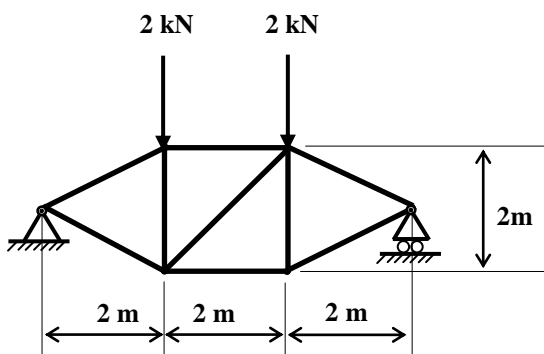
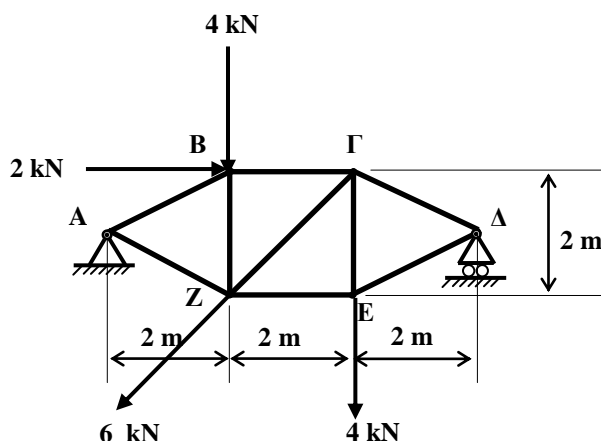


**ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)****19<sup>η</sup> σειρά ασκήσεων: Δικτυώματα (απλές εφαρμογές με τη μέθοδο των κόμβων)****Άσκηση 1**

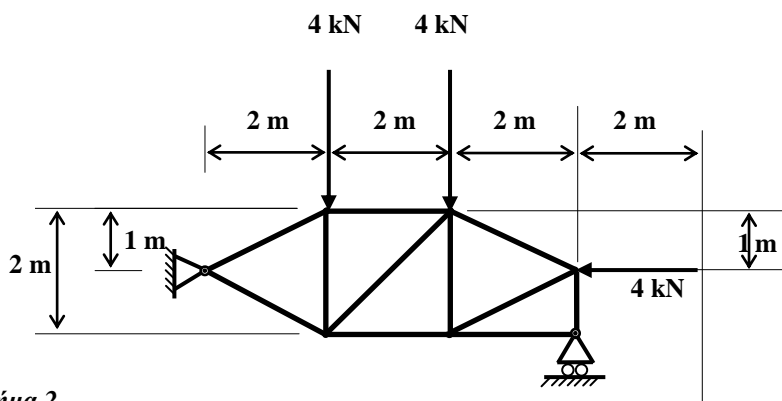
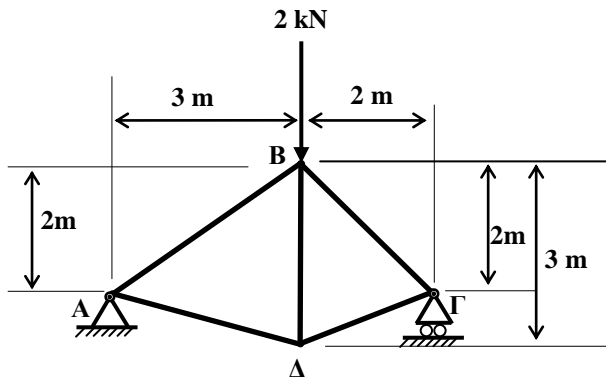
Να επιλυθούν τα δικτυώματα του Σχ.1.



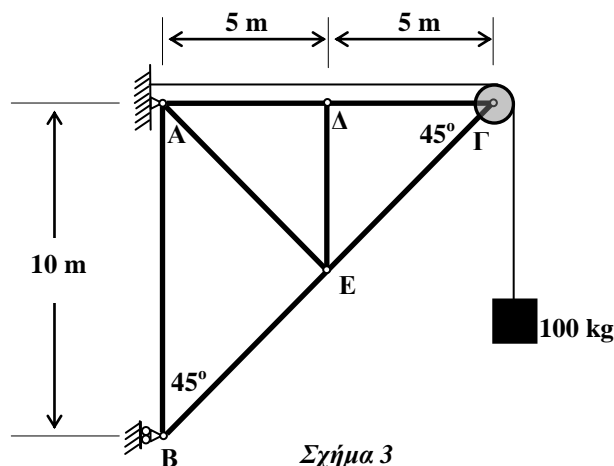
Σχήμα 1

**Άσκηση 2**

Να επιλυθούν τα δικτυώματα του Σχ.2.



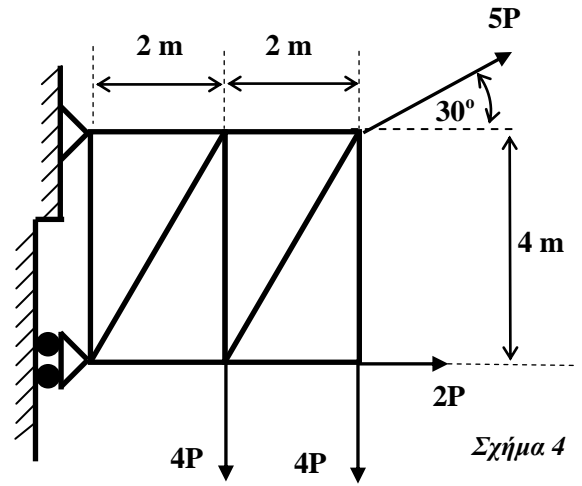
Σχήμα 2

**Άσκηση 3**Το δικτύωμα του Σχ.3 στηρίζεται με άρθρωση στο Α και κύλιση στο Β. Στην τροχαλία κέντρου Γ αναρτάται μάζα 100 kgr. Να επιλυθεί το δικτύωμα ( $g=10 \text{ m/s}^2$ ).

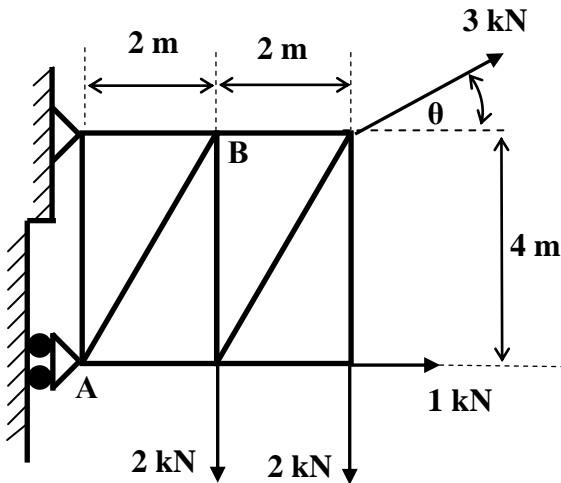
Σχήμα 3

#### Άσκηση 4

Αν οι ράβδοι του δικτύωματος του Σχ.4 έχουν μέγιστη φέρουσα ικανότητα σε εφελκυσμό ίση με 20 kN και σε θλίψη 30 kN να υπολογισθεί η μέγιστη επιτρεπτή τιμή της παραμέτρου P.



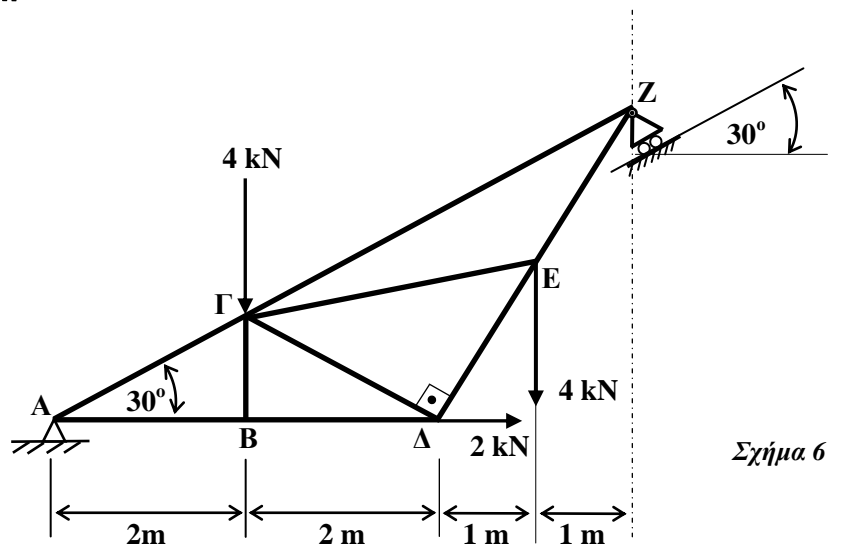
Σχήμα 4



Σχήμα 5

#### Άσκηση 5

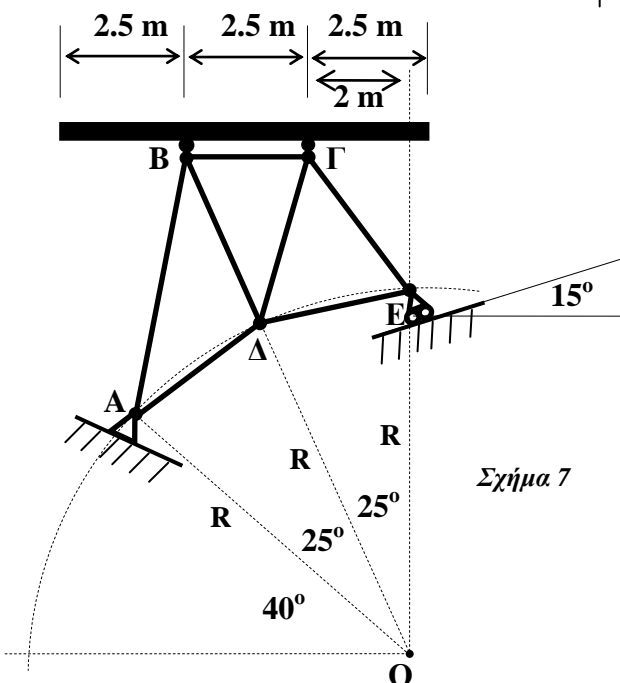
Να υπολογισθεί η τιμή της γωνίας  $\theta$  ώστε η ράβδος AB να δέχεται την ελάχιστη δυνατή φόρτιση ( $0 < \theta < 45^\circ$ ).



Σχήμα 6

#### Άσκηση 6

Να επιλυθεί το δίκτυωμα του Σχ.6.



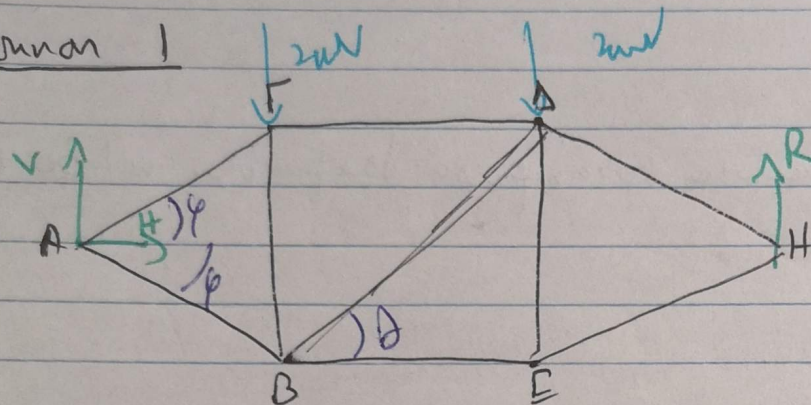
Σχήμα 7

#### Άσκηση 7

Το δίκτυωμα του Σχ.7 στηρίζεται με άρθρωση στο A και κύλιση στο E. Οι κόμβοι A, Δ, E ευρίσκονται επί τόξου κύκλου ( $O, R=7.5\text{m}$ ) και η ράβδος ΔB εκτείνεται κατά την αντίστοιχη ακτίνα OΔ. Στους κόμβους B και Γ ισορροπεί δοκός ίδιου βάρους  $q=250\text{ kN/m}$ . Το υλικό των ράβδων έχει φέρουσα ικανότητα  $300\text{ N/mm}^2$ . Θεωρώντας ότι όλες οι ράβδοι είναι κυλινδρικές να ευρεθεί η ελάχιστη επιτρεπτή διάμετρος τους.

19<sup>te</sup> Σειρά Ασκήσεων: Διευθύνουσα (Ανδρός Εφαρμογής με την ψάλλα του κόβου)

Άσκηση 1

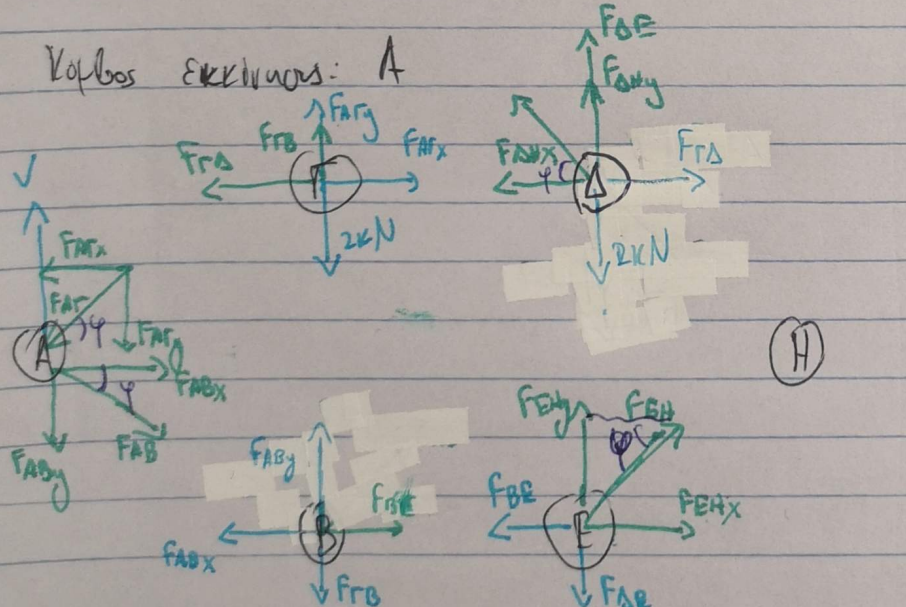


$$\tan \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 26,57^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Έχουμε 9 ρ και 6 κ άρα  $9 = 2 \cdot 6 - 3$  ιαχ. Είμαστε ένα βήμα πριν από την επίλυση του 20 διευθύνουσα άρα πρέπει να έχουμε μια επιπλέον αντίστροφη και άρα έχουμε 1 κίβαν άρα είναι στατικό

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow V + R = 4 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow H = 0 \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 6R \Rightarrow 6R = 12 \Rightarrow R = 2 \text{ kN} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum F_x = 0} \right\} \Rightarrow V = 2 \text{ kN}$$



Μέλος	Διεύθυνση [kN]	Είδος
AC	2,24	Θάμνισμα
AB	2,24	Επεκτατική
AD	2	Θάμνισμα
BD	1	Θάμνισμα
BE	0	Άνισος
DE	2	Επεκτατική
AE	1	Θάμνισμα
AH	2,24	Θάμνισμα
EH		

$$\begin{aligned} \sum F_{Ax} = 0 &\Rightarrow F_{AC} \cos \varphi = F_{AB} \cos \varphi \Rightarrow F_{AB} = F_{AC} \\ \sum F_{Ay} = 0 &\Rightarrow F_{AC} \sin \varphi + F_{AD} \sin \varphi = V \Rightarrow 2F_{AC} = \frac{V}{\sin \varphi} \Rightarrow F_{AC} = \frac{V}{2 \sin \varphi} = 2,24 \text{ kN} \end{aligned}$$

Άρα  $|F_{Ax}| = 2 \text{ kN} = |F_{Bx}|$  και  $|F_{Ay}| = 1 \text{ kN} = |F_{By}|$



$$\sum F_{rx} = 0 \Rightarrow F_{rD} = F_{Arx} = 2 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ry} = 0 \Rightarrow F_{rB} + F_{Ary} = 2 \Rightarrow F_{rB} = 1 \text{ kN}$$

Επειδή  $F_{ABy} = F_{rB}$  δεν υπάρχει καμία κοινή δύναμη μεταξύ των κατ'εξοχή Β. Άρα η παύση ΒΔ είναι άζουη.

$$\sum F_{Bx} = 0 \Rightarrow F_{ABx} = F_{BE} = 2 \text{ kN}$$

$$\sum F_{Dx} = 0 \Rightarrow F_{DH} \cdot \cos \varphi = F_{rD} \Rightarrow F_{DH} \cdot \cos \varphi = 2 \Rightarrow F_{DH} = 2,24 \text{ kN}$$

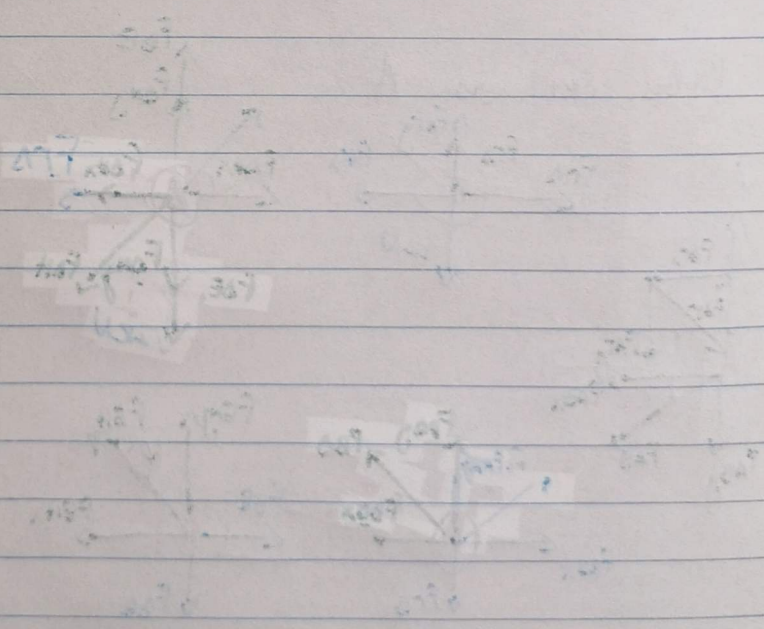
Άρα  $|F_{DHx}| = 2$  και  $|F_{DHy}| = 1$

$$\sum F_{Dy} = 0 \Rightarrow F_{DE} + F_{DHy} = 2 \Rightarrow F_{DE} = 1 \text{ kN}$$

$$\sum F_{Ex} = 0 \Rightarrow F_{EAx} = 2 \text{ kN} \Rightarrow F_{EH} = \frac{2}{\cos \varphi} = 2,24$$

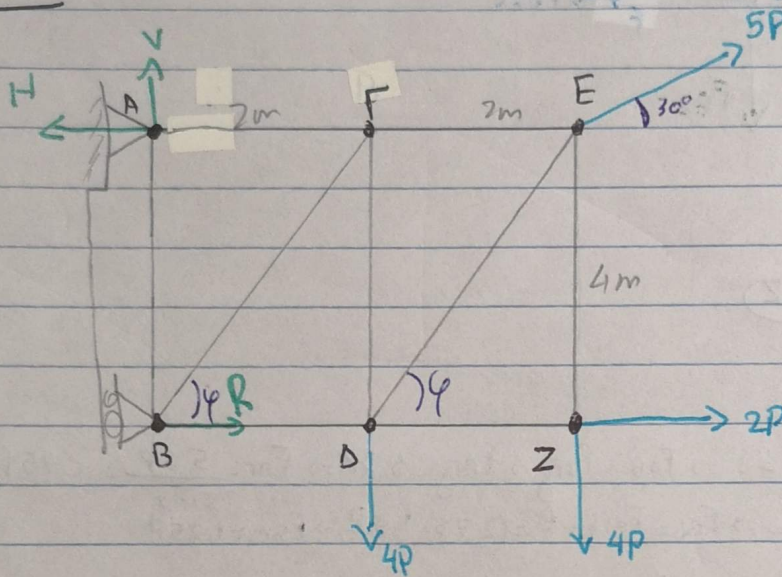
Άρα  $|F_{EHx}| = 2 \text{ kN}$  και  $|F_{EHy}| = 1 \text{ kN}$

$$\sum F_{Ey} = 0 \Rightarrow F_{EH} = F_{DE} \text{ οκεί.}$$





# Άσκηση 4



$$\tan \varphi = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \varphi = 63,43^\circ$$

Έχω βάλει να βρω κόμβους και να πάρω τριγωνάκια από 20 διευκρίνιση είναι όποτε είναι, να πάρω τριγωνάκια από 10 απόσταση και διπλάσιο είναι και στα 100.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H - R = 2P + 5P \cdot \cos(30^\circ) \Rightarrow H - R = 6,33P \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 8P - 5P \sin(30^\circ) = (8 - 2,5)P = 5,5P \Rightarrow V = 5,5P \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4R + 2P \cdot 4 + 5P \cdot \sin(30^\circ) \cdot 4 = 4P \cdot 2 + 4P \cdot 4 \Rightarrow 4R + 8P + 10P = 8P + 16P \Rightarrow 4R = 6P \Rightarrow$$

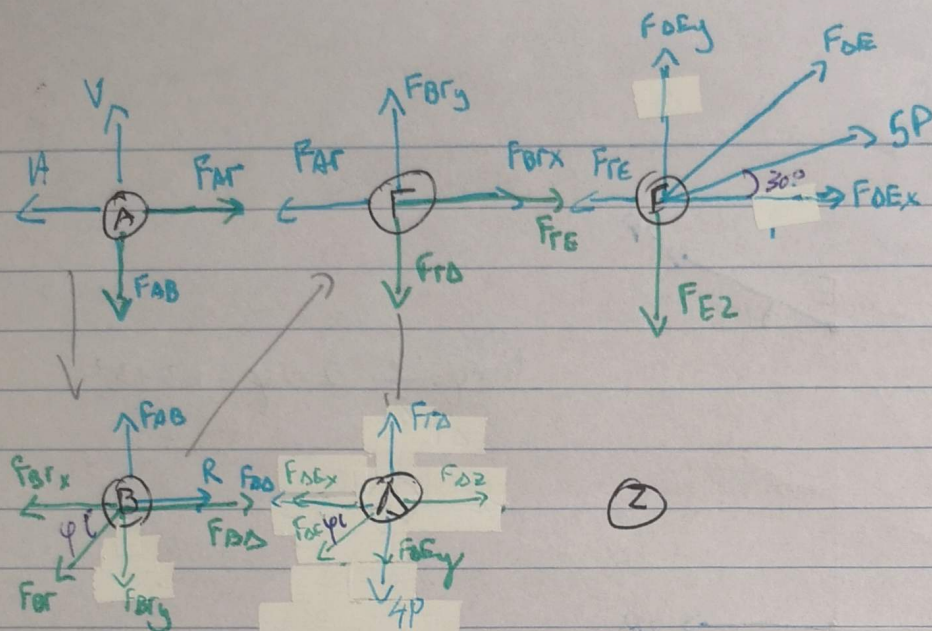
$$\Rightarrow R = \frac{3P}{2} \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow H = 7,83P \quad (4)$$

Μέλος	Διεύθυνση [kN]	Είδος	Παράδειγμα:
AB	5,5P	Εφελκυστικό	$-5,5P \leq 20$
AC	7,83P	Εφελκυστικό	$-7,83P \leq 20$
BC	6,15P	Θλίψη	$20 \leq 1,25P \leq 20$
BD	1,25P	Εφελκυστικό	$-1,25P \leq 20$
CE	5,08P	Εφελκυστικό	$-5,08P \leq 20$
CD	5,5P	Εφελκυστικό	$-5,5P \leq 20$
DE	1,68P	Θλίψη	$20 \leq 4P \leq 20$
DZ	2P	Εφελκυστικό	$-2P \leq 30$
EZ	4P	Εφελκυστικό	$-4P \leq 30$

$\Rightarrow -2,55 \leq P \leq 2,55$   
 $\Rightarrow -3,25 \leq P \leq 3,25$





$$\sum F_{Ax} = 0 \Rightarrow F_{AR} = H = 7,83P \quad \sum F_{By} = 0 \Rightarrow F_{AB} = F_{By} \Rightarrow F_{By} = 5,5P \Rightarrow F_{BR} = \frac{5,5P}{\sin \varphi} = 6,15P \Rightarrow F_{BRx} = 2,75P$$

$$\sum F_{Ay} = 0 \Rightarrow F_{AB} = V = 5,5P \quad \sum F_{Bx} = 0 \Rightarrow F_{BD} = F_{BRx} - R = (2,75 - 1,5)P \Rightarrow F_{BD} = 1,25P$$

$$\sum F_{Cx} = 0 \Rightarrow F_{CE} = F_{AR} - F_{BRx} = (7,83 - 2,75)P = 5,08P$$

$$\sum F_{Cy} = 0 \Rightarrow F_{CD} = F_{By} = 5,5P$$

$$\sum F_{Dy} = 0 \Rightarrow F_{DEy} = F_{CD} - 4P = 1,5P \Rightarrow F_{DE} = 1,68P \Rightarrow F_{DEx} = F_{DE} \cdot \cos \varphi = 0,75P$$

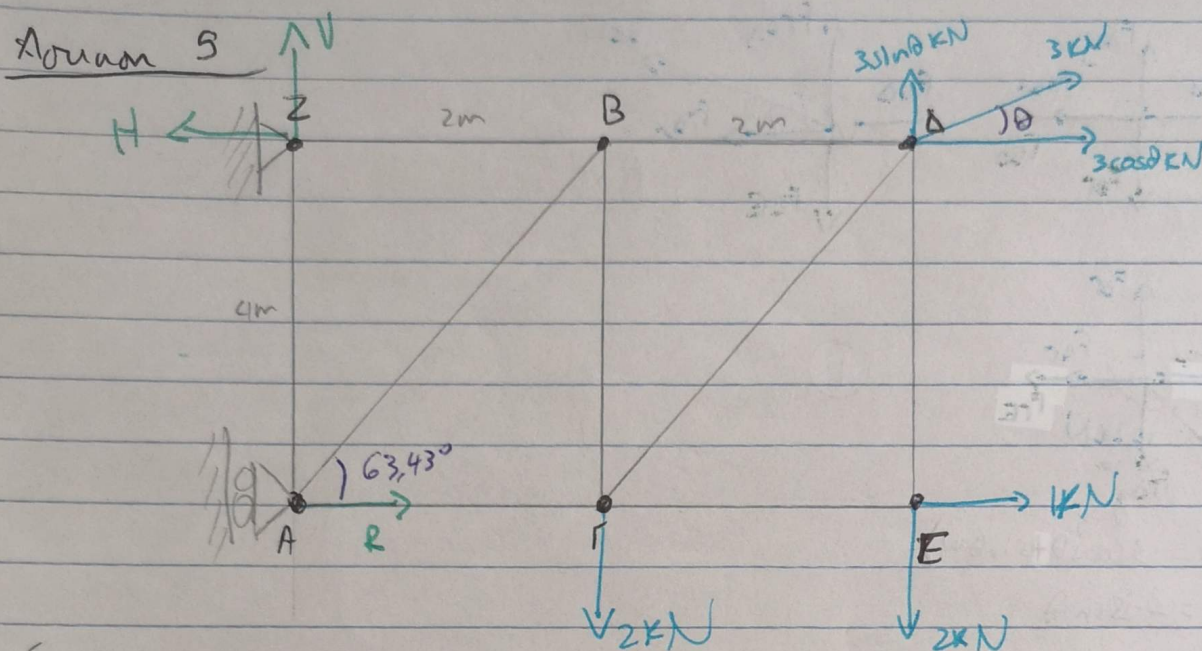
$$\sum F_{Dx} = 0 \Rightarrow F_{Dz} = F_{DEx} + F_{BD} = 0,75P + 1,25P = 2P$$

$$\sum F_{Ey} = 0 \Rightarrow F_{DEy} + 5P \sin(30^\circ) = F_{E2} \Rightarrow F_{E2} = (1,5 + 2,5)P = 4P$$

$$\sum F_{Ex} = 0 \Rightarrow F_{CE} = F_{DEx} + 5P \cos(30^\circ) \Rightarrow 5,08P = 0,75P + 4,33P \quad \text{1 ok!}$$

$$\text{Find } P_{\max} = 2,55 \text{ kN}$$





Έξαρτες και ορισμός αρτηρίων αψήα (δες δόσμον 4)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H - R = 3 \cos \theta + 1 \quad (1)$$

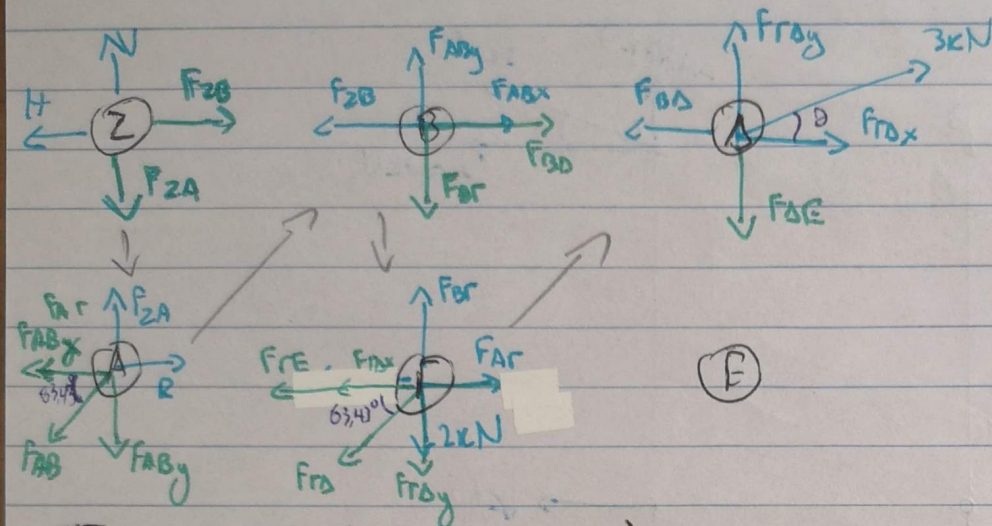
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 4 - 3 \sin \theta \quad (2)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow 4R + 1 \cdot 4 + 3 \sin \theta \cdot 4 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \Rightarrow 4R = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \sin \theta \Rightarrow R = 2 - 3 \sin \theta \quad (3)$$

$$(1) \xrightarrow{(3)} H = 3 \cos \theta + 1 + 2 - 3 \sin \theta = 3 (\cos \theta - \sin \theta + 1) \Rightarrow H = 3 (\cos \theta - \sin \theta + 1) \quad (4)$$

Μέλη	Διάρκεια [kN]	Είδος
ZA		
ZB		
AB		
ΑΓ		
ΒΓ		
ΒΔ		
ΓΔ		
ΓΕ		
ΔΕ		





$$\sum F_{zx} = 0 \Rightarrow F_{2B} = H = 3(\cos\theta - \sin\theta + 1)$$

$$\sum F_{zy} = 0 \Rightarrow F_{2A} = V = 4.3 \sin\theta$$

$$\sum F_{Ay} = 0 \Rightarrow F_{ABy} = F_{2A} = 4.3 \sin\theta \Rightarrow F_{AB} = 4.47 - 3.12 \sin\theta \Rightarrow F_{ABx} = F_{AB} \cdot \cos(63.43^\circ) = 2.55 \sin\theta$$

$$\sum F_{Ax} = 0 \Rightarrow F_{AR} + F_{ABx} = R \Rightarrow F_{AR} = R - F_{ABx} = 2 - 3 \sin\theta - 2.55 \sin\theta \Rightarrow F_{AR} = -2.55 \sin\theta$$

$$\sum F_{By} = 0 \Rightarrow F_{BR} = F_{ABy} = 4.3 \sin\theta$$

$$\sum F_{Bx} = 0 \Rightarrow F_{BD} = F_{2B} - F_{ABx} = 3 \cos\theta - 3 \sin\theta + 3 - 2.55 \sin\theta = 3 \cos\theta - 1.55 \sin\theta + 1$$

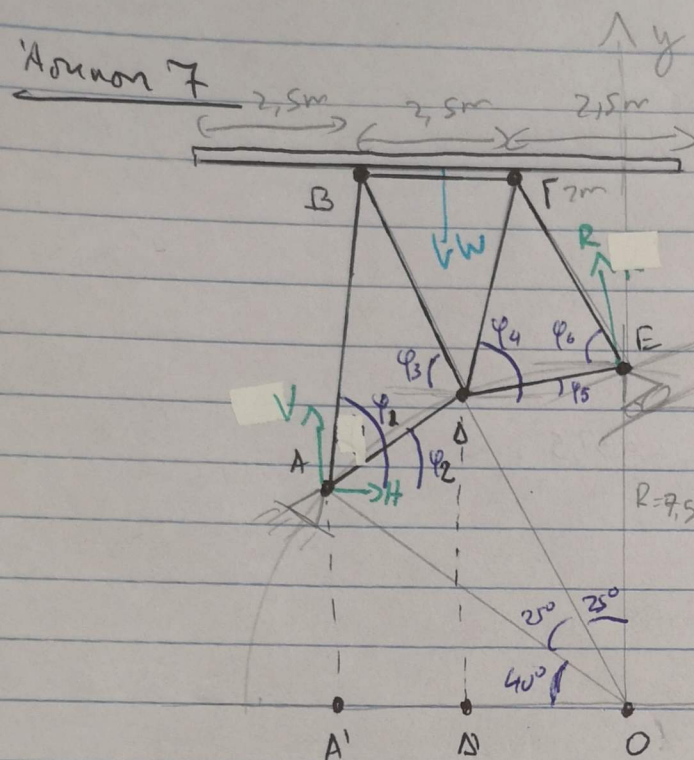
$$\sum F_{Dy} = 0 \Rightarrow F_{ADy} = F_{BR} - 2 = 2.3 \sin\theta = 2.24 - 3.12 \sin\theta \Rightarrow F_{ADx} = 1 - 1.55 \sin\theta$$

$$\sum F_{Dx} = 0 \Rightarrow F_{ADx} = F_{AR} - F_{RE} \Rightarrow F_{RE} = -2.55 \sin\theta - 1 + 1.55 \sin\theta = -2 \sin\theta - 1$$

$$\sum F_{Ax} = 0 \Rightarrow F_{BD} = F_{ADx} + 3 \cos\theta \Rightarrow 3 \cos\theta - 1.55 \sin\theta + 1 = 1 - 1.55 \sin\theta + 3 \cos\theta \quad \text{10x}$$

Apda  $F_{AB} = 4.47 - 3.36 \sin\theta$





$$\sin(40^\circ) = \frac{AA'}{OA} \Rightarrow AA' = 4.82m$$

$$\cos(40^\circ) = \frac{OA'}{OA} \Rightarrow OA' = 5.75m$$

$$\sin(65^\circ) = \frac{\Delta A'}{OA} \Rightarrow \Delta A' = 6.8m$$

$$\cos(65^\circ) = \frac{OA'}{OA} \Rightarrow OA' = 3.17m$$

$$W = 7.5 \cdot 250 = 1875N$$

$$\tan(25^\circ) = \frac{4.5}{y_B} \Rightarrow y_B = \frac{4.5}{\tan(25^\circ)} = 9.68m$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H = R_x \Rightarrow R = \frac{H}{\sin(15^\circ)} \Rightarrow R = 3.86H \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + R_y = W \Rightarrow V = W - R \cos(15^\circ) = W - 0.997R \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 5.75 R_y + 3.68 R_x = 2W \Rightarrow 6.24R = 2W \Rightarrow R = \frac{W}{3.12} = 600kN \quad (3)$$

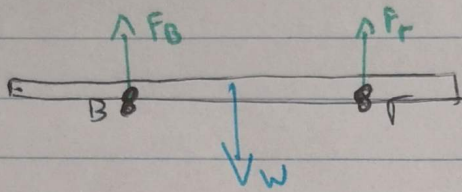
$$(1) \Rightarrow H = 155.44kN$$

$$(2) \Rightarrow V = 1875 - 582 = 1293kN$$

$\vec{r}_{xw} : O(0,0)$	$\vec{AB} = 1.25\hat{i} + 4.83\hat{j} \Rightarrow  \vec{AB}  = 5m, \tan \varphi_1 = \frac{4.83}{1.25} = 3.86 \Rightarrow \varphi_1 = 75.49^\circ$
$A(-5.75, 4.82)$	$\vec{AD} = 2.58\hat{i} + 1.98\hat{j} \Rightarrow  \vec{AD}  = 3.25m, \tan \varphi_2 = \frac{1.98}{2.58} = 0.77 \Rightarrow \varphi_2 = 37.5^\circ$
$B(-4.5, 9.68)$	$\vec{DB} = -1.33\hat{i} + 2.85\hat{j} \Rightarrow  \vec{DB}  = 3.15m, \tan \varphi_3 = 2.14 \Rightarrow \varphi_3 = 64.38^\circ$
$F(-2, 9.68)$	$\vec{DF} = 1.7\hat{i} + 2.85\hat{j} \Rightarrow  \vec{DF}  = 3.08m, \tan \varphi_4 = 2.44 \Rightarrow \varphi_4 = 67.68^\circ$
$\Delta(-3.17, 6.8)$	$\vec{DE} = 3.17\hat{i} + 0.7\hat{j} \Rightarrow  \vec{DE}  = 3.25m, \tan \varphi_5 = 0.22 \Rightarrow \varphi_5 = 12.45^\circ$
$E(0, 7.5)$	$\vec{BE} = 2.5\hat{i} + 0\hat{j} \Rightarrow  \vec{BE}  = 2.5m$
	$\vec{EF} = -2\hat{i} + 2.19\hat{j} \Rightarrow  \vec{EF}  = 2.94m, \tan \varphi_6 = 1.08 \Rightarrow \varphi_6 = 47.07^\circ$



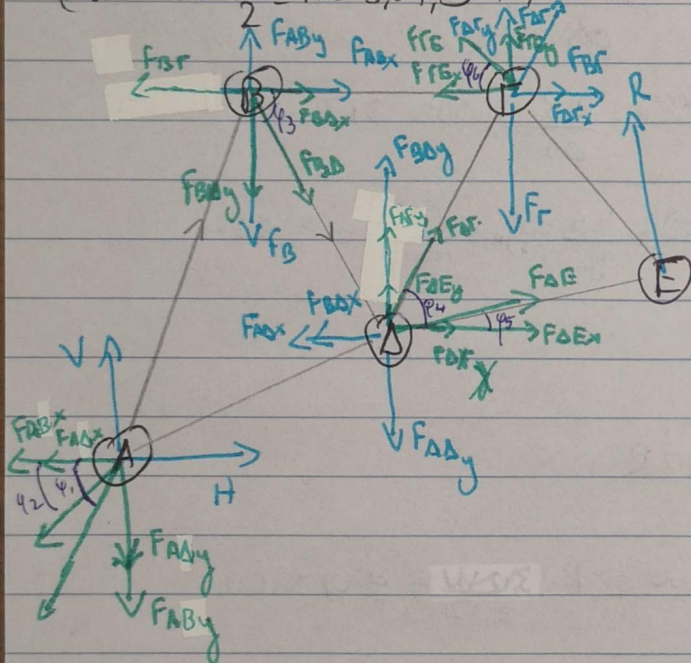
Käufw 20 ΔEE raus erhalten



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_B + F_r = 1875 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_r \cdot 2,5 = W \cdot 1,25 \Rightarrow W = 2F_r \Rightarrow F_r = \frac{W}{2} = 937,5 \text{ kN}$$

Also  $F_B = \frac{W}{2} = F_r = 937,5 \text{ kN}$



$$\sum F_{Ax} = 0 \Rightarrow H = F_{ABx} + F_{ADx} \Rightarrow F_{AB} \cos \varphi_1 + F_{AD} \cos \varphi_2 = H \Rightarrow 0,25 F_{AB} + 0,79 F_{AD} = 155,44 \quad (1)$$

$$\sum F_{Ay} = 0 \Rightarrow V = F_{ADy} + F_{ABy} \Rightarrow F_{AB} \sin \varphi_1 + F_{AD} \sin \varphi_2 = V \Rightarrow 0,97 F_{AB} + 0,61 F_{AD} = 1293 \Rightarrow F_{AB} = \frac{1293}{0,97} - \frac{0,61 F_{AD}}{0,97}$$

$$\Rightarrow F_{AB} = 1332 - 0,63 F_{AD} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow 0,25(1332 - 0,63 F_{AD}) + 0,79 F_{AD} = 155,44 \Rightarrow 333 - 0,16 F_{AD} + 0,79 F_{AD} = 155,44 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,63 F_{AD} = -177,56 \Rightarrow F_{AD} = -281,84 \text{ kN} \Rightarrow F_{AB} = 1509,56 \text{ kN}$$

$$|F_{ABx}| = 377,39 \text{ kN} \quad |F_{ADx}| = 222,65 \text{ kN}$$

$$|F_{ABy}| = 1464,27 \text{ kN} \quad |F_{ADy}| = 171,92 \text{ kN}$$



$$\sum F_{By} = 0 \Rightarrow F_{BDy} = F_{ABy} - F_B = 526,77 \Rightarrow F_{BD} = \frac{526,77}{\sin \varphi_3} = \frac{526,77}{0,91} = 578,87 \text{ kN} \Rightarrow F_{BDx} = 244,82 \text{ kN}$$

$$\sum F_{Bx} = 0 \Rightarrow F_{BF} = F_{ABx} + F_{BDx} = 377,39 + 244,82 \Rightarrow F_{BF} = 622,21 \text{ kN}$$

$$\sum F_{Dx} = 0 \Rightarrow F_{DEx} + F_{DFx} = F_{ABx} + F_{BDx} \Rightarrow F_{DE} \cos \varphi_3 + F_{DF} \cos \varphi_4 = 222,65 + 244,82 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,98 F_{DE} + 0,38 F_{DF} = 467,47 \quad (1)$$

$$\sum F_{Dy} = 0 \Rightarrow F_{DEy} + F_{DFy} = F_{ADy} - F_{BDy} \Rightarrow F_{DE} \sin \varphi_3 + F_{DF} \sin \varphi_4 = 171,92 - 526,77 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,22 F_{DE} + 0,93 F_{DF} = -354,85 \Rightarrow F_{DE} = \frac{-354,85}{0,22} - \frac{0,93}{0,22} F_{DF} \Rightarrow F_{DE} = -1612,95 - 4,18 F_{DF} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow 0,98 (-1612,95 - 4,18 F_{DF}) + 0,38 F_{DF} = 467,47 \Rightarrow -4,1 F_{DF} - 1580,69 + 0,38 F_{DF} = 467,47 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{DF} = -\frac{2048,16}{3,72} \Rightarrow F_{DF} = -550,58 \text{ kN} \Rightarrow F_{DE} = 688,47 \text{ kN}$$

$$|F_{DFx}| = 209,22 \text{ kN} \quad |F_{DEx}| = 674,71 \text{ kN}$$

$$|F_{DFy}| = 512,04 \text{ kN} \quad |F_{DEy}| = 151,46 \text{ kN}$$

$$\sum F_{Fx} = 0 \Rightarrow F_{FEx} = F_{BF} + F_{DFx} \Rightarrow F_{FEx} = 622,21 + 209,22 \Rightarrow F_{FE} = 831,43 \Rightarrow F_{FE} = \frac{831,43}{\cos \varphi_6} = 1220,71 \text{ kN}$$

$$\text{Άρα } F_{FEy} = F_{FE} \sin \varphi_6 = 893,79 \text{ kN}$$

Ραβδος	Δυνάμη [kN]	Είδος	Έστω ότι οι ραβδοί έχουν αυθαίρετα $p$ , άρα η επιφάνεια στην οποία ασκείται δύναμη έχει εμβαδό $\pi p^2$ . Η ραβδος με την μεγαλύτερη τάση είναι η ραβδος AB, με $F_{AB} = 1509,56$ $300 \text{ N/mm}^2 = 0,3 \text{ kN/mm}^2$ . Πρέπει $0,3 \cdot \pi p^2 \geq 1509,56 \Rightarrow$
AB	1509,56	Θ	$\Rightarrow p^2 \geq 1601,69 \Rightarrow p \geq 40,02 \text{ mm}$
AD	281,84	E	Άρα η ελάχιστη επιρροπή αυθαίρετα είναι $p_{\min} = 40,02 \text{ mm}$
BF	622,21	Θ	και άρα η ελάχιστη επιρροή διατρίψης είναι $\delta_{\min} = 2 p_{\min}$
BD	578,87	E	$\Rightarrow \delta_{\min} = 80,04 \text{ mm}$
DF	550,58	Θ	
DE	688,47	E	
FE	1220,71	Θ	