Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το διορθώσω: Georgepan

Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το διορθώσω: Georgepan

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής

Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

15^{η} σειρά ασκήσεων: Ισορροπία σε δύο διαστάσεις

Άσκηση 1

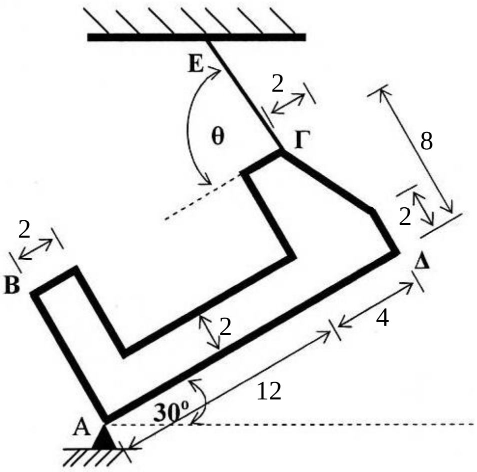
Το επίπεδο σώμα του Σχ.1 στηρίζεται με άρθρωση στο Α και το σχοινί ΓΕ.

α. Υπολογίστε το γεωμετρικό κέντρο του σώματος.

β. Να βρεθεί η γωνία θ για την οποία η δύναμη στο σχοινί ΓΕ καθίσταται η μικρότερη δυνατή.

γ. Για τη γωνία αυτή να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στήριξης του σώματος (πάχος t=1 cm και ειδικό βάρος του υλικού του σώματος $\gamma=10^5$ N/m^3).

Οι διαστάσεις στο σχήμα δίνονται σε cm.



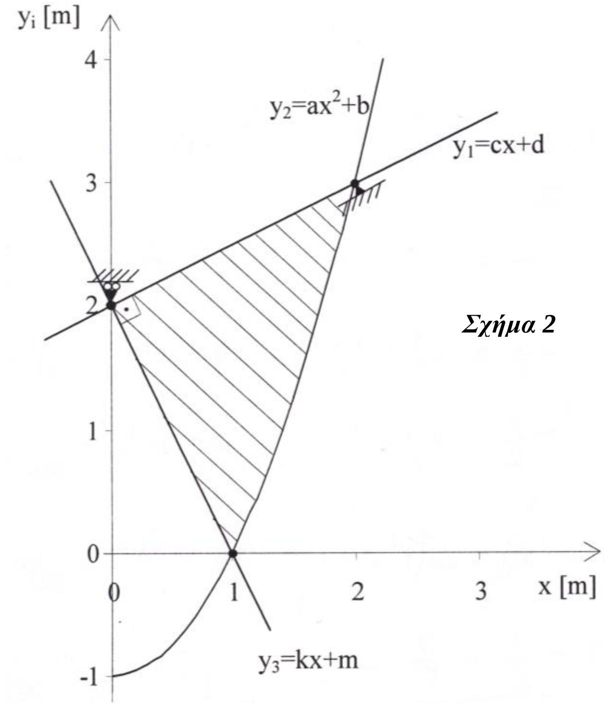
Σχήμα 1

Άσκηση 2

Η επίπεδη επιφάνεια του Σχ.2 στηρίζεται με άρθρωση και κύλιση. Το πάχος της πλάκας είναι ίσο με t=5 mm ενώ το ειδικό βάρος του υλικού κατασκευής της είναι γ=50 kN/m^3.

α. Προσδιορίστε το γεωμετρικό κέντρο του σώματος.

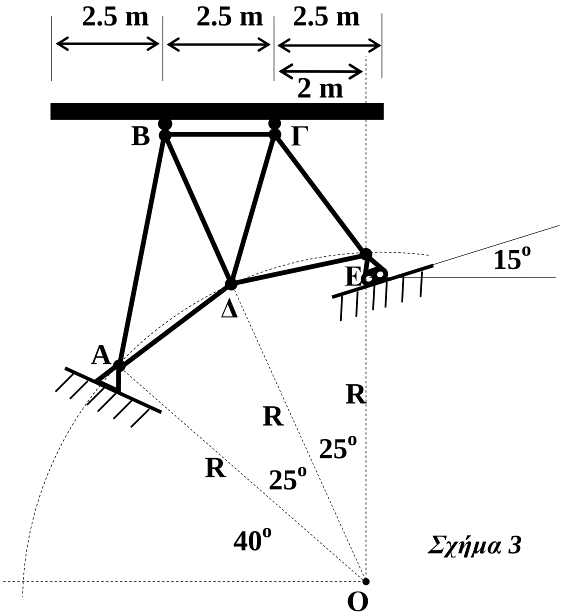
β. Υπολογίστε τις αντιδράσεις στηρίξεως.



Σχήμα 2

Άσκηση 3

Στο δικτύωμα του Σχ.3 (Α: άρθρωση, Ε: κύλιση) οι κόμβοι Α, Δ, Ε ευρίσκονται επί τόξου κύκλου (Ο, R=7.5m) η δε ράβδος ΔΒ εκτείνεται κατά την ΟΔ. Επί των κόμβων Β, Γ ισορροπεί δοκός βάρους 2 kN/m. Να προσδιορισθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις.

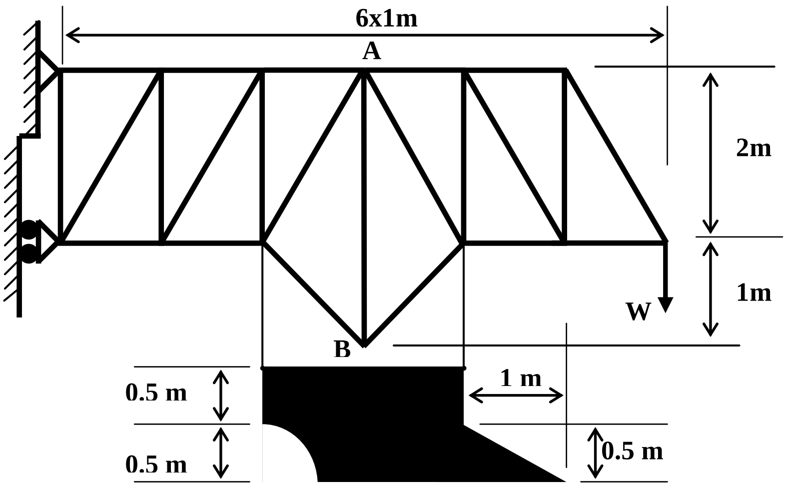


Σχήμα 3

Άσκηση 4

Ο ραβδωτός φορέας του Σχ.4 στηρίζεται με άρθρωση και κύλιση. Το αναρτημένο σώμα, βάρους W έχει πάχος t=10 mm και είναι κατασκευασμένο από υλικό ειδικού βάρους γ=78 kN/m^3. Προσδιορίστε τις αντιδράσεις στηρίξεως.

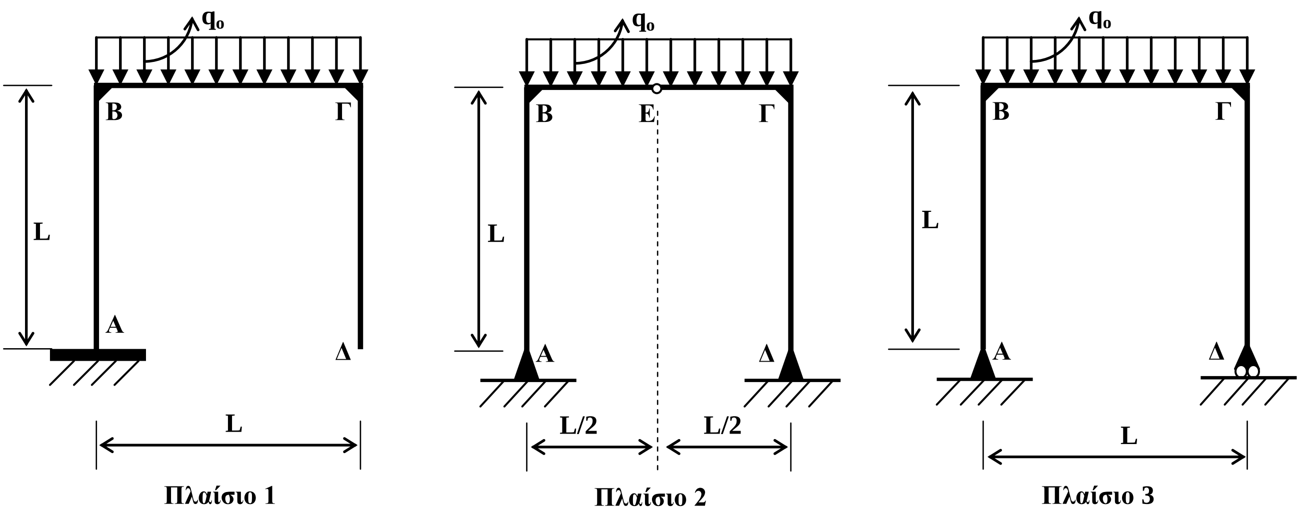
Το καμπύλο τμήμα του αναρτημένου σώματος είναι τεταρτοκύκλιο.



Σχήμα 4

Άσκηση 5

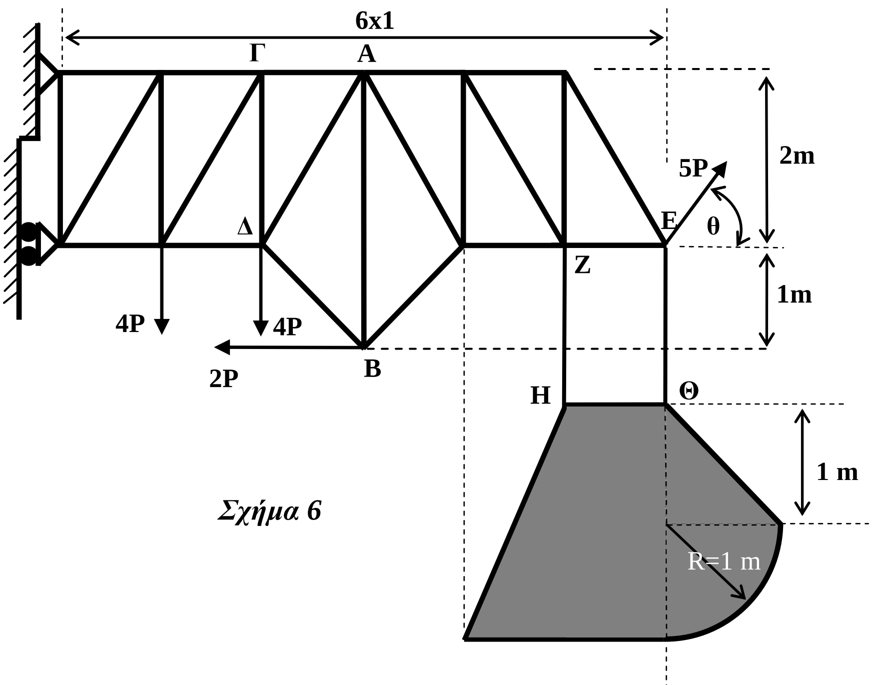
Τα τρία πλαίσια του Σχ.5 έχουν τις ίδιες διαστάσεις, φέρουν το ίδιο φορτίο αλλά στηρίζονται με διαφορετικό τρόπο. Υπολογίστε τις αντιδράσεις σε κάθε στήριξη συναρτήσει των μεγεθών q και L. (Στο σημείο E του Πλαισίου 2 υπάρχει εσωτερική άρθρωση)



Σχήμα 5

Άσκηση 6

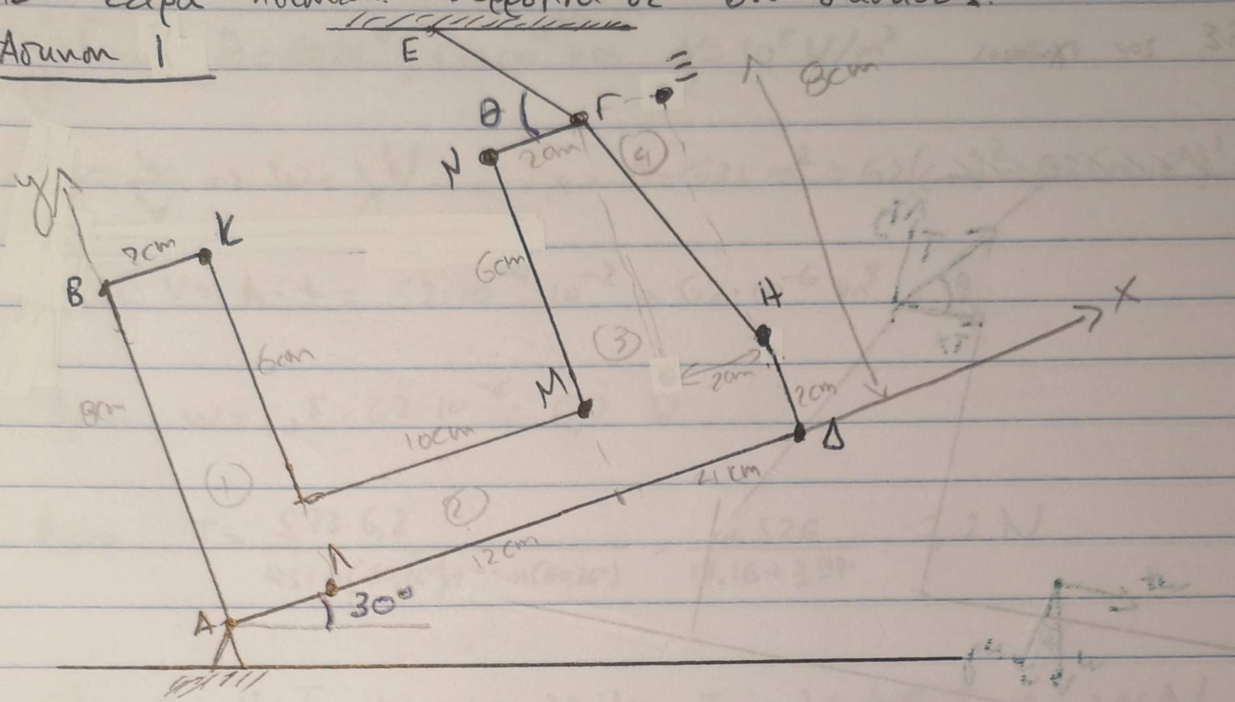
Από τους κόμβους Z και E του δικτυωτού φορέα του Σχ.6 αναρτάται με κατακόρυφα σχοινιά ZH και EΘ ομογενής πλάκα πάχους 10 mm από μεταλλο ειδικού βάρους Px10^5 N/m^3. Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στηρίξεως συναρτήσει των P, θ.



Σχήμα 6

15ⁿ Σειρά Ασκήσεων: Ισορροπία σε δύο διαστάσεις.

Άσκηση 1



Έχω
$A(0,0)$, $K(2,8)$ $\Big\}$ $G_1(1,4)$, $A_1 = 16\,cm^2 \Rightarrow Q_{x_1} = A_1 y_{c_1} = 64\,cm^3$, $Q_{y_1} = A_1 x_{c_1} = 16\,cm^3$

$\Lambda(2,0)$, $M(12,2)$ $\Big\}$ $G_2(7,1)$, $A_2 = 20\,cm^2 \Rightarrow Q_{x_2} = 20\,cm^3$, $Q_{y_2} = 140\,cm^3$

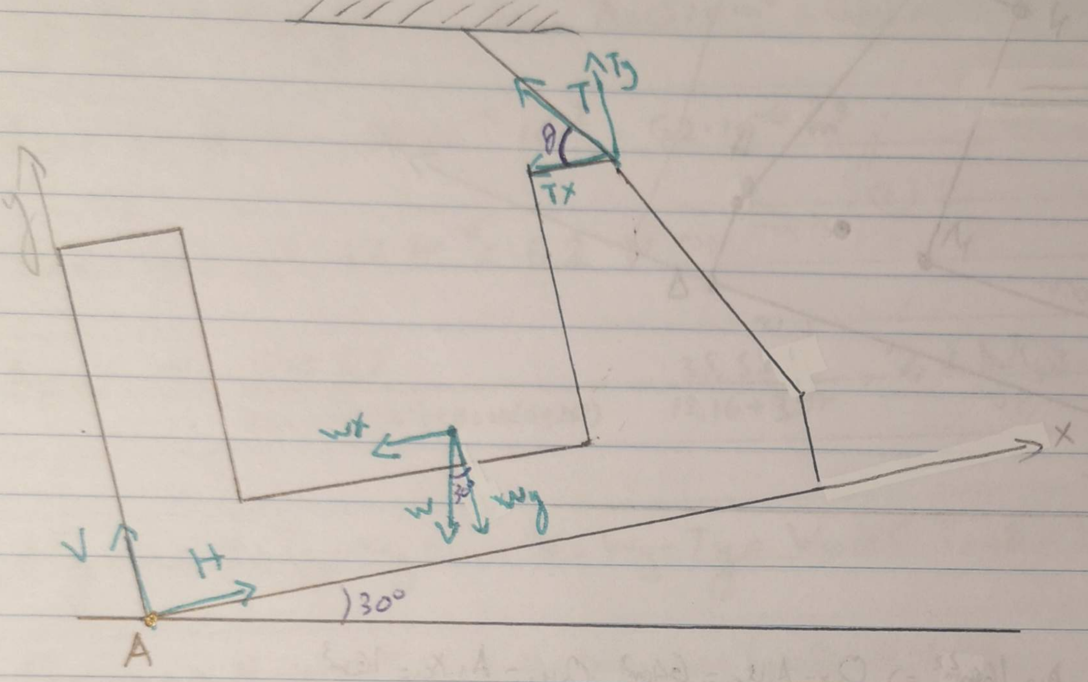
$N(12,8)$, $\Delta(16,0)$ $\Big\}$ $G_3(14,4)$, $A_3 = 32\,cm^2 \Rightarrow Q_{x_3} = 128\,cm^3$, $Q_{y_3} = 448\,cm^3$

$H(16,2)$, $\Xi(16,8)$, $\Gamma(14,8)$ $\Big\}$ $G_4(15{,}3, 6)$, $A_4 = 6\,cm^2 \Rightarrow Q_{x_4} = 36\,cm^3$, $Q_{y_4} = 91{,}8\,cm^3$

Άρα
$$\left.\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 - A_4 = 62\,cm^2 \\ Q_x &= Q_{x_1} + Q_{x_2} + Q_{x_3} - Q_{x_4} = 176\,cm^3 \\ Q_y &= Q_{y_1} + Q_{y_2} + Q_{y_3} - Q_{y_4} = 512{,}2\,cm^3 \end{aligned}\right\} \quad X_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{512{,}2}{62} = 8{,}26\,cm, \quad y_c = \frac{Q_x}{A} = \frac{176}{62} = 2{,}84\,cm$$

Άρα $C(8{,}26, 2{,}84)$

Κάνω το ΔΕΣ του σχήματος



$T_x = T\cos\theta$

$T_y = T\sin\theta$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow W\sin 30° \cdot 2{,}84 - W\cos(30°) \cdot 8{,}26 + T_x \cdot 8 + T_y \cdot 14 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}42W - 7{,}15W + 8\cos\theta T + 14\sin\theta T = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow T(14\sin\theta + 8\cos\theta) = 5{,}73W \Rightarrow T = \dfrac{5{,}73W}{14\sin\theta + 8\cos\theta}$

Αφού στο πρόβλημα έχω σταθερή τιμή στο Σ $T = T(\theta) = \dfrac{5{,}73W}{14\sin\theta + 8\cos\theta}$

Θέλω την ελαχιστοποίηση του T άρα την μεγιστοποίηση του παρονομαστή.

Άρα πρέπει $\dfrac{d(14\sin\theta + 8\cos\theta)}{d\theta} = 0 \Rightarrow 14\cos\theta - 8\sin\theta = 0 \Leftrightarrow 14\cos\theta = 8\sin\theta \Leftrightarrow \tan\theta = \dfrac{14}{8} = \dfrac{7}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = 60{,}26°$

γ) Για $\theta = 60{,}26°$, $t = 1cm = 10^{-2} m$ και $\gamma = 10^5 N/m^3$

$\gamma = \frac{W}{V} \Rightarrow W = \gamma V$. Έχω $A = 62 cm^2 = 62 (cm)^2 = 62 (m \cdot 10^{-2})^2 = 62 \cdot 10^{-4} m^2$

Έχω $V = A \cdot t = 62 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} = 62 \cdot 10^{-6} m^3$

Άρα $W = 10^5 \cdot 62 \cdot 10^{-6} = 6{,}2 \ N$

Άρα $T = \frac{5{,}73 \cdot 6{,}2}{14 \sin(60{,}26°) + 8 \cos(60{,}26°)} = \frac{35{,}526}{12{,}16 + 3{,}97} = 2{,}2 N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V + T_y - W_y = 0 \Leftrightarrow V = W_y - T_y = W\cos(30°) - T\sin\theta = 3{,}96 N$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H - W_x - T_x = 0 \Rightarrow H = W\sin(30) + T\cos\theta = 4{,}19 N$

Ασκηση 2

α) Απο ασκηση 1, σειρά 10 έχω οτι:

$A = 2{,}66 \, m^2$

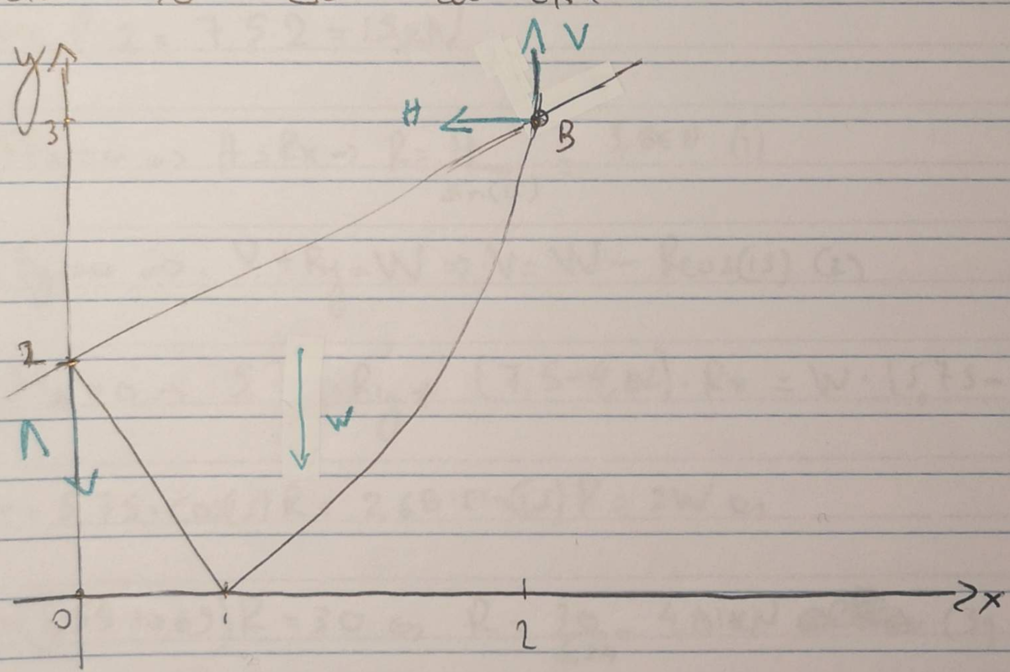
$C(1{,}03 , 1{,}65)$

Εχω $t = 5mm = 5 \cdot 10^{-3} m$ και $\gamma = 50 kN/m^3 = 50 \cdot 10^3 N/m^3$

Αρα $V = At = 13{,}3 \cdot 10^{-3}$

Οποτε $W = \gamma V = 50 \cdot 13{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 665 \, N$

Κάνω το ΔΕΣ του σχήματος



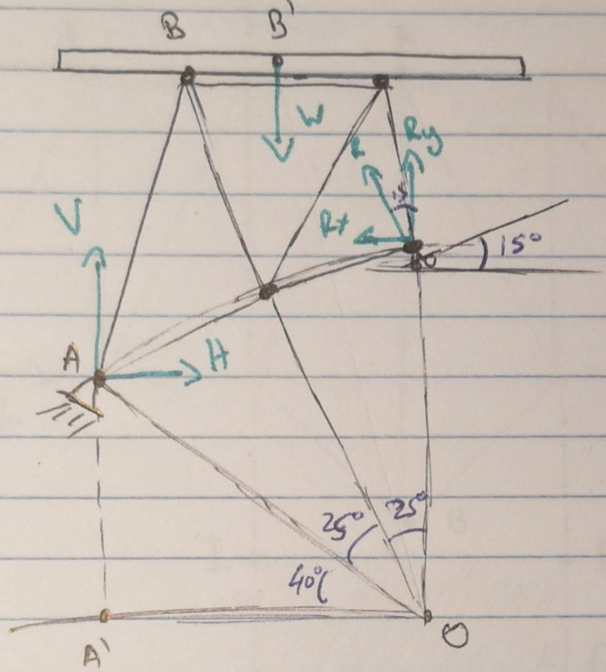
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H = 0 \quad (1)$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \Lambda + W = V \quad (2)$

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow W(2-1{,}03) + \Lambda \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \Lambda = -\frac{0{,}97}{2} W = -322{,}525 N \quad (3)$

$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} V = 342{,}475 N$

Άσκηση 3



$\sin(40) = \frac{AA'}{OA} \Rightarrow AA' = R\sin(40) = 4{,}82$
$\cos(40) = \frac{OA'}{OA} \Rightarrow OA' = R\cos(40) = 5{,}75\,m$

$W = \rho \cdot 2 = 7{,}5 \cdot 2 = 15\,kN$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H = R_x \Rightarrow R = \frac{H}{\sin(15)} = 3{,}86H \quad (1)$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V + R_y = W \Rightarrow V = W - R\cos(15) \quad (2)$

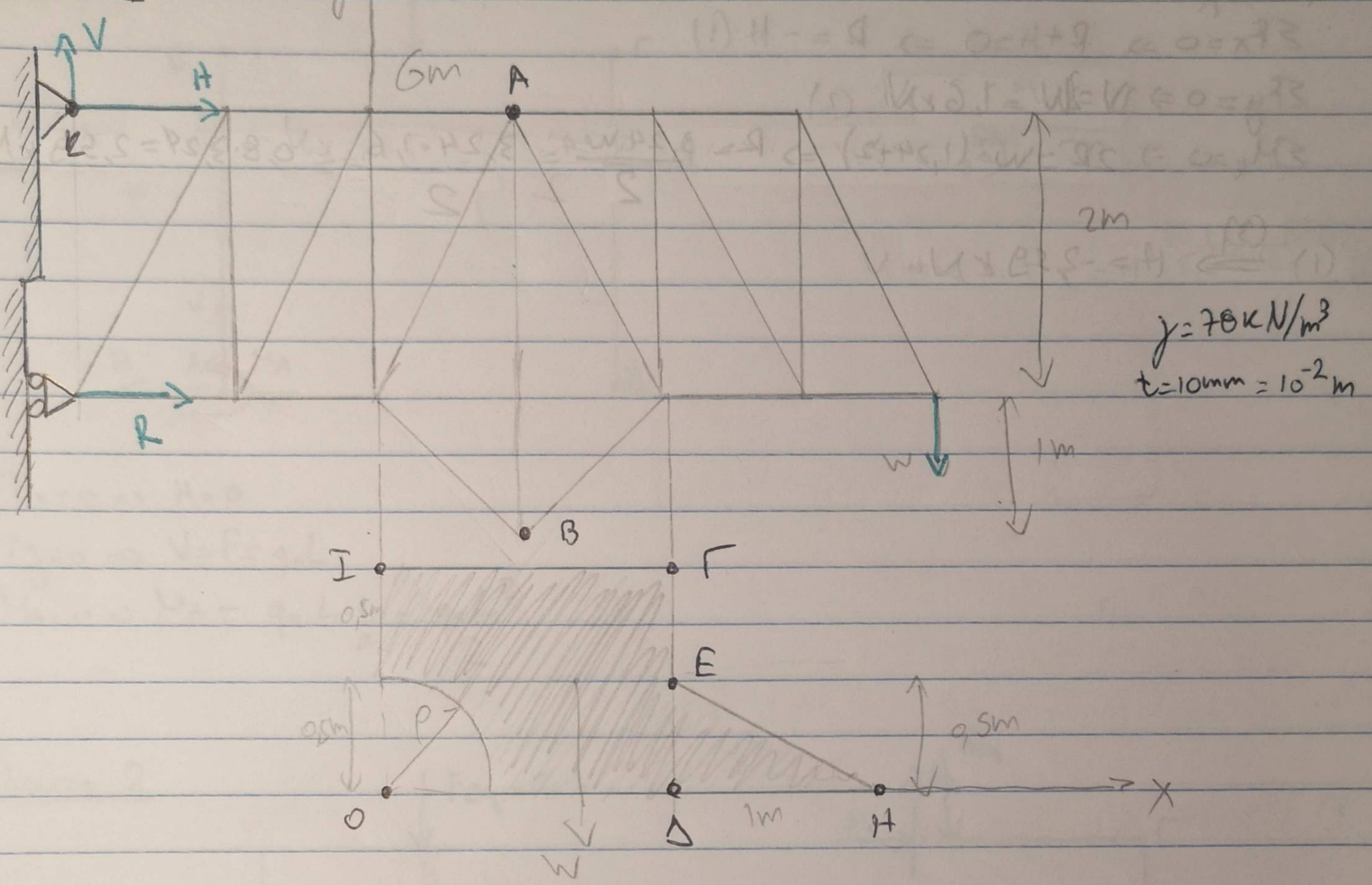
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 5{,}75 \cdot R_y + (7{,}5 - 4{,}82) \cdot R_x = W \cdot (5{,}75 - 2{,}5 - 1{,}25) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5{,}75 \cdot \cos(15) R + 2{,}68 \cdot \sin(15) R = 2W \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5{,}55 + 0{,}69) R = 30 \Leftrightarrow R = \frac{30}{6{,}24} = 4{,}81\,kN \quad (3)$

$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} H = 1{,}25\,kN$
$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} V = 15 - 4{,}65 = 10{,}35\,kN$

Άσκηση 4



$\gamma = 78\,kN/m^3$

$t = 10mm = 10^{-2}\,m$

Αρχικά θα βρω το γ. κέντρο της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.

ΟΙΓΔ:(1), (Ο,ρ):(2), ΕΔΗ:(3)

Έχω $O(0,0)$, $\Gamma(2,1)$ $\Big\}$ $C_1\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $A_1 = 2 \cdot 1 = 2m^2$ και $C_2 = \left(\frac{4\rho}{3\pi}, \frac{4\rho}{3\pi}\right) = (0{,}21,\ 0{,}21)$

$\Delta(2,0)$, $E(2,0{,}5)$, $H(3,0)$ $\Big\}$ $C_3(2{,}33,\ 0{,}25)$, $A_3 = \frac{1 \cdot 0{,}5}{2} = 0{,}25\,m^2$, $A_2 = \frac{\pi\rho^2}{4} = 0{,}2m^2$

Άρα $A = A_1 - A_2 + A_3 = 2{,}05\ m^2$

Έχω $Q_y = Q_{y_1} - Q_{y_2} + Q_{y_3} = x_{c_1}A_1 - x_{c_2}A_2 + x_{c_3}A_3 = 1 \cdot 2 - 0{,}21 \cdot 0{,}2 + 2{,}33 \cdot 0{,}25 = 2{,}54 m^3$

Άρα $x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{Q_y}{A_1 - A_2 + A_3} = \frac{2{,}54}{2{,}05} = 1{,}24\ m$

$\gamma = \frac{W}{V} \Rightarrow W = \gamma V = \gamma A t = 78 \cdot 2{,}05 \cdot 10^{-2} = 1{,}6\,kN$

Για έχω:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R + H = 0 \Rightarrow R = -H$ (1)

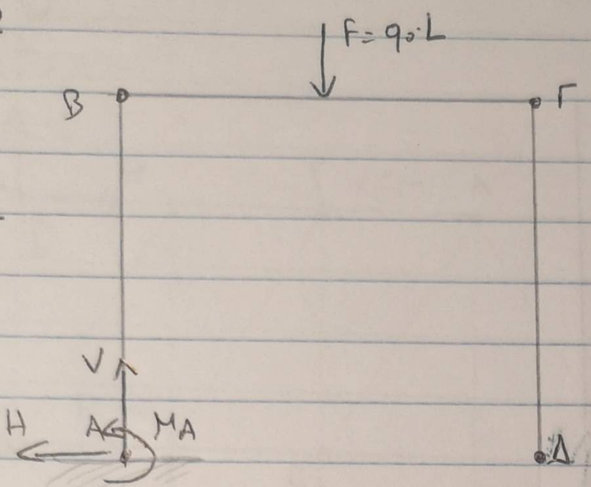
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = 2W = 3{,}2\,kN$ (2)

$\Sigma M_k = 0 \Rightarrow 2R = (2 + 1{,}24)W + 6W \Rightarrow R = \frac{9{,}24W}{2} = 7{,}392\,kN$ (3)

(1) $\xrightarrow{(3)}$ $H = -7{,}392\,kN$

Άσκηση 5

Πλαίσιο 1

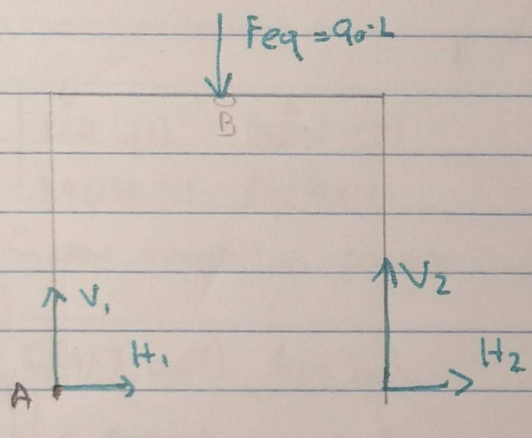


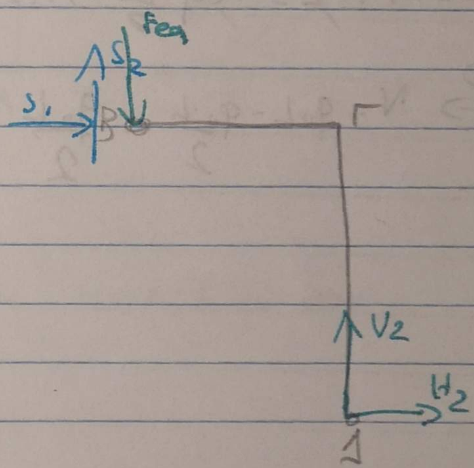
$\Sigma F_x=0 \Rightarrow H=0$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow V=F=q_0 L$

$\Sigma M_A=0 \Rightarrow M_A=q_0\cdot L\cdot \frac{L}{2}=\frac{q_0 L^2}{2}$

Πλαίσιο 2





$\Sigma F_x=0 \Rightarrow H_1+H_2=0$ (1)

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow V_1+V_2=F_{eq}=q_0\cdot L$ (2)

$\Sigma M_A=0 \Rightarrow V_2\cdot \cancel{L}=F_{eq}\cdot\frac{\cancel{L}}{2} \Rightarrow V_2=\frac{F_{eq}}{2}=\frac{q_0 L}{2}$ (3)

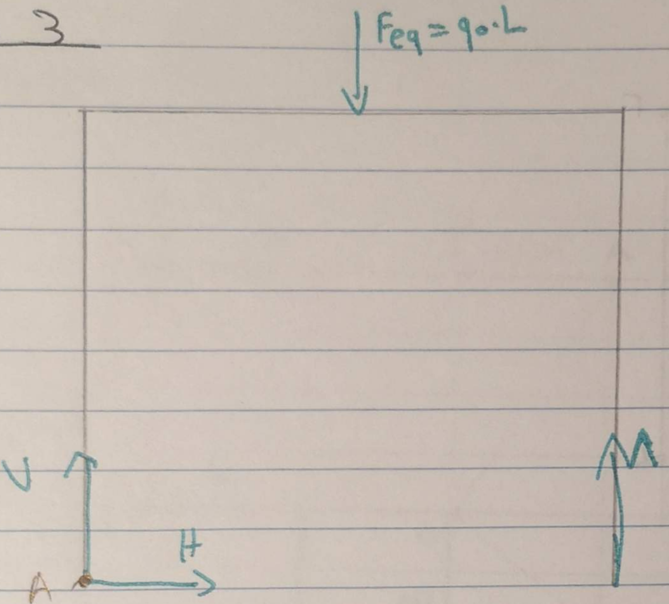
$(2) \xRightarrow{(3)} V_1=q_0\cdot L-V_2=\frac{q_0 L}{2}$

$\Sigma M_B=0 \Rightarrow V_2\cdot\frac{\cancel{L}}{2}+H_2\cdot\cancel{L}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow H_2=-\frac{V_2}{2}=-\frac{q_0 L}{4}$ (4)

Άρα $(1) \xRightarrow{(4)} H_1=\frac{q_0 L}{4}$

Άσκηση 3



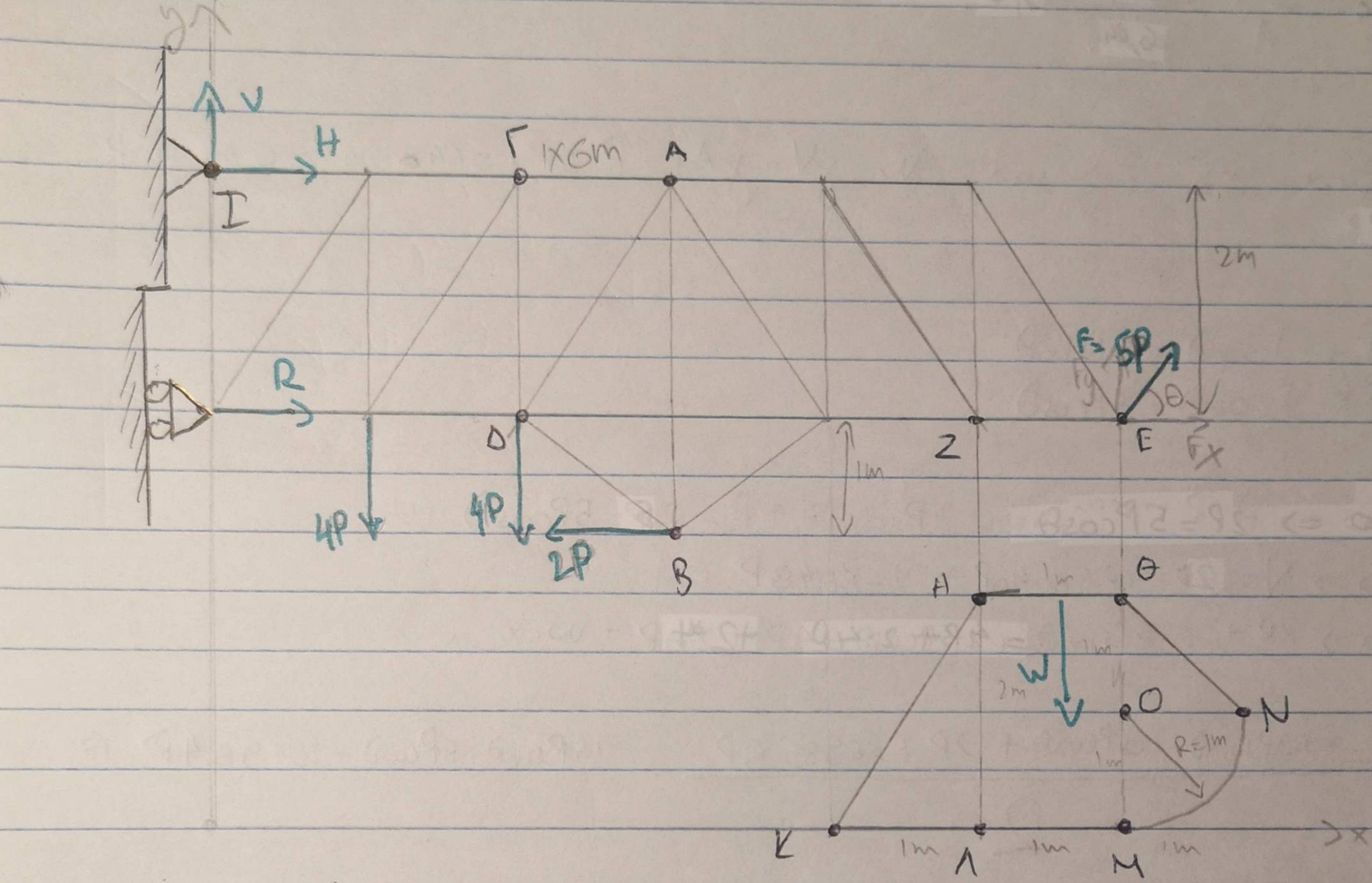
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H = 0 \quad (1)$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V + \Lambda = F_{eq} = q_0 \cdot L \quad (2)$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \Lambda \cdot \cancel{L} = F_{eq} \cdot \frac{\cancel{L}}{2} \Rightarrow \Lambda = \frac{q_0 L}{2} \quad (3)$

$(2) \xRightarrow{(3)} V = q_0 L - \frac{q_0 \cdot L}{2} = \frac{q_0 L}{2}$

Άσκηση 6



$t = 10^{-2}\ m$ | $\hat{K\Lambda H}$: (1) $\hat{O\Theta N}$: (3)

$\gamma = P \cdot 10^{5}\ N/m^3$ | $\Lambda H \Theta M$: (2) $\widehat{ONM}$: (4)

Βρίσκω το XC του αναρτημένου σώματος, καθώς και το εμβαδόν του:

Σχω

$K(4,0)$, $\Lambda(5,0)$, $H(5,2)$: $C_1(4{,}67,\ 0{,}67)$, $A_1 = 1 m^2$

$\Lambda(5,0)$, $H(5,2)$, $M(6,0)$, $\Theta(6,2)$: $C_2(5{,}5,\ 1)$, $A_2 = 2 m^2$

$M(6,0)$, $O(6,1)$, $N(7,1)$: $C_4\left(6 + \frac{4R}{3\pi},\ 1 - \frac{4R}{3\pi}\right) = (6{,}42,\ 0{,}57)$, $A_4 = \frac{\pi}{4} m^2$

$O(6,1)$, $N(7,1)$, $\Theta(6,2)$: $C_3(6{,}33,\ 1{,}33)$, $A_3 = 0{,}5 m^2$

Άρα $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 3{,}5 + \frac{\pi}{4} = 4{,}29\ m^2$

$Q_y = Q_{y1} + Q_{y2} + Q_{y3} + Q_{y4} = x_{c1}A_1 + x_{c2}A_2 + x_{c3}A_3 + x_{c4}A_4 = 23{,}88\ m^3$

Άρα $x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{23{,}88}{4{,}29} = 5{,}57 m$

Το βάρος της πλάκας: $W = \gamma V = \gamma A t = P \cdot 10^5 \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-2} = 6{,}64 \cdot 10^3 P =$
$= 6640P$

Έχω $F_y = F\sin\theta = 5P\sin\theta$
$F_x = F\cos\theta = 5P\cos\theta$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H + R + 5P\cos\theta = 2P \Leftrightarrow H + R = 2P - 5P\cos\theta$ (1)
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = 4P + 4P + 6640P \Rightarrow V = 6648P$ (2)
$\Sigma M_I = 0 \Rightarrow 2R + 6 \cdot 5P\sin\theta + 2 \cdot 5P\cos\theta = 4P + 2 \cdot 4P + W \cdot x_c \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{-30P\sin\theta - 10P\cos\theta + 12P + 36984{,}8P}{2} = -15P\sin\theta - 5P\cos\theta + 18498{,}4P$ (3)

$(1) \xrightarrow{(3)} H = 2P - \cancel{5\cos\theta P} + 15P\sin\theta + \cancel{5P\cos\theta} - 18498{,}4P = 15P\sin\theta - 18496{,}4P$