4 + 2{,}5 - 0{,}64\sqrt{10} =$$

$$= 6{,}5 - 2 = 4{,}5 \Leftrightarrow AM = 2{,}12 m$$

Και έπειτα:

$$\cos(M\hat{A}\Gamma) = \frac{AM^2 + A\Gamma^2 - M\Gamma^2}{2MA \cdot A\Gamma} = \frac{(2{,}12)^2 + 4 - 2{,}5}{2 \cdot 2{,}12 \cdot 2} = \frac{4{,}49 + 1{,}5}{8{,}48} = \frac{5{,}99}{8{,}48} = 0{,}71 \Rightarrow M\hat{A}\Gamma = 45{,}1^\circ$$

Έχω $\tan(45{,}1) = 1$

Άρα πρέπει $\frac{9{,}32 + 5\sin\theta}{5{,}53 + 5\cos\theta} = 1 \Leftrightarrow 9{,}32 + 5\sin\theta = 5{,}53 + 5\cos\theta \Leftrightarrow$

Άρα πρέπει $\frac{9,32+5\sin\theta}{5,53+5\cos\theta}=1 \Leftrightarrow 9,32+5\sin\theta=5,53+5\cos\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\sin\theta+3,79=5\sqrt{1-\sin^2\theta} \Leftrightarrow \sin\theta+0,76=\sqrt{1-\sin^2\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\theta+1,52\sin\theta+0,58=1-\sin^2\theta \Leftrightarrow 2\sin^2\theta+1,52\sin\theta-0,42=0$

$\Leftrightarrow \sin\theta=0,22$ ή $\sin\theta=-0,98 \Leftrightarrow \theta=12,7^\circ$ ή $\theta=167,3^\circ$ ή $\theta=-78,5^\circ$ ή $\theta=-101,5^\circ$

<u>ΔΤΠ</u>

1) Αν $\theta=12,7^\circ$ τότε $\vec{F}=(5,53+5\cos(12,7))\hat{i}+(9,32+5\sin(12,7))\hat{j}$
$=10,41\hat{i}+10,41\hat{j}$ δεκτό, αφού $\frac{10,41}{10,41}=1$

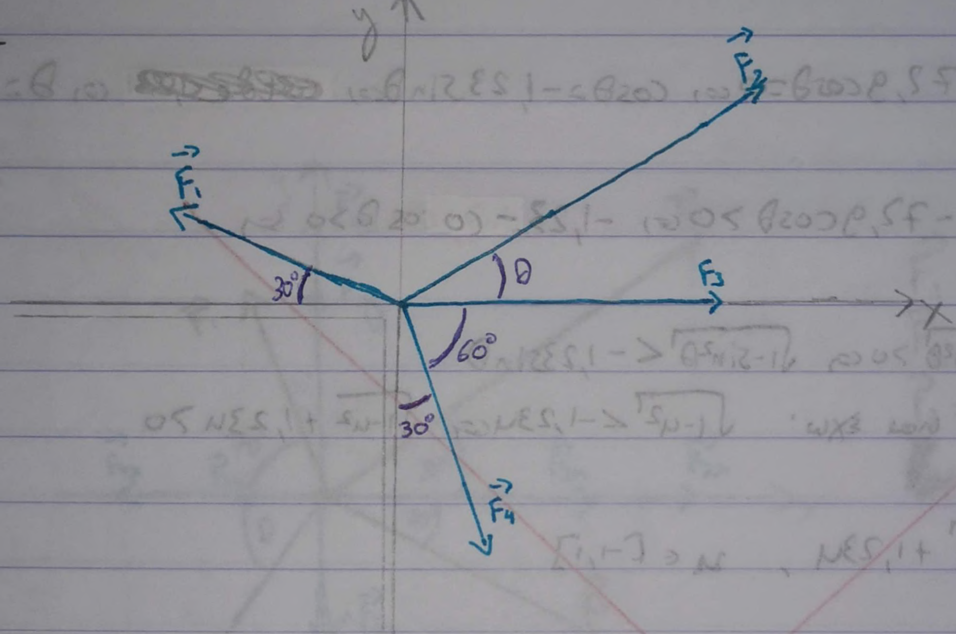
2) Αν $\theta=167,3^\circ$ τότε $\vec{F}=(5,53+5\cos(167,3))\hat{i}+(9,32+5\sin(167,3))\hat{j}$
$=0,65\hat{i}+10,41\hat{j}$ απορρίπτεται

3) Αν $\theta=-78,5^\circ$ τότε $\vec{F}=(5,53+5\cos(-78,5))\hat{i}+(9,32+5\sin(-78,5))\hat{j}$
$=6,53\hat{i}+4,42\hat{j}$ απορρίπτεται

4) Αν $\theta=-101,5^\circ$ τότε $\vec{F}=(5,53+5\cos(-101,5))\hat{i}+(9,32+5\sin(-101,5))\hat{j}$
$=4,53\hat{i}+4,42\hat{j}$ απορρίπτεται

Άρα $\theta=12,7^\circ$

Άσκηση 3

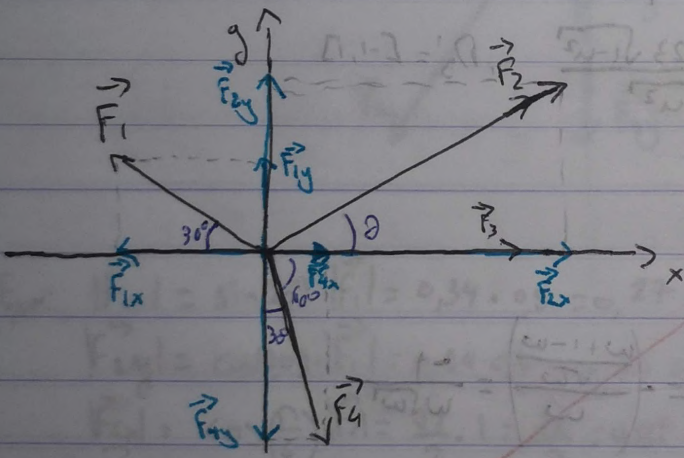


$\vec{F_1} = 4kN$

$\vec{F_2} = 9kN$

$\vec{F_3} = 5kN$

$\vec{F_4} = 7kN$



$|\vec{F_{1x}}| = \cos(30°) \cdot |\vec{F_1}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3} = 3,46\ kN$

$|\vec{F_{1y}}| = \sin(\frac{\pi}{6}) \cdot |\vec{F_1}| = 2\ kN$

$|\vec{F_{2x}}| = \cos\theta \cdot |\vec{F_2}| = 9\cos\theta\ kN$

$|\vec{F_{2y}}| = \sin\theta |\vec{F_2}| = 9\sin\theta\ kN$

$|\vec{F_{4x}}| = \sin(\frac{\pi}{6}) |\vec{F_4}| = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3,5\ kN$

$|\vec{F_{4y}}| = \cos(\frac{\pi}{6}) |\vec{F_4}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = \frac{\sqrt{3} \cdot 7}{2} = 6,1\ kN$

Άρα έχω:
$$\left.\begin{aligned} \vec{F_1} &= -3,46\hat{i} + 2\hat{j}\ kN \\ \vec{F_2} &= 9\cos\theta\hat{i} + 9\sin\theta\hat{j}\ kN \\ \vec{F_3} &= 5\hat{i} + 0\hat{j}\ kN \\ \vec{F_4} &= 3,5\hat{i} - 6,1\hat{j}\ kN \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Η συνισταμένη } \vec{F} = (5,04 + 9\cos\theta)\hat{i} + (-4,1 + 9\sin\theta)\hat{j}$$

Το μέτρο της $\vec{F}$: $|\vec{F}| = \sqrt{(5 + 9\cos\theta)^2 + (-4,1 + 9\sin\theta)^2} = \sqrt{25 + 90\cos\theta + 81\cos\theta^2 + 81\sin^2\theta - 73,8\sin\theta + 16,81}$

$= \sqrt{90\cos\theta - 73,8\sin\theta + 122,81} = F(\theta)$, $D_F = [-180, 180]$

$$F'(\theta) = \frac{-90\sin\theta - 72,9\cos\theta}{2\sqrt{90\cos\theta - 72,9\sin\theta + 122,81}}, \quad D_{f'} = [-180, 180]$$

$$F'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -90\sin\theta - 72,9\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -1,23\sin\theta \Leftrightarrow \tan\theta = -0,81 \Leftrightarrow \theta = -39^\circ \text{ ή } \theta = -141^\circ$$

Λύση

1) Αν $\theta = -39^\circ$ τότε η $\vec{F} = (5{,}04 + 9\cos(-39))\hat{i} + (-4{,}1 \pm 9\sin(-39))\hat{j}$

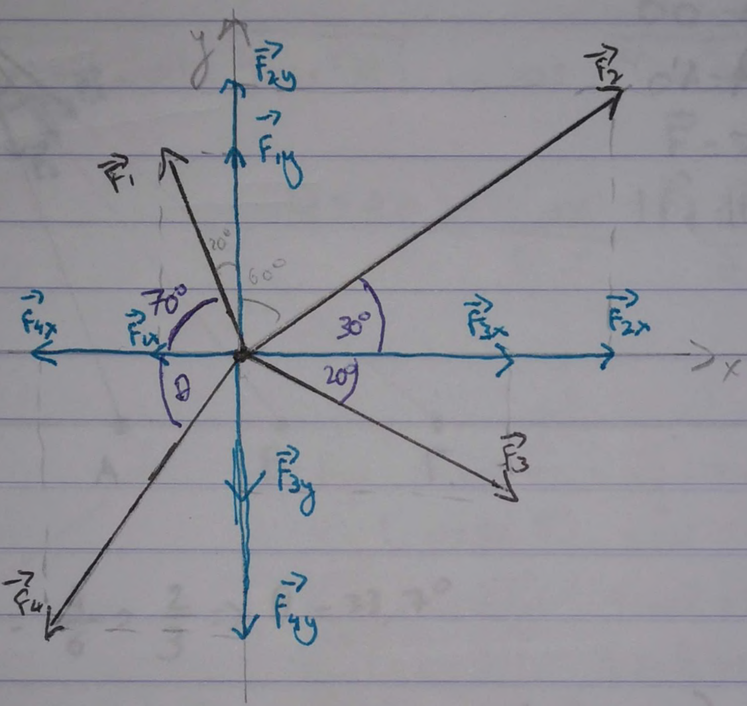
$= 12{,}03\hat{i} - 9{,}76\hat{j}$ (δεκτή αφού $\dfrac{-9{,}76}{12{,}03} = -0{,}81 = \tan\theta$

2) Αν $\theta = -141^\circ$ τότε η $\vec{F} = (5{,}04 + 9\cos(-141))\hat{i} + (-4{,}1 + 9\sin(-141))\hat{j}$

$= -1{,}95\hat{i} - 9{,}76\hat{j}$ απορρίπτεται αφού $\dfrac{-9{,}76}{-1{,}95} \neq -0{,}81 = \tan\theta$.

Άρα $\theta = -39^\circ$

Άσκηση 4



$\vec{F}_1 = 0{,}8\,kN$
$\vec{F}_2 = 1\,kN$
$\vec{F}_3 = 0{,}9\,kN$

Έχω: $|\vec{F}_{1x}| = \sin(20°)\cdot|\vec{F}_1| = 0{,}34\cdot 0{,}8 = 0{,}27\ kN$

$|\vec{F}_{1y}| = \cos(20)\cdot|\vec{F}_1| = 0{,}94\cdot 0{,}8 = 0{,}75\ kN$

$|\vec{F}_{2x}| = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot|\vec{F}_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}87\ kN$

$|\vec{F}_{2y}| = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot|\vec{F}_2| = \frac{1}{2} = 0{,}5\,kN$

$|\vec{F}_{3x}| = \cos(20)\cdot|\vec{F}_3| = 0{,}85\ kN$

$|\vec{F}_{3y}| = \sin(20)\cdot|\vec{F}_3| = 0{,}3\ kN$

$|\vec{F}_{4x}| = \cos\theta|\vec{F}_4|$

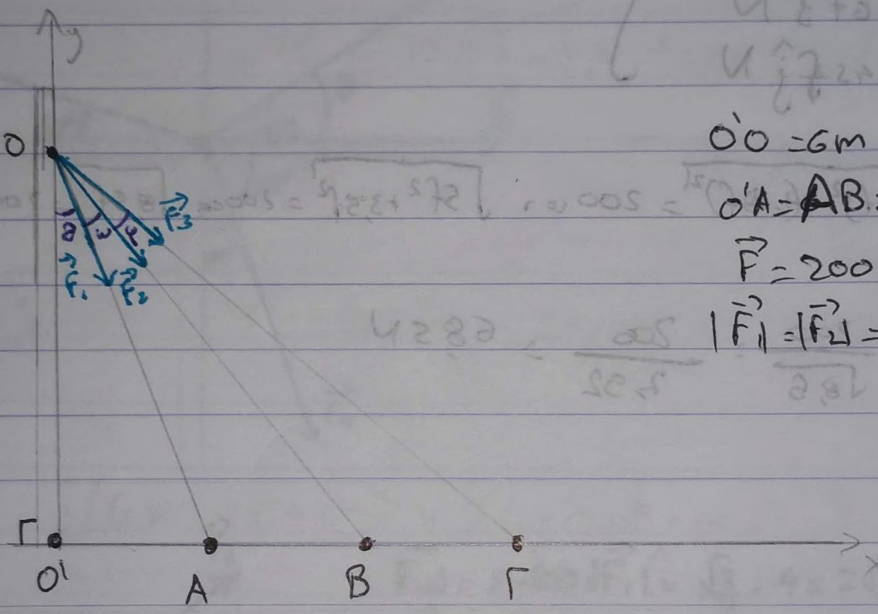
$|\vec{F}_{4y}| = \sin\theta|\vec{F}_4|$

Άρα:
$$\left.\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= -0{,}27\hat{i} + 0{,}75\hat{j}\ kN\\
\vec{F}_2 &= 0{,}87\hat{i} + 0{,}5\hat{j}\ kN\\
\vec{F}_3 &= 0{,}85\hat{i} - 0{,}3\hat{j}\ kN\\
\vec{F}_4 &= -\cos\theta|\vec{F}_4|\hat{i} - \sin\theta|\vec{F}_4|\hat{j}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Η συνισταμένη } \vec{F} = \left(1{,}45 - \cos\theta|\vec{F}_4|\right)\hat{i} + \left(0{,}95 - \sin\theta|\vec{F}_4|\right)\hat{j}$$

Όμως $\vec{F} = 0$ άρα πρέπει
$$\begin{cases} 1{,}45 - \cos\theta|\vec{F}_4| = 0\\ 0{,}95 - \sin\theta|\vec{F}_4| = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\theta|\vec{F}_4| = 1{,}45\\ \sin\theta|\vec{F}_4| = 0{,}95\end{cases} \Rightarrow \tan\theta = 0{,}65 \Rightarrow \theta = 33{,}2°$$

Άρα $|\vec{F}_4| = \frac{1,45}{\cos(33,2)} = 1,72\ N$

Άσκηση 5



$O'O = 6m$

$O'A = AB = B\Gamma = 4m$

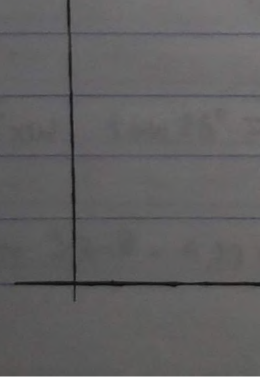
$\vec{F} = 200N$

$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = f$

Έχω: $\tan\theta = \dfrac{O'A}{O'O} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \theta = 33{,}7^\circ$

$\tan(\theta+\omega) = \dfrac{O'B}{O'O} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \theta+\omega = 53{,}1^\circ \ (\Rightarrow \omega = 19{,}4^\circ)$

$\tan(\theta+\omega+\varphi) = \dfrac{O'\Gamma}{O'O} = \dfrac{12}{6} = 2 \Rightarrow \theta+\omega+\varphi = 63{,}4^\circ \ (\Rightarrow \varphi = 10{,}3^\circ)$



$|\vec{F}_{1x}| = \sin\theta \cdot |\vec{F}_1| = \sin(33{,}7)\cdot f = 0{,}55f$

$|\vec{F}_{1y}| = \cos\theta \cdot |\vec{F}_1| = \cos(33{,}7)\cdot f = 0{,}83f$

$|\vec{F}_{2x}| = \sin(\theta+\omega)\cdot|\vec{F}_2| = \sin(53{,}1)\cdot f = 0{,}8f$

$|\vec{F}_{2y}| = \cos(\theta+\omega)\cdot|\vec{F}_2| = \cos(53{,}1)\cdot f = 0{,}6f$

$|\vec{F}_{3x}| = \sin(\theta+\omega+\varphi)\cdot|\vec{F}_3| = \sin(63{,}4)\cdot f = 0{,}89f$

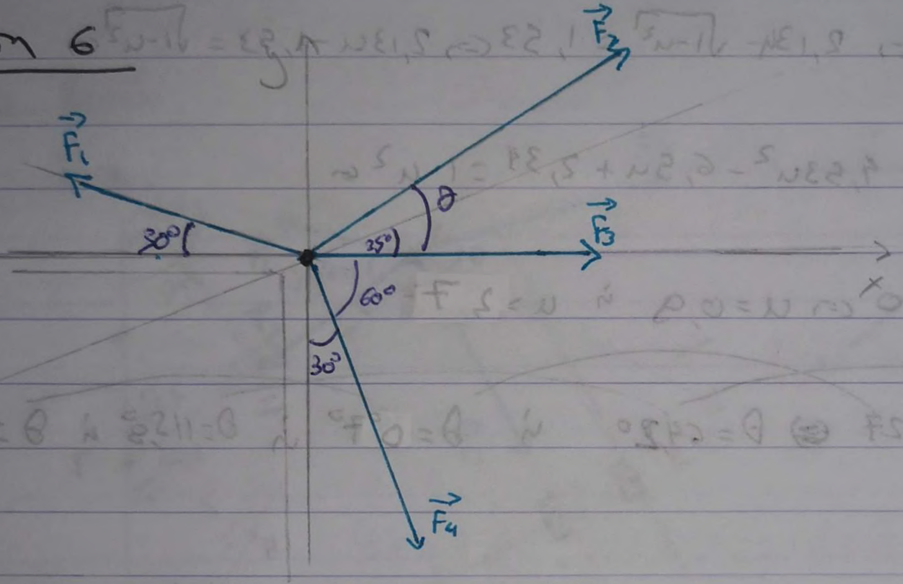
$|\vec{F}_{3y}| = \cos(\theta+\omega+\varphi)\cdot|\vec{F}_3| = \cos(63{,}4)\cdot f = 0{,}45f$

Άρα: $\left.\begin{array}{l} \vec{F}_1 = 0{,}55f\hat{i} - 0{,}83f\hat{j}\ N \\ \vec{F}_2 = 0{,}8f\hat{i} - 0{,}6f\hat{j}\ N \\ \vec{F}_3 = 0{,}89f\hat{i} - 0{,}45f\hat{j}\ N \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F} = 2{,}24f\hat{i} - 1{,}88f\hat{j}\ N$

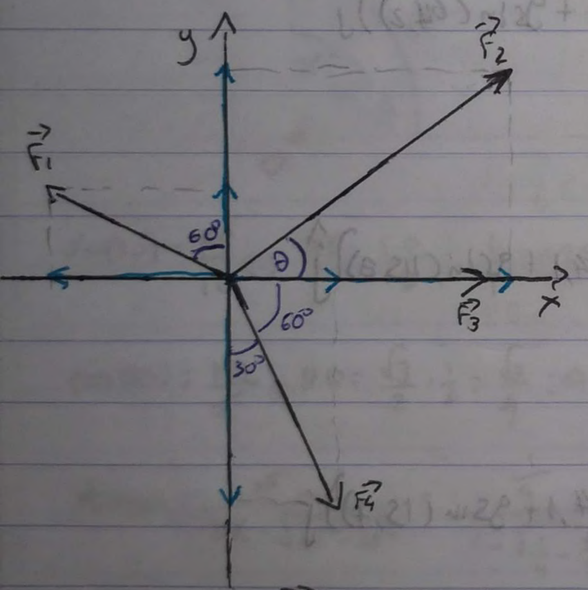
Έχω $|\vec{F}| = 200\ N \Leftrightarrow \sqrt{(2{,}24f)^2 + (1{,}88f)^2} = 200 \Leftrightarrow \sqrt{5f^2 + 3{,}5f^2} = 200 \Leftrightarrow \sqrt{8{,}5f^2} = 200$

$\Leftrightarrow \sqrt{8{,}5}\,f = 200 \Leftrightarrow f = \dfrac{200}{\sqrt{8{,}5}} = \dfrac{200}{2{,}92} \simeq 68{,}5\ N$

Άσκηση 6



$|\vec{F_1}| = 4kN$
$|\vec{F_2}| = 9kN$
$|\vec{F_3}| = 5kN$
$|\vec{F_4}| = 7kN$



$|\vec{F_{1x}}| = \sin(60)\cdot|\vec{F_1}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4 = 2\sqrt{3} = 3,46\,kN$

$|\vec{F_{1y}}| = \cos(60)\cdot|\vec{F_1}| = 2\,kN$

$|\vec{F_{2x}}| = \cos\theta|\vec{F_2}| = 9\cos\theta\,kN$

$|\vec{F_{2y}}| = \sin\theta|\vec{F_2}| = 9\sin\theta\,kN$

$|\vec{F_{4x}}| = \sin(30)\cdot|\vec{F_4}| = 3,5\,kN$

$|\vec{F_{4y}}| = \cos(30)\cdot|\vec{F_4}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 7 = 3,5\sqrt{3} = 6,1\,kN$

Άρα έχω:
$$\left.\begin{aligned} \vec{F_1} &= -3,46\hat{i} + 2\hat{j}\ kN \\ \vec{F_2} &= 9\cos\theta\,\hat{i} + 9\sin\theta\,\hat{j}\ kN \\ \vec{F_3} &= 5\hat{i} + 0\hat{j}\ kN \\ \vec{F_4} &= 3,5\hat{i} - 6,1\hat{j}\ kN \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \text{συνισταμένη } \vec{F} = (5,04 + 9\cos\theta)\hat{i} + (-4,1 + 9\sin\theta)\hat{j}$$

Έχω $\tan 25° = 0,47$ άρα πρέπει: $\frac{-4,1 + 9\sin\theta}{5,04 + 9\cos\theta} = 0,47 \Leftrightarrow -4,1 + 9\sin\theta = 2,37 + 4,23\cos\theta$

$\Leftrightarrow 9\sin\theta - 4,23\cos\theta = 6,47 \Leftrightarrow 9\sin\theta - 4,23\sqrt{1-\sin^2\theta} = 6,47$

Θέτω $u = \sin\theta$ και έχω:

$9u - 4,23\sqrt{1-u^2} = 6,47 \Leftrightarrow 2,13u - \sqrt{1-u^2} = 1,53 \Leftrightarrow 2,13u - 1,53 = \sqrt{1-u^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2,13u - 1,53)^2 = 1 - u^2 \Leftrightarrow 4,53u^2 - 6,5u + 2,34 = 1 - u^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5,53u^2 - 6,5u + 1,34 = 0 \Leftrightarrow u = 0,9$ ή $u = 0,27$

$\Leftrightarrow \sin\theta = 0,9$ ή $\sin\theta = 0,27 \Leftrightarrow \theta = 64,2^\circ$ ή $\theta = 15,7^\circ$ ή $\theta = 115,8^\circ$ ή $\theta = 164,3^\circ$

<u>ΔΤΠ</u>

1) Αν $\theta = 64,2^\circ$ τότε $\vec{F} = (5,04 + 9\cos(64,2))\hat{i} + (-4,1 + 9\sin(64,2))\hat{j}$
$= 8,96\hat{i} + 4\hat{j}$

Έχω $\frac{4}{8,96} = 0,47 = \tan 25^\circ$ άρα δεκτό

2) Αν $\theta = 115,8^\circ$ τότε $\vec{F} = (5,04 + 9\cos(115,8))\hat{i} + (-4,1 + 9\sin(115,8))\hat{j}$
$= 1,12\hat{i} + 4\hat{j}$

Όμως $\frac{4}{1,12} = 3,57 \neq 0,47 = \tan 25^\circ$ άρα απορρίπτεται

3) Αν $\theta = 15,7^\circ$ τότε $\vec{F} = (5,04 + 9\cos(15,7))\hat{i} + (-4,1 + 9\sin(15,7))\hat{j}$
$= 13,7\hat{i} - 1,66\hat{j}$

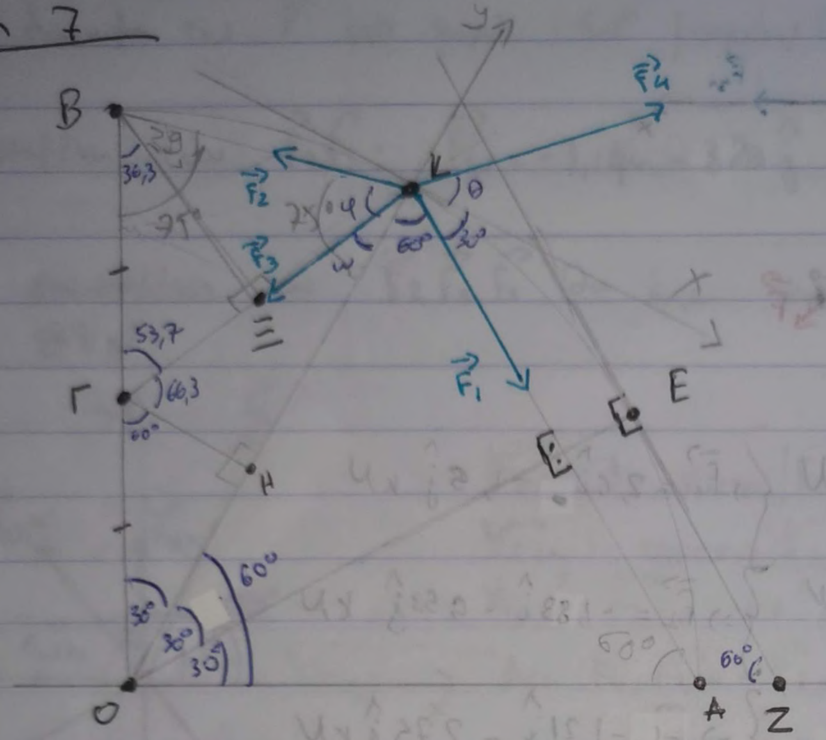
Όμως $\frac{-1,66}{13,7} \neq 0,47$ άρα απορρίπτεται

4) Αν $\theta = 164,3^\circ$ τότε $\vec{F} = (5,04 + 9\cos(164,3))\hat{i} + (-4,1 + 9\sin(164,3))\hat{j}$
$= -3,62\hat{i} - 1,66\hat{j}$

Όμως $\frac{-1,66}{-3,62} = 0,46 \neq 0,47$ άρα απορ.

Άρα $\theta = 15,7^\circ$

Άσκηση 7



$O\Lambda = 1m$

$O\Gamma = 0,5m$

$|\vec{F_1}| = 3KN$

$|\vec{F_2}| = 2KN$

$|\vec{F_3}| = 3KN$

$|\vec{F}| = 5KN$

$\sin(30) = \frac{H\Gamma}{\Gamma O} \Leftrightarrow H\Gamma = \frac{\Gamma O}{2} = \frac{1}{4} = 0,25m$

$\cos(30) = \frac{HO}{O\Gamma} \Leftrightarrow HO = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,43m$

$\tan\omega = \frac{H\Gamma}{OK - \sqrt{O\Gamma^2 - H\Gamma^2}} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \sqrt{\frac{3}{16}}} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{0,57} = \frac{1}{2,28} = 0,44 \Rightarrow \omega = 23,7°$

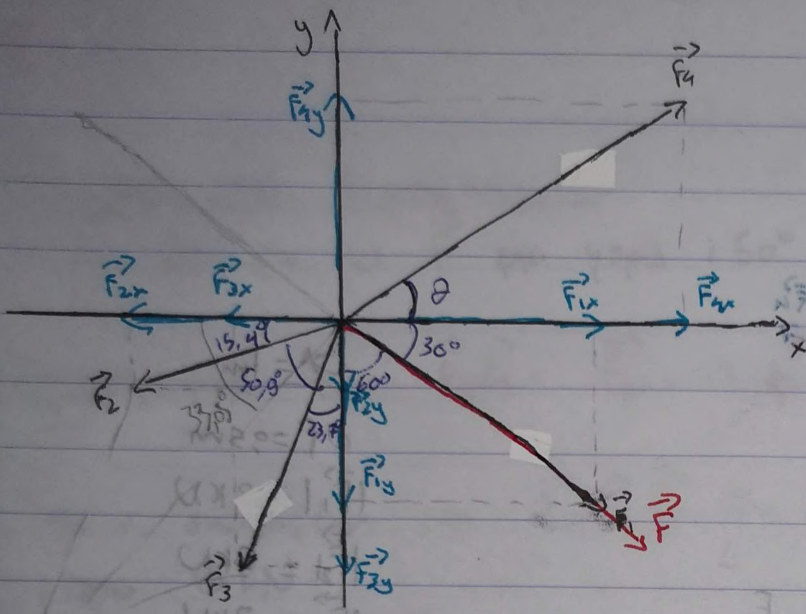
$\sin\omega = \sin(23,7) = \frac{H\Gamma}{\Gamma K} \Leftrightarrow \Gamma K = \frac{H\Gamma}{\sin(23,7)} = \frac{0,25}{0,4} = 0,625m$

$\sin(53,7) = \frac{B\Xi}{B\Gamma} \Leftrightarrow B\Xi = \sin(53,7) \cdot B\Gamma = 0,4$

Άρα $\tan\varphi = \frac{B\Xi}{\Gamma K - \sqrt{B\Gamma^2 - B\Xi^2}} = \frac{0,4}{0,625 - \sqrt{0,25 - 0,16}} = \frac{0,4}{0,625 - \sqrt{0,09}} = \frac{0,4}{0,325} = 1,23 \Rightarrow \varphi = 50,9°$

Αφού E το μέσο του $\widehat{ZEK}$ τότε η εφαπτομένη στο E είναι παράλληλη με την χορδή KA

Άρα η $\vec{F}$ πρέπει να ~~...~~ έχει την ίδια διεύθυνση με την $\vec{F_1}$



$|\vec{F}_{1x}| = \cos(30)|\vec{F}_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3 = 2,6 \text{ kN}$

$|\vec{F}_{1y}| = \sin(3)\cdot f_1 = \frac{1}{2}\cdot 3 = 1,5 \text{ kN}$

$\Rightarrow \vec{F}_1 = 2,6\hat{i} - 1,5\hat{j} \text{ kN}$

$|\vec{F}_{2x}| = \cos(15,4)|\vec{F}_2| = 1,93 \text{ kN}$

$|\vec{F}_{2y}| = \sin(15,4)|\vec{F}_2| = 0,53 \text{ kN}$

$\Rightarrow \vec{F}_2 = -1,93\hat{i} - 0,53\hat{j} \text{ kN}$

$|\vec{F}_{3x}| = \sin(23,7)|\vec{F}_3| = 1,21 \text{ kN}$

$|\vec{F}_{3y}| = \cos(23,7)|\vec{F}_3| = 2,75 \text{ kN}$

$\Rightarrow \vec{F}_3 = -1,21\hat{i} - 2,75\hat{j} \text{ kN}$

$|\vec{F}_{4x}| = \cos\theta|\vec{F}_4|$

$|\vec{F}_{4y}| = \sin\theta|\vec{F}_4|$

$\Rightarrow \vec{F}_4 = \cos\theta|\vec{F}_4|\hat{i} + \sin\theta|\vec{F}_4|\hat{j} \text{ kN}$

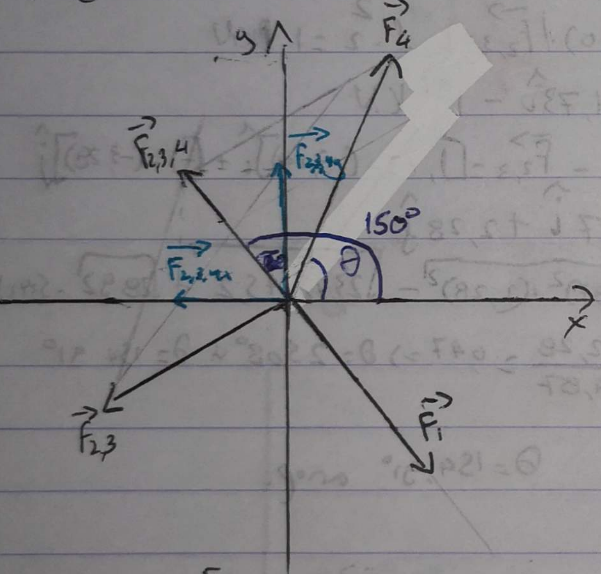
Άρα $\vec{F} = (-0,54 + \cos\theta|\vec{F}_4|)\hat{i} + (-4,78 + \sin\theta|\vec{F}_4|)\hat{j} \text{ kN}$

Διακρίνω τις περιπτώσεις

1) Το διάνυσμα της $\vec{F}$ έχει γωνία 150° μοιρών (αντίθετα της $\vec{F}_1$)

Η συνισταμένη των $\vec{F}_2, \vec{F}_3$: $\vec{F}_{2,3} = -3,12\hat{i} - 3,28\hat{j}$

Τότε η συνισταμένη των $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ θα έχει κατεύθυνση αντίθετη της $\vec{F}_1$ και μέτρο 8KN



$|\vec{F}_{2,3,4x}| = \sin(60)\cdot|\vec{F}_{2,3,4}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 8 = 6,93$ kN

$|\vec{F}_{2,3,4y}| = \cos(60)\cdot|\vec{F}_{2,3,4}| = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4$ kN

Άρα $\vec{F}_{2,3,4} = -6,93\hat{i} + 4\hat{j}$ kN

Άρα $\vec{F}_4 = \vec{F}_{2,3,4} - \vec{F}_{2,3} = -6,93-(-3,12)\hat{i} + (4 - (-3,28))\hat{j}$

$= -3,81\hat{i} + 7,28\hat{j}$

και $|\vec{F}_4| = \sqrt{(3,81)^2 + (7,28)^2} = \sqrt{14,52 + 53} = \sqrt{67,52} = 8,22$ kN

και $\tan\theta = -\frac{7,28}{-3,81} = -1,91 \Leftrightarrow \theta = -62,37$ ή $\theta = 117,62$

Όπως το διάνυσμα βρίσκεται στο 3° τεταρτημόριο λόγω των συντελεστών $\hat{i}, \hat{j}$ του άρα θ = -62,37 απορρίπτεται. Άρα θ = 117,62

Επαλήθευση: αν θ = 117,62, τότε $\begin{cases} \cos\theta = \cos(117,62) = -0,46 \\ \sin\theta = \sin(117,62) = 0,89 \end{cases}$ και $|\vec{F}_4| = 8,22$ kN

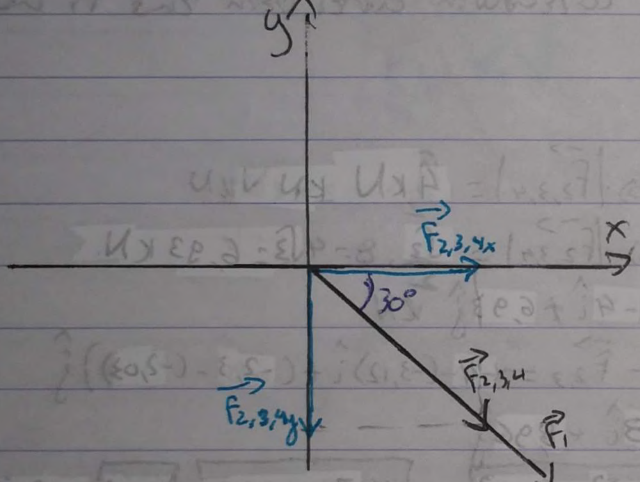
Άρα $\vec{F}_4 = -3,78\hat{i} + 7,32\hat{j}$

Άρα $\vec{F} = -4,32 + 2,54$ και $\frac{2,54}{-4,32} = -0,59 = \tan(150)$

2) Το διάνυσμα της $\vec{F}$ να έχει την κατεύθυνση της $\vec{F_1}$

Έχω $\vec{F}_{2,3} = -3,14\hat{i} - 3,28\hat{j}$

Τότε η κατεύθυνση της $\vec{F}$ θα είναι ίδια με της $\vec{F_1}$ και θα έχει μέτρο 2kN.



$|\vec{F}_{2,3,4x}| = \cos(30)\,|\vec{F}_{2,3,4}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \sqrt{3} = 1,73$ kN

$|\vec{F}_{2,3,4y}| = \sin(30)\cdot|\vec{F}_{2,3,4}| = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ kN

Άρα $\vec{F}_{2,3,4} = 1,73\hat{i} - 1\hat{j}$ kN

Άρα $\vec{F}_4 = \vec{F}_{2,3,4} - \vec{F}_{2,3} = [1,73-(-3,14)]\hat{i} + [-1-(-3,28)]\hat{j}$
$= 4,87\hat{i} + 2,28\hat{j}$

Άρα $|\vec{F}_4| = \sqrt{(4,87)^2+(2,28)^2} = \sqrt{23,72+5,2} = \sqrt{28,92} = 5,34$ kN

και $\tan\theta = \frac{2,28}{4,87} = 0,47 \Rightarrow \theta = 25,08°$ ή $\theta = 154,91°$

Όμως το $\vec{F}_4$ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο άρα $\theta = 154,91°$ απορ.

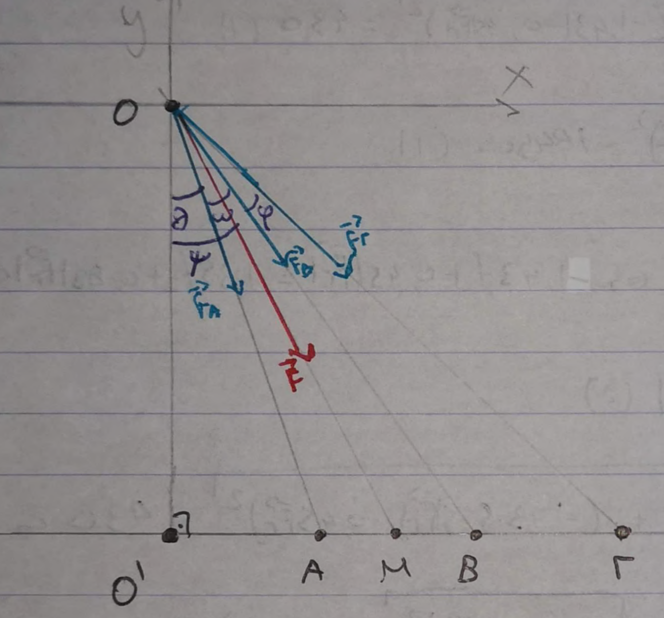
Άρα $\theta = 25,08°$

Επαληθεύουμε: Αν $\theta = 25,08°$ τότε $\begin{cases}\cos\theta = \cos(25,08) = 0,91 \\ \sin\theta = \sin(25,08) = 0,42\end{cases}$ και $|\vec{F}_4| = 5,34$ kN

Άρα $\vec{F}_4 = 4,87\hat{i} + 2,28\hat{j}$

Άρα $\vec{F} = 4,33\hat{i} - 2,5\hat{j}$ και $\frac{-2,5}{4,33} = -0,58 = \tan(-30)$

Άσκηση 8



$|\vec{F_A}| = |\vec{F_B}| = f$

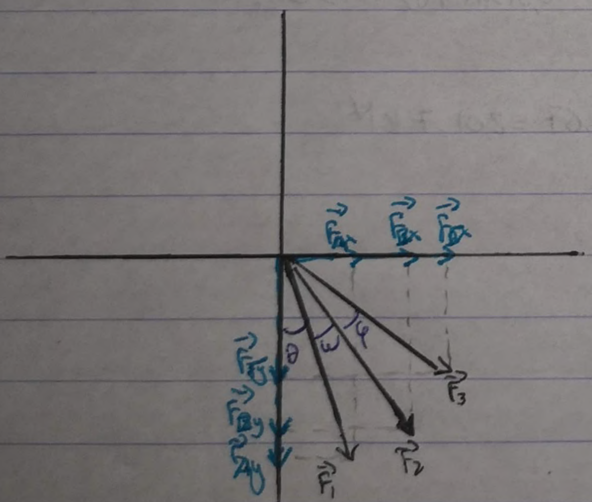
$|\vec{F_\Gamma}| = 430 kN$

$OO' = 6m$

$O'A = AB = B\Gamma = 4m$

Επίσης, από άσκηση 5 έχω:

$\theta = 33,7°$, $\theta + \omega = 53,1°$, $\theta + \omega + \varphi = 63,4°$



$|\vec{F_{Ax}}| = \sin\theta |\vec{F_A}| = \sin(33,7)|\vec{F_A}| = 0,55|\vec{F_A}|$

$|\vec{F_{Ay}}| = \cos\theta |\vec{F_A}| = \cos(33,7)|\vec{F_A}| = 0,83|\vec{F_A}|$

$|\vec{F_{Bx}}| = \sin(\theta+\omega)|\vec{F_B}| = \sin(53,1)|\vec{F_B}| = 0,8|\vec{F_B}|$

$|\vec{F_{By}}| = \cos(\theta+\omega)|\vec{F_B}| = \cos(53,1)|\vec{F_B}| = 0,6|\vec{F_B}|$

$|\vec{F_{\Gamma x}}| = \sin(\theta+\omega+\varphi)|\vec{F_\Gamma}| = \sin(63,4)|\vec{F_\Gamma}| = 0,89|\vec{F_\Gamma}|$

$|\vec{F_{\Gamma y}}| = \cos(\theta+\omega+\varphi)|\vec{F_\Gamma}| = \cos(63,4)|\vec{F_\Gamma}| = 0,45|\vec{F_\Gamma}|$

Άρα
$$\left.\begin{aligned} \vec{F_A} &= 0,55f\hat{i} - 0,83f\hat{j} \\ \vec{F_B} &= 0,8f\hat{i} - 0,6f\hat{j} \\ \vec{F_\Gamma} &= 0,89|\vec{F_\Gamma}| - 0,45|\vec{F_\Gamma}| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F} = (1,35f + 0,89|\vec{F_\Gamma}|)\hat{i} + (-1,43f - 0,45|\vec{F_\Gamma}|)\hat{j}$$

Έπω $\tan\varphi = \frac{O'M}{O'O} = \frac{6}{6} = 1 \Leftrightarrow \varphi = 45^\circ$

Επίσης $|\vec{F}| = 430 \Leftrightarrow \sqrt{(1,35f + 0,89|\vec{F_r}|)^2 + (-1,43f - 0,45|\vec{F_r}|)^2} = 430$ (1)

$\Leftrightarrow (1,35f + 0,89|\vec{F_r}|)^2 + (1,43f + 0,45\vec{F_r})^2 = 184900$ (1)

Επίσης ισχύει: $\frac{1,43f + 0,45|\vec{F_r}|}{1,35f + 0,89|\vec{F_r}|} = 1 \Leftrightarrow 1,43f + 0,45|\vec{F_r}| = 1,35f + 0,89|\vec{F_r}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,08f = 0,44|\vec{F_r}| \Leftrightarrow f = 5,5|\vec{F_r}|$ (2)

Άρα (1) $\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{(1,35 \cdot 5,5|\vec{F_r}| + 0,89|\vec{F_r}|)^2 + (-1,43 \cdot 5,5|\vec{F_r}| - 0,45\vec{F_r})^2} = 430 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(8,315|\vec{F_r}|)^2 + (8,315|\vec{F_r}|)^2} = \sqrt{2 \cdot (8,315|\vec{F_r}|)^2} = 8,315|\vec{F_r}|\sqrt{2} = 430 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\vec{F_r}|\sqrt{2} = 51,71 \Leftrightarrow |\vec{F_r}| = 36,67$ kN $\Rightarrow f = 5,5 \cdot 36,67 = 201,7$ kN