ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής

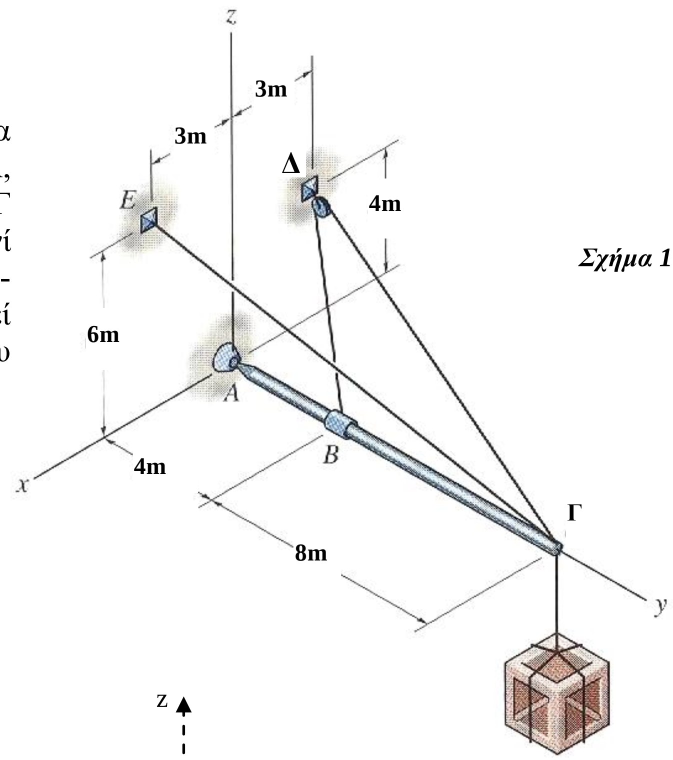
Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

18η σειρά ασκήσεων: Ισορροπία στο χώρο

Άσκηση 1

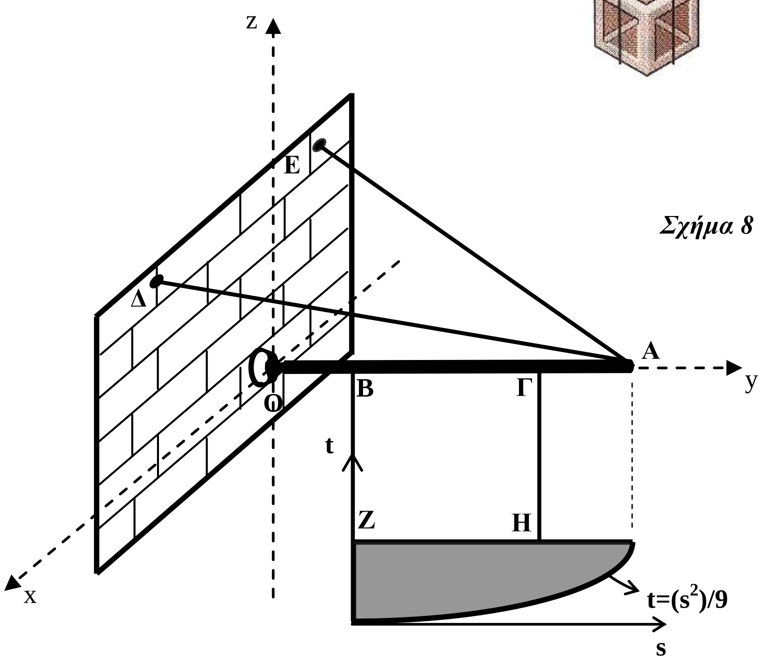
Η ράβδος ΑΓ του Σχ.1 στηρίζεται οριζόντια με τη βοήθεια χωρικής άρθρωσης στο Α, σχοινιού ΕΓ και σχοινιού ΒΔΓ. Το σχοινί ΕΓ έχει φέρουσα ικανότητα 1.5 kN ενώ το σχοινί ΒΔΓ έχει φέρουσα ικανότητα 1 kN. Η τροχαλία στη στήριξη Δ είναι ιδανική. Να ευρεθεί το μέγιστο επιτρεπτό βάρος του κιβωτίου που μπορεί να αναρτηθεί από το Γ.



Σχήμα 1

Άσκηση 2

Οριζόντιος ιστός ΟΑ (Σχ.8) βάρους 1 kN και μήκους 4 m, στηρίζεται κάθετα στον κατακόρυφο τοίχο (xz) με τη βοήθεια χωρικής άρθρωσης στο O(0,0,0) και δύο συρματοσχοίνων τα οποία ξεκινούν από τα σημεία Δ (2m, 0m, 2m) και Ε (-2m, 0m, 2m) του τοίχου και καταλήγουν στο άκρο Α του ιστού. Από τα σημεία Β(0, 1m, 0) και Γ(0, 3m, 0) του ιστού αναρτάται με κατακόρυφα συρματόσχοινα ΒΖ και ΓΗ επίπεδο σώμα πάχους 2cm από υλικό ειδικού βάρους γ. Γνωρίζοντας ότι όλα τα συρματόσχοινα έχουν την ίδια εφελκυστική φέρουσα ικανότητα, ίση με 2 kN:

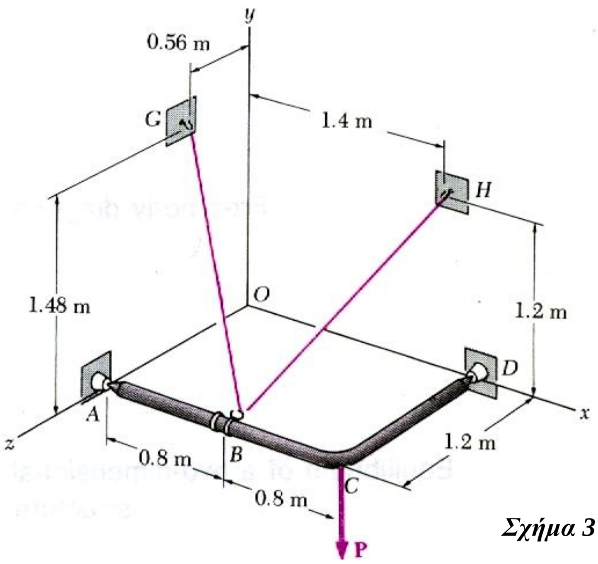


Σχήμα 8

α. Υπολογίστε τη μέγιστη επιτρεπτή τιμή του ειδικού βάρους γ του αναρτημένου σώματος.
β. Για την ως άνω τιμή του γ υπολογίστε τις αντιδράσεις στη χωρική άρθρωση στο Ο.

Άσκηση 3

Ο ορθογωνικός φορέας ACD (AC// Ox, DC//Oz) του Σχ.3 στηρίζεται οριζόντια με τη βοήθεια δύο χωρικών αρθρώσεων στα A και D και ενός σχοινιού GBH. Να ευρεθεί η δύναμη που καταπονεί το σχοινί αν ο φορέας θεωρηθεί αβαρής και η κατακόρυφη δύναμη P έχει μέτρο 10 kN.



Σχήμα 3

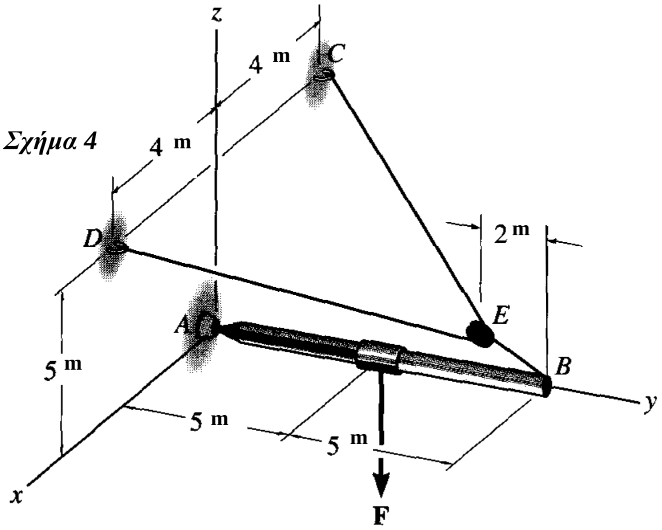
Άσκηση 4

Η αβαρής οριζόντια δοκός AB του Σχ. 4 στηρίζεται με χωρική άρθρωση στο A και συρματόσχοινο DEC αντοχής 2 kN.

α. Υπολογίστε τη μέγιστη επιτρεπτή τιμή της κατάκόρυφης δύναμης F.

β. Για τη συγκεκριμένη τιμή της δύναμης F υπολογίστε τη συνολική δύναμη που ασκείται στην άρθρωση στο A.

Σχήμα 4

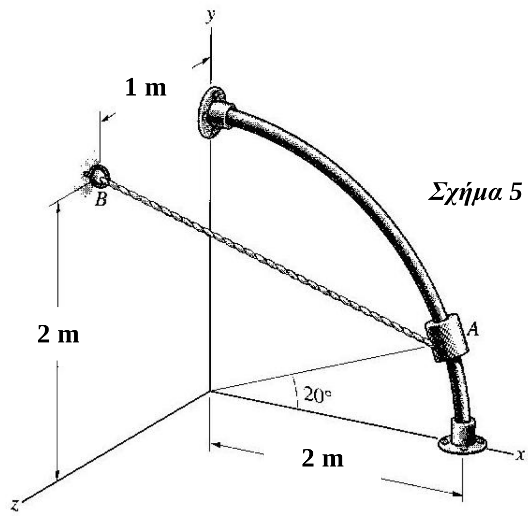


Άσκηση 5

Ο αμελητέων διαστάσεων ολισθητήρας A του Σχ. 5, μάζας 100 kgr, ισορροπεί επί απολύτως λείας κυκλικής ράβδου με τη βοήθεια σχοινιού AB. Να προσδιορισθούν:

α. Η δύναμη που καταπονεί το σχοινί.

β. Η δύναμη που ασκεί η ράβδος στον ολισθητήρα.



Σχήμα 5

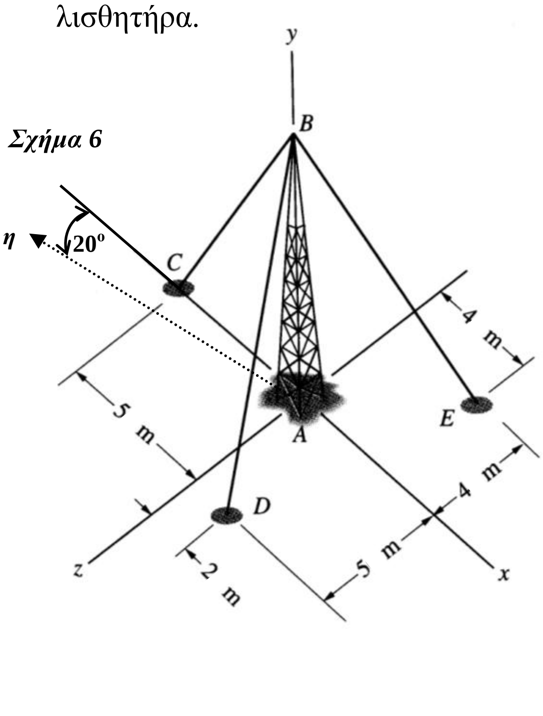
Άσκηση 6

Αβαρής ιστός AB (νοούμενος ως μονοδιάστατο σώμα), ύψους 7 m, στηρίζεται με χωρική άρθρωση στο A και τρεις ράβδους (ασκούν δύναμη αποκλειστικά κατά το μήκος τους) BC, BD, BE, όπως στο Σχ.6. Ο ιστός φορτίζεται από οριζόντια πνοή ανέμου που ασκεί δύναμη μεταβλητού μέτρου εντάσεως $q(y)=e^{y}$ N/m κατά την ευθεία Aη. Αν F_{BE}=2 kN προσδιορίστε:

α. Τις αντιδράσεις στην άρθρωση A και

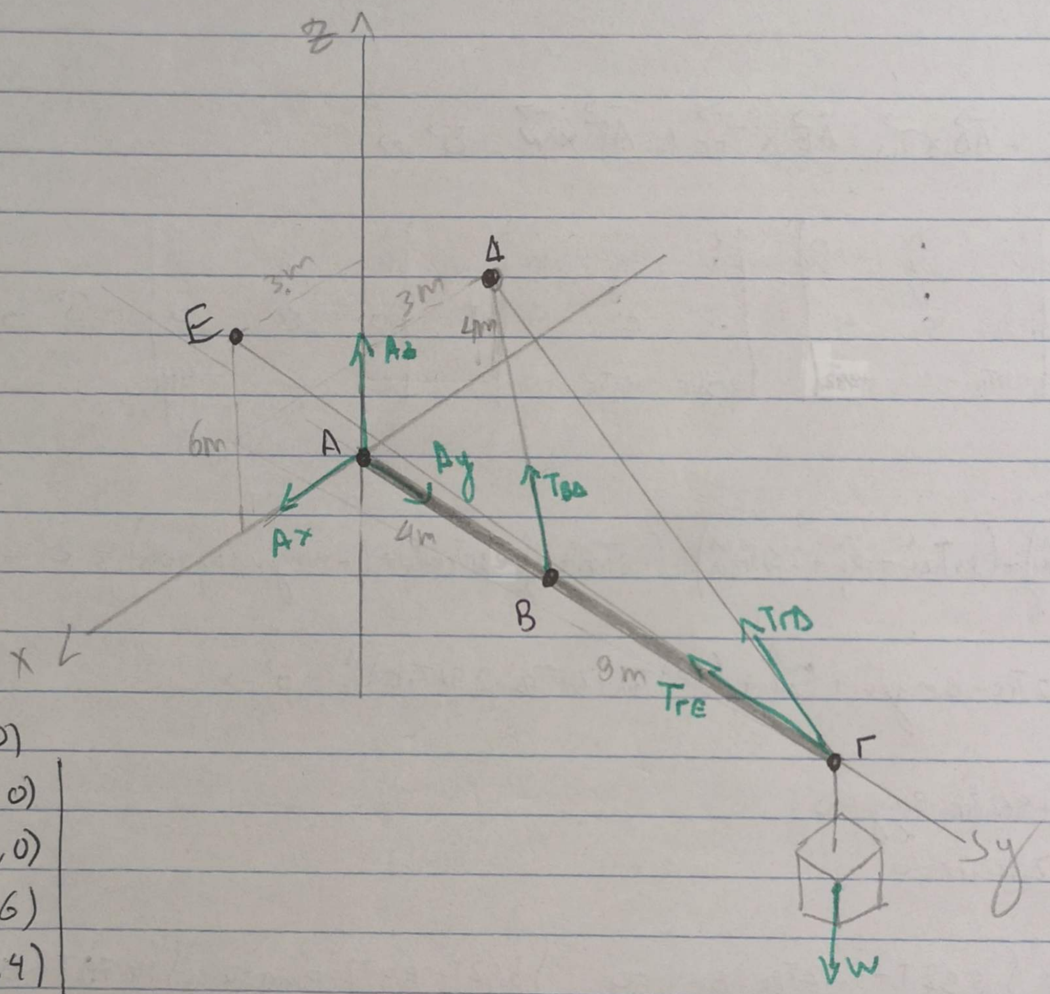
β. Τις δυνάμεις στις ράβδους.

Σχήμα 6



18η Σειρά ασκήσεων: Ισορροπία στον χώρο

Άσκηση 1



A(0,0,0)
B(0,4,0)
Γ(0,8,0)
E(3,0,6)
Δ(-3,0,4)

$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$

0,424

0,318

$\vec{\Gamma E} = 3\hat{i} - 8\hat{j} + 6\hat{k} \Rightarrow |\vec{BE}| = 10,44\,m \Rightarrow \hat{\Gamma E} = 0,29\hat{i} - 0,77\hat{j} + 0,57\hat{k}$

$\vec{B\Delta} = -3\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k} \Rightarrow |\vec{B\Delta}| = 6,4m \Rightarrow \hat{B\Delta} = -0,47\hat{i} - 0,63\hat{j} + 0,63\hat{k}$

$\vec{\Gamma\Delta} = -3\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k} \Rightarrow |\vec{\Gamma\Delta}| = 9,43m \Rightarrow \hat{\Gamma\Delta} = -0,32\hat{i} - 0,85\hat{j} + 0,42\hat{k}$

Άρα έχω:

$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$

$\vec{T}_{\Gamma E} = 0,29 T_{\Gamma E}\hat{i} - 0,77 T_{\Gamma E}\hat{j} + 0,57 T_{\Gamma E}\hat{k}$

$\vec{T}_{B\Delta} = -0,47 T_{B\Delta}\hat{i} - 0,63 T_{B\Delta}\hat{j} + 0,63 T_{B\Delta}\hat{k}$

$\vec{T}_{\Gamma\Delta} = -0,32 T_{\Gamma\Delta}\hat{i} - 0,85 T_{\Gamma\Delta} + 0,42 T_{\Gamma\Delta}\hat{k}$

$\vec{W} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - mg\hat{k}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x + 0,29 T_{\Gamma E} - 0,47 T_{B\Delta} - 0,32 T_{\Gamma\Delta} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 0,77 T_{\Gamma E} - 0,63 T_{B\Delta} - 0,85 T_{\Gamma\Delta} = 0$

$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow A_z + 0,57 T_{\Gamma E} + 0,63 T_{B\Delta} + 0,42 T_{\Gamma\Delta} - mg = 0$

$\vec{A\Delta} = -3\hat{i} + 0\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{AE} = 3\hat{i} + 0\hat{j} + 6\hat{k}$

$\vec{A\Gamma} = 0\hat{i} + 8\hat{j} + 0\hat{k}$

$$\Sigma \vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{A\Delta} \times \vec{T}_{B\Delta} + \vec{A\Delta} \times \vec{T}_{\Gamma\Delta} + \vec{AE} \times \vec{T}_{\Gamma E} + \vec{A\Gamma} \times \vec{W} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 0 & 4 \\ -0{,}47T_{B\Delta} & -0{,}63T_{B\Delta} & 0{,}63T_{B\Delta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 0 & 4 \\ -0{,}32T_{\Gamma\Delta} & -0{,}85T_{\Gamma\Delta} & 0{,}42T_{\Gamma\Delta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 0 & 6 \\ 0{,}29T_{\Gamma E} & -0{,}77T_{\Gamma E} & 0{,}57T_{\Gamma E} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2{,}52T_{B\Delta}\hat{i} + 0\hat{j} + 1{,}89T_{B\Delta}\hat{k}\right) + \left(3{,}4T_{\Gamma\Delta}\hat{i} + 0\hat{j} + 2{,}55T_{\Gamma\Delta}\hat{k}\right) + \left(4{,}62T_{\Gamma E}\hat{i} + 0\hat{j} - 2{,}31T_{\Gamma E}\hat{k}\right) + \left(-8mg\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}\right) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2{,}52T_{B\Delta} + 3{,}4T_{\Gamma\Delta} + 4{,}62T_{\Gamma E} - 8mg)\hat{i} + 0\hat{j} + (1{,}89T_{B\Delta} + 2{,}55T_{\Gamma\Delta} - 2{,}31T_{\Gamma E})\hat{k} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2{,}52T_{B\Delta} + 3{,}4T_{\Gamma\Delta} + 4{,}62T_{\Gamma E} - 8mg = 0 \\ 1{,}89T_{B\Delta} + 2{,}55T_{\Gamma\Delta} - 2{,}31T_{\Gamma E} = 0 \end{cases}$$

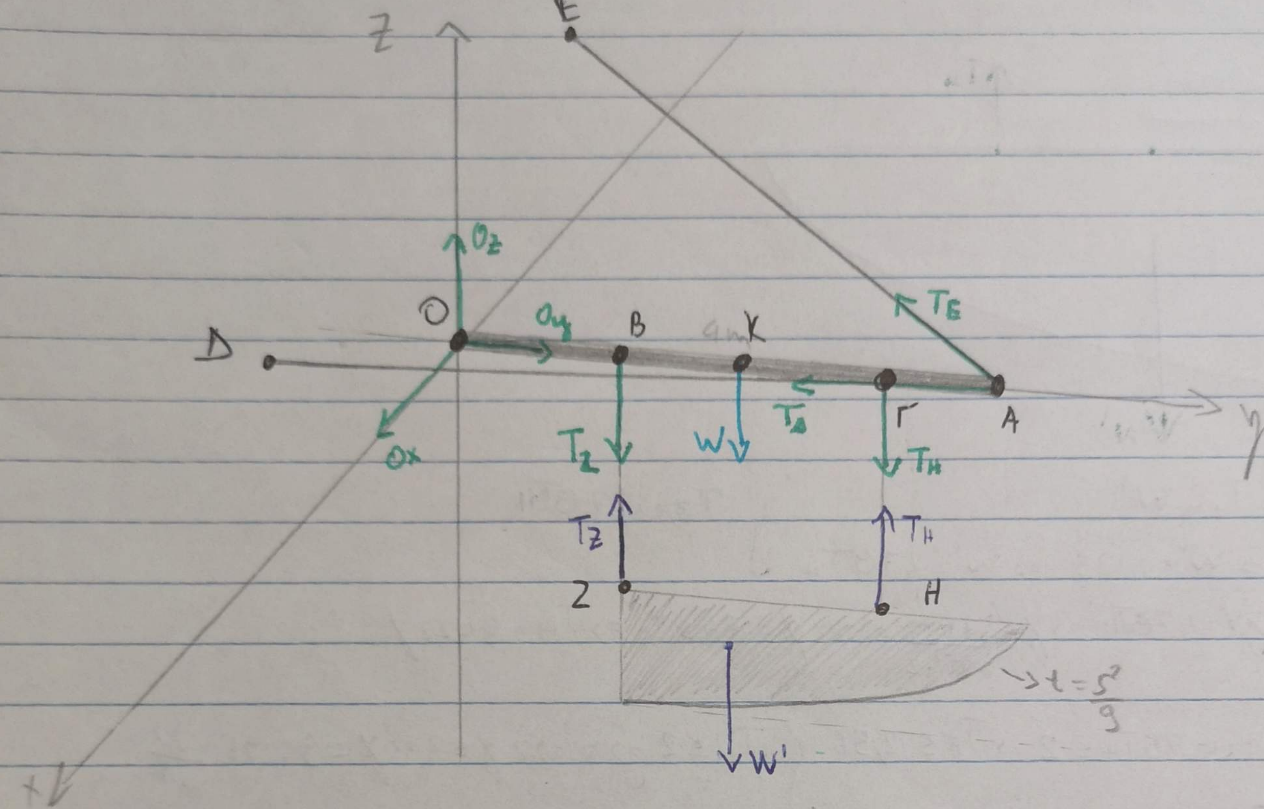
Όμως, $T_{B\Delta} = T_{\Gamma\Delta} = T$ άρα $\begin{cases} 5{,}92T + 4{,}62T_{\Gamma E} - 8mg = 0 \\ 4{,}44T - 2{,}31T_{\Gamma E} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5{,}92T + 8{,}87T - 8mg = 0 \\ T_{\Gamma E} = 1{,}92T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14{,}79T = 8mg \\ T_{\Gamma E} = 1{,}92T \end{cases} \Rightarrow$

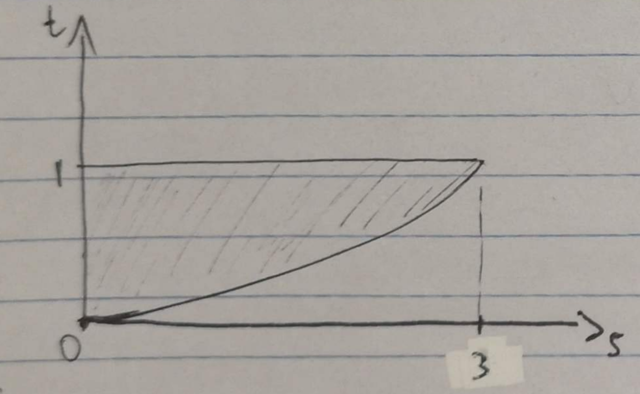
$\Rightarrow T = 0{,}54W$

Πρέπει $\begin{cases} T_{\Gamma E} \leq 1{,}5 \\ T \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}92T \leq 1{,}5 \\ T \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \leq 0{,}78 \\ T \leq 1 \end{cases} \Rightarrow T \leq 0{,}78\,kN \Rightarrow 0{,}54W \leq 0{,}78 \Rightarrow W \leq 1{,}45\,kN$

Άρα το μέγιστο επιτρεπτό βάρος είναι $W_{max} = 1{,}45\,kN$

Άσκηση 2





$$Q_t = \iint s\,dA = \iint s\,ds\,dt = \int_0^3 s\left(\int_{\frac{s^2}{9}}^{1} dt\right) ds = \int_0^3 s[t]_{\frac{s^2}{9}}^{1} ds =$$

$$= \int_0^3 s\left(1 - \frac{s^2}{9}\right) ds = \int_0^3 \left(s - \frac{s^3}{9}\right) ds = \left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{36}\right]_0^3 = \frac{9}{2} - \frac{81}{36} =$$

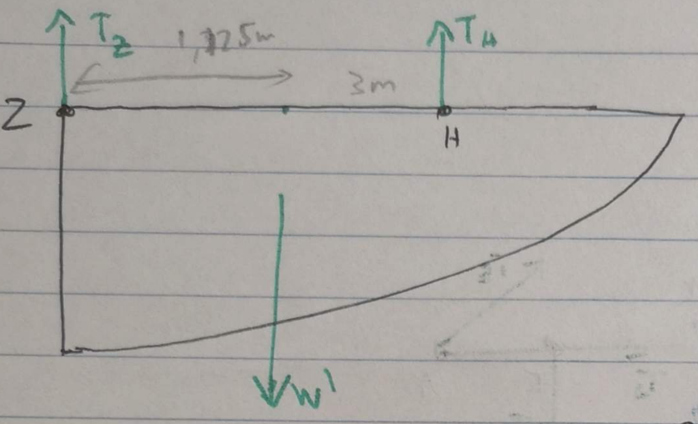
$$= 2{,}25\, m^3$$

$$A = 3 - \int_0^3 \frac{s^2}{9} ds = 3 - \left[\frac{s^3}{27}\right]_0^3 = 3 - 1 = 2\, m^2$$

Άρα το κέντρο της επιφάνειας είναι σε απόσταση $s = \frac{Q_t}{A} = \frac{2{,}25}{2} = 1{,}125\, m$,

άρα $x_s = 2{,}125\, m$

Κάνω το ΔΕΣ του αναρτημένου σώματος



$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_Z + T_H = W'$
$\Sigma M_Z = 0 \Rightarrow T_H \cdot 2 = W' \cdot 1{,}125 \Rightarrow W' = 1{,}78\, T_H$ $\Big\}\ T_Z = 0{,}78\, T_H$

$W' = 1{,}78\, T_H \Rightarrow \gamma V = 1{,}78\, T_H \Rightarrow \gamma = \dfrac{1{,}78}{2\cdot 10^{-2}\cdot 2}\, T_H \Rightarrow \gamma = 44{,}5\, T_H \Rightarrow T_H = 0{,}022\,\gamma$

Πρέπει $\begin{cases} T_Z \leq 2 \Rightarrow 0{,}78\, T_H \leq 2 \Rightarrow T_H \leq 2{,}56 \\ T_H \leq 2 \end{cases}\Big\}\ T_H \leq 2 \Rightarrow 0{,}022\,\gamma \leq 2 \Rightarrow \gamma \leq 90{,}91\ \dfrac{kN}{m^3}$

Για $\gamma = 90{,}91\ \dfrac{kN}{m^3}$ έχω $W' = 90{,}91 \cdot 2\cdot 10^{-2} = 1{,}82\,kN$

Άρα $T_H = \dfrac{1{,}82}{1{,}78} = 1{,}02\,kN \Rightarrow T_Z = 0{,}8\,kN$

~~[illegible]~~

Έχω:

$A(0,4,0)$	$\vec{A\Delta} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow \lvert\vec{A\Delta}\rvert = 4{,}9\,m \Rightarrow \hat{A\Delta} = 0{,}41\hat{i} - 0{,}82\hat{j} + 0{,}41\hat{k}$
$\Delta(2,0,2)$	$\vec{AE} = -2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow \lvert\vec{AE}\rvert = 4{,}9\,m \Rightarrow \hat{AE} = -0{,}41\hat{i} - 0{,}82\hat{j} + 0{,}41\hat{k}$
$E(-2,0,2)$	$\vec{OA} = 0\hat{i} + 4\hat{j} + 0\hat{k}$
$B(0,1,0)$	$\vec{OB} = 0\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k}$
$\Gamma(0,3,0)$	$\vec{O\Gamma} = 0\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k}$
$O(0,0,0)$	$\vec{OK} = 0\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$
$K(0,2,0)$	

Άρα έχω: $\vec{T}_\Delta = 0{,}41 T_\Delta \hat{i} - 0{,}82 T_\Delta \hat{j} + 0{,}41 T_\Delta \hat{k}$ kN

$\vec{T}_E = 0{,}41 T_E \hat{i} - 0{,}82 T_E \hat{j} + 0{,}41 T_E \hat{k}$ kN

$\vec{O} = O_x \hat{i} + O_y \hat{j} + O_z \hat{k}$ kN

$\vec{T}_Z = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 0{,}8\hat{k}$ kN

$\vec{T}_H = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 1{,}02\hat{k}$ kN

$\vec{W} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 1\hat{k}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 0{,}41(T_\Delta + T_E) + O_x = 0 \quad (1)$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow O_y - 0{,}82(T_\Delta + T_E) = 0 \quad (2)$

$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow 0{,}41(T_\Delta + T_E) + O_z - 2{,}82 = 0 \quad (3)$

$\Sigma \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{OB} \times \vec{T}_Z + \vec{O\Gamma} \times \vec{T}_H + \vec{OA} \times \vec{T}_E + \vec{OA} \times \vec{T}_\Delta + \vec{OK} \times \vec{W} = \vec{OB} \times \vec{T}_Z + \vec{O\Gamma} \times \vec{T}_H + \vec{OA}(\vec{T}_E + \vec{T}_\Delta) + \vec{OK} \times \vec{W} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}02 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0{,}41(T_\Delta - T_E) & -0{,}82(T_\Delta + T_E) & 0{,}41(T_\Delta + T_E) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$\Rightarrow (-0{,}8\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) + (-3{,}06\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) + (1{,}64(T_\Delta + T_E)\hat{i} + 0\hat{j} - 1{,}64(T_\Delta - T_E)\hat{k}) + (-2\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k})$

$\Rightarrow \left(1{,}64(T_\Delta + T_E) - 3{,}86\right)\hat{i} + 0\hat{j} + 1{,}64(T_\Delta - T_E)\hat{k} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1{,}64(T_\Delta + T_E) - 5{,}86 = 0 \\ -1{,}64(T_\Delta - T_E) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_\Delta + T_E = 3{,}57 \\ T_\Delta = T_E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2T_\Delta = 3{,}57 \\ T_\Delta = T_E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_\Delta = 1{,}79 = T_E \text{ kN} \\ T_\Delta = T_E \end{cases}$$

Άρα
$(1) \Rightarrow O_x = -0{,}41 \cdot 2T_\Delta = -1{,}46$ kN

$(2) \Rightarrow O_y = 0{,}82 \cdot 2T_\Delta = 2{,}93$ kN

$(3) \Rightarrow O_z = 2{,}82 - 0{,}41 \cdot 2T_\Delta = 1{,}36$ kN

Άσκηση 3

Η δύναμη που ασκεί το σχοινί έχει την διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\Theta} = \vec{B\Gamma} + \vec{BH}$ και έχει μέτρο T.

$O(0,0,0)$
$A(0,0,1{,}2)$
$B(0{,}8,0,1{,}2)$
$C(1{,}6,0,1{,}2)$
$D(1{,}6,0,0)$
$\Gamma(0,1{,}48,0{,}56)$
$H(1{,}4,1{,}2,0)$

$\vec{B\Gamma} = -0{,}8\hat{i} + 1{,}48\hat{j} - 0{,}64\hat{k}$
$\vec{BH} = 0{,}6\hat{i} + 1{,}2\hat{j} - 1{,}2\hat{k}$

$\vec{\Theta} = -0{,}2\hat{i} + 2{,}68\hat{j} - 1{,}84\hat{k} \Rightarrow |\vec{\Theta}| = 3{,}26\,m \Rightarrow$
$\Rightarrow \hat{\Theta} = -0{,}06\hat{i} + 0{,}82\hat{j} - 0{,}56\hat{k}$

Άρα έχω

$\vec{T} = -0{,}06T\hat{i} + 0{,}82T\hat{j} - 0{,}56T\hat{k}$
$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$
$\vec{D} = D_x\hat{i} + D_y\hat{j} + D_z\hat{k}$
$\vec{P} = 0\hat{i} - 10\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{AD} = 1{,}6\hat{i} + 0\hat{j} - 1{,}2\hat{k}$
$\vec{AB} = 0{,}8\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$
$\vec{AC} = 1{,}6\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x + D_x - 0{,}06T = 0$
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + D_y + 0{,}82T = 0$
$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow A_z + D_z - 0{,}56T = 0$

$\Sigma \vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{T} + \vec{AC} \times \vec{P} + \vec{AD} \times \vec{D} = \vec{0} \Rightarrow$

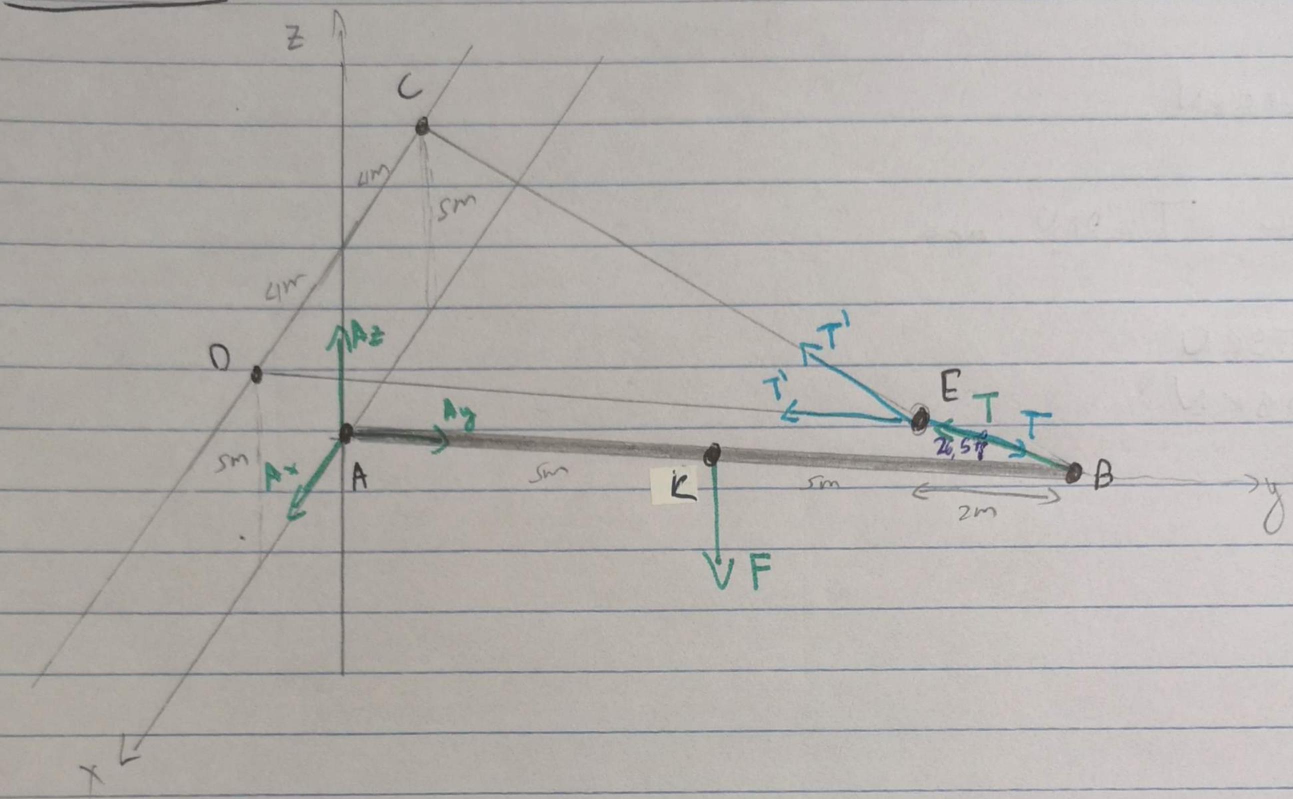
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ -0{,}06T & 0{,}82T & -0{,}56T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1{,}6 & 0 & -1{,}2 \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0\hat{i} + 0{,}45T\hat{j} - 0{,}66T\hat{k}) + (0\hat{i} + 0\hat{j} - 16\hat{k}) + (1{,}2D_y\hat{i} - (1{,}6D_z + 1{,}2D_x)\hat{j} + 1{,}6D_y\hat{k}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 1{,}2D_y\hat{i} + [0{,}45T - (1{,}6D_z + 1{,}2D_x)]\hat{j} + (1{,}6D_y - 0{,}66T - 16)\hat{k} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1{,}2D_y = 0 \\ 0{,}45T = 1{,}6D_z + 1{,}2D_x \\ 1{,}6D_y - 0{,}66T - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_y = 0 \\ 1{,}6D_z + 1{,}2D_x = 10{,}91 \\ T = 24{,}24\,kN \end{cases}$$

Άσκηση 4



$\tan(26{,}57) = \dfrac{y_E}{2} \Rightarrow y_E = \dfrac{1}{2}\cdot 2 = 1$

Άρα έχω:

$A(0,0,0)$	$\vec{AB} = 0\hat{i} + 10\hat{j} + 0\hat{k}$
$B(0,10,0)$	$\vec{AK} = 0\hat{i} + 5\hat{j} + 0\hat{k}$
$C(-4,0,5)$	$\vec{BE} = 0\hat{i} - 2\hat{j} + 1\hat{k} \Rightarrow \lvert\vec{BE}\rvert = 2{,}24m \Rightarrow \hat{BE} = 0\hat{i} - 0{,}89\hat{j} + 0{,}45\hat{k}$
$D(4,0,5)$	$\vec{EC} = -4\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k} \Rightarrow \lvert\vec{EC}\rvert = 9{,}8m \Rightarrow \hat{EC} = -0{,}41\hat{i} - 0{,}82\hat{j} + 0{,}41\hat{k}$
$E(0,8,1)$	$\vec{ED} = 4\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k} \Rightarrow \lvert\vec{ED}\rvert = 9{,}8m \Rightarrow \hat{ED} = 0{,}41\hat{i} - 0{,}82\hat{j} + 0{,}41\hat{k}$
$K(0,5,0)$	

Άρα $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$	$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0 \quad (1)$
$\vec{F} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - F\hat{k}$	$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 0{,}89T = 0 \quad (2)$
$\vec{T} = 0\hat{i} - 0{,}89T\hat{j} + 0{,}45T\hat{k}$	$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow A_z - F + 0{,}45T = 0 \quad (3)$

$\Sigma \vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{AK}\times\vec{F} + \vec{AB}\times\vec{T} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & -0{,}89T & +0{,}45T \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow (-5F\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) + (4{,}5T\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) = \vec{0} \Rightarrow 4{,}5T = 5F \Rightarrow T = \frac{10F}{9} \quad (4)$$

Έχω $2T' = T$. Πρέπει $2T' \leq 2 \Rightarrow T \leq 2 \Rightarrow \frac{10}{9} F \leq 2 \Rightarrow F \leq 1,8kN$

Άρα $F_{max} = 1,8kN$.

Για F_{max} έχω $T = 2kN$ άρα

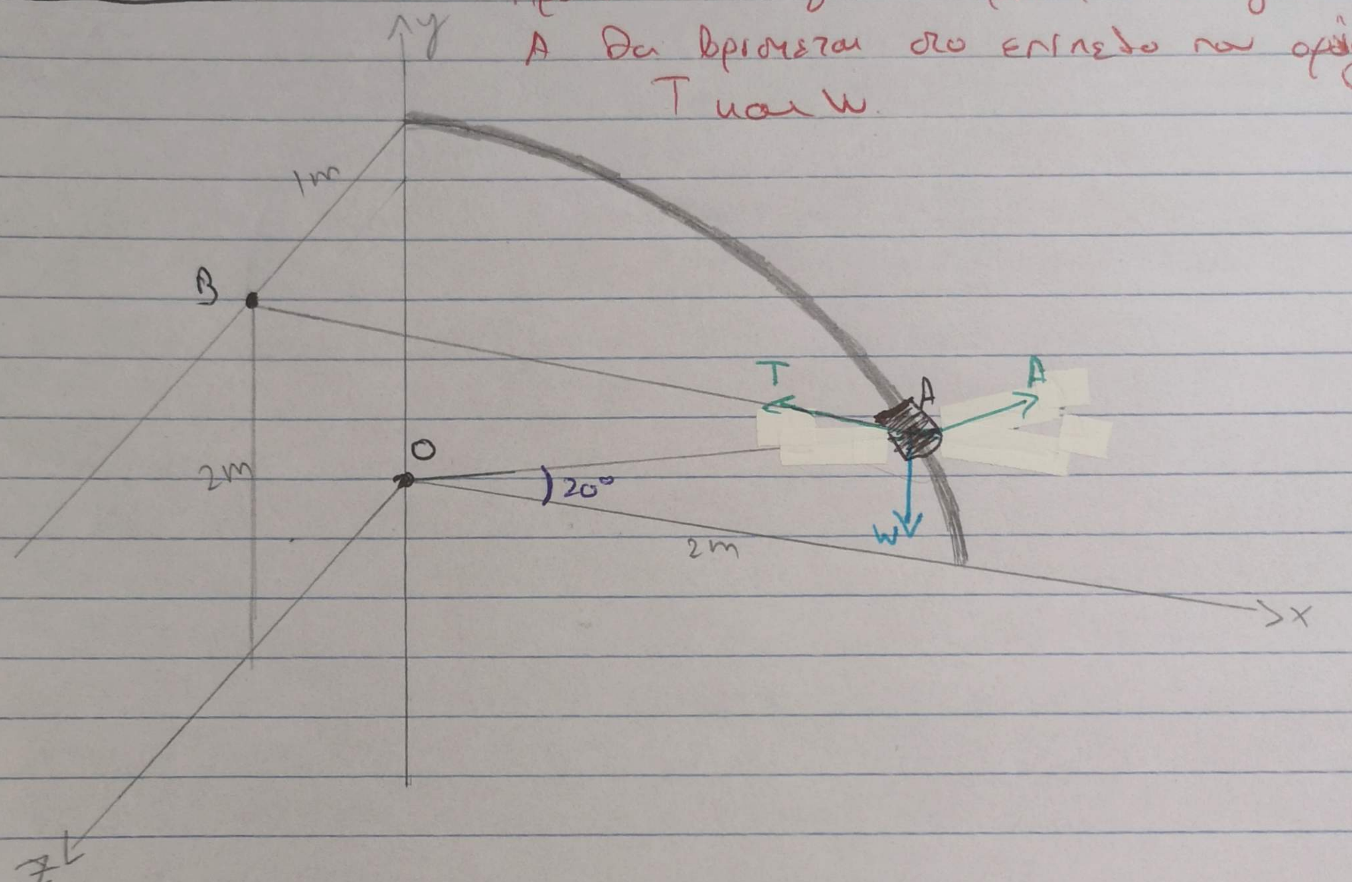
$(2) \Rightarrow A_y = 1,78kN$

$(3) \Rightarrow A_z = 0,9kN$

'Αλυση.

Άσκηση 5

Πρέπει να εισάγω στο πρόβλημα μια γωνία. Η A θα βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν οι T και W.



$\tan(20^\circ) = \frac{y_A}{2} \Rightarrow y_A = 0,73\,m$ | $x_A = 2\cos(20^\circ) = 1,88\,m$

Έχω $O(0,0,0)$, $A(1,88,\,0,73,\,0)$, $B(0,2,1)$

$\vec{AB} = -1,88\hat{i} + 1,27\hat{j} + 1\hat{k} \Rightarrow |\vec{AB}| = 2,48 \Rightarrow \hat{AB} = -0,76\hat{i} + 0,51\hat{j} + 0,4\hat{k}$

Άρα $\hat{BA} = 0,76\hat{i} - 0,51\hat{j} - 0,4\hat{k}$

$\vec{OA} = 1,88\hat{i} + 0,73\hat{j} + 0\hat{k} \rightarrow |\vec{OA}| = 2,02 \Rightarrow \hat{OA} = 0,93\hat{i} + 0,36\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{O} = AB - 1\hat{j} \Rightarrow \vec{O} = -1,88\hat{i} + 0,27\hat{j} + 1\hat{k} \Rightarrow |\vec{O}| = 2,15\,m \Rightarrow \hat{O} = -0,87\hat{i} + 0,13\hat{j} + 0,47\hat{k}$

$\vec{T} = -0,76T\hat{i} + 0,51T\hat{j} + 0,4T\hat{k}$ kN

$\vec{A} = 0,87A\hat{i} - 0,13A\hat{j} - 0,47A\hat{k}$

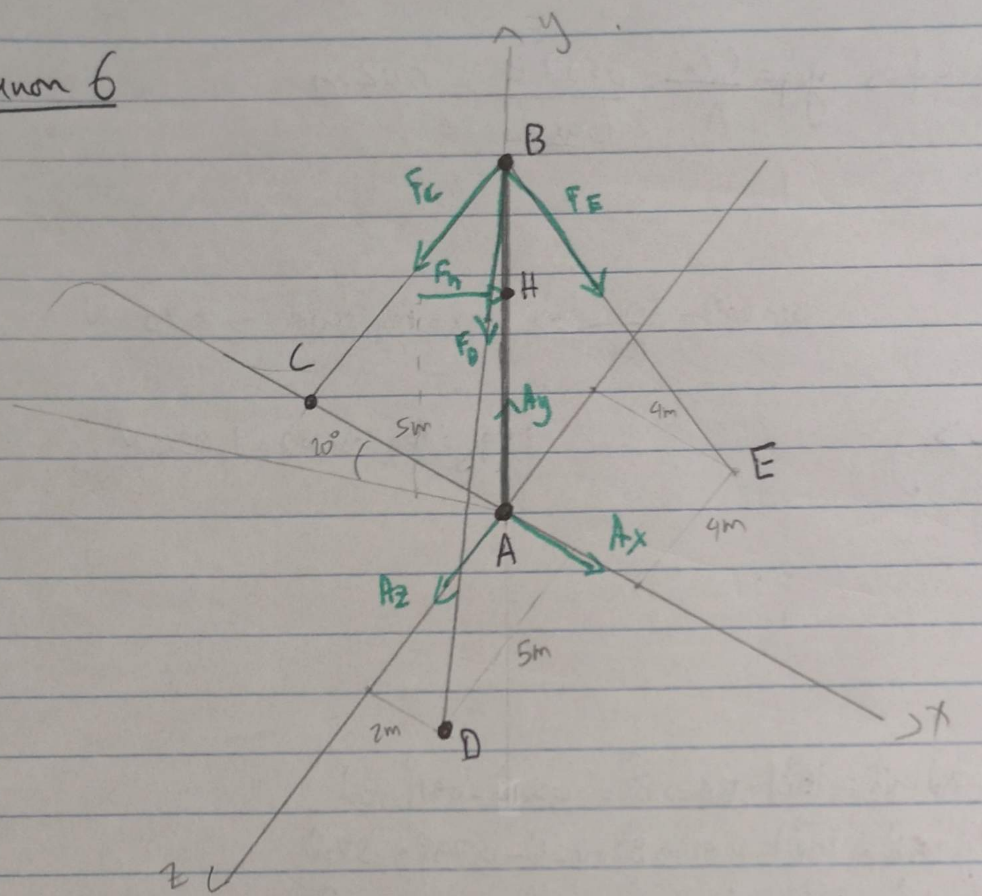
$\vec{W} = 0\hat{i} - 1\hat{j} + 0\hat{k}$ kN

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 0,87A - 0,76T = 0$

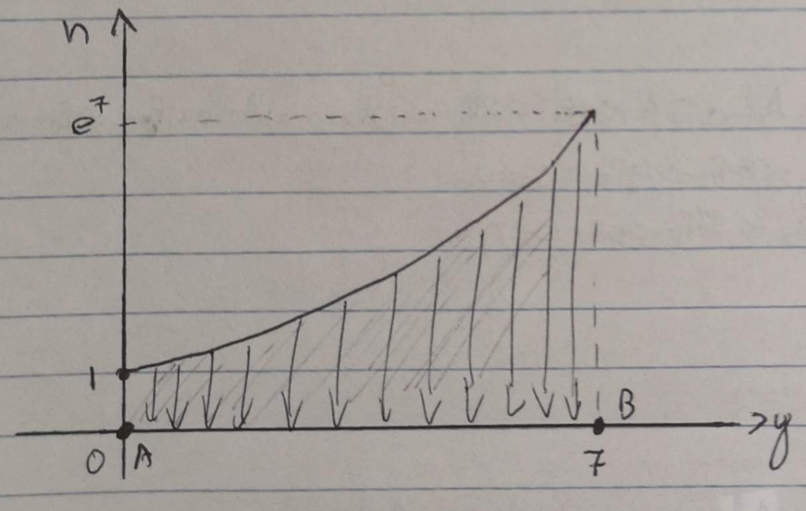
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 0,51T - 0,13A = 1$

$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow 0,4T - 0,47A = 0$

Άσκηση 6



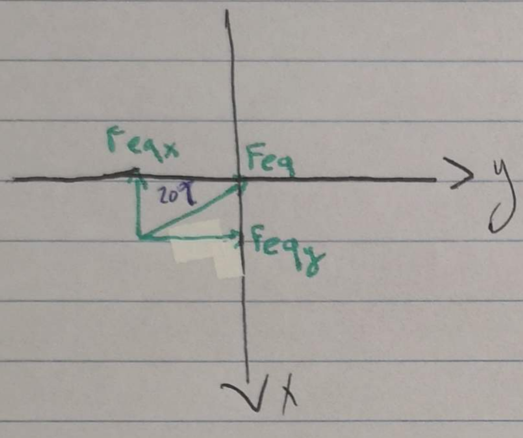
$F_E = 2kN$



$$F_{eq} = \int_0^7 e^y\,dy = e^7 - 1 = 1096N = 1{,}096kN$$

$$Q_n = \iint y\,dA = \iint y\,dy\,dn = \int_0^7 y\left(\int_0^{e^y} dn\right)dy = \int_0^7 ye^y\,dy = \left[ye^y\right]_0^7 - \int_0^7 e^y\,dy = \left[e^y(y-1)\right]_0^7 = 6e^7 = 6579{,}8\ m^3$$

Άρα η F_{eq} ασκείται σε ύψος $y_{eq} = \frac{Q_n}{A} = \frac{6597,8}{1095,63} = 6,02m$



$\sin(20°) = \frac{F_{eqx}}{F_{eq}} \Rightarrow F_{eqx} = F_{eq} \cdot \sin(20°) = 0,375 \, kN$

$F_{eqy} = F_{eq} \cos(20°) = 1,03 \, kN$

Έχω: $A(0,0,0)$, $B(0,7,0)$, $C(-5,0,0)$, $D(2,0,5)$, $E(4,0,-4)$, $H(0,6,02,0)$

$\vec{BC} = -5\hat{i} - 7\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{BC}| = 8,6 \Rightarrow \hat{BC} = -0,58\hat{i} - 0,81\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{BD} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k} \Rightarrow |\vec{BD}| = 8,83 \Rightarrow \hat{BD} = 0,23\hat{i} - 0,79\hat{j} + 0,57\hat{k}$

$\vec{BE} = 4\hat{i} - 7\hat{j} - 4\hat{k} \Rightarrow |\vec{BE}| = 9 \Rightarrow \hat{BE} = 0,44\hat{i} - 0,78\hat{j} - 0,44\hat{k}$

$\vec{AB} = 0\hat{i} + 7\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{AH} = 0\hat{i} + 6,02\hat{j} + 0\hat{k}$

Έχω: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{F_{eq}} = -0,375\hat{i} + 1,03\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{F_E} = 0,88\hat{i} - 1,56\hat{j} - 0,88\hat{k}$

$\vec{F_C} = -0,58F_C\hat{i} - 0,81F_C\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{F_D} = 0,23F_D\hat{i} - 0,79F_D\hat{j} + 0,57F_D\hat{k}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x - 0,375 + 0,88 - 0,58F_C + 0,23F_D = 0 \Rightarrow A_x + 0,23F_C - 0,58F_D - 0,51 = 0 \, (1)$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 0,81F_C - 0,79F_D - 0,53 = 0 \quad (2)$

$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow A_z + 0,57F_D - 0,88 = 0 \quad (3)$

$\Sigma \vec{M_A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} \times (\vec{F_E} + \vec{F_C} + \vec{F_D}) + \vec{AH} \times \vec{F_{eq}} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 7 & 0 \\ 0,88-0,58F_C-0,23F_D & -(1,56+0,81F_C+0,79F_D) & 0,57F_D-0,88 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 6,02 & 0 \\ -0,375 & 1,03 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (3,99F_D - 6,16)\hat{i} + 0\hat{j} + (4,06F_C + 1,61F_D - 6,16)\hat{k} + 0\hat{i} + 0\hat{j} + 2,26\hat{k} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3{,}99 F_D - 6{,}16)\hat{i} + 0\hat{j} + (4{,}06 F_C + 1{,}61 F_D - 3{,}9)\hat{k} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3{,}99 F_D - 6{,}16 = 0 \\ 4{,}06 F_C + 1{,}61 F_D - 3{,}9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_D = 1{,}54 \text{ kN} \\ F_C = 0{,}35 \text{ kN} \end{cases}$

Apa (1) $\Rightarrow A_x = 1{,}32$ kN

(2) $\Rightarrow A_y = 2{,}03$ kN

(3) $\Rightarrow A_z = 0$ kN