

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 1

### Κινηματική

1. Η ταχύτητα ενός σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη σχέση  $v(t) = -v \ln(1 - bt)$ . Να βρείτε την επιτάχυνση και τη θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου αν  $x(0) = 0$ .
2. Η ταχύτητα ενός σωματιδίου που κινείται σε οριζόντια ευθεία μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση  $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$ ,  $v_0, \tau > 0$ . Αν  $x(0) = 0$  να βρείτε την επιτάχυνση και την θέση του κινητού συναρτήσει του χρόνου.
3. Η επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα δίνεται από τη σχέση  $a(t) = (4 - t^2)$  (SI). Υπολογίστε την ταχύτητα και την θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου, αν για  $t = 3\text{s}$  είναι  $v = 2\text{m/s}$  και  $x = 9\text{m}$ .
4. Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης τους άξονα  $x$  με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση  $v = k\sqrt{x}$ ,  $k > 0$ . Αν  $x(0) = 0$ , να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου. Επίσης, να βρείτε την μέση ταχύτητά του σωματιδίου στο διάστημα μέχρι να φτάσει σε απόσταση  $S$  από την αρχή.
5. Σώμα κινείται σε οριζόντια ευθεία με επιτάχυνση που δίνεται από τη σχέση  $a = 6\sqrt{x}$  (SI) και γνωρίζουμε ότι για  $t = 2\text{s}$  το σώμα βρισκόταν στην θέση  $x(2) = 27\text{m}$  με ταχύτητα  $v(2) = 27\text{m/s}$ . Να υπολογίσετε την επιτάχυνση, την ταχύτητα και την θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου.
6. Η ταχύτητα ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης του άξονα  $x$  δίνεται από τη σχέση  $v = k(x_0 + x)$ ,  $k, x_0 > 0$ . Αν για  $t = 0$  είναι  $x = 0$ , να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.
7. Σώμα κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά με επιτάχυνση  $a = 2\sqrt{v}$  (SI). Για  $t = 2\text{s}$  είναι  $x = 64/3\text{m}$  και  $v = 16\text{m/s}$ . Να βρείτε την θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος συναρτήσει του χρόνου.
8. Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο  $x-y$  είναι  $\vec{r}(t) = 3\cos(\omega t)\hat{x} + 3\sin(\omega t)\hat{y}$ . Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος και να δείξετε ότι  $\vec{r} \perp \vec{v}$ ,  $\vec{r} \parallel \vec{a}$ . Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς του σώματος;
9. Ένα σωματίδιο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων κινείται στον χώρο με αρχική ταχύτητα  $\vec{v}(0) = v_0(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$  και επιτάχυνση  $\vec{a} = k\hat{x}$ . Να βρείτε το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου και την ταχύτητά του συναρτήσει του χρόνου.
10. Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου που κινείται σε οριζόντιο επίπεδο είναι  $\vec{a}(t) = -4\sin t\hat{x} + 3\cos t\hat{y}$  (SI). Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή  $t = \pi/4\text{s}$  και την εξίσωση της τροχιάς.
11. Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο  $x-y$  είναι  $\vec{r}(t) = kt\hat{x} - \lambda t^3\hat{y}$ . Να βρείτε: α) την εξίσωση της τροχιάς, β) την ταχύτητα και την επιτάχυνση (διανυσματικά και τα μέτρα τους), γ) την γωνία μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης.
12. Ένα σώμα κινείται στο επίπεδο  $x-y$  με τις συνιστώσες της ταχύτητάς του να είναι  $v_x = 4t^3 + 4t$ ,  $v_y = 4t$  (SI). Αν για  $t = 0$  το σώμα βρίσκεται στο σημείο  $(1, 2)\text{m}$  να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του.

13. Σώμα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο x-y κατά μήκος της τροχιάς  $y = 4x^2$  (SI) ενώ η προβολή της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x είναι σταθερή και ίση με 2m/s. Επίσης, για  $t = 0$  είναι  $y = 0$ . Να βρείτε τα διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.
14. Ένα σωματίδιο ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται σε ένα επίπεδο με σταθερή ακτινική ταχύτητα  $\dot{r} = 4$  m/s. Η γωνιακή του ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με  $\dot{\theta} = 2$  rad/s. Όταν το σωματίδιο φτάσει σε απόσταση 3m από την αρχή των αξόνων να βρείτε τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσής του. Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς;
15. Σωματίδιο κινείται επιβραδυνόμενο σε κυκλική τροχιά ακτίνας R έτσι ώστε για κάθε χρονική στιγμή η επικαμπύλιος και η επιτρόχιος επιτάχυνση έχουν το ίδιο μέτρο. Αν η αρχική ταχύτητα του σώματος είχε μέτρο  $v_0$  να υπολογίσετε: α) το μέτρο της ταχύτητας ως συνάρτηση του χρόνου και ως συνάρτηση του μήκους s που έχει διανύσει, β) το μέτρο της επιτάχυνσης ως συνάρτηση του χρόνου και του μήκους s.
16. Ένα σωματίδιο κινείται διαγράφοντας σπειροειδή τροχιά με κατεύθυνση προς τα έξω. Η εξίσωση της τροχιάς δίνεται από την σχέση  $r(\theta) = A\theta$ , όπου  $A = 1/\pi$  m/rad. Η γωνία αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου σύμφωνα με την αξίσωση  $\theta(t) = \frac{1}{2}at^2$ , όπου  $a$  είναι μία σταθερά. α) Να αποτυπώσετε την κίνηση του σωματιδίου σε σχήμα και να δείξετε προσεγγιστικά την ταχύτητα και την επιτάχυνση σε μερικά σημεία της τροχιάς. β) Να δείξετε ότι η ακτινική επιτάχυνση είναι μηδενική όταν  $\theta = 1/\sqrt{2}$  rad. γ) Σε ποιες γωνίες είναι ίσα μεταξύ τους τα μέτρα της ακτινικής και της εφαπτομενικής επιτάχυνσης;