Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το διορθώσω: Georgepan

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής

Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

5η σειρά ασκήσεων: Εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου στη Μηχανική

Άσκηση 1

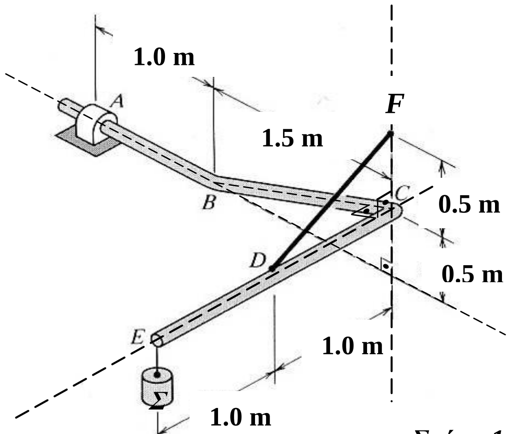
Σώμα (Σ) μάζας 10 kg είναι αναρτημένο από τον αβαρή φορέα ABCDE όπως φαίνεται στο Σχ.1. Η ράβδος στηρίζεται με ένσφαιρο τριβέα (ρουλεμάν) στο σημείο Α και το συρματόσχοινο FD. Η δύναμη που αναπτύσσεται στο συρματόσχοινο είναι ίση με 4 kN.

α. Να ευρεθεί η ροπή της δύναμης του συρματόσχοινου ως προς το γεωμετρικό κέντρο του τριγώνου ABE.

β. Να ευρεθεί η ροπή του βάρους του σώματος Σ ως προς το γεωμετρικό κέντρο του τριγώνου AFD.

Η γωνία BCE είναι ορθή, τα τμήματα AB και CDE είναι οριζόντια, το τμήμα CF είναι κατακόρυφο, τα σημεία A,B,C και F είναι συνεπίπεδα, όπως και τα σημεία E, D, C, και F.

Δίνεται ότι: $g=10\ m/s^2$.



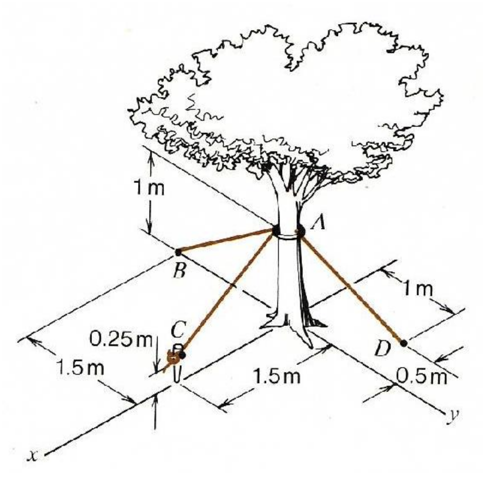
Σχήμα 1

Άσκηση 2

Το δέντρο του Σχ.2 στηρίζεται με τη βοήθεια τριών καλωδίων κάθε ένα από τα οποία εφελκύεται με δύναμη 2.5 kN.

α. Υπολογίστε τη ροπή της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο δέντρο από όλα τα καλώδια ως προς το μέσον του τμήματος BC.

β. Υπολογίστε τη ροπή της δύναμης του καλωδίου AD ως προς την ευθεία BC.



Σχήμα 2

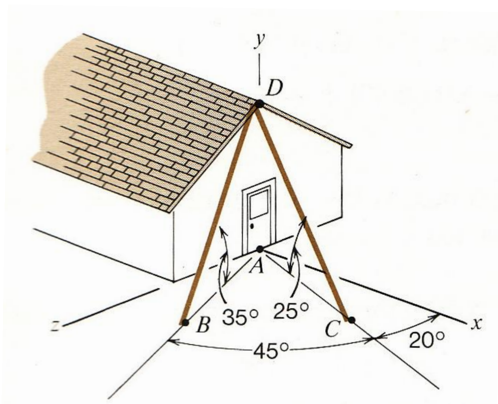
Άσκηση 3

Μέσω των συρματόσχοινων BD και CD ασκούνται στο σημείο D του κτηρίου που φαίνεται στο Σχ.3 δύο δυνάμεις μέτρων 2 και 4 kN αντίστοιχα.

α. Υπολογίστε τη ροπή εκάστης των δυνάμεων ως προς το σημείο Α.

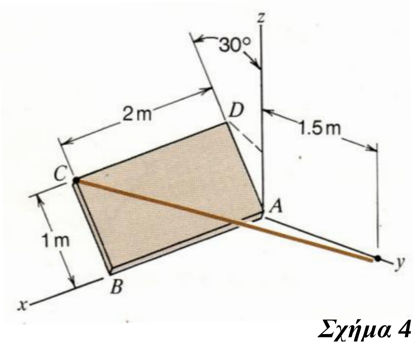
β. Υπολογίστε τη ροπή της συνισταμένης των δύο δυνάμεων ως προς το γεωμετρικό κέντρο του τριγώνου ABC.

Δίνεται ότι AD=4 m.



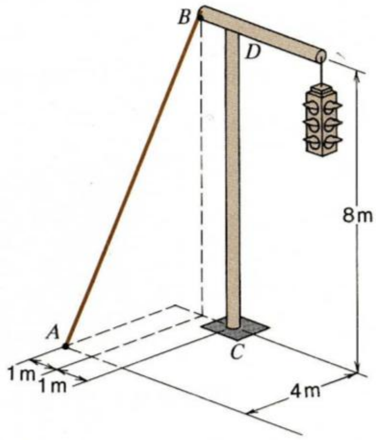
Σχήμα 3

Άσκηση 4
Ορθογώνιο φύλλο κοντραπλακέ παραμένει στη θέση του με τη βοήθεια ενός συρματόσχοινου όπως φαίνεται στο Σχ. 4. Αν το καλώδιο εφελκύεται με δύναμη 15 kN, υπολογίστε τη ροπή της δύναμης αυτής:
α. Ως προς το σημείο A.
β. Ως προς την ευθεία AD.



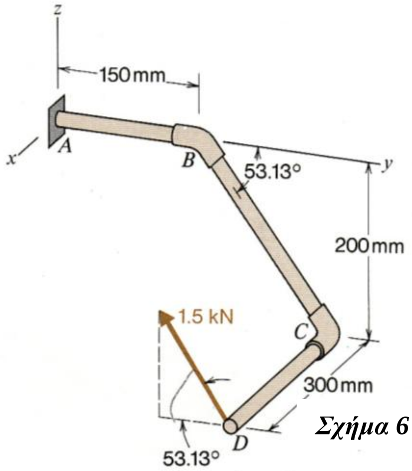
Σχήμα 4

Άσκηση 5
Ο σηματοδότης κυκλοφοριακής ρύθμισης του Σχ.5 σταθεροποιείται στο έδαφος μέσω του συρματόσχοινου AB που εφελκύεται με δύναμη 4 kN. Υπολογίστε τη ροπή της δύναμης αυτής:
α. Ως προς το σημείο D,
β. Ως προς το σημείο C,
γ. Ως προς την ευθεία CL, όπου L το γεωμετρικό κέντρο του τριγώνου ABD.



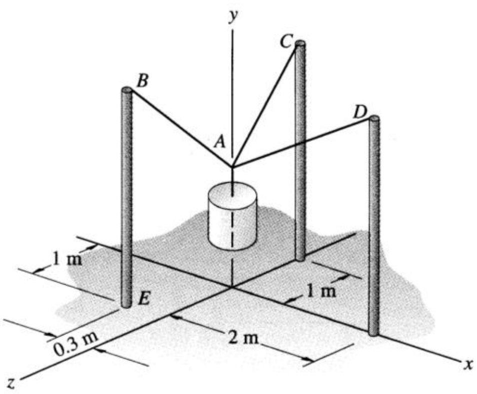
Σχήμα 5

Άσκηση 6
Δύναμη μέτρου 1.5 kN ασκείται στο σύστημα σωληνώσεων όπως φαίνεται στο Σχ.6. Υπολογίστε τη ροπή της δύναμης αυτής:
α. Ως προς το σημείο C,
β. Ως προς το σημείο A.
γ. Ως προς την ευθεία BL, όπου L το γεωμετρικό κέντρο του τριγώνου ACD.
δ. Στη συνέχεια να υπολογισθεί η προβολή της ροπής του ερωτήματος 6α επί της καθέτου στο επίπεδο ABD.



Σχήμα 6

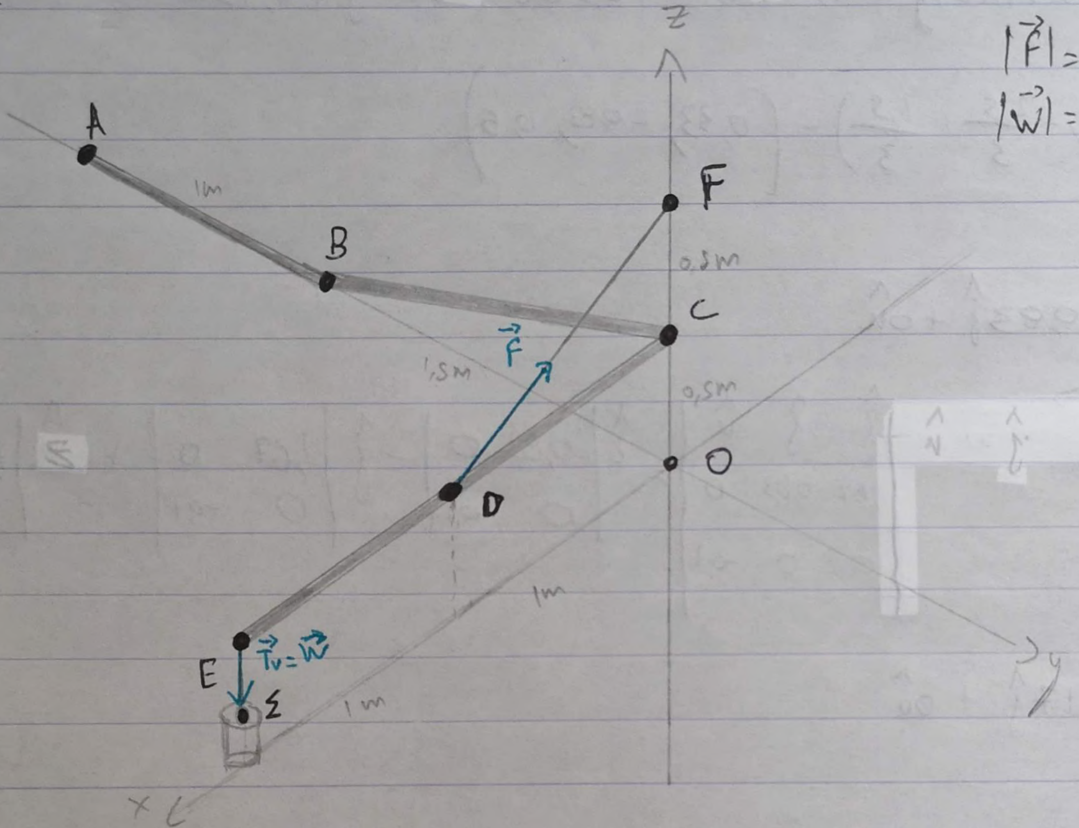
Άσκηση 7
Κυλινδρικό σώμα αναρτάται από σημείο A (0, 1.2, 0) [m] με τη βοήθεια τριών συρματόσχοινων, όπως φαίνεται στο Σχ.7. Οι τρεις κατακόρυφοι στύλοι είναι ισοϋψείς με ύψος 2 m. Έστω ότι το συρματόσχοινο AC ασκεί δύναμη μέτρου 3 kN. Να υπολογισθεί η ροπή της δύναμης αυτής
α. Ως προς τα σημεία B και D και ως
β. Ως προς την ευθεία BD.
γ. Η προβολή της ροπής του ερωτήματος 7β επί της ευθείας AC.
δ. Η γωνία μεταξύ των ροπών του ερωτήματος 7α και της ευθείας AD.
ε. Η προβολή της ροπής του ερωτήματος 7β επί της καθέτου στο επίπεδο ABC.



Σχήμα 7

5η Σειρά Ασκήσεων: Εφαρμογές του Εξωτερικού γινομένου στην Μηχανική

Άσκηση 1



$|\vec{F}| = 4kN$

$|\vec{W}| = 100N = 0,1kN$

Έχω: O(0,0,0)	$\vec{T_v} = 0i + 0j - 0,1\hat{k}$ kN
A(0,−2,5,0)	$\vec{DF} = -1i + 0j + 0,5\hat{k} \Rightarrow \vec{DF} = \sqrt{1,25} = 1,12$
B(0,−1,5,0)	Άρα $\vec{F} = \frac{\lvert\vec{F}\rvert}{\lvert\vec{DF}\rvert}\vec{DF} = \frac{4}{1,12}\vec{DF} = 3,57(-1\hat{i} + 0\hat{j} + 0,5\hat{k}) = -3,57\hat{i} + 0\hat{j} + 1,79\hat{k}$
C(0,0,0,5)	
D(1,0,0,5)	$G_{AB\hat{E}} = G_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{6}\right) = (0,67, -1,33, 0,17)$
E(2,0,0,5)	
F(0,0,1)	

a) $\vec{G_1D} = +0,33\hat{i} + 1,33\hat{j} + 0,33\hat{k}$

Άρα $\vec{M}_{G_1}^{F} = \vec{G_1D} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,33 & 1,33 & 0,33 \\ -3,57 & 0 & 1,79 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 1,33 & 0,33 \\ 0 & 1,79 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0,33 & 0,33 \\ -3,57 & 1,79 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0,33 & 1,33 \\ -3,57 & 0 \end{vmatrix} =$

$= (+1{,}33 \cdot 1{,}79 - 0)\hat{i} - (+0{,}33 \cdot 1{,}79 + 0{,}33 \cdot 3{,}57)\hat{j} + (+3{,}57 \cdot 1{,}33)\hat{k} =$

$= +2{,}38\hat{i} - (+0{,}59 + 1{,}18)\hat{j} + 4{,}75\hat{k} = +2{,}38\hat{i} - 1{,}77\hat{j} + 4{,}75\hat{k}$

b) $G_{AFD} = G_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2{,}5}{3}, \frac{1{,}5}{3}\right) = (0{,}33, -0{,}83, 0{,}5)$

$\overrightarrow{G_2E} = 1{,}67\hat{i} + 0{,}83\hat{j} + 0\hat{k}$

Aea $\overrightarrow{M}^{\vec{w}}_{G_2} = \overrightarrow{G_2E} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1{,}67 & 0{,}83 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}1 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 0{,}83 & 0 \\ 0 & -0{,}1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1{,}67 & 0 \\ 0 & -0{,}1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1{,}67 & 0{,}83 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= -0{,}83\hat{i} + 0{,}17\hat{j} + 0\hat{k}$

Άσκηση 2

Έστω E το μέσο του BC. ~~...~~
Σχήμα άσκησης 1 σειράς 3.
Έχω $A(0,0,1)$
$B(0,-1{,}5,0)$
$C(1{,}5,0,0{,}25)$
$D(-1,0{,}5,0)$

Άρα $E\left(\frac{1{,}5}{2}, \frac{-1{,}5}{2}, \frac{0{,}25}{2}\right) = (0{,}75, -0{,}75, 0{,}125)$

α)

Από άσκηση 1 σειράς 3 (δεκαπλασιάζοντας επειδή εδώ έχω 2,5kN ενώ εκεί είχα 250N)
έχω: $\vec{R} = 1399{,}2\hat{i} - 416{,}7\hat{j} - 4171{,}7\hat{k}$ N

$\vec{EA} = -0{,}75\hat{i} + 0{,}75\hat{j} + 0{,}875\hat{k}$

Άρα $\vec{M}_E^R = \vec{EA} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -0{,}75 & 0{,}75 & 0{,}875 \\ 1399{,}2 & -416{,}7 & -4171{,}7 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 0{,}75 & 0{,}875 \\ -416{,}7 & -4171{,}7 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -0{,}75 & 0{,}875 \\ 1399{,}2 & -4171{,}7 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -0{,}75 & 0{,}75 \\ 1399{,}2 & -416{,}7 \end{vmatrix}$

$= (-3128{,}78 + 364{,}61)\hat{i} - (3128{,}78 - 1224{,}3)\hat{j} + (312{,}53 - 1049{,}4)\hat{k} =$

$= -2764{,}17\hat{i} - 1904{,}48\hat{j} - 736{,}87\hat{k}$ Nm β) Ομοίως με την $\vec{R}$, από δοκ.1 σειρ.3, πολ/ντας με 10, έχω

$$\vec{F_D} = -833\hat{i} + 1666,7\hat{j} - 1666,7\hat{k}$$

Αρχικά βρίσκω την ροπή της $\vec{F_D}$ ως προς σημείο της BC (διαλέγω το E γιατί έχω έτοιμο το $\vec{EA}$)

Άρα $\vec{M_E^{F_D}} = \vec{EA} \times \vec{F_D} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -0,75 & 0,75 & 0,875 \\ -833 & 1666,7 & -1666,7 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 0,75 & 0,875 \\ 1666,7 & -1666,7 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -0,75 & 0,875 \\ -833 & -1666,7 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -0,75 & 0,75 \\ -833 & 1666,7 \end{vmatrix}$

$= (-1250,03 - 1458,36)\hat{i} - (1250,03 + 728,88)\hat{j} + (-1250,03 + 624,75)\hat{k} =$

$= -2708,39\hat{i} - 1978,91\hat{j} - 625,28\hat{k}$

$\vec{CB} = -1,5\hat{i} - 1,5\hat{j} - 0,25\hat{k} \Rightarrow |\vec{CB}| = \sqrt{4,56} = 2,14 \Rightarrow \hat{CB} = -0,7\hat{i} - 0,7\hat{j} - 0,12\hat{k}$

Άρα $\vec{M_{BC}^{F_{AD}}} = \underline{\vec{M_E^{F_D}} \,|\, \hat{BC}} = (\vec{M_E^{F_D}} \cdot \hat{BC})\hat{BC} = (0,7 \cdot 2708,39 + 0,7 \cdot 1978,91 + 0,12 \cdot 625,28)\hat{BC}$

$= (1895,87 + 1385,24 + 75,03)\hat{BC} = 3356,14(-0,7\hat{i} - 0,7\hat{j} - 0,12\hat{k}) =$

$= -2349,3\hat{i} - 2349,3\hat{j} - 402,74\hat{k}$

Άσκηση 3

Από σειρά 3 ασκ. 2 έχω:

$A(0,0,0)$
$B(2{,}41, 0, 5{,}18)$
$C(8{,}07, 0, 2{,}94)$
$D(0,4,0)$

$\vec{DB} = 2{,}41\hat{i} - 4\hat{j} + 5{,}18\hat{k} \Rightarrow |\vec{DB}| = 6{,}98 \Rightarrow \hat{DB} = 0{,}35\hat{i} - 0{,}57\hat{j} + 0{,}74\hat{k}$

$\vec{DC} = 8{,}07\hat{i} - 4\hat{j} + 2{,}94\hat{k} \Rightarrow |\vec{DC}| = 9{,}47 \Rightarrow \hat{DC} = 0{,}85\hat{i} - 0{,}42\hat{j} + 0{,}31\hat{k}$

Δίνεται ότι $|\vec{F_{DB}}| = 2kN$ και $|\vec{F_{DC}}| = 4kN$

α)

Άρα $\vec{F_{DB}} = |\vec{F_{DB}}|\,\hat{DB} = 2(0{,}35\hat{i} - 0{,}57\hat{j} + 0{,}74\hat{k}) = 0{,}7\hat{i} - 1{,}14\hat{j} + 1{,}48\hat{k}$

και $\vec{F_{DC}} = |\vec{F_{DC}}|\,\hat{DC} = 4(0{,}85\hat{i} - 0{,}42\hat{j} + 0{,}31\hat{k}) = 3{,}4\hat{i} - 1{,}68\hat{j} + 1{,}24\hat{k}$

Έχω $\vec{AD} = 0\hat{i} + 4\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{AD}| = 4 \Rightarrow \hat{AD} = 0\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k}$

$$\vec{M_A^{F_{DB}}} = \vec{AD} \times \vec{F_{DB}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0{,}7 & -1{,}14 & 1{,}48 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1{,}14 & 1{,}48 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}7 & 1{,}48 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0{,}7 & -1{,}14 \end{vmatrix} =$$

$= 5{,}92\hat{i} + 0\hat{j} - 2{,}8\hat{k}$ kNm

$$\vec{M_A^{F_{DC}}} = \vec{AD} \times \vec{F_{DC}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 3{,}4 & -1{,}68 & 1{,}24 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1{,}68 & 1{,}24 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3{,}4 & 1{,}24 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3{,}4 & -1{,}68 \end{vmatrix} =$$

$= 4{,}96\hat{i} + 0\hat{j} - 13{,}6\hat{k}$ kNm β) Έχω $\vec{R} = \vec{F_{OB}} + \vec{F_{OC}} = 4{,}1\hat{i} - 2{,}82\hat{j} + 2{,}72\hat{u}$

Το γ.κ του $\overset{\triangle}{ABC}$: $G\left(\frac{2{,}41+8{,}07}{3}, 0, \frac{5{,}18+2{,}94}{3}\right) = \left(\frac{10{,}48}{3}, 0, \frac{8{,}12}{3}\right) = (3{,}49, 0, 2{,}71)$

$\vec{GD} = -3{,}49\hat{i} + 4\hat{j} - 2{,}71\hat{u}$

$$\vec{M_G^R} = \vec{GD} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ -3{,}49 & 4 & -2{,}71 \\ 4{,}1 & -2{,}82 & 2{,}72 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 4 & -2{,}71 \\ -2{,}82 & 2{,}72 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -3{,}49 & -2{,}71 \\ 4{,}1 & 2{,}72 \end{vmatrix} + \hat{u}\begin{vmatrix} -3{,}49 & 4 \\ 4{,}1 & -2{,}82 \end{vmatrix} =$$

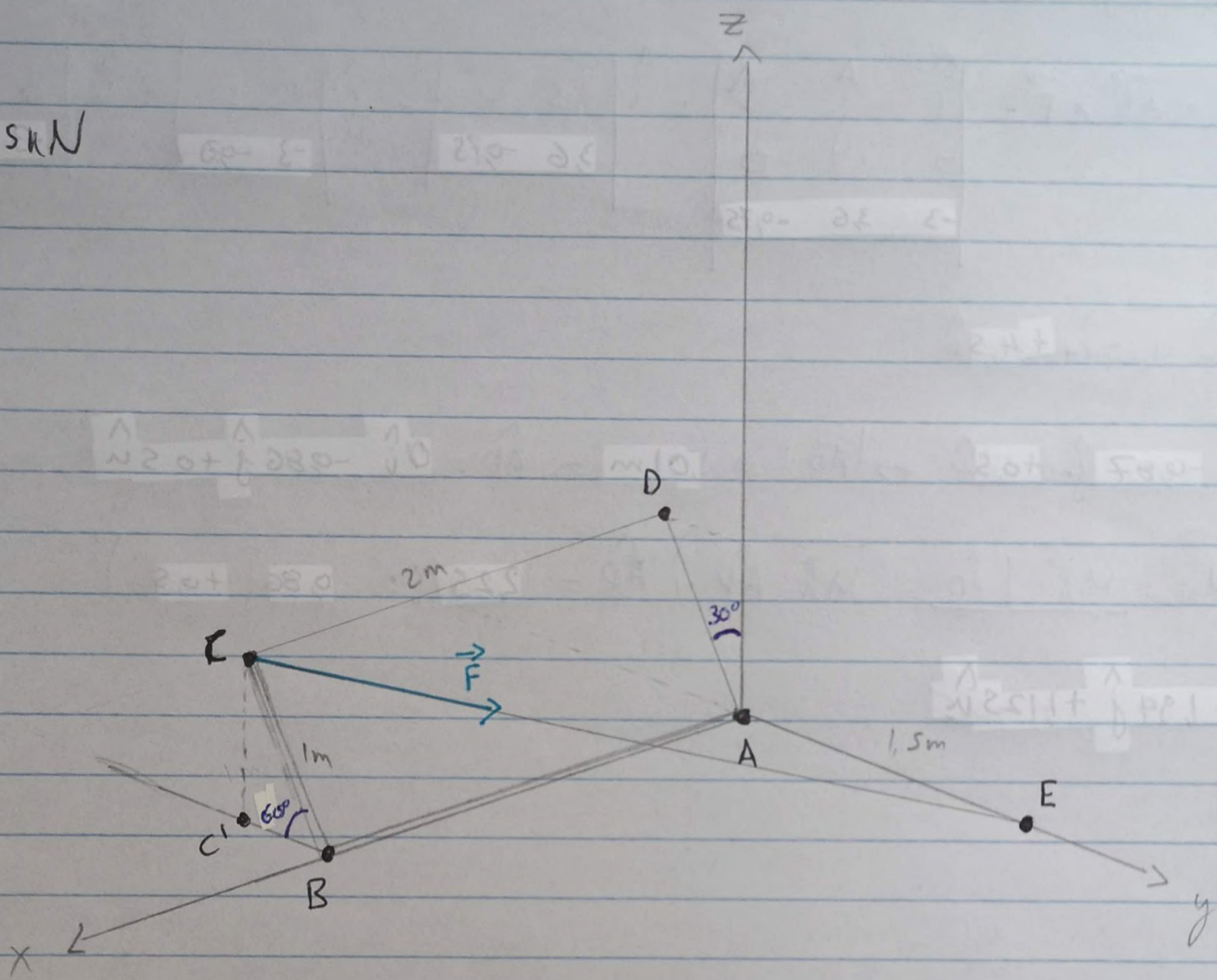
$$= (4\cdot 2{,}72 - 2{,}82\cdot 2{,}71)\hat{i} - (-3{,}49\cdot 2{,}72 + 4{,}1\cdot 2{,}71)\hat{j} + (3{,}49\cdot 2{,}82 - 4\cdot 4{,}1)\hat{u} =$$

$$= (10{,}88 - 7{,}64)\hat{i} - (-9{,}49 + 11{,}11)\hat{j} + (9{,}84 - 16{,}4)\hat{u} =$$

$$= 3{,}24\hat{i} - 1{,}62\hat{j} - 6{,}56\hat{u}$$

Άσκηση 4

$|\vec{F}| = 15kN$



Έστω C' η προβολή του C στο επίπεδο (x,y)

$\sin(60°) = \frac{CC'}{CB} \Leftrightarrow CC' = CB \cdot \sin(60°) = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,87$

$\cos(60°) = \frac{C'B}{CB} \Leftrightarrow C'B = \cos(30)\, CB = 0,87 \cdot 1 = 0,5$

Άρα έχω: A(0,0,0)

B(2,0,0)

C(2, 0,5, 0,87)

D(0, 0,5, 0,87)

E(0, 1,5, 0)

$\vec{CE} = -2\hat{i} + 1\hat{j} - 0,87\hat{k} \Rightarrow |\vec{CE}| = 2,4\ m \Rightarrow \hat{CE} = -0,83\hat{i} + 0,42\hat{j} - 0,36\hat{k}$

Άρα $\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \hat{CE} = -12,45\hat{i} + 6,3\hat{j} - 5,4\hat{k}$

a) $\vec{AE} = 0\hat{i} + 1{,}5\hat{j} + 0\hat{k}$

Apa $\vec{M}_A^{\vec{F}} = \vec{AE} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ -12{,}45 & 6{,}3 & -5{,}4 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 1{,}5 & 0 \\ 6{,}3 & -5{,}4 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -12{,}45 & -5{,}4 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & 1{,}5 \\ -12{,}45 & 6{,}3 \end{vmatrix}$

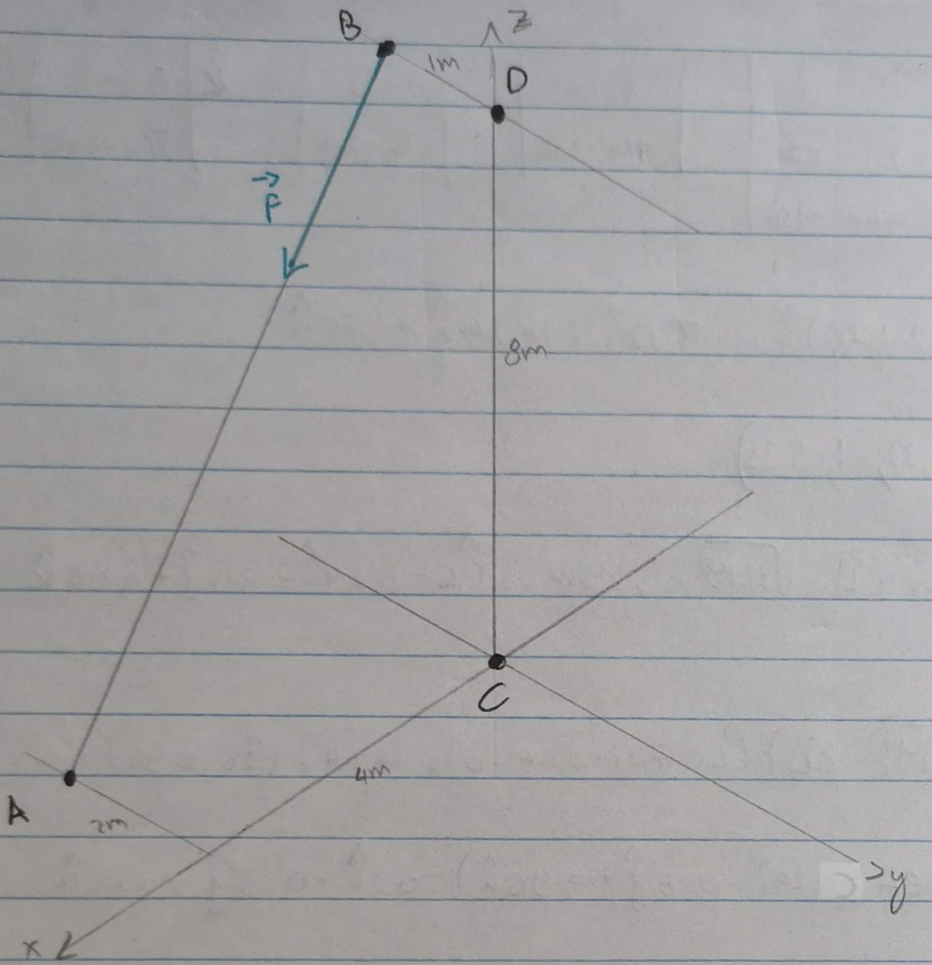
$= -8{,}1\,\hat{i} + 0\hat{j} + 18{,}68\,\hat{k}$

b) $\vec{AD} = 0\hat{i} - 0{,}5\,\hat{j} + 0{,}87\,\hat{k} \Rightarrow |\vec{AD}| = 1 \Rightarrow \hat{AD} = \vec{AD}$

Apa $\vec{M}_{AD}^{\vec{F}} = \underline{\vec{M}_A^{\vec{F}} \mid \hat{AD}} = \left(\vec{M}_A^{\vec{F}} \cdot \hat{AD}\right)\hat{AD} = 16{,}25\,(0\hat{i} - 0{,}5\,\hat{j} + 0{,}87\,\hat{k}) =$

$= 0\hat{i} - 8{,}125\,\hat{j} + 14{,}1.4\,\hat{k}$

Άσκηση 5



$|\vec{F}| = 4kN$

Έχω: A(4, −2, 0), B(0, −1, 8), C(0, 0, 0), D(0, 0, 8)

$\vec{BA} = 4\hat{i} - 1\hat{j} - 8\hat{k} \Rightarrow |\vec{BA}| = \sqrt{81} = 9m \Rightarrow \hat{BA} = 0,44\hat{i} - 0,11\hat{j} - 0,89\hat{k}$

Άρα $\vec{F} = |\vec{F}|\,\hat{BA} = 4(0,44\hat{i} - 0,11\hat{j} - 0,89\hat{k}) = 1,76\hat{i} - 0,44\hat{j} - 3,56\hat{k}$

a) $\vec{DB} = 0\hat{i} - 1\hat{j} + 0\hat{k}$

Άρα $\vec{M}_D^F = \vec{DB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1,76 & -0,44 & -3,56 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -0,44 & -3,56 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1,76 & -3,56 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1,76 & -0,44 \end{vmatrix} =$

$= 3,56\hat{i} + 0\hat{j} + 1,76\hat{k}$

β) $\vec{CA} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 0\hat{k}$

Άρα $\vec{M}_C^{F} = \vec{CA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -2 & 0 \\ 1{,}76 & -0{,}44 & -3{,}56 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -0{,}44 & -3{,}56 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1{,}76 & -3{,}56 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1{,}76 & -0{,}44 \end{vmatrix} =$

$= 7{,}12\hat{i} + 14{,}24\hat{j} + (-1{,}76 + 2\cdot 1{,}76)\hat{k} = 7{,}12\hat{i} + 14{,}24\hat{j} + 1{,}76\hat{k}$

γ) Έχω $L\left(\frac{4}{3}, \frac{-3}{3}, \frac{16}{3}\right) = (1{,}33, -1, 5{,}33)$

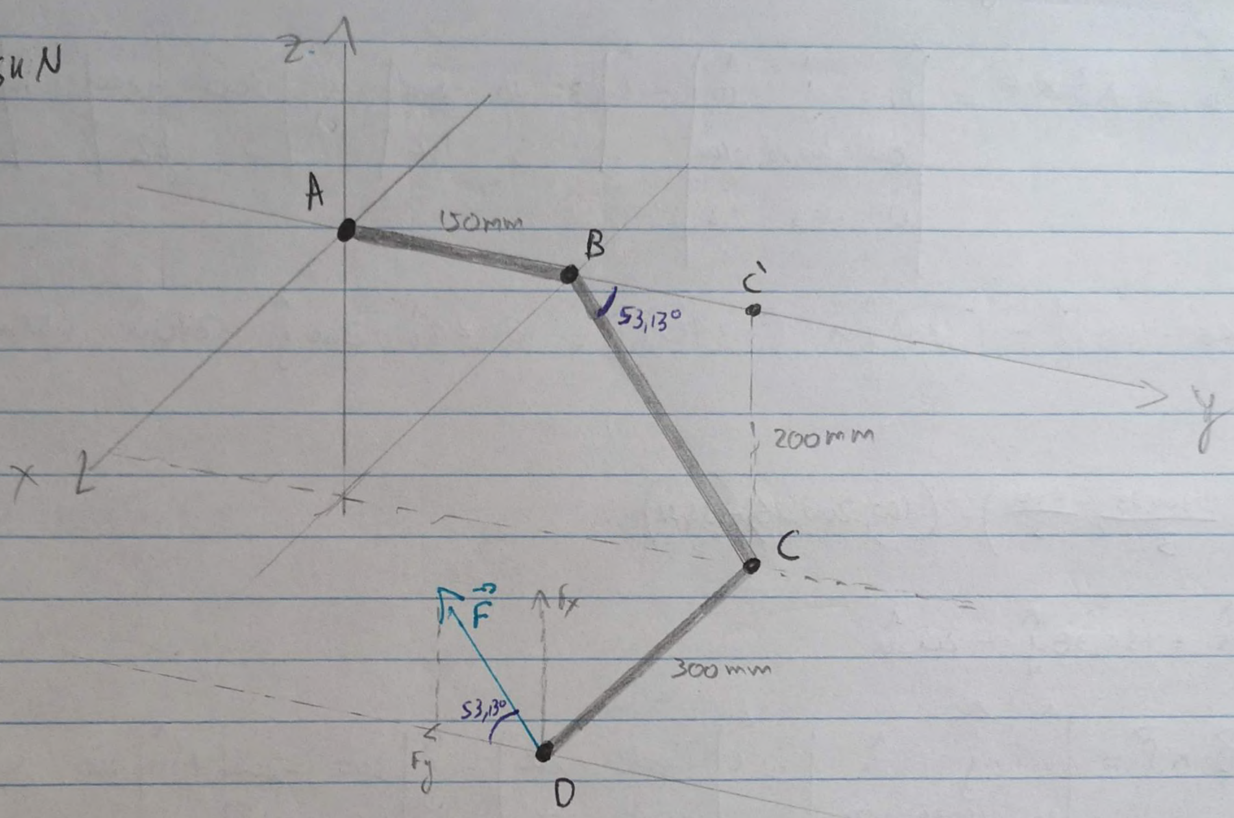
άρα $\vec{CL} = 1{,}33\hat{i} - 1\hat{j} + 5{,}33\hat{k} \Rightarrow |\vec{CL}| = \sqrt{31{,}18} = 5{,}58m \Rightarrow \hat{CL} = 0{,}24\hat{i} - 0{,}18\hat{j} + 0{,}96\hat{k}$

Επομένως, $\vec{M}^{F}_{\hat{CL}} = \underline{\overrightarrow{M^{F}_{C}|\hat{CL}}} = (\vec{M}^{F}_{C} \cdot \hat{CL})\hat{CL} = (7{,}12\cdot 0{,}24 - 0{,}18\cdot 14{,}24 + 1{,}76\cdot 0{,}96)\hat{CL} =$

$= (1{,}71 - 2{,}56 + 1{,}69)\hat{CL} = 0{,}84(0{,}24\hat{i} - 0{,}18\hat{j} + 0{,}96\hat{k}) = 0{,}2\hat{i} - 0{,}15\hat{j} + 0{,}81\hat{k}$

Άσκηση 6

$|\vec{F}| = 1,5kN$



$F_y = \cos(53,13)|\vec{F}| = 0,6 \cdot 1,5 = 0,9$

$f_z = \sin(53,13)|\vec{F}| = 0,8 \cdot 1,5 = 1,2$

~~Άρα~~ Άρα $\vec{F} = 0\hat{i} - 0,9\hat{j} + 1,2\hat{k}$

$\tan(53,13) = \dfrac{200}{BC'} \Leftrightarrow BC' = \dfrac{200}{1,33} = 150,38mm$

Έχω A(0,0,0)
B(0,150,0)
C(0,300,38,-200)
D(300,300,38,-200)

$\vec{CD} = 300\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{CD}| = 300m$

a)

Άρα $\vec{M}_C^F = \vec{CD} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 300 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9 & 1,2 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -0,9 & 1,2 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 300 & 0 \\ 0 & +1,2 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 300 & 0 \\ 0 & -0,9 \end{vmatrix} =$

$= 0\hat{i} - 360\hat{j} - 270\hat{k}$ kNmm β) $\vec{AD} = 300\hat{i} + 300{,}38\hat{j} - 200\hat{k}$

Άρα $\vec{M}_A^F = \vec{AD} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 300 & 300{,}38 & -200 \\ 0 & -0{,}9 & 1{,}2 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 300{,}38 & -200 \\ -0{,}9 & 1{,}2 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 300 & -200 \\ 0 & 1{,}2 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 300 & 300{,}38 \\ 0 & -0{,}9 \end{vmatrix}$

$= (360{,}46 - 180)\hat{i} - (360)\hat{j} + (-270)\hat{k} = 180{,}46\hat{i} - 360\hat{j} - 270\hat{k}$ kNmm

γ) $L\left(100, \frac{2 \cdot 300{,}38}{3}, \frac{-400}{3}\right) = (100, 200{,}25, -133{,}33)$

$\vec{BD} = 300\hat{i} + 150{,}38\hat{j} - 200\hat{k}$

$\vec{M}_B^F = \vec{BD} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 300 & 150{,}38 & -200 \\ 0 & -0{,}9 & 1{,}2 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 150{,}38 & -200 \\ -0{,}9 & 1{,}2 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 300 & -200 \\ 0 & 1{,}2 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 300 & 150{,}38 \\ 0 & -0{,}9 \end{vmatrix} =$

$= (180{,}46 - 180)\hat{i} - 360\hat{j} + (-270)\hat{k} = 0{,}46\hat{i} - 360\hat{j} - 270\hat{k}$ kNmm

$\vec{BL} = 100\hat{i} + 50{,}25\hat{j} - 133{,}33\hat{k} \Rightarrow |\vec{BL}| = \sqrt{30301{,}95} = 174{,}07$ mm

Άρα $\hat{BL} = 0{,}57\hat{i} + 0{,}29\hat{j} - 0{,}77\hat{k}$

Άρα $\vec{M}_{BL}^F = \underline{\vec{M}_B^F \mid \hat{BL}} = (\vec{M}_B^F \cdot \hat{BL})\hat{BL} = (0{,}46 \cdot 0{,}57 - 360 \cdot 0{,}29 + 0{,}77 \cdot 270)\hat{BL} = (0{,}26 - 104{,}4 + 207{,}9)\hat{BL}$

$= 103{,}76(0{,}57\hat{i} + 0{,}29\hat{j} - 0{,}77\hat{k}) = 59{,}14\hat{i} + 30{,}09\hat{j} - 79{,}9\hat{k}$ kNmm

δ) $\vec{AB} \times \vec{DB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 300 & 300{,}38 & -200 \\ 300 & 150{,}38 & -200 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 300{,}38 & -200 \\ 150{,}38 & -200 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 300 & -200 \\ 300 & -200 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 300 & 300{,}38 \\ 300 & 150{,}38 \end{vmatrix} =$

$= (-60076 + 30076)\hat{i} + 0\hat{j} + (45114 - 90114) = -30000\hat{i} + 0\hat{j} - 45000\hat{k} = \underline{\vec{0}}$

Έχω $|\vec{\underline{o}}| = \sqrt{2925000000} = 54083,27 \text{ mm}$

Άρα $\hat{\underline{o}} = -0,55\hat{i} + 0\hat{j} - 0,83\hat{k}$

Παίρνω $\underline{\vec{M}_C^F \mid \hat{\underline{o}}} = (\vec{M}_C^F \cdot \hat{\underline{o}})\,\hat{\underline{o}} = 270 \cdot 0,83\,\hat{\underline{o}} = 224,1\,(-0,55\hat{i} + 0\hat{j} - 0,83\hat{k})$

$= -123,26\hat{i} + 0\hat{j} - 186,003$ kNmm

Άσκηση 7

A(0, 1.2, 0) [m]

Από άσκηση 4 σειρά 3 έχω ότι:

A(0, 1.2, 0)	$\vec{AC} = 0\hat{i} + 0{,}8\hat{j} - 1\hat{u} \Rightarrow \lvert\vec{AC}\rvert = 1{,}28m \Rightarrow \hat{AC} = 0\hat{i} + 0{,}63\hat{j} - 0{,}78\hat{u}$
B(-0.3, 2, 1)	$\vec{AB} = -0{,}3\hat{i} + 0{,}8\hat{j} + 1\hat{u} \Rightarrow \lvert\vec{AB}\rvert = 1{,}32m \Rightarrow \vec{BA} = 0{,}3\hat{i} - 0{,}8\hat{j} - 1\hat{u}$
C(0, 2, -1)	$\vec{AD} = 2\hat{i} + 0{,}8\hat{j} + 0\hat{u} \Rightarrow \lvert\vec{AD}\rvert = 2{,}16m \Rightarrow \vec{DA} = -2\hat{i} - 0{,}8\hat{j} + 0\hat{u}$
D(2, 2, 0)	$\vec{F_{AC}} = 0\hat{i} + 1{,}88\hat{j} - 2{,}34\hat{u}$ [kN]
E(-0.3, 0, 1)	

a)

Άρα $\vec{M_B^{F_{AC}}} = \vec{BA} \times \vec{F_{AC}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ 0{,}3 & -0{,}8 & -1 \\ 0 & 1{,}88 & -2{,}34 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -0{,}8 & -1 \\ 1{,}88 & -2{,}34 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 0{,}3 & -1 \\ 0 & -2{,}34 \end{vmatrix} + \hat{u}\begin{vmatrix} 0{,}3 & -0{,}8 \\ 0 & 1{,}88 \end{vmatrix} =$

$= (0{,}8 \cdot 2{,}34 + 1{,}88)\hat{i} - (-2{,}34 \cdot 0{,}3)\hat{j} + (0{,}3 \cdot 1{,}88)\hat{u} = 3{,}75\hat{i} + 0{,}7\hat{j} + 0{,}56\hat{u}$ kNm

$\vec{M_D^{F_{AC}}} = \vec{DA} \times \vec{F_{AC}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ -2 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 1{,}88 & -2{,}34 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -0{,}8 & 0 \\ 1{,}88 & -2{,}34 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2{,}34 \end{vmatrix} + \hat{u}\begin{vmatrix} -2 & -0{,}8 \\ 0 & 1{,}88 \end{vmatrix} =$

$= 0{,}8 \cdot 2{,}34\hat{i} - 2 \cdot 2{,}34\hat{j} - 2 \cdot 1{,}88\hat{u} = 1{,}87\hat{i} - 4{,}68\hat{j} - 3{,}76\hat{u}$ kNm

b) $\vec{BD} = 2{,}3\hat{i} + 0\hat{j} - 1\hat{u} \Rightarrow \lvert\vec{BD}\rvert = \sqrt{6{,}29} = 2{,}51m \Rightarrow \hat{BD} = 0{,}92\hat{i} + 0\hat{j} - 0{,}4\hat{u}$ m

Άρα $\vec{M_{BD}^{F_{AC}}} = \underline{\vec{M_B^{F_{AC}}} \mid \hat{BD}} = (\vec{M_B^{F_{AC}}} \cdot \hat{BD})\hat{BD} = (3{,}75 \cdot 0{,}92 - 0{,}4 \cdot 0{,}56)\hat{BD} = (3{,}45 - 0{,}22)\hat{BD} =$

$= 3{,}23(0{,}92\hat{i} + 0\hat{j} - 0{,}4\hat{u}) = 2{,}97\hat{i} + 0\hat{j} - 1{,}29\hat{u}$ kNm γ) $\overrightarrow{M_{BD}^{F_{AC}}} \| \hat{AC} = \left(\overrightarrow{M_{BD}^{F_{AC}}} \cdot \hat{AC}\right)\hat{AC} = 0{,}78 \cdot 1{,}29\, \hat{AC} = 1{,}01\left(0\hat{i} + 0{,}63\hat{j} - 0{,}78\hat{k}\right) =$

$= 0\hat{i} + 0{,}64\hat{j} - 0{,}79\hat{k}$ kNm

δ) $\cos(\widehat{\overrightarrow{M_B^{F_{AC}}}, \overrightarrow{AD}}) = \dfrac{\overrightarrow{M_D^{F_{AC}}} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{M_D^{F_{AC}}}||\overrightarrow{AD}|}$

Έχω $|\overrightarrow{M_B^{F_{AC}}}| = \sqrt{14{,}87} = 3{,}86$ m

και $|\overrightarrow{M_D^{F_{AC}}}| = \sqrt{39{,}54} = 6{,}29$ m

Άρα $\cos(\widehat{\overrightarrow{M_B^{F_{AC}}}, \overrightarrow{AD}}) = \dfrac{3{,}75 \cdot 2 + 0{,}8 \cdot 0{,}7}{3{,}86 \cdot 2{,}16} = \dfrac{7{,}5 + 0{,}56}{8{,}34} = \dfrac{8{,}06}{8{,}34} = 0{,}966 \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{M_B^{F_{AC}}}, \overrightarrow{AD}}) = 14{,}89$

$\cos(\widehat{\overrightarrow{M_D^{F_{AC}}}, \overrightarrow{AD}}) = \dfrac{\overrightarrow{M_D^{F_{AC}}} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{M_D^{F_{AC}}}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{2 \cdot 1{,}87 - 0{,}8 \cdot 4{,}68}{6{,}29 \cdot 2{,}16} = \dfrac{3{,}74 - 3{,}74}{6{,}29 \cdot 2{,}16} = 0 \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{M_D^{F_{A,C}}}, \overrightarrow{AD}}) = 90^\circ$

ε) $\vec{\underline{e}} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -0{,}3 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}8 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 0{,}8 & 1 \\ 0{,}8 & -1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -0{,}3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -0{,}3 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}8 \end{vmatrix} =$

$= (-0{,}8 - 0{,}8)\hat{i} - (0{,}3)\hat{j} + (-0{,}3 \cdot 0{,}8)\hat{k} = -1{,}6\hat{i} - 0{,}3\hat{j} - 0{,}24\hat{k}$

Άρα $\vec{\underline{e}} = 1{,}6\hat{i} + 0{,}3\hat{j} + 0{,}24\hat{k} \Rightarrow |\vec{\underline{e}}| = \sqrt{2{,}74} = 1{,}66$ m $\Rightarrow \hat{\underline{e}} = 0{,}97\hat{i} + 0{,}18\hat{j} + 0{,}14\hat{k}$

Άρα $\overrightarrow{M_{BD}^{F_{AC}}} \| \hat{\underline{e}} = \left(\overrightarrow{M_{BD}^{F_{AC}}} \cdot \hat{\underline{e}}\right)\hat{\underline{e}} = (2{,}97 \cdot 0{,}97 - 1{,}29 \cdot 0{,}14)\hat{\underline{e}} = (2{,}88 - 0{,}18)\hat{\underline{e}} = 2{,}7\hat{\underline{e}} =$

$= 2{,}7(0{,}97\hat{i} + 0{,}18\hat{j} + 0{,}14\hat{k}) = 2{,}62\hat{i} + 0{,}49\hat{j} + 0{,}38\hat{k}$ kNm