Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το διορθώσω: Georgepan

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής

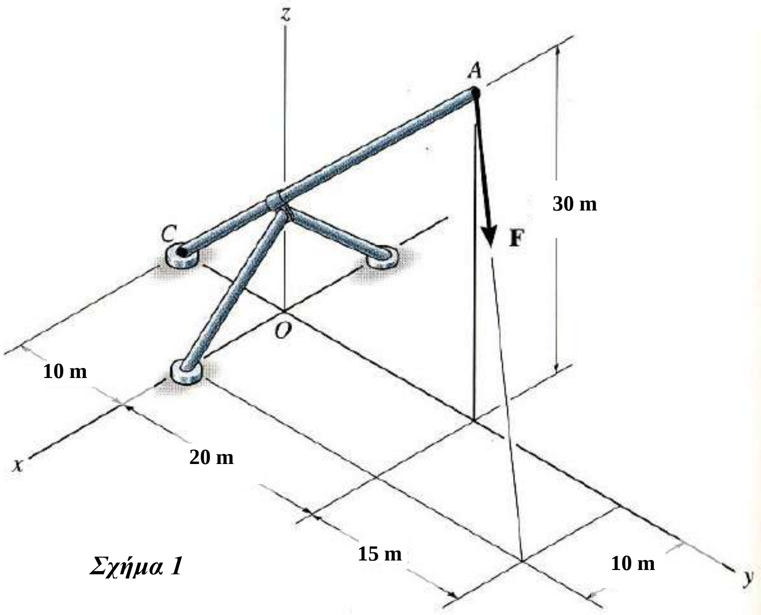
Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

8η σειρά ασκήσεων: Αναγωγή συστημάτων δυνάμεων και ροπών

Άσκηση 1

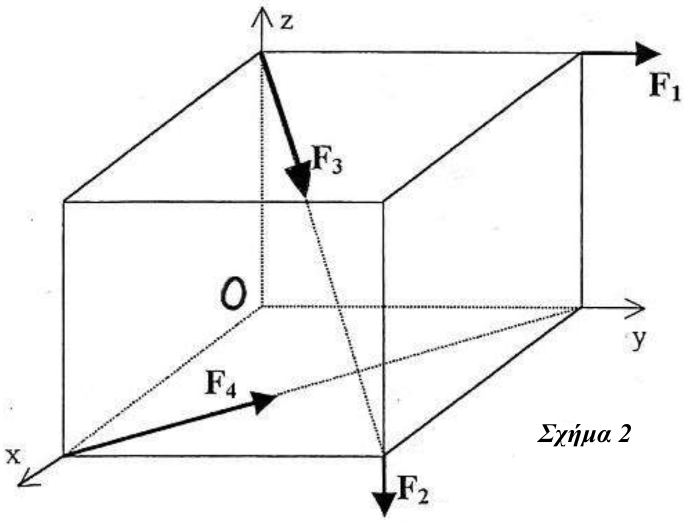
Αντικαταστήστε τη δύναμη **F** του Σχ.1, που έχει μέτρο 4kN και δρα στο σημείο A, με μια ισοδύναμη δύναμη και μια ροπή στο σημείο C.



Σχήμα 1

Άσκηση 2

Στις κορυφές κύβου ακμής 1 m ασκούνται οι τέσσερεις δυνάμεις που φαίνονται στο Σχ. 2. Τα μέτρα τους είναι F_1=400 N, F_2=400 N, $F_3=400\sqrt{3}$ N και $F_4=400\sqrt{2}$ N. Να αναχθεί το σύστημα στο απλούστερο δυνατό.



Σχήμα 2

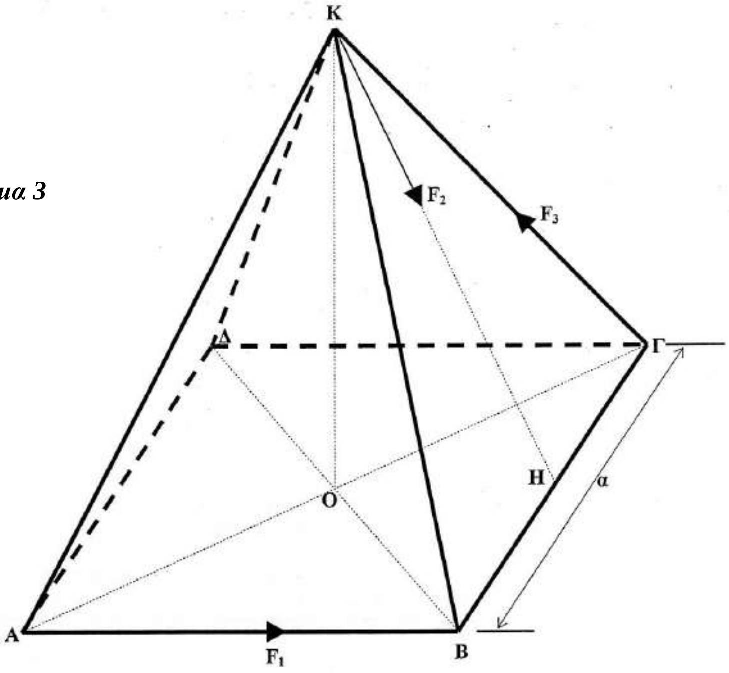
Άσκηση 3

Η τετραγωνικής βάσης (α=4 m) κανονική πυραμίδα ΚΑΒΓΔ του Σχ.3 έχει ύψος ΟΚ=6 m. Στην πυραμίδα δρουν τρεις δυνάμεις. Η $\mathbf{F_1}$ μέτρου 4 N κατά μήκος της ακμής ΑΒ, η $\mathbf{F_2}$ μέτρου 3 N κατά μήκος της διαμέσου ΚΗ του τριγώνου ΚΒΓ και η $\mathbf{F_3}$ μέτρου 3 N κατά μήκος της ακμής ΓΚ.

1. Να αναχθεί το σύστημα των τριών δυνάμεων $\{\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{F_3}\}$ σε σύστημα μίας δύναμης και μίας ροπής $\{\mathbf{R}, \mathbf{\Sigma M}\}$ στο σημείο Κ.

2. Να υπολογισθεί η γωνία μεταξύ των **R** και **ΣΜ**.
3. Να υπολογισθούν οι συνιστώσες $\mathbf{R_n}$ και $\mathbf{R_t}$ της **R** που είναι αντίστοιχα κάθετη και εφαπτομενική στο επίπεδο (ΑΔΚ).
4. Να υπολογισθεί η ροπή της **R** ως προς την ευθεία ΑΜ (Μ το μέσο του ύψους ΚΟ της πυραμίδας).

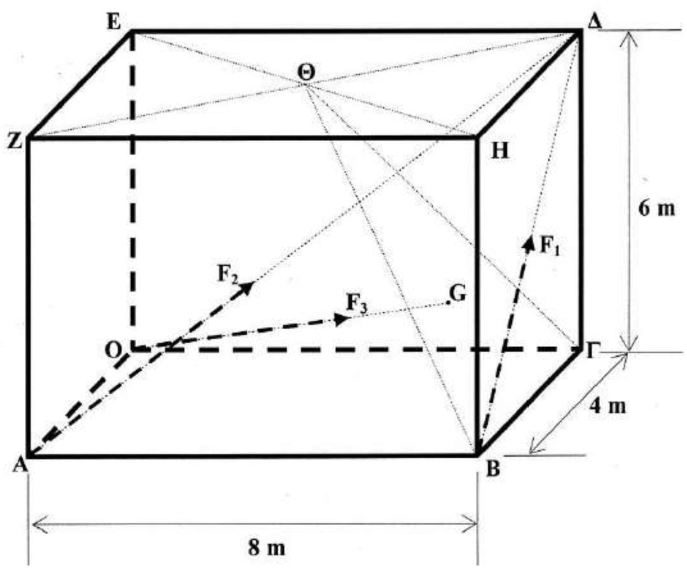
Σχήμα 3



Άσκηση 4

Σχήμα 4

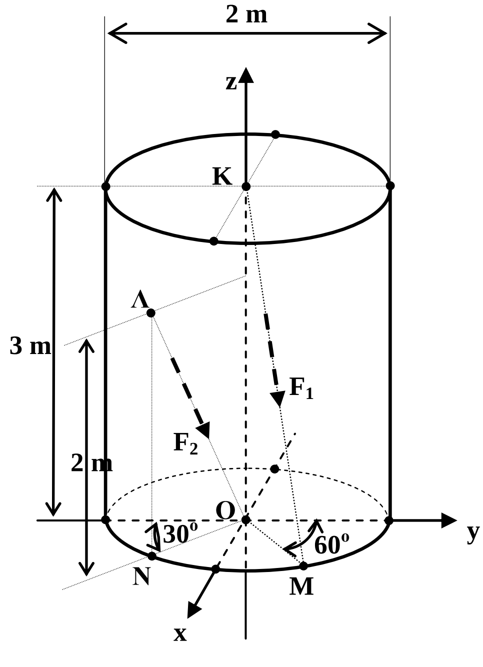
Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του Σχ.4 δρουν τρεις δυνάμεις. Η $\mathbf{F_1}$ μέτρου 2 kN κατά μήκος της διαγωνίου ΒΔ, η $\mathbf{F_2}$ μέτρου 4 kN κατά μήκος της κυρίας διαγωνίου ΑΔ και η $\mathbf{F_3}$ μέτρου 3 kN κατά μήκος της OG (G το γεωμετρικό κέντρο του τριγώνου ΘΒΓ).



1. Να αναχθεί το σύστημα των δυνάμεων {$\mathbf{F_1}$,$\mathbf{F_2}$,$\mathbf{F_3}$} σε σύστημα δύναμης και ροπής {**R**,**ΣΜ**} στο σημείο Ο.
2. Να υπολογισθεί η γωνία μεταξύ των **R** και **ΣΜ**.
3. Να υπολογισθεί η συνιστώσα της **ΣΜ** που είναι παράλληλη με την **R**.
4. Να υπολογισθεί η συνιστώσα της **R** που είναι κάθετη στο επίπεδο (ΟΔΗ).
5. Να υπολογισθεί η ροπή της **R** ως προς την ευθεία BG.

Άσκηση 5

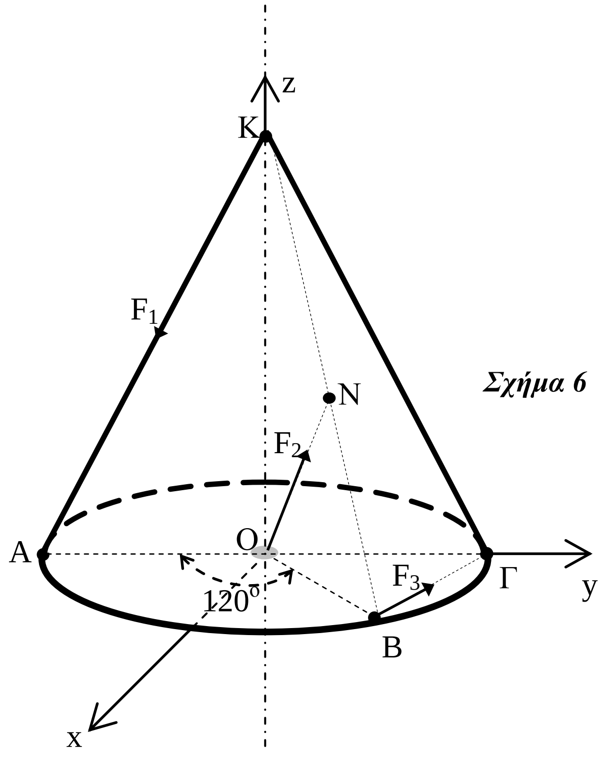
Να αναχθεί το σύστημα των δύο δυνάμεων του παραπλεύρως Σχ.5 (αμφότερες μέτρου 4 kN) στο απλούστερο δυνατόν.



Άσκηση 6

Να αναχθεί το σύστημα των τριών δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (Σχ. 6), οι οποίες έχουν μέτρα 6, 3, 2 kN, αντιστοίχως, στο απλούστερο δυνατόν.

Δίνεται: Ακτίνα βάσεως κώνου 2 m, ύψος κώνου 4 m, NK=NB.



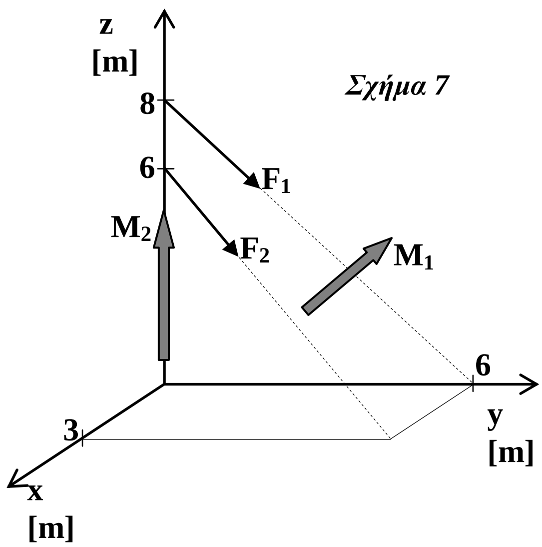
Σχήμα 6

Άσκηση 7

Δίνεται σύστημα δύο δυνάμεων $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ (μέτρων 4 και 3 kN, αντιστοίχως) και δύο ροπών $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ (μέτρων 3 και 2 kNm, αντιστοίχως). Ο φορέας της $\mathbf{M_1}$ (θετικών συνιστωσών) σχηματίζει ίσες γωνίες και με τους τρεις άξονες του συστήματος αναφοράς του Σχ.7.

α. Να αναχθεί το σύστημα στο απλούστερο δυνατό ισοδύναμο.

β. Να προσδιορισθεί το σημείο του επιπέδου (xy) στο οποίο θα ασκείται η συνισταμένη του ως άνω αναχθέντος συστήματος.



Σχήμα 7

8η Σειρά ασκήσεων: Αναγωγή συστημάτων δυνάμεων και ροπών στον χώρο

Άσκηση 1

$|\vec{F}| = 4kN$

Σχήμα άσκησης 2 σειράς 6.

Έχω $\hat{AB} = 0,29\hat{i} + 0,43\hat{j} - 0,87\hat{k}$

Άρα $\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \hat{AB} = 4(0,29\hat{i} + 0,43\hat{j} - 0,87\hat{k}) = 1,16\hat{i} + 1,72\hat{j} - 3,48\hat{k}$ kN

$$\left.\begin{array}{l} C(0,-10,0) \\ A(0,20,30) \end{array}\right\} \vec{CA} = 0\hat{i} + 30\hat{j} + 30\hat{k} \text{ m}$$

$$\text{Άρα } \vec{M}_C^{\vec{F}} = \vec{CA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 30 & 30 \\ 1,16 & 1,72 & -3,48 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 30 & 30 \\ 1,72 & -3,48 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & 30 \\ 1,16 & -3,48 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 30 \\ 1,16 & 1,72 \end{vmatrix} =$$

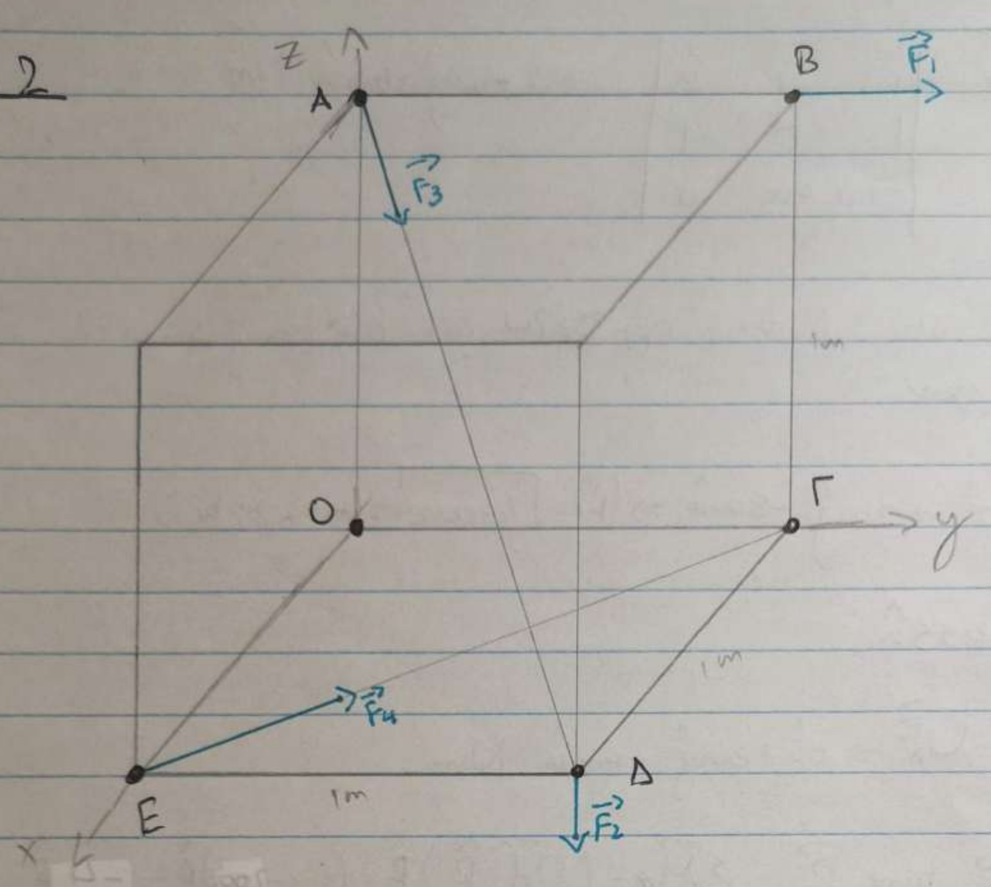
$$= (-104,4 - 51,6)\hat{i} - (-34,8)\hat{j} + (-34,8)\hat{k} = -156\hat{i} + 34,8\hat{j} - 34,8\hat{k} \text{ kNm}$$

Άρα μεταφέροντας την δύναμη $\vec{F}$ στο σημείο C, προσθέτω την ροπή της ως προς αυτό από την αρχική της θέση

Τελικά έχω το σύστημα:

$\vec{F}_C = 1,16\hat{i} + 1,72\hat{j} - 3,48\hat{k}$, $\vec{M}_C^{\vec{F}} = -156\hat{i} + 34,8\hat{j} - 34,8\hat{k}$

Άσκηση 2



$|\vec{F_1}| = 400\,N$

$|\vec{F_2}| = 400\,N$

$|\vec{F_3}| = 400\sqrt{3}\,N$

$|\vec{F_4}| = 400\sqrt{2}\,N$

Έχω: $O(0,0,0)$, $A(0,0,1)$, $B(0,1,1)$, $\Gamma(0,1,0)$, $\Delta(1,1,0)$, $E(1,0,0)$

$\vec{E\Gamma} = -1\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{E\Gamma}| = \sqrt{2} \Rightarrow \hat{E\Gamma} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + 0$ m

Άρα $\vec{F_4} = |\vec{F_4}| \cdot \hat{E\Gamma} = -\frac{400\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{400\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\hat{j} + 0\hat{k} = -400\hat{i} + 400\hat{j} + 0\hat{k}$ N

$\vec{A\Delta} = 1\hat{i} + 1\hat{j} - 1\hat{k} \Rightarrow |\vec{A\Delta}| = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{A\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$ m

Άρα $\vec{F_3} = |\vec{F_3}| \cdot \hat{A\Delta} = 400\hat{i} + 400\hat{j} - 400\hat{k}$ N

Επίσης $\vec{F_2} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 400\hat{k}$ N και $\vec{F_1} = 0\hat{i} + 400\hat{j} + 0\hat{k}$ N

$\vec{AE} = 1\hat{i} + 0\hat{j} - 1\hat{k}$

Άρα $\vec{M_A^{F_2}} = \vec{A\Delta} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -400 \end{vmatrix} = -400\hat{i} + 400\hat{j} + 0\hat{k}$ Nm και $\overrightarrow{M_A^{\vec{F_4}}} = \overrightarrow{AE} \times \vec{F_4} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -400 & 400 & 0 \end{vmatrix} = 400\hat{i} + 400\hat{j} + 400\hat{k}$ Nm

Μετακινώ τις $\vec{F_2}, \vec{F_4}$ στο A και προσθέτω στο σύστημα τις ροπές τους ως προς αυτό. Άρα έχω

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = 0\hat{i} + 1200\hat{j} - 800\hat{k} \Rightarrow |\vec{R}| = \sqrt{2080000} = 1442{,}22 N \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{R} = 0\hat{i} + 0{,}83\hat{j} - 0{,}55\hat{k}$

και $\Sigma\vec{M} = \overrightarrow{M_A^{\vec{F_2}}} + \overrightarrow{M_A^{\vec{F_4}}} = 0\hat{i} + 800\hat{j} + 400\hat{k}$ Nm

Η προβολή της $\Sigma\vec{M}$ στην $\vec{R}$: $\Sigma\vec{M}_{\parallel} = (\Sigma\vec{M} \cdot \hat{R})\hat{R} = (664 - 220)\hat{R} = 444\hat{R} =$

$= 444(0\hat{i} + 0{,}83\hat{j} - 0{,}55\hat{k}) = 0\hat{i} + 368{,}52\hat{j} - 244{,}2\hat{k}$ Nm

Η συνιστώσα της ροπής κάθετη στην $\vec{R}$: $\Sigma\vec{M}_{\perp} = \Sigma\vec{M} - \Sigma\vec{M}_{\parallel} = 0\hat{i} + 431{,}48\hat{j} + 644{,}2\hat{k}$ Nm

Ψάχνω σημείο $K(x,y,z)$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{M_K^{\vec{R}}} = 0\hat{i} - 431{,}48\hat{j} - 644{,}2\hat{k}$ Nm

$\overrightarrow{KA} = -x\hat{i} - y\hat{j} + (1-z)\hat{k}$

$\overrightarrow{M_K^{R}} = \overrightarrow{KA} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -x & -y & 1-z \\ 0 & 1200 & -800 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y & 1-z \\ 1200 & -800 \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} -x & 1-z \\ 0 & -800 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} -x & -y \\ 0 & 1200 \end{vmatrix}\hat{k} =$

$= (800y + (z-1)1200)\hat{i} - (800x)\hat{j} + (-1200x)\hat{k} = (800y + 1200z - 1200)\hat{i} - 800x\hat{j} - 1200x\hat{k}$

Άρα πρέπει:

$$\begin{cases} 800y + 1200z - 1200 = 0 \\ -900x = -431,48 \\ -1200x = -644,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1200}{800}z + \frac{1200}{800} \\ x = 0,54 \\ x = 0,54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1,5z + 1,5 \\ x = 0,54 \\ x = 0,54 \end{cases}$$ δεκτό

Για $y = 0 \Rightarrow 1,5z = 1,5 \Leftrightarrow z = 1$ δεκτό

Άρα το σημείο Κ είναι το $K(0.54,\ 1.5-1.5z,\ z)$

Άρα $\vec{KA} = -0,54\hat{i} + (1.5z - 1.5)\hat{j} + (1-z)\hat{k}$

Πρέπει $\vec{KA} \cdot \Sigma\vec{M}_{\perp} = 0 \Leftrightarrow [431,48(1,5z - 1,5) + 644(1-z)] = 0 \Leftrightarrow$

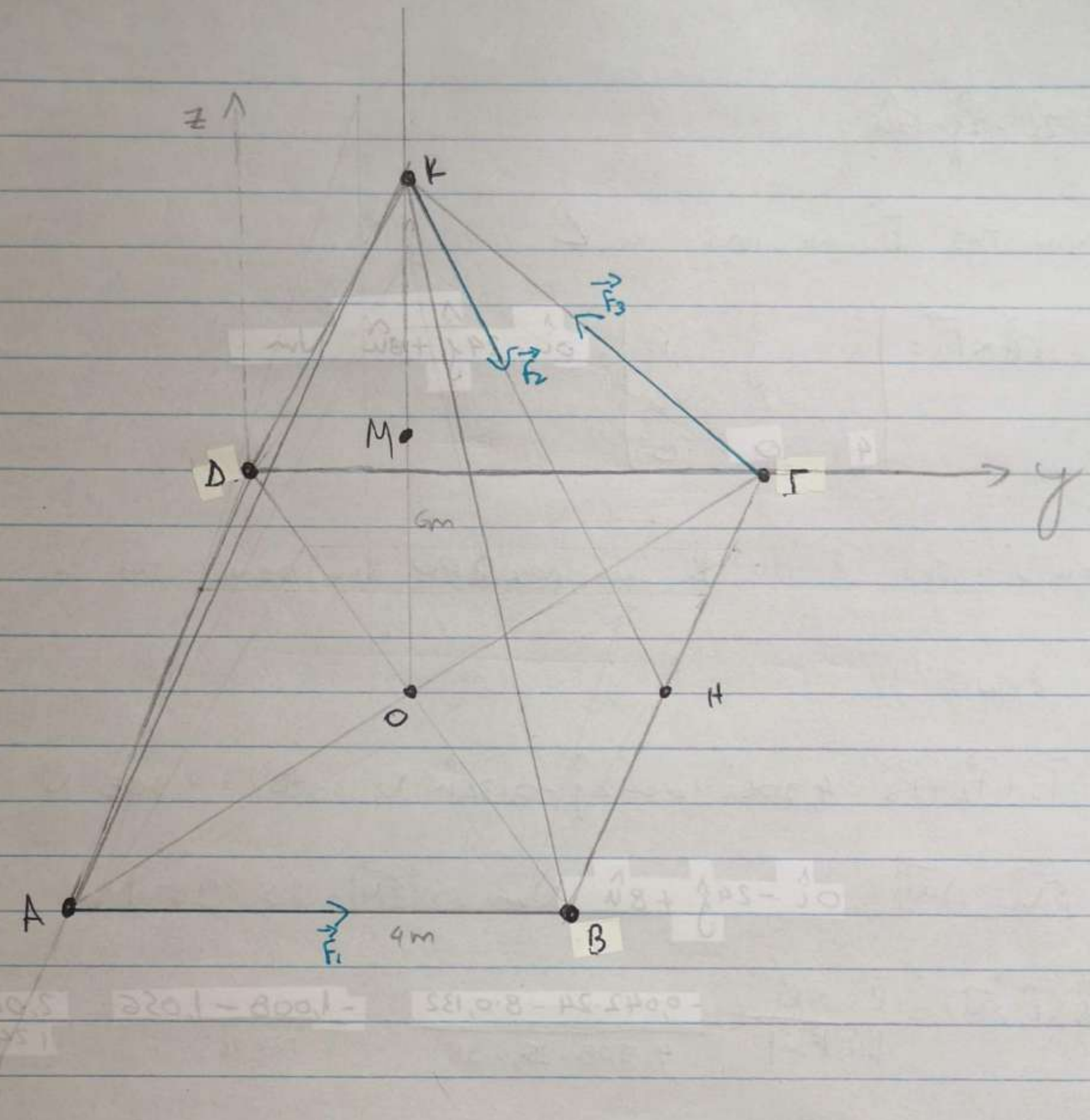
$\Leftrightarrow 647,22z - 647,22 + 644 - 644z = 0 \Leftrightarrow 3,22z = 3,22 \Leftrightarrow z = 1 \Rightarrow y = 0.$

Άρα $K(0.54, 0, 1)$

Τελικά το σύστημα ανάγεται σε μια δύναμη R που ασκείται στο K με $\vec{R} = 0\hat{i} + 1200\hat{j} - 800\hat{k}$ N και μια ροπή παράλληλη σε αυτή με $\Sigma\vec{M}_{\parallel} = 0\hat{i} + 368,52\hat{j} - 244,2\hat{k}$ Nm

Άσκηση 3

$|\vec{F_1}| = 4N$
$|\vec{F_2}| = 3N$
$|\vec{F_3}| = 3N$



Έχω: A(4,0,0) | $\vec{KH} = 0\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k} \Rightarrow |\vec{KH}| = \sqrt{40} = 6{,}325\,m \Rightarrow \hat{KH} = 0\hat{i} + 0{,}316\hat{j} - 0{,}949\hat{k}\ m$

B(4,4,0)

Γ(0,4,0) | $\vec{ΓK} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k} \Rightarrow |\vec{ΓK}| = \sqrt{44} = 6{,}633\,m \Rightarrow \hat{ΓK} = 0{,}302\hat{i} - 0{,}302\hat{j} + 0{,}905\hat{k}\ m$

Δ(0,0,0)

O(2,2,0) | $\vec{AB} = 4\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow \hat{AB} = \hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

K(2,2,6)

M(2,2,3) H(2,4,0) Άρα $\vec{F_1} = |\vec{F_1}| \cdot \hat{AB} = 0\hat{i} + 4\hat{j} + 0\hat{k}\ N$

$\vec{F_2} = |\vec{F_2}| \cdot \hat{KH} = 3(0\hat{i} + 0{,}316\hat{j} - 0{,}949\hat{k}) = 0\hat{i} + 0{,}948\hat{j} - 2{,}847\hat{k}\ N$

$\vec{F_3} = |\vec{F_3}| \cdot \hat{ΓK} = 3(0{,}302\hat{i} - 0{,}302\hat{j} + 0{,}905\hat{k}) = 0{,}906\hat{i} - 0{,}906\hat{j} + 2{,}715\hat{k}\ N$

1) $\vec{KA} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

Η ροπή της $\vec{F_1}$ ως προς το K:

$$\vec{M_K^{F_1}} = \vec{KA} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 24\hat{i} + 0\hat{j} + 8\hat{k}$$

Μεταφέρω την $\vec{F_1}$ στο K και προσθέτω την ροπή της ως προς αυτό.

Άρα έχω:

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 4{,}906\hat{i} + 0{,}042\hat{j} - 0{,}132\hat{k} \ N \Rightarrow |\vec{R}| = 4{,}908 \ N$$

και $\Sigma\vec{M} = \vec{M_K^{F_1}} = 24\hat{i} + 0\hat{j} + 8\hat{k} \ Nm \Rightarrow |\Sigma\vec{M}| = 25{,}298 \ Nm$

2) $$\cos(\widehat{\vec{R}, \Sigma\vec{M}}) = \frac{\vec{R} \cdot \Sigma\vec{M}}{|\vec{R}| \cdot |\Sigma\vec{M}|} = \frac{117{,}744 - 1{,}056}{4{,}908 \cdot 25{,}298} = \frac{116{,}688}{124{,}163} = 0{,}94$$

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{R}, \Sigma\vec{M}}) = 19{,}98^\circ$$

3) $\vec{KB} = -2\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k} \ m$

$$\underline{\vec{o}} = \vec{KB} \times \vec{KA} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -2 & -6 \\ 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\hat{i} - 24\hat{j} + 8\hat{k} \Rightarrow |\underline{\vec{o}}| = 25{,}298 \Rightarrow \hat{\underline{o}} = 0\hat{i} - 0{,}949\hat{j} + 0{,}316\hat{k}$$

Άρα $\vec{R_n} = (\vec{R} \cdot \hat{\underline{o}})\hat{\underline{o}} = (-0{,}04 - 0{,}042)\hat{\underline{o}} = -0{,}082\hat{\underline{o}} = 0\hat{i} + 0{,}079\hat{j} - 0{,}026\hat{k} \ N$

και $\vec{R_t} = \vec{R} - \vec{R_n} = 4{,}906\hat{i} - 0{,}037\hat{j} - 0{,}106\hat{k}$

4) $\vec{AM} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{u} \Rightarrow |\vec{AM}| = \sqrt{17} = 4{,}123\,m \Rightarrow \hat{AM} = -0{,}485\hat{i} + 0{,}485\hat{j} + 0{,}728\hat{u}$

Η ροπή της $\vec{R}$ ως προς το Α:

$$\vec{M}_A^R = \vec{AK} \times \vec{R} = (-\vec{KA}) \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ -2 & 2 & 6 \\ 4{,}906 & 0{,}042 & -0{,}132 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0{,}042 & -0{,}132 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 4{,}906 & -0{,}132 \end{vmatrix} + \hat{u}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4{,}906 & 0{,}042 \end{vmatrix} =$$

$$= (-0{,}264 - 0{,}252)\hat{i} - (0{,}264 - 29{,}436)\hat{j} + (-0{,}084 - 9{,}812)\hat{u} =$$

$$= -0{,}516\hat{i} + 29{,}172\hat{j} - 9{,}896\hat{u}$$

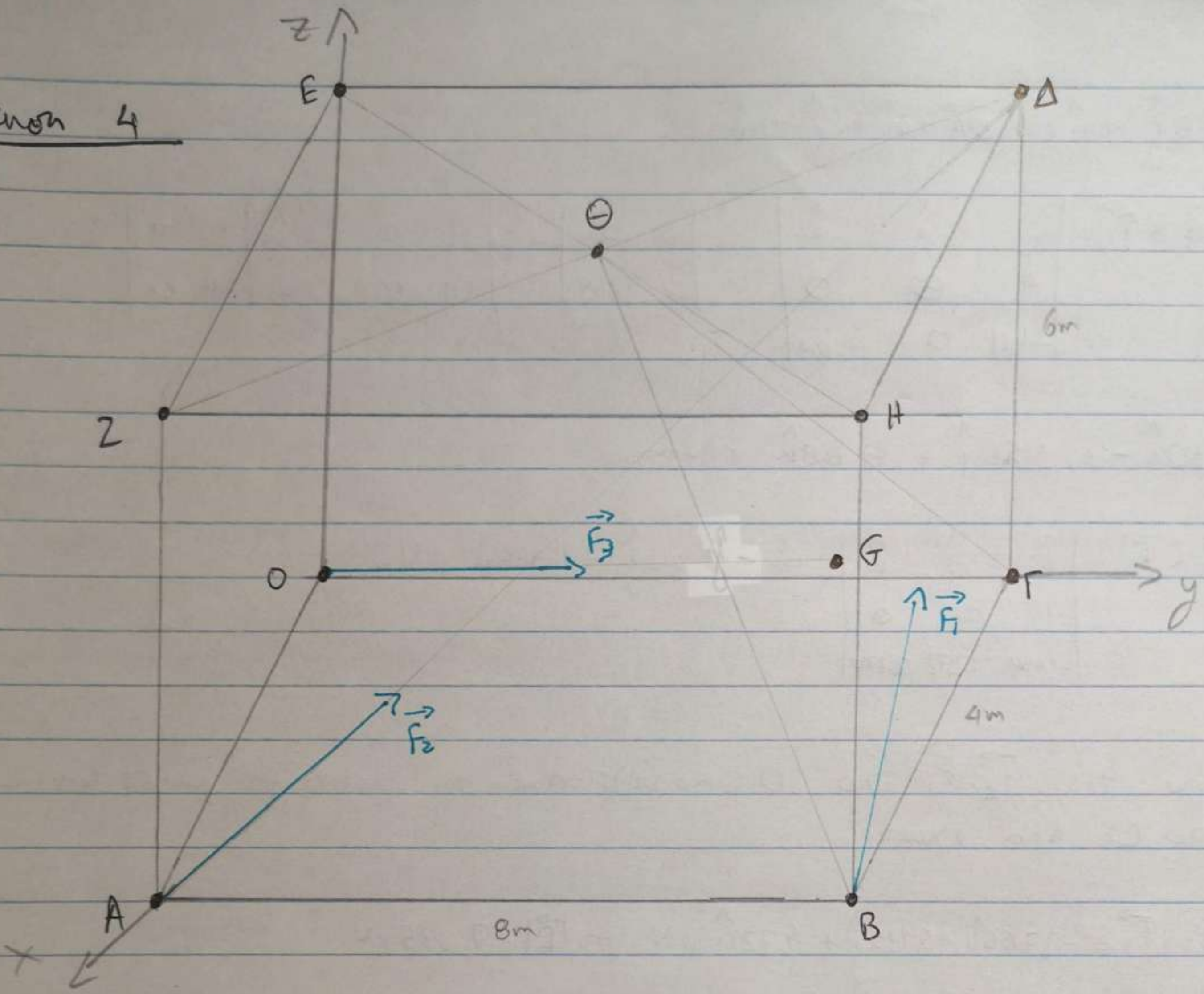
Η ροπή της $\vec{R}$ ως προς την ευθεία ΑΜ:

$$\vec{M}_{AM}^R = (\vec{M}_A^R \cdot \hat{AM})\hat{AM} = (0{,}485 \cdot 0{,}516 + 0{,}485 \cdot 29{,}172 - 9{,}896 \cdot 0{,}728)\hat{AM} =$$

$$= (0{,}25 + 14{,}148 - 7{,}204)\hat{AM} = 7{,}194(-0{,}485\hat{i} + 0{,}485\hat{j} + 0{,}728\hat{u}) =$$

$$= -3{,}489\hat{i} + 3{,}489\hat{j} + 5{,}237\hat{u}$$

Άσκηση 4



$|\vec{F_1}| = 2kN$
$|\vec{F_2}| = 4kN$
$|\vec{F_3}| = 3kN$
O(0,0,0)
G(2,6.67,2)
A(4,0,0)
B(4,8,0)
Γ(0,8,0)
Δ(0,8,6)
H(4,8,6)

Από σειρά 2 άσκηση 3 έχω:

$\vec{OG} = 2\hat{i} + 6{,}67\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow |\vec{OG}| = 7{,}24m \Rightarrow \hat{OG} = 0{,}276\hat{i} + 0{,}921\hat{j} + 0{,}276\hat{k}$ m

Άρα $\vec{F_3} = |\vec{F_3}|\,\hat{OG} = 3(0{,}276\hat{i} + 0{,}921\hat{j} + 0{,}276\hat{k}) = 0{,}828\hat{i} + 2{,}763\hat{j} + 0{,}828\hat{k}$ kN

$\vec{A\Delta} = -4\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k} \Rightarrow |\vec{A\Delta}| = 10{,}77 \Rightarrow \hat{A\Delta} = -0{,}371\hat{i} + 0{,}743\hat{j} + 0{,}557\hat{k}$ m

Άρα $\vec{F_2} = |\vec{F_2}| \cdot \hat{A\Delta} = 4(-0{,}371\hat{i} + 0{,}743\hat{j} + 0{,}557\hat{k}) = -1{,}484\hat{i} + 2{,}972\hat{j} + 2{,}228\hat{k}$ kN

$\vec{B\Delta} = -4\hat{i} + 0\hat{j} + 6\hat{k} \Rightarrow |\vec{B\Delta}| = 7{,}211 \Rightarrow \hat{B\Delta} = -0{,}555\hat{i} + 0\hat{j} + 0{,}832\hat{k}$

Άρα $\vec{F_1} = |\vec{F_1}| \cdot \hat{B\Delta} = 2(-0{,}555\hat{i} + 0\hat{j} + 0{,}832\hat{k}) = -1{,}11\hat{i} + 0\hat{j} + 1{,}664\hat{k}$

$\vec{OB} = 4\hat{i} + 8\hat{j} + 0\hat{k}$, $\vec{OA} = 4\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

$$\vec{M}_0^{F_1} = \vec{OB} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 8 & 0 \\ -1,11 & 0 & 1,664 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1,664 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1,11 & 1,664 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -1,11 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 13,312\hat{i} - 6,656\hat{j} + 8,88\hat{k} \ kNm$$

$$\vec{M}_0^{F_2} = \vec{OA} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ -1,484 & 2,972 & 2,220 \end{vmatrix} = 0\hat{i} - 8,912\hat{j} + 11,888\hat{k} \ kNm$$

Μεταφέρω τις $\vec{F_2}, \vec{F_1}$ στο O, προσθέτοντας τις αντίστοιχες ροπές τους ως προς το O. Άρα έχω:

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = -1,766\hat{i} + 5,735\hat{j} + 4,72\hat{k} \ kN \Rightarrow |\vec{R}| = 7,635 \ kN$$

και

$$\Sigma\vec{M} = \vec{M}_0^{F_1} + \vec{M}_0^{F_2} = 13,312\hat{i} - 15,568\hat{j} + 20,768\hat{k} \Rightarrow |\Sigma\vec{M}| = 29,17 \ kNm$$

2) $$\cos(\widehat{\vec{R}, \Sigma\vec{M}}) = \frac{\vec{R} \cdot \Sigma\vec{M}}{|\vec{R}||\Sigma\vec{M}|} = \frac{-13,312 \cdot 1,766 - 15,568 \cdot 5,735 + 4,72 \cdot 20,768}{7,635 \cdot 29,17} =$$

$$= \frac{-23,509 - 89,282 + 98,025}{222,713} = \frac{-14,766}{222,713} \simeq -0,066 \Rightarrow (\widehat{\vec{R}, \Sigma\vec{M}}) = 93,8^\circ$$

3) $$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = -0,231\hat{i} + 0,751\hat{j} + 0,618\hat{k} \ kN$$

Η προβολή της ΣM στην $\vec{R}$: $\Sigma\vec{M}_{\parallel} = (\Sigma\vec{M} \cdot \hat{R}) \cdot \hat{R} = (-13,312 \cdot 0,231 - 15,568 \cdot 0,751 + 20,768 \cdot 0,618)\hat{R} =$

$$= (-3,075 - 11,691 + 12,835)\hat{R} = -1,931(-0,231\hat{i} + 0,751\hat{j} + 0,618\hat{k}) = 0,446\hat{i} - 1,45\hat{j} - 1,193\hat{k}$$

4) $\vec{OH} = 4\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{O\Delta} = 0\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k}$

$$\underline{e} = \vec{OH} \times \vec{O\Delta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 8 & 6 \\ 0 & 8 & 6 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\hat{i} - 24\hat{j} + 32\hat{k}\ m \Rightarrow |\underline{e}| = 40 \Rightarrow \hat{\underline{e}} = 0\hat{i} - 0{,}6\hat{j} + 0{,}8\hat{k}\ m$$

Το διάνυσμα είναι κάθετο στο επίπεδο (ΟΗΔ) και βρίσκεται σε φορέα που περνά από το Ο.

Η προβολή της $\vec{R}$ στο $\underline{e}$:

$$\vec{R}_{(OH\Delta)} = (\vec{R} \cdot \hat{\underline{e}})\hat{\underline{e}} = (-5{,}735 \cdot 0{,}6 + 4{,}72 \cdot 0{,}8)\hat{\underline{e}} = -3{,}441 + 3{,}776\ \hat{\underline{e}} = 0{,}335\ \hat{\underline{e}} =$$

$$= 0{,}335\,(0\hat{i} - 0{,}6\hat{j} + 0{,}8\hat{k}) = 0\hat{i} - 0{,}201\hat{j} + 0{,}268\hat{k}\ kN$$

5) $\vec{BO} = -\vec{OB} = -4\hat{i} - 8\hat{j} + 0\hat{k}$

$$\vec{M}_B^R = \vec{BO} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & -8 & 0 \\ -1{,}766 & 5{,}735 & 4{,}72 \end{vmatrix} = -37{,}76\hat{i} + 18{,}88\hat{j} + (-22{,}94 - 14{,}128)\hat{k} =$$

$$= -37{,}76\hat{i} + 18{,}88\hat{j} - 37{,}068\hat{k}$$

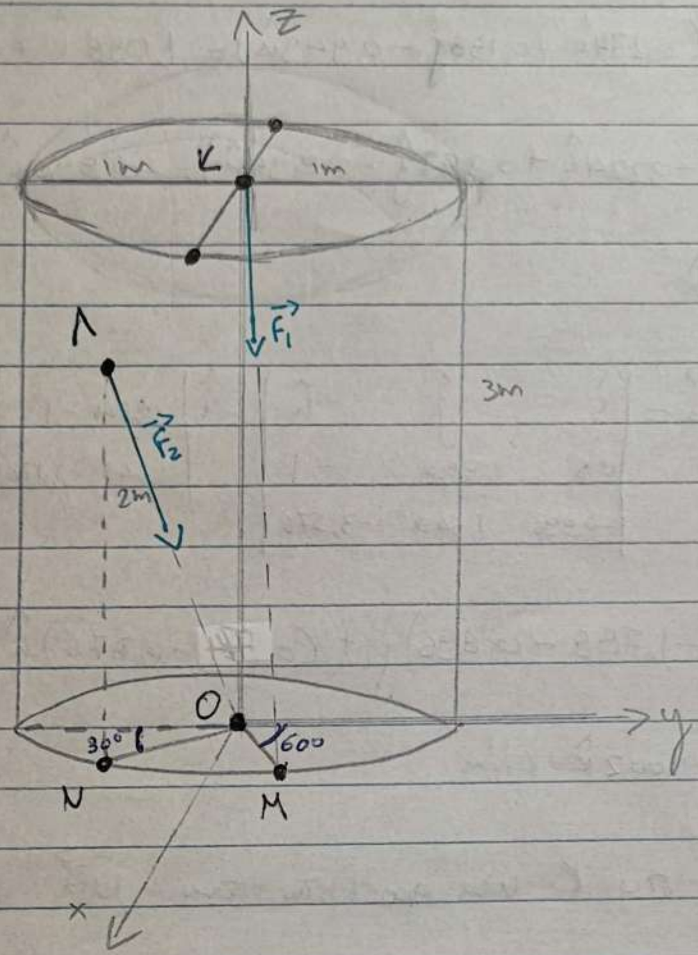
$$\vec{BG} = -2\hat{i} - 1{,}33\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow |\vec{BG}| = 3{,}126 \Rightarrow \hat{BG} = -0{,}64\hat{i} - 0{,}425\hat{j} + 0{,}64\hat{k}\ m$$

Άρα $\vec{M}_{BG}^R = (\vec{M}_B^R \cdot \hat{BG})\hat{BG} = (0{,}64 \cdot 37{,}76 - 0{,}425 \cdot 18{,}88 - 0{,}64 \cdot 37{,}068)\hat{BG} =$

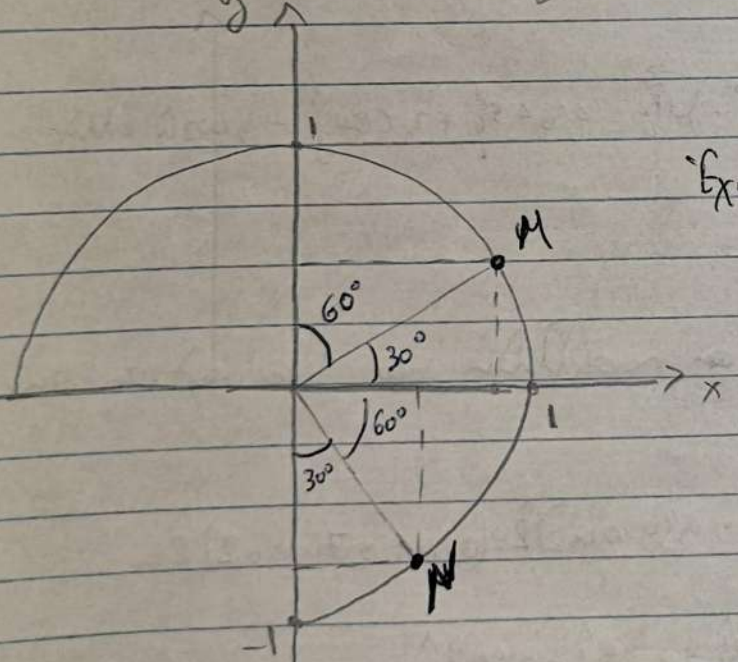
$$= (24{,}166 - 8{,}024 - 23{,}724)\hat{BG} = -7{,}582(-0{,}64\hat{i} - 0{,}425\hat{j} + 0{,}64\hat{k}) =$$

$$= 4{,}852\hat{i} + 3{,}222\hat{j} - 4{,}852\hat{k}.$$

Άσκηση 5



$|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = 4kN$



Έχω $M(\cos(30°), \sin(30°), 0)\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = (0{,}866, 0{,}5, 0)$

$N(\cos(60), -\sin(60), 0)\ \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)\ (0{,}5, -0{,}866, 0)$

$O(0,0,0)$, $K(0,0,3)$

$\Lambda(0{,}5, -0{,}866, 2)$

Έχω $\vec{\Lambda O} = -0{,}5\hat{i} + 0{,}866\hat{j} - 2\hat{k} \Rightarrow |\vec{\Lambda O}| = 2{,}236m \Rightarrow \hat{\Lambda O} = -0{,}224\hat{i} + 0{,}387\hat{j} - 0{,}894\hat{k}$

και $\vec{KM} = 0{,}866\hat{i} + 0{,}5\hat{j} - 3\hat{k} \Rightarrow |\vec{KM}| = 3{,}162 \Rightarrow \hat{KM} = 0{,}274\hat{i} + 0{,}158\hat{j} - 0{,}949\hat{k}$

Άρα $\vec{F_1} = |\vec{F_1}| \cdot \hat{KM} = 4(0{,}274\hat{i} + 0{,}158\hat{j} - 0{,}949\hat{k}) = 1{,}096\hat{i} + 0{,}632\hat{j} - 3{,}796\hat{k}$

και $\vec{F_2} = |\vec{F_2}| \cdot \hat{\Lambda O} = 4(-0{,}224\hat{i} + 0{,}387\hat{j} - 0{,}894\hat{k}) = -0{,}896\hat{i} + 1{,}548\hat{j} - 3{,}576\hat{k}$

$\vec{K\Lambda} = 0{,}5\hat{i} - 0{,}866\hat{j} - 1\hat{k}$

Άρα $$\vec{M_K^{F_2}} = \vec{K\Lambda} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0{,}5 & -0{,}866 & -1 \\ -0{,}896 & 1{,}548 & -3{,}576 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -0{,}866 & -1 \\ 1{,}548 & -3{,}576 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0{,}5 & -1 \\ -0{,}896 & -3{,}576 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0{,}5 & -0{,}866 \\ -0{,}896 & 1{,}548 \end{vmatrix}$$

$= (3{,}097 + 1{,}548)\hat{i} - (-1{,}788 - 0{,}896)\hat{j} + (0{,}774 - 0{,}776)\hat{k} =$

$= 4{,}645\hat{i} + 2{,}684\hat{j} - 0{,}002\hat{k}$ kNm

Μεταφέρω την $\vec{F_2}$ στο K και προσθέτω την $\vec{M_K^{F_2}}$ στο σύστημα, άρα έχω:

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = 0{,}2\hat{i} + 2{,}18\hat{j} - 7{,}372\hat{k}$ kN και $\Sigma\vec{M} = \vec{M_K^{F_2}} = 4{,}645\hat{i} + 2{,}684\hat{j} - 0{,}002\hat{k}$ kNm

$|\vec{R}| = 7{,}69$ kN $\Rightarrow \hat{R} = 0{,}026\hat{i} + 0{,}283\hat{j} - 0{,}959\hat{k}$

Αναλύω την $\Sigma\vec{M}$ σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη και μία κάθετη στην $\vec{R}$. Άρα έχω $\Sigma\vec{M} = \Sigma\vec{M}_{\parallel} + \Sigma\vec{M}_{\perp}$

$\Sigma\vec{M}_{\parallel} = (\Sigma\vec{M} \cdot \hat{R})\hat{R} = (0{,}026 \cdot 4{,}645 + 2{,}684 \cdot 0{,}283 + 0{,}959 \cdot 0{,}002)\hat{R} = (0{,}121 + 0{,}76 + 0{,}002)\hat{R} =$

$= 0{,}883\hat{R} = 0{,}883(0{,}026\hat{i} + 0{,}283\hat{j} - 0{,}959\hat{k}) = 0{,}023\hat{i} + 0{,}25\hat{j} - 0{,}847\hat{k}$

Άρα $\Sigma\vec{M}_{\perp} = \Sigma\vec{M} - \Sigma\vec{M}_{\parallel} = 4{,}622\hat{i} + 2{,}434\hat{j} + 0{,}845\hat{k}$

Ψάχνω σημείο $A(x,y,z)$ τέτοιο ώστε:

$$\vec{M}_A^R = -\Sigma \vec{M}_\perp = -4{,}622\hat{i} - 2{,}434\hat{j} - 0{,}845\hat{k}$$

$$\vec{AK} = -x\hat{i} - y\hat{j} + (3-z)\hat{k}$$

$$\vec{M}_A^R = \vec{AK} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -x & -y & 3-z \\ 0{,}2 & 2{,}18 & -7{,}372 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} -y & 3-z \\ 2{,}18 & -7{,}372 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -x & 3-z \\ 0{,}2 & -7{,}372 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -x & -y \\ 0{,}2 & 2{,}18 \end{vmatrix} =$$

$$= [7{,}372y + (z-3)2{,}18]\hat{i} - [7{,}372x + 0{,}2(z-3)]\hat{j} + (-2{,}18x + 0{,}2y)\hat{k} =$$

$$= (7{,}372y + 2{,}18z - 6{,}54)\hat{i} + (-7{,}372x - 0{,}2z + 0{,}6)\hat{j} + (0{,}2y - 2{,}18x)\hat{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7{,}372y + 2{,}18z - 6{,}54 = -4{,}622 \\ -7{,}372x - 0{,}2z + 0{,}6 = -2{,}434 \\ 0{,}2y - 2{,}18x = -0{,}845 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7{,}372y + 2{,}18z = 1{,}918 \\ 7{,}372x + 0{,}2z = 3{,}034 \\ 0{,}2y - 2{,}18x = -0{,}845 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7{,}372y + 2{,}18z = 1{,}918 \quad (1) \\ x + 0{,}027z = 0{,}412 \quad (2) \\ 0{,}092y - x = -0{,}388 \quad (3) \end{cases}$$

Έχω $(2)+(3) \Rightarrow 0{,}082y + 0{,}027z = 0{,}024 \Leftrightarrow 9{,}2y + 2{,}7z = 2{,}4 \quad (4)$

Άρα έχω: $\begin{cases} 7{,}372y + 2{,}18z = 1{,}918 \\ 9{,}2y + 2{,}7z = 2{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 0{,}295z = 0{,}260 \\ y + 0{,}295z = 0{,}260 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 0{,}295z = 0{,}260 \\ -y - 0{,}295z = -0{,}260 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 0$

Έχω (2) $\Rightarrow 36,86x + z = 15,17 \Leftrightarrow z = 15,17 - 36,86x$

(3) $\Rightarrow y - 10,9x = -4,225 \Leftrightarrow y = 10,9x - 4,225$

Άρα $\vec{AK} = -x\hat{i} + (-10,9x + 4,225)\hat{j} + (3 + 36,86x - 15,17)\hat{k} = -x\hat{i} + (4,225 - 10,9x)\hat{j} + (36,86x - 12,17)\hat{k}$

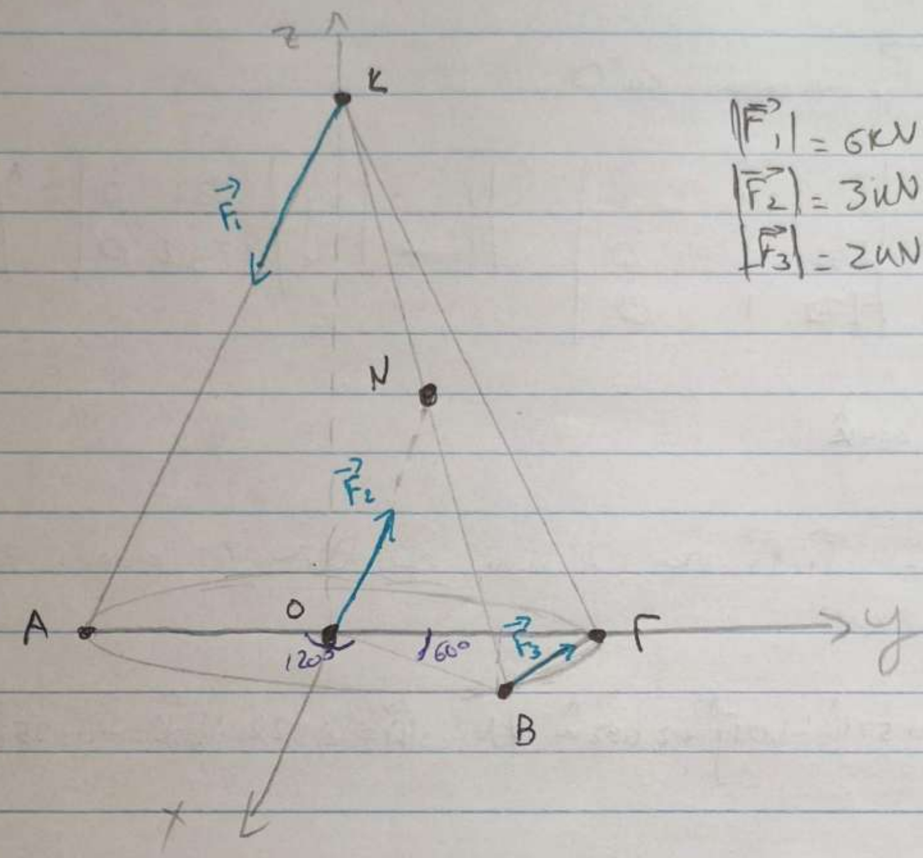
Πρέπει $\vec{AK} \cdot \vec{\Sigma M_{\perp}} = 0 \Leftrightarrow -x \cdot 4,622 + 2,434(4,225 - 10,9x) + 0,845(36,86x - 12,17) = 0$

$\Leftrightarrow -4,622x + \cancel{10,284} - 26,531x + 31,148x - \cancel{10,284} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 31,150x - 31,150x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ άρα επαληθεύεται και άρα υπάρχει

Ευθεία στον χώρο στην οποία μπορώ να μετακινήσω την $\vec{R}$ ώστε να αποδίδει η κάθετη σταθερή ροπή.

Άσκηση 6



$|\vec{F}_1| = 6kN$ | $R = 2m$
$|\vec{F}_2| = 3kN$ | $OK = 4m$
$|\vec{F}_3| = 2kN$ | $NK = NB$

Έχω: $O(0,0,0)$ $K(0,0,4)$ $A(0,-2,0)$ $N(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ $B(\sqrt{3},1,0)$ $\Gamma(0,2,0)$

$\vec{KA} = 0\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k} \Rightarrow |\vec{KA}| = 4,472 \Rightarrow \hat{KA} = 0\hat{i} - 0,447\hat{j} - 0,894\hat{k}$

$\vec{ON} = 0,866\hat{i} + 0,5\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow |\vec{ON}| = 2,236m \Rightarrow \hat{ON} = 0,387\hat{i} + 0,224\hat{j} + 0,894\hat{k}$

$\vec{B\Gamma} = -1,732\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{B\Gamma}| = 2 \Rightarrow \hat{B\Gamma} = -0,866\hat{i} + 0,5\hat{j} + 0\hat{k}$

Άρα $\vec{F}_1 = |\vec{F}_1| \cdot \hat{KA} = 6(0\hat{i} - 0,447\hat{j} - 0,894\hat{k}) = 0\hat{i} - 2,682\hat{j} - 5,364\hat{k}$

$\vec{F}_2 = |\vec{F}_2| \cdot \hat{ON} = 3(0,387\hat{i} + 0,224\hat{j} + 0,894\hat{k}) = 1,161\hat{i} + 0,672\hat{j} + 2,682\hat{k}$

$\vec{F}_3 = |\vec{F}_3| \cdot \hat{B\Gamma} = 2(-0,866\hat{i} + 0,5\hat{j} + 0\hat{k}) = -1,732\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{OK} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{OB} = 1,732\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k}$

Η ροπή της F_1 ως προς το O:

$$\vec{M}_O^{F_1} = \vec{OK} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2,682 & -5,364 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2,682 & -5,364 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -5,364 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2,682 \end{vmatrix} =$$

$= 10,728\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

Η ροπή της $\vec{F_3}$ ως προς το O:

$$\vec{M}_O^{F_3} = \vec{OB} \times \vec{F_3} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1,732 & 1 & 0 \\ -1,732 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1,732 & 0 \\ -1,732 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1,732 & 1 \\ -1,732 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 3,464\hat{k}$$

Μετακινώ τις $\vec{F_1}, \vec{F_3}$ στο O και προσθέτω τις ροπές τους ως προς αυτό. Άρα έχω:

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = -0,571\hat{i} - 1,01\hat{j} - 2,682\hat{k}\ kN \Rightarrow |\vec{R}| = 2,922\,kN \Rightarrow \hat{R} = -0,195\hat{i} - 0,346\hat{j} - 0,918\hat{k}$$

και

$$\Sigma\vec{M} = \vec{M}_O^{F_1} + \vec{M}_O^{F_3} = 10,728\hat{i} + 0\hat{j} + 3,464\hat{k}$$

Αναλύω την $\Sigma\vec{M}$ σε 2 συνιστώσες $\Sigma\vec{M}_{\parallel}$ και $\Sigma\vec{M}_{\perp}$, παράλληλη και κάθετη στην $\vec{R}$ αντίστοιχα.

$$\Sigma\vec{M}_{\parallel} = (\Sigma\vec{M} \cdot \hat{R})\hat{R} = (-10,728 \cdot 0,195 - 3,464 \cdot 0,918) \cdot \hat{R} = (-2,092 - 3,18)\hat{R} =$$

$$= -5,272(-0,195\hat{i} - 0,346\hat{j} - 0,918\hat{k}) = 1,028\hat{i} + 1,824\hat{j} + 4,84\hat{k}$$

Άρα $\Sigma\vec{M}_{\perp} = \Sigma\vec{M} - \Sigma\vec{M}_{\parallel} = 9,7\hat{i} - 1,824\hat{j} - 1,376\hat{k}$

Ψάχνω σημείο $\Lambda(x, y, z)$ τέτοιο ώστε: $\vec{M}_\Lambda^R = -\Sigma\vec{M}_{\perp} = -9,7\hat{i} + 1,824\hat{j} + 1,376\hat{k}$

$$\vec{\Lambda O} = -x\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k}$$

$$\vec{M}_\Lambda^R = \vec{\Lambda O} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -x & -y & -z \\ -0,571 & -1,01 & -2,682 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -y & -z \\ -1,01 & -2,682 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -x & -z \\ -0,571 & -2,682 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -x & -y \\ -0,571 & -1,01 \end{vmatrix} =$$

$= (2{,}682y - 1{,}01z)\hat{i} - (2{,}682x - 0{,}571z)\hat{j} + (1{,}01x - 0{,}571y)\hat{k}$

$= (2{,}682y - 1{,}01z)\hat{i} + (-2{,}682x + 0{,}571z)\hat{j} + (1{,}01x - 0{,}571y)\hat{k}$

Άρα πρέπει: $\begin{cases} 2{,}682y - 1{,}01z = -9{,}7 \\ -2{,}682x + 0{,}571z = 1{,}824 \\ 1{,}01x - 0{,}571y = 1{,}376 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}682y - 1{,}01z = -9{,}7 \quad (1) \\ -x + 0{,}213z = 0{,}68 \quad (2) \\ x - 0{,}565y = 1{,}362 \quad (3) \end{cases}$

$(2)+(3) \Rightarrow 0{,}213z - 0{,}565y = 2{,}042 \quad (4)$ $\quad (1) \overset{(4)}{\Rightarrow} 0 = 0$ ισχύει

Έχω $(2) \Rightarrow -4{,}697x + z = 3{,}194 \Leftrightarrow z = +4{,}697x + 3{,}194$

$(3) \Rightarrow 1{,}769x - y = 2{,}41 \Leftrightarrow y = -2{,}41 + 1{,}769x$

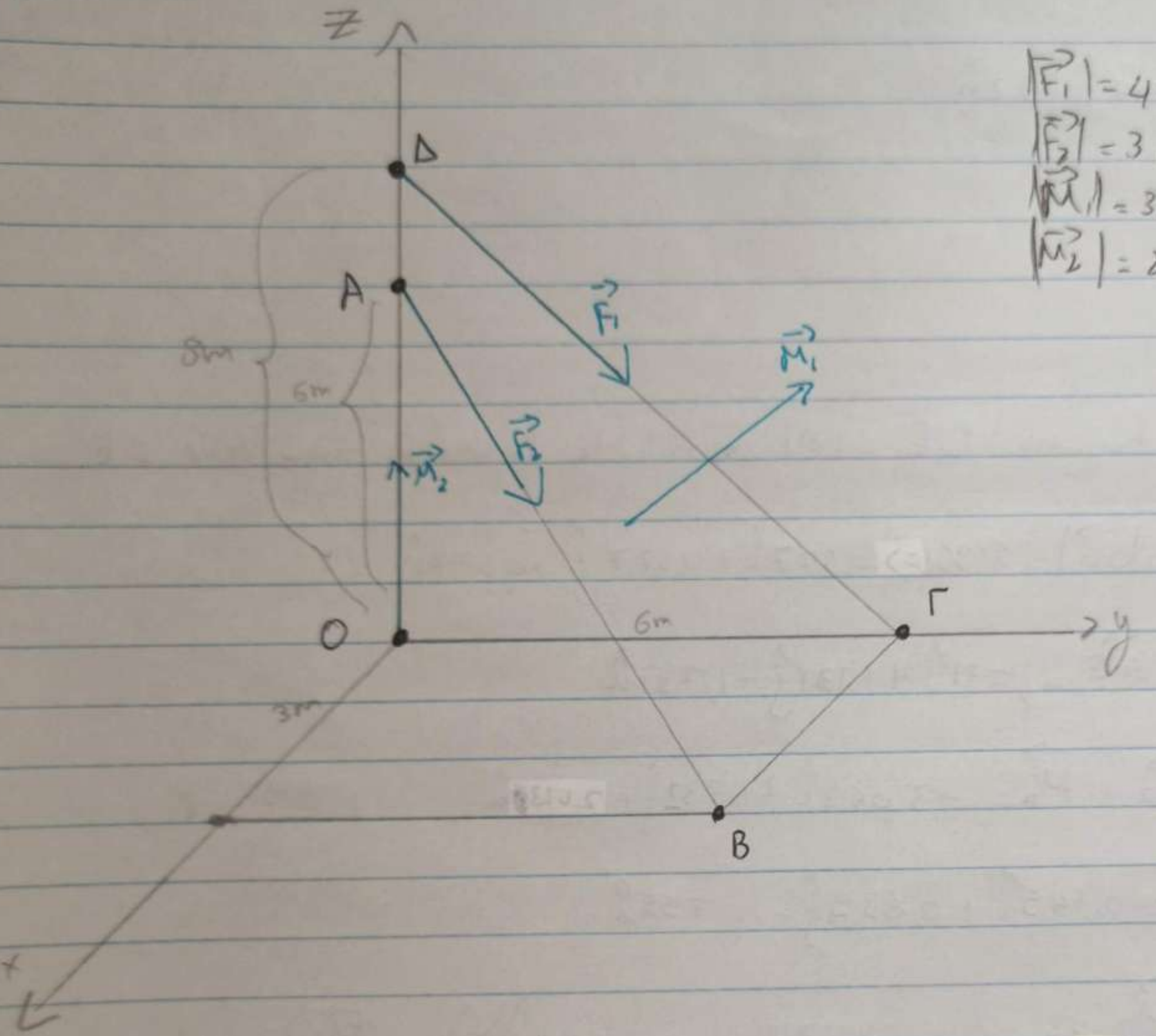
Άρα $\vec{\Lambda O} = -x\hat{i} + (-1{,}769x + 2{,}41)\hat{j} + (-4{,}697x - 3{,}194)\hat{k}$

Πρέπει $\vec{\Lambda O} \cdot \Sigma\vec{M}_L = 0 \Leftrightarrow -9{,}7x + 1{,}824(1{,}769x - 2{,}41) + 1{,}376(4{,}697x + 3{,}194) = 0$

$\Leftrightarrow -9{,}7x + 3{,}227x - 4{,}395 + 6{,}463x + 4{,}395 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει άρα επαληθεύεται

Άρα υπάρχει ευθεία στον χώρο στην οποία μπορώ να μετακινήσω την $\vec{R}$ ώστε να αναδειχθεί η κάθετη σε αυτή ροπή

Άσκηση 7



$|\vec{F_1}| = 4\,kN$
$|\vec{F_2}| = 3\,kN$
$|\vec{M_1}| = 3\,kNm$
$|\vec{M_2}| = 2\,kNm$

Έχω: $O(0,0,0)$, $A(0,0,6)$, $B(3,6,0)$, $\Gamma(0,6,0)$, $\Delta(0,0,8)$, $E(3,3,3)$

$\vec{AB} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k} \Rightarrow |\vec{AB}| = 9 \Rightarrow \hat{AB} = \frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}$ m

$\vec{\Delta\Gamma} = 0\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k} \Rightarrow |\vec{\Delta\Gamma}| = 10 \Rightarrow \hat{\Delta\Gamma} = 0\hat{i} + 0{,}6\hat{j} - 0{,}8\hat{k}$ m

Άρα $\vec{F_1} = |\vec{F_1}| \cdot \hat{\Delta\Gamma} = 4\,\hat{\Delta\Gamma} = 0\hat{i} + 2{,}4\hat{j} - 3{,}2\hat{k}$ kN

$\vec{F_2} = |\vec{F_2}| \cdot \hat{AB} = 3\,\hat{AB} = 1\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ kN

Έστω $\vec{A\Delta} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$

Η ροπή της $\vec{F_1}$ ως προς το A:

$$\vec{M_A^{F_1}} = \vec{A\Delta} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2{,}4 & -3{,}2 \end{vmatrix} = -4{,}8\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

Μεταφέρω την $\vec{F_1}$ στο Α και προσθέτω στο σύστημα την $\vec{M}_A^{F_1}$

Άρα έχω $\vec{R} = 1\hat{i} + 4{,}4\hat{j} - 5{,}2\hat{k}$

Επίσης έχω:

$\vec{M}_2 = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$

Έστω κύβος με διαγώνιο ΟΕ, τότε η M_2 βρίσκεται πάνω στην ΟΕ.

$\vec{OE} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k} \Rightarrow |\vec{OE}| = 5{,}196 \Rightarrow \hat{OE} = 0{,}577\hat{i} + 0{,}577\hat{j} + 0{,}577\hat{k}$

Άρα $\vec{M_1} = |\vec{M_1}|\,\hat{OE} = 3\hat{OE} = 1{,}731\hat{i} + 1{,}731\hat{j} + 1{,}731\hat{k}$

Άρα $\Sigma\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2} + \vec{M}_A^{F_1} = -3{,}069\hat{i} + 1{,}732\hat{j} + 3{,}732\hat{k}$

$|\vec{R}| = 6{,}885\,kN \Rightarrow \hat{R} = 0{,}145\hat{i} + 0{,}639\hat{j} - 0{,}755\hat{k}$

Αναλύω την $\Sigma\vec{M}$ σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη ($\Sigma\vec{M}_{\parallel}$) και μια κάθετη ($\Sigma M_{\perp}$) στην $\vec{R}$

$\Sigma\vec{M}_{\parallel} = (\Sigma\vec{M}\cdot\hat{R})\hat{R} = (-0{,}145\cdot 3{,}069 + 0{,}639\cdot 1{,}732 - 0{,}755\cdot 3{,}732)\hat{R} = (-0{,}445 + 1{,}107 - 2{,}818)\hat{R} =$

$-2{,}156\cdot\hat{R} = -2{,}156\cdot(0{,}145\hat{i} + 0{,}639\hat{j} - 0{,}755\hat{k}) = -0{,}313\hat{i} - 1{,}378\hat{j} + 1{,}628\hat{k}$

Άρα $\Sigma\vec{M}_{\perp} = \Sigma\vec{M} - \Sigma\vec{M}_{\parallel} = -2{,}755\hat{i} + 3{,}110\hat{j} + 2{,}104\hat{k}$

Ψάχνω σημείο $K(x,y,z)$ τέτοιο ώστε $\vec{M}_K^{R} = -\Sigma\vec{M}_{\perp} = 2{,}755\hat{i} - 3{,}110\hat{j} - 2{,}104\hat{k}$

$\vec{KA} = -x\hat{i} - y\hat{j} + (6-z)\hat{k}$

$$\vec{M}^{R}_{a} = \vec{KA}\times\vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -x & -y & 6-z \\ 1 & 4,4 & -5,2 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -y & 6-z \\ 4,4 & -5,2 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -x & 6-z \\ 1 & -5,2 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -x & -y \\ 1 & 4,4 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[5,2y + (z-6)4,4\right]\hat{i} - \left[5,2x + (z-6)\right]\hat{j} + (-4,4x + y)\hat{k} =$$

$$= (5,2y + 4,4z - 26,4)\hat{i} + (-5,2x - z + 6)\hat{j} + (y - 4,4x)\hat{k}$$

Άρα έχω: $\begin{cases} 5,2y + 4,4z - 26,4 = 2,755 \\ -5,2x - z + 6 = -3,11 \\ y - 4,4x = -2,104 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5,2y + 4,4z = 29,155 \\ -5,2x - z = -9,11 \\ y - 4,4x = -2,104 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,182y + z = 6,626 \\ -5,2x - z = -9,11 \\ y - 4,4x = -2,104 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -0,846z + 5,606 \\ x = -0,192z + 1,752 \\ y - 4,4x = -2,104 \end{cases} \Rightarrow y - 4,4x = -2,104 \Leftrightarrow -0,846z + 5,606 - 4,4(-0,192z + 1,752) = -2,104 \Leftrightarrow -0,846z + 5,606 + 0,846z - 7,709 = -2,104$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει

Άρα $\vec{KA} = -x\hat{i} - y\hat{j} + (6-z)\hat{k} = (0,192z - 1,752)\hat{i} + (0,846z - 5,606)\hat{j} + (6-z)\hat{k}$

Πρέπει $\vec{KA}\cdot\vec{\Sigma M_1} = 0 \Leftrightarrow -(0,192z - 1,752)2,755 + 3,11(0,846z - 5,606) + 2,104(6-z) = 0$

$\Leftrightarrow -0,529z + 4,827 + 2,631z - 17,435 + 12,624 - 2,104z = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει άρα επαληθεύεται και άρα υπάρχει ευθεία στον χώρο στην οποία μπορώ να μετακινήσω την $\vec{R}$ ώστε να αναλογεί η κάθετη σε αυτήν ροπή.