Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το διορθώσω: Georgepan

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής

Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

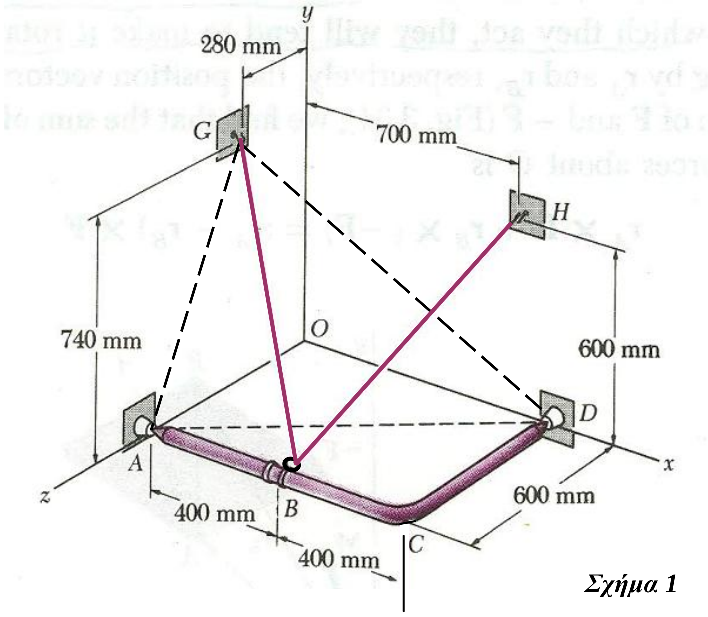
6η σειρά ασκήσεων: Εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου στη Μηχανική

Άσκηση 1

Η δύναμη στο σχοινί GBH έχει μέτρο 2 kN. Ο φορέας ABCD είναι οριζόντιος. Υπολογίστε:

α. Τη ροπή της δύναμης που ασκεί το σκοινί στο φορέα ως προς την ευθεία GM, όπου M το γεωμετρικό κέντρο του τριγώνου AOD.

β. Τη συνιστώσα της ως άνω ροπής που είναι κάθετη στο επίπεδο ADG.



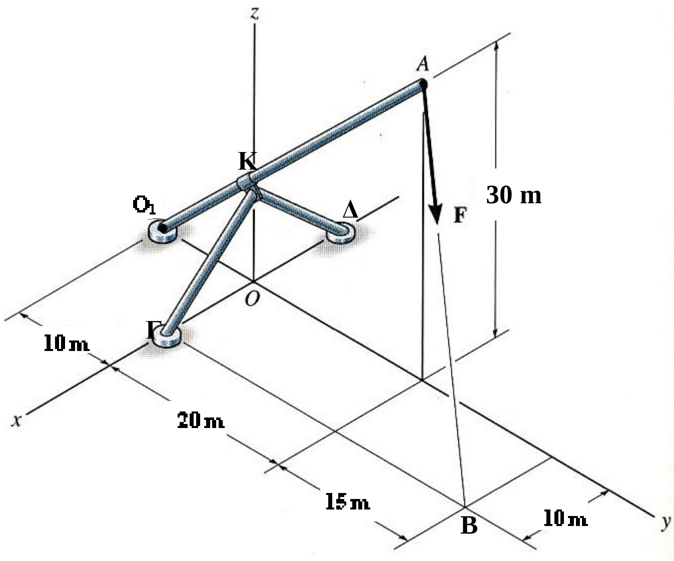
Σχήμα 1

Άσκηση 2

Στο φορέα του Σχ.2 ασκείται δύναμη F μέτρου 10 kN.

α. Να ευρεθεί η ροπή της F ως προς τον άξονα $O_1\Gamma$.

β. Να ευρεθεί η συνιστώσα της ως άνω ροπής η οποία εφάπτεται του επιπέδου (KO_1B).



Σχήμα 2

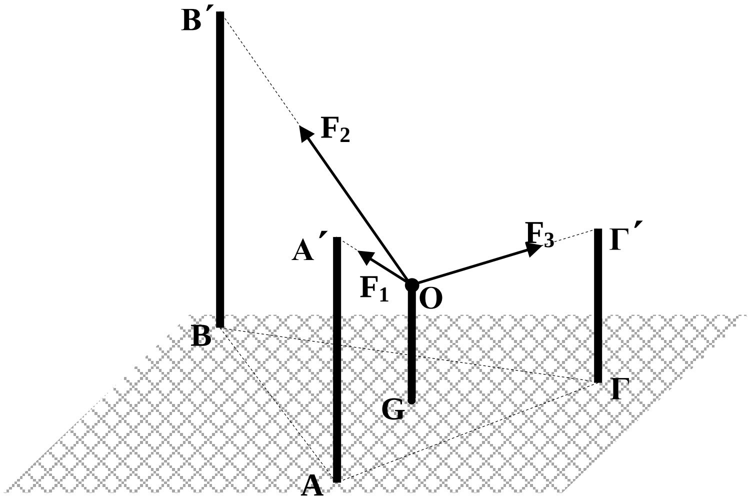
Άσκηση 3

Στις κορυφές οριζοντίου, ορθογωνίου (στην κορυφή Α) και ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ=2 m) και στο βαρύκεντρό του G πακτώνονται τέσσερεις κατακόρυφοι στύλοι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, GO, με μήκη 4, 6, 3, 2 m, αντιστοίχως. Στο Ο ασκούνται οι δυνάμεις $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$ μέτρων 5, 2, 3 kN, αντιστοίχως, με φορά προς τα Α΄, Β΄και Γ΄ (Σχ.3). Υπολογίστε:

α. Τις γωνίες Α΄ΟΒ΄και Α΄ΟΓ΄.

β. Τη ροπή της συνισταμένης των δυνάμεων ως προς το μέσον του GΓ΄.

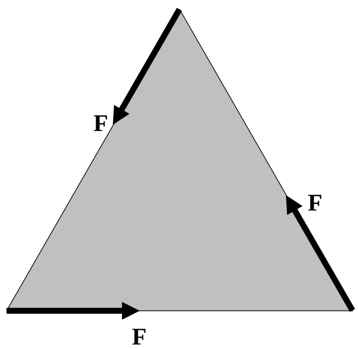
γ. Τη συνιστώσα της ροπής του προηγουμένου ερωτήματος η οποία είναι κάθετος επί του επιπέδου ΒΑ΄ Γ.



Σχήμα 3

Άσκηση 4

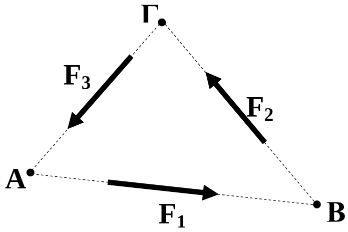
Κατά μήκος των πλευρών ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς **α** ασκούνται τρεις δυνάμεις ίσου μέτρου **F**, όπως φαίνεται στο Σχ.4. Δείξτε ότι η συνισταμένη ροπή των ως άνω δυνάμεων δεν εξαρτάται από το σημείο ως προς το οποίο αυτή υπολογίζεται.



Σχήμα 4

Άσκηση 5

Κατά μήκος των πλευρών τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ ασκούνται οι δυνάμεις $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$ με τη φορά που φαίνεται στο Σχ.5. Για τα μέτρα των δυνάμεων ισχύει: $|\mathbf{F_1}|$=ΑΒ, $|\mathbf{F_2}|$=ΒΓ, $|\mathbf{F_3}|$=ΓΑ. Δείξτε ότι το σύστημα των δυνάμεων αυτών ισοδυναμεί με ροπή μέτρου ίσου με το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

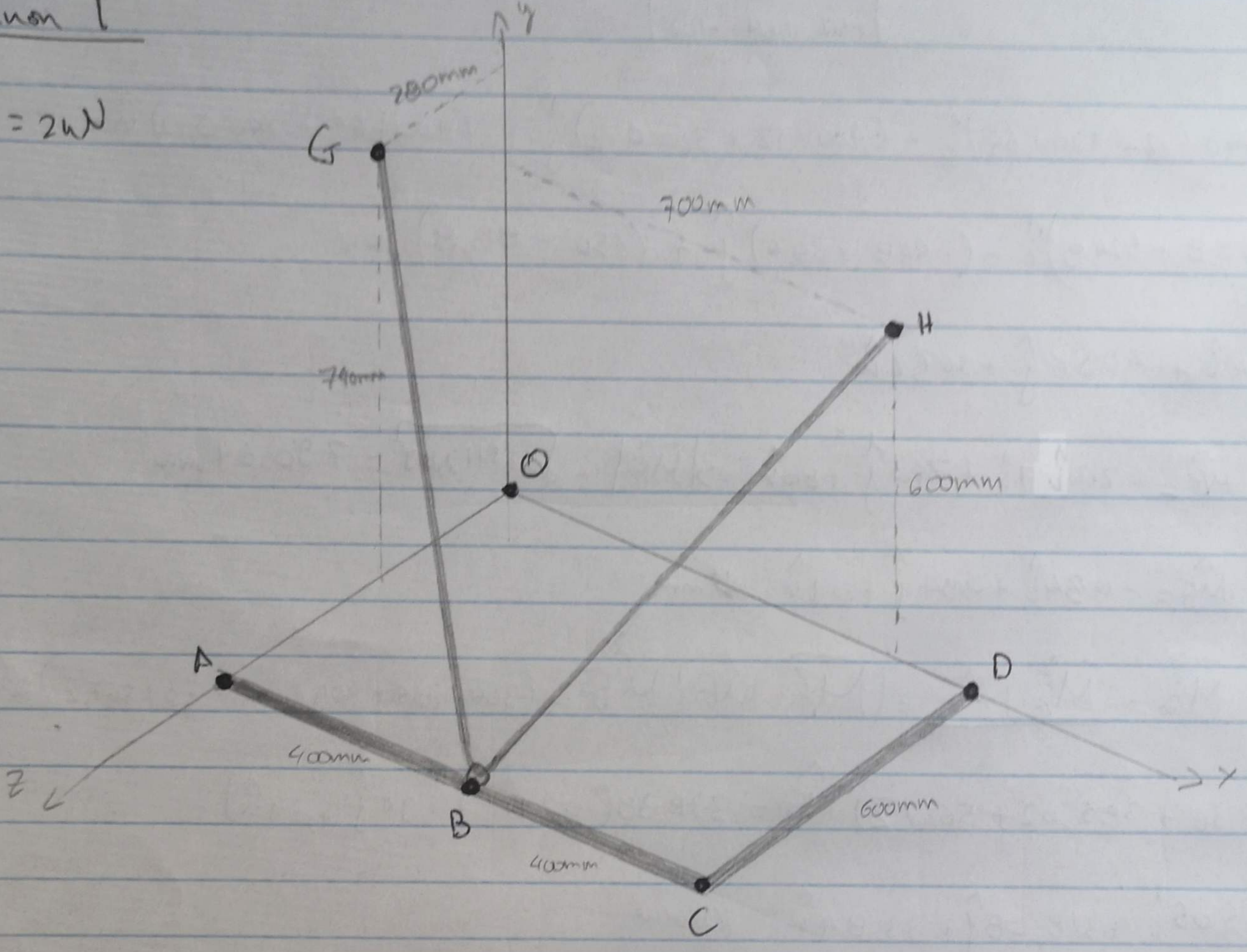


Σχήμα 5

6η Σειρά ασκήσεων: Εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου στη Μηχανική.

Άσκηση 1

$|\vec{F}| = 2kN$



Έχω: $O(0,0,0)$ $\quad H(700,600,0)$

$A(0,0,600)$ $\quad G(0,740,280)$

$B(400,0,600)$ $\quad M(\frac{800}{3},0,200) = (266{,}67, 0, 200)$

$C(800,0,600)$

$D(800,0,0)$

$$\left.\begin{aligned}\vec{BG} &= -400\hat{i} + 740\hat{j} - 320\hat{k} \\ \vec{BH} &= 300\hat{i} + 600\hat{j} - 600\hat{k}\end{aligned}\right\} \underline{\vec{\theta}} = \vec{BG} + \vec{BH} = -100\hat{i} + 1340\hat{j} - 920\hat{k} \Rightarrow |\vec{\theta}| = \sqrt{2652000} = 1628{,}5$$

Άρα $\underline{\hat{\theta}} = -0{,}06\hat{i} + 0{,}82\hat{j} - 0{,}56\hat{k}$ mm

a)

Άρα $\vec{F} = 2\underline{\hat{\theta}} = -0{,}12\hat{i} + 1{,}64\hat{j} - 1{,}12\hat{k}$ kN

*Έχω $\vec{GB} = 400\hat{i} - 740\hat{j} + 320\hat{k}$

Άρα $\vec{M}_G^{\vec{F}} = \vec{GB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ 400 & -740 & 320 \\ -0{,}12 & 1{,}64 & -1{,}12 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -740 & 320 \\ 1{,}64 & -1{,}12 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 400 & 320 \\ -0{,}12 & -1{,}12 \end{vmatrix} + \hat{u}\begin{vmatrix} 400 & -740 \\ -0{,}12 & 1{,}64 \end{vmatrix} =$

$= (740 \cdot 1{,}12 - 320 \cdot 1{,}64)\hat{i} - (-400 \cdot 1{,}12 + 320 \cdot 0{,}12)\hat{j} + (400 \cdot 1{,}64 - 740 \cdot 0{,}12)\hat{u} =$

$= (828{,}8 - 524{,}8)\hat{i} - (-448 + 38{,}4)\hat{j} + (656 - 88{,}8)\hat{u} =$

$= 304\hat{i} + 409{,}6\hat{j} + 567{,}2\hat{u}$

Έχω $\vec{MG} = -266{,}67\hat{i} + 740\hat{j} + 80\hat{u} \Rightarrow |\vec{MG}| = \sqrt{625112{,}89} = 790{,}64$ mm

Άρα $\hat{MG} = -0{,}34\hat{i} + 0{,}94\hat{j} + 0{,}1\hat{u}$ mm

Άρα $\vec{M}_{MG}^{\vec{F}} = \underline{\vec{M}_G^{\vec{F}} | \hat{MG}} = (\vec{M}_G^{\vec{F}} \cdot \hat{MG})\hat{MG} = (-304 \cdot 0{,}34 + 409{,}6 \cdot 0{,}94 + 0{,}1 \cdot 567{,}2)\hat{MG} =$

$= (-103{,}36 + 385{,}02 + 56{,}72)\hat{MG} = 338{,}38(-0{,}34\hat{i} + 0{,}94\hat{j} + 0{,}1\hat{u}) =$

$= -115{,}05\hat{i} + 318{,}08\hat{j} + 33{,}84\hat{u}$ kNmm

b) $\vec{GA} = 0\hat{i} - 740\hat{j} - 320\hat{u}$
$\vec{GD} = 800\hat{i} - 740\hat{j} - 280\hat{u}$

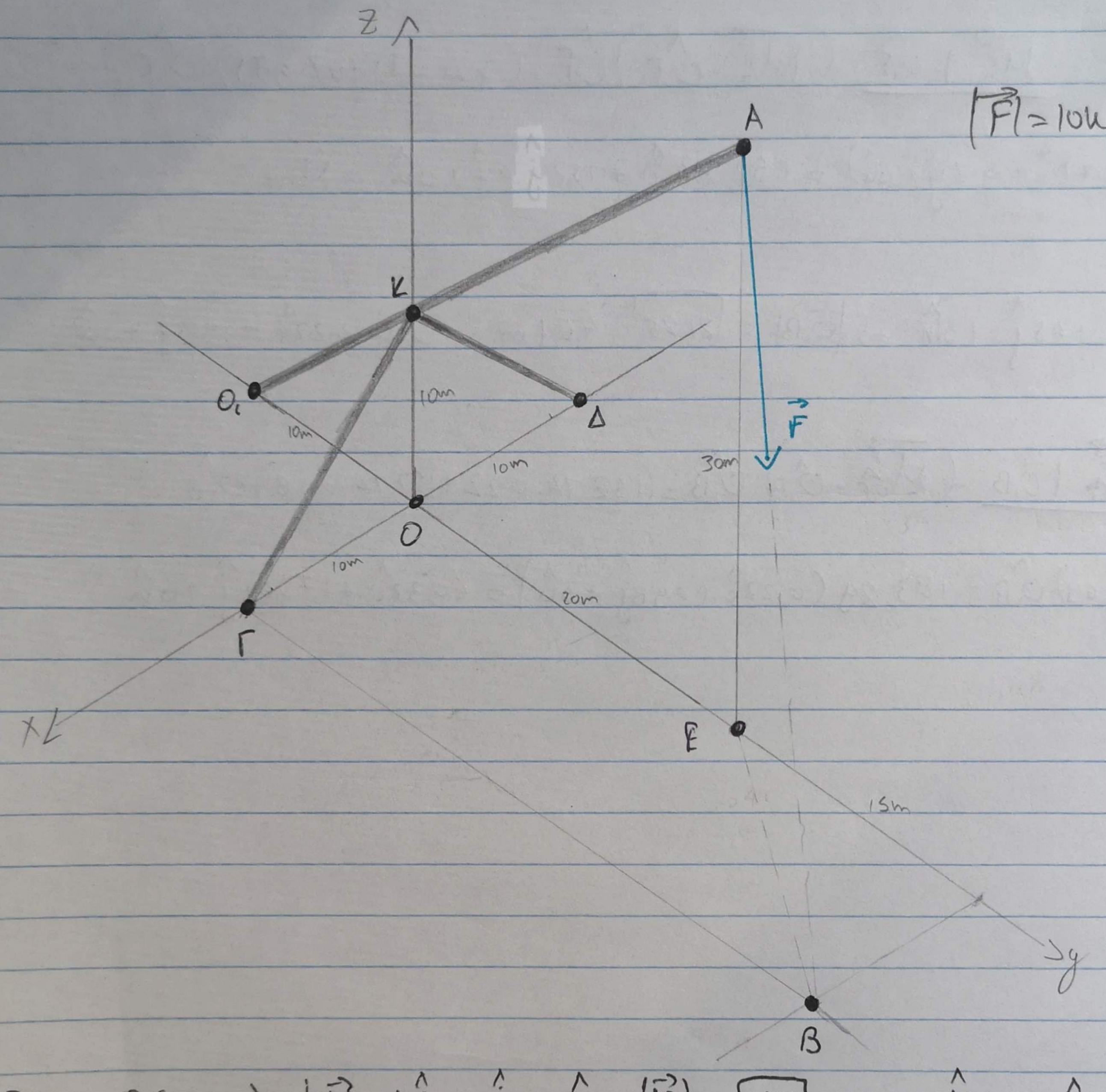
$\vec{GA} \times \vec{GD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ 0 & -740 & -320 \\ 800 & -740 & -280 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -740 & -320 \\ -740 & -280 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & -320 \\ 800 & -280 \end{vmatrix} + \hat{u}\begin{vmatrix} 0 & -740 \\ 800 & -740 \end{vmatrix} =$

$= (740 \cdot 280 - 740 \cdot 320)\hat{i} - 320 \cdot 800\hat{j} + 740 \cdot 800\hat{u} = -29600\hat{i} - 256000\hat{j} + 592000\hat{u} = \vec{Y}$

Έχω $|\vec{Y}| = 645659{,}48$, άρα $\hat{Y} = -0{,}05\hat{i} - 0{,}4\hat{j} + 0{,}92\hat{u}$

Άρα $\underline{\vec{M}_{MG}^{\vec{F}} | \hat{Y}} = (\vec{M}_{MG}^{\vec{F}} \cdot \hat{Y})\hat{Y} = (115{,}05 \cdot 0{,}05 - 0{,}4 \cdot 318{,}08 + 0{,}92 \cdot 33{,}84)\hat{Y} = (5{,}75 - 127{,}23 + 31{,}13)\hat{Y} =$
$= -90{,}35(-0{,}05\hat{i} - 0{,}4\hat{j} + 0{,}92\hat{u}) = 4{,}52\hat{i} + 36{,}14\hat{j} - 83{,}12\hat{u}$ kNmm

Άσκηση 2



$|\vec{F}| = 10kN$

Έχω:

$O(0,0,0)$

$O_1(0,-10,0)$

$A(0,20,30)$

$B(10,35,0)$

$\Gamma(10,0,0)$

$\Delta(-10,0,0)$

$K(0,0,10)$

$\vec{AB} = 10\hat{i} + 15\hat{j} - 30\hat{k} \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{1225} = 35m \Rightarrow \hat{AB} = 0{,}29\hat{i} + 0{,}43\hat{j} - 0{,}87\hat{k}$

Άρα $\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \hat{AB} = 10\hat{AB} = 2{,}9\hat{i} + 4{,}3\hat{j} - 8{,}7\hat{k}$

$\vec{O_1A} = 0\hat{i} + 30\hat{j} + 30\hat{k}$

$$\vec{M}_{O_1}^{F} = \vec{O_1A} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 30 & 30 \\ 2{,}9 & 4{,}3 & -8{,}7 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 30 & 30 \\ 4{,}3 & -8{,}7 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & 30 \\ 2{,}9 & -8{,}7 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 30 \\ 2{,}9 & 4{,}3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-30 \cdot 8{,}7 - 30 \cdot 4{,}3)\hat{i} - (-2{,}9 \cdot 30)\hat{j} - 30 \cdot 2{,}9\hat{k} = -390\hat{i} + 87\hat{j} - 87\hat{k} \ \ kNm$$

$\vec{O_1\Gamma} = 10\hat{i} + 10\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{O_1\Gamma}| = \sqrt{200} = 14,14 \Rightarrow \hat{O_1\Gamma} = 0,71\hat{i} + 0,71\hat{j} + 0\hat{k}$

Άρα $\vec{M^F_{O_1\Gamma}} = \underline{\vec{M^F_{O_1}} \,|\, \hat{O_1\Gamma}} = (\vec{M^F_{O_1}} \cdot \hat{O_1\Gamma})\hat{O_1\Gamma} = (-390 \cdot 0,71 + 87 \cdot 0,71)\hat{O_1\Gamma} =$

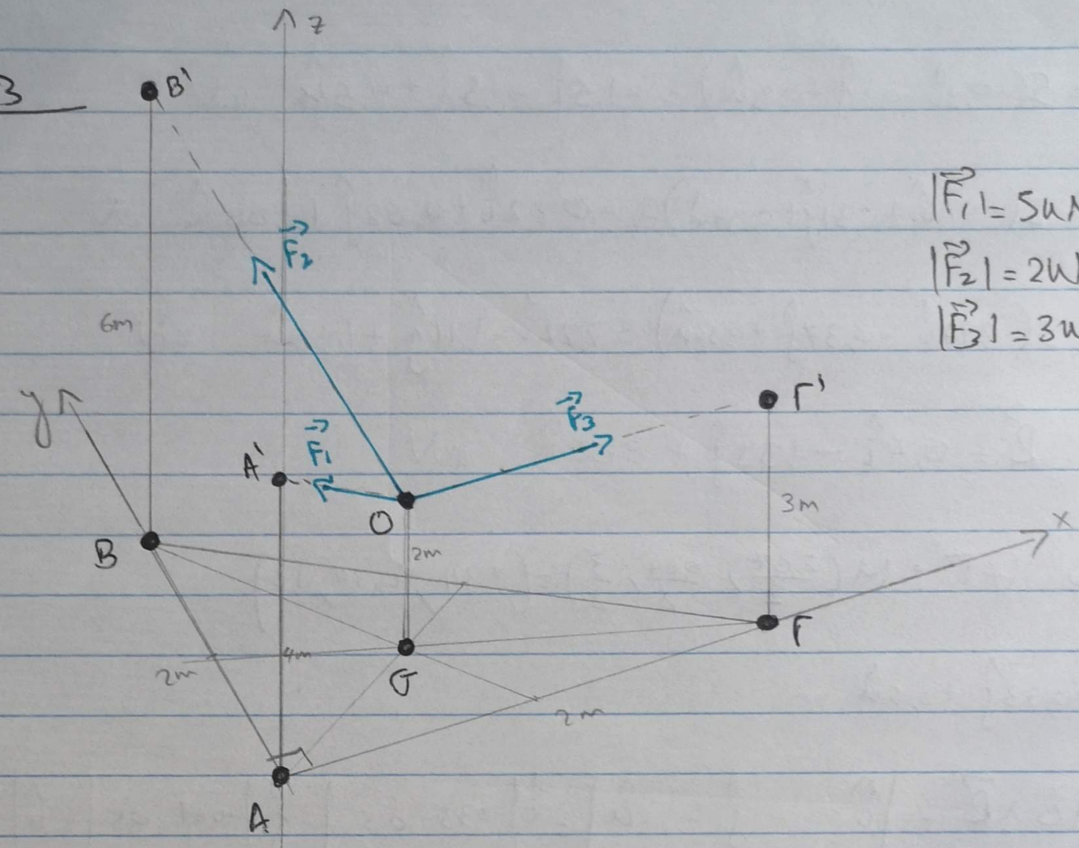
$= 215,13(0,71\hat{i} + 0,71\hat{j} + 0\hat{k}) = 152,74\hat{i} + 152,74\hat{j} + 0\hat{k}$ kNm

β) $\vec{O_1B} = 10\hat{i} + 45\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{O_1B}| = \sqrt{2125} = 46,1\,m \Rightarrow \hat{O_1B} = 0,22\hat{i} + 0,98\hat{j} + 0\hat{k}$

Ψάχνω $\underline{\vec{M^F_{O_1\Gamma}} \,|\, \hat{O_1B}} = (\vec{M^F_{O_1\Gamma}} \cdot \hat{O_1B})\hat{O_1B} = (152,74 \cdot 0,22 + 152,74 \cdot 0,98)\hat{O_1B} =$

$= (33,6 + 149,69)\hat{O_1B} = 183,29(0,22\hat{i} + 0,98\hat{j} + 0\hat{k}) = 40,32\hat{i} + 179,62\hat{j} + 0\hat{k}$

Άσκηση 3



$|\vec{F_1}| = 5kN$
$|\vec{F_2}| = 2kN$
$|\vec{F_3}| = 3kN$

Έχω: $\left.\begin{array}{l} A(0,0,0) \\ B(0,2,0) \\ \Gamma(2,0,0) \end{array}\right\} G(0{,}67,\ 0{,}67,\ 0) \Rightarrow O(0{,}67,\ 0{,}67,\ 2)$ $\left|\begin{array}{l} A'(0,0,4) \\ B'(0,2,6) \\ \Gamma'(2,0,3) \end{array}\right.$

$\vec{OA'} = -0{,}67\hat{i} - 0{,}67\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow |\vec{OA'}| = \sqrt{4{,}9} = 2{,}21m \Rightarrow \hat{OA'} = -0{,}3\hat{i} - 0{,}3\hat{j} + 0{,}9\hat{k}$

$\vec{OB'} = -0{,}67\hat{i} + 1{,}33\hat{j} + 4\hat{k} \Rightarrow |\vec{OB'}| = \sqrt{18{,}22} = 4{,}27m \Rightarrow \hat{OB'} = -0{,}16\hat{i} + 0{,}31\hat{j} + 0{,}94\hat{k}$

$\vec{O\Gamma'} = 1{,}33\hat{i} - 0{,}67\hat{j} + 1\hat{k} \Rightarrow |\vec{O\Gamma'}| = \sqrt{3{,}22} = 1{,}79m \Rightarrow \hat{O\Gamma'} = 0{,}74\hat{i} - 0{,}37\hat{j} + 0{,}56\hat{k}$

a) Η γωνία $A'\hat{O}B'$: $\cos(A'\hat{O}B') = \dfrac{\hat{OA'} \cdot \hat{OB'}}{|\hat{OA'}| \cdot |\hat{OB'}|} = \hat{OA'} \cdot \hat{OB'} = 0{,}3 \cdot 0{,}16 - 0{,}3 \cdot 0{,}31 = 0{,}048 - 0{,}093 =$

$= -0{,}045 \Rightarrow A'\hat{O}B' = 92{,}58°$

Η γωνία $A'\hat{O}\Gamma'$: $\cos(A'\hat{O}\Gamma') = \dfrac{\hat{OA'} \cdot \hat{O\Gamma'}}{|\hat{OA'}|\,|\hat{O\Gamma'}|} = \hat{OA'} \cdot \hat{O\Gamma'} = -0{,}3 \cdot 0{,}74 + 0{,}3 \cdot 0{,}37 + 0{,}9 \cdot 0{,}56 =$

$= -0{,}22 + 0{,}11 + 0{,}5 = 0{,}39 \Rightarrow A'\hat{O}\Gamma' = 67{,}04°$

β) $\vec{F_1} = |\vec{F_1}| \cdot \hat{OA'} = 5(-0{,}3\hat{i} - 0{,}3\hat{j} + 0{,}9\hat{k}) = -1{,}5\hat{i} - 1{,}5\hat{j} + 4{,}5\hat{k}$ kN

$\vec{F_2} = |\vec{F_2}|\, \hat{OB'} = 2(-0{,}16\hat{i} + 0{,}31\hat{j} + 0{,}94\hat{k}) = -0{,}32\hat{i} + 0{,}62\hat{j} + 1{,}88\hat{k}$ kN

$\vec{F_3} = |\vec{F_3}|\, \hat{O\Gamma'} = 3(0{,}74\hat{i} - 0{,}37\hat{j} + 0{,}56\hat{k}) = 2{,}22\hat{i} - 1{,}11\hat{j} + 1{,}68\hat{k}$ kN

Η συνισταμένη $\vec{R} = 0{,}4\hat{i} - 1{,}99\hat{j} + 8{,}06\hat{k}$ kN

Το μέσον του $G\Gamma'$: $M\left(\frac{2{,}67}{2}, \frac{0{,}67}{2}, \frac{3}{2}\right) = (1{,}34,\ 0{,}34,\ 1{,}5)$

$\vec{MO} = -0{,}67\hat{i} + 0{,}33\hat{j} + 0{,}5\hat{k}$ m

Άρα $\vec{M}^{R}_{M} = \vec{MO} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -0{,}67 & 0{,}33 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & -1{,}99 & 8{,}06 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 0{,}33 & 0{,}5 \\ -1{,}99 & 8{,}06 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -0{,}67 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 8{,}06 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -0{,}67 & 0{,}33 \\ 0{,}4 & -1{,}99 \end{vmatrix}$

$= (2{,}66 + 1)\hat{i} - (-5{,}4 - 0{,}2)\hat{j} + (1{,}33 - 0{,}13)\hat{k} = 3{,}66\hat{i} + 5{,}6\hat{j} + 1{,}2\hat{k}$

γ) $\vec{A'B} = 0\hat{i} \quad 2\hat{j} \quad -4\hat{k}$
$\vec{A'\Gamma} = 2\hat{i} \quad 0\hat{j} \quad -4\hat{k}$

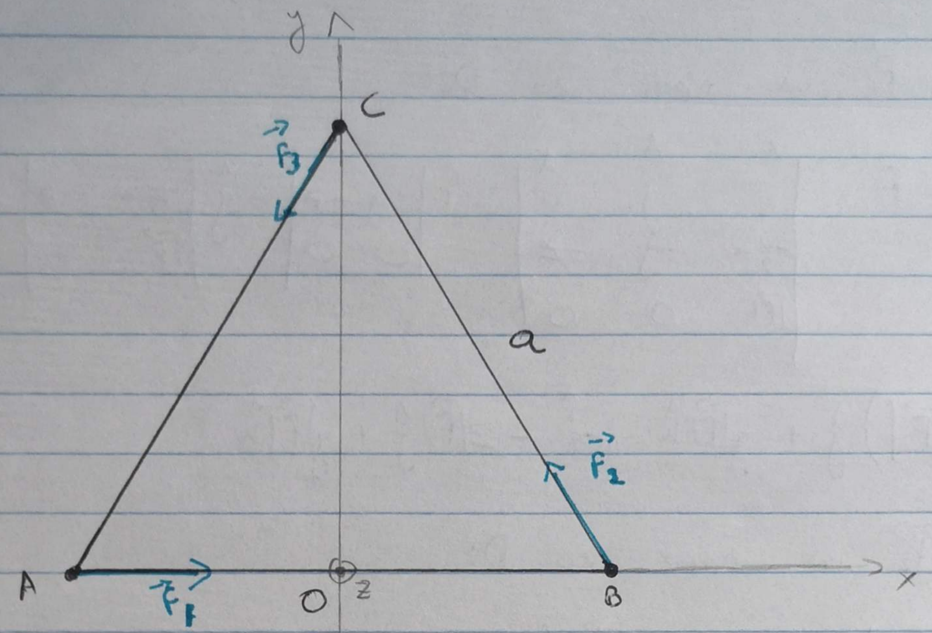
$-\vec{o} = \vec{A'B} \times \vec{A'\Gamma} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -8\hat{i} - 8\hat{j} - 4\hat{k} \Leftrightarrow \vec{o} = 8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k} \Rightarrow |\vec{o}| = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow \hat{o} = 0{,}67\hat{i} + 0{,}67\hat{j} + 0{,}33\hat{k}$

Ψάχνω $\underline{\vec{M}^{R}_{M} \mid \hat{o}} = (\vec{M}^{R}_{M} \cdot \hat{o})\,\hat{o} = (0{,}67 \cdot 3{,}66 + 0{,}67 \cdot 5{,}6 + 0{,}33 \cdot 1{,}2)\hat{o} = (6{,}2 + 0{,}4)\hat{o} =$

$= 6{,}6\,(0{,}67\hat{i} + 0{,}67\hat{j} + 0{,}33\hat{k}) = 4{,}42\hat{i} + 4{,}42\hat{j} + 2{,}18\hat{k}$

Άσκηση 4



$$OC = \sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Έχω $O(0,0,0)$, $A(-\frac{a}{2},0,0)$, $B(\frac{a}{2},0,0)$, $C(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$

$\vec{AB} = a\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{u} \Rightarrow |\vec{AB}| = a \Rightarrow \hat{AB} = 1\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{u}$

$\vec{BC} = -\frac{a}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}a\hat{j} + 0\hat{u} \Rightarrow |\vec{BC}| = a \Rightarrow \hat{BC} = -\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j} + 0\hat{u}$

$\vec{CA} = -\frac{a}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}a\hat{j} + 0\hat{u} \Rightarrow |\vec{CA}| = a \Rightarrow \hat{CA} = -\frac{1}{2}\hat{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j} + 0\hat{u}$

Άρα $\vec{F_1} = |\vec{F}| \cdot \hat{AB} = |\vec{F}|\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{u}$

$\vec{F_2} = |\vec{F}| \cdot \hat{BC} = -\frac{|\vec{F}|}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{F}|\hat{j} + 0\hat{u}$

$\vec{F_3} = |\vec{F}| \cdot \hat{CA} = -\frac{|\vec{F}|}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{F}|\hat{j} + 0\hat{u}$

Έστω τυχαίο σημείο $D(x,y,z)$ από το οποίο υπολογίζω την ροπή των 3 δυνάμεων.

Έχω: $\vec{DA} = \left(-\frac{a}{2} - x\right)\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{u}$

$\vec{DB} = \left(\frac{a}{2} - x\right)\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{u}$

$\vec{DC} = -x\hat{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - y\right)\hat{j} - z\hat{u}$

Η ροπή της $\vec{F_1}$ ως προς το D:

$$\vec{M}_D^{\vec{F_1}} = \vec{DA} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ -\frac{a}{2}-x & -y & -z \\ |\vec{F}| & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -y & -z \\ 0 & 0\end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -\frac{a}{2}-x & -z \\ |\vec{F}| & 0\end{vmatrix} + \hat{u}\begin{vmatrix} -\frac{a}{2}-x & -y \\ |\vec{F}| & 0\end{vmatrix} =$$

$$= 0\hat{i} - (0 + z|\vec{F}|)\hat{j} + y|\vec{F}|\hat{u} = \boxed{0\hat{i} - z|\vec{F}|\hat{j} + y|\vec{F}|\hat{u}}$$

Η ροπή της $\vec{F_2}$ ως προς το D:

$$\vec{M}_D^{\vec{F_2}} = \vec{DB}\times\vec{F_2} = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat u \\ \frac{a}{2}-x & -y & -z \\ -\frac{|\vec F|}{2} & \frac{\sqrt3|\vec F|}{2} & 0\end{vmatrix} = \hat i \begin{vmatrix} -y & -z \\ \frac{\sqrt3|\vec F|}{2} & 0\end{vmatrix} - \hat j \begin{vmatrix}\frac a2 - x & -z \\ -\frac{|\vec F|}{2} & 0\end{vmatrix} + \hat u\begin{vmatrix}\frac a2 -x & -y \\ -\frac{|\vec F|}{2} & \frac{\sqrt3|\vec F|}{2}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt3}{2} z|\vec F|\hat i - \left(-\frac{z}{2}|\vec F|\right)\hat j + \left[\left(\frac a2 - x\right)\frac{\sqrt3|\vec F|}{2} - \frac{y}{2}|\vec F|\right]\hat u =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt3}{2} z|\vec F|\hat i + \frac z2|\vec F|\hat j + \left(\frac{a\sqrt3|\vec F|}{4} - \frac{x\sqrt3|\vec F|}{2} - \frac y2|\vec F|\right)\hat u}$$

Η ροπή της $\vec{F_3}$ ως προς το D:

$$\vec M_D^{\vec{F_3}} = \vec{DC}\times\vec{F_3} = \begin{vmatrix}\hat i & \hat j & \hat u\\ -x & \frac{\sqrt3 a}{2}-y & -z \\ -\frac{|\vec F|}{2} & -\frac{\sqrt3}{2}|\vec F| & 0\end{vmatrix} = \hat i\begin{vmatrix}\frac{\sqrt3}{2}a - y & -z \\ -\frac{\sqrt3}{2}|\vec F| & 0\end{vmatrix} - \hat j\begin{vmatrix} -x & -z \\ -\frac{|\vec F|}{2} & 0\end{vmatrix} + \hat u\begin{vmatrix} -x & \frac{\sqrt3 a}{2}-y \\ -\frac{|\vec F|}{2} & -\frac{\sqrt3|\vec F|}{2}\end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\sqrt3}{2}z|\vec F|\hat i + \frac z2|\vec F|\hat j + \left[\frac{\sqrt3}{2}x|\vec F| - \left(-\frac{|\vec F|}{2}\left(\frac{\sqrt3}{2}a - y\right)\right)\right]\hat u = -\frac{\sqrt3}{2}z|\vec F|\hat i + \frac z2|\vec F|\hat j + \left[\frac{\sqrt3}{2}x|\vec F| + \frac{|\vec F|}{2}\left(\frac{\sqrt3 a}{2} - y\right)\right]\hat u$$

$$= \boxed{-\frac{\sqrt3}{2}z|\vec F|\hat i + \frac z2|\vec F|\hat j + \left(\frac{\sqrt3}{2}x|\vec F| + \frac{\sqrt3 a}{4}|\vec F| - \frac{y|\vec F|}{2}\right)\hat u}$$

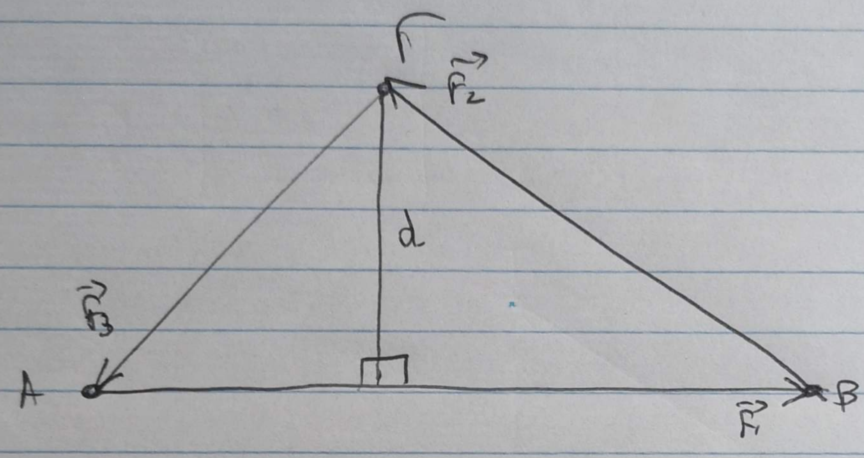
Άρα $\Sigma M_O = \vec{M}_O^{F_1} + \vec{M}_O^{F_2} + \vec{M}_O^{F_3} =$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} z|\vec{F}| - \frac{\sqrt{3}}{2} z|\vec{F}|\right)\hat{i} + \left(-z|\vec{F}| + \frac{z}{2}|\vec{F}| + \frac{z}{2}|\vec{F}|\right)\hat{j} + \left[y|\vec{F}| + \frac{a\sqrt{3}}{4}|\vec{F}| - \cancel{\frac{x\sqrt{3}}{2}|\vec{F}|} - \cancel{\frac{y}{2}|\vec{F}|} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}x|\vec{F}|} + \frac{\sqrt{3}a}{4}|\vec{F}| - \cancel{\frac{y}{2}|\vec{F}|}\right]\hat{u}$$

$$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + \frac{a\sqrt{3}}{2}|\vec{F}|\hat{u}$$

Άρα η συνισταμένη των ροπών δεν εξαρτάται από το σημείο ως προς το οποίο αυτή υπολογίζεται.

Άσκηση 5



Το εμβαδόν του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $E = \frac{1}{2} AB \cdot d = \frac{AB \cdot d}{2}$

Η ροπή ως προς το Γ: $\Sigma \vec{M}_\Gamma = \vec{M}_\Gamma^{\vec{F_1}} + \cancel{\vec{M}_\Gamma^{\vec{F_2}}} + \cancel{\vec{M}_\Gamma^{\vec{F_3}}} = \vec{M}_\Gamma^{\vec{F_1}}$.

Άρα $|\Sigma M_\Gamma| = |\vec{M}_\Gamma^{\vec{F_1}}| = |\vec{F_1}| \cdot d = AB \cdot d = 2E$.