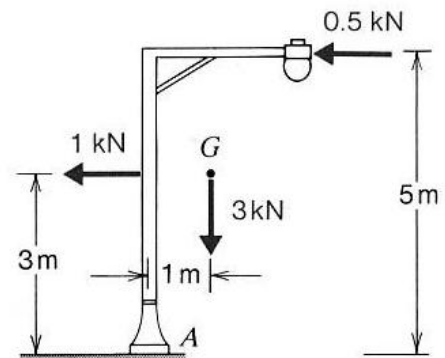
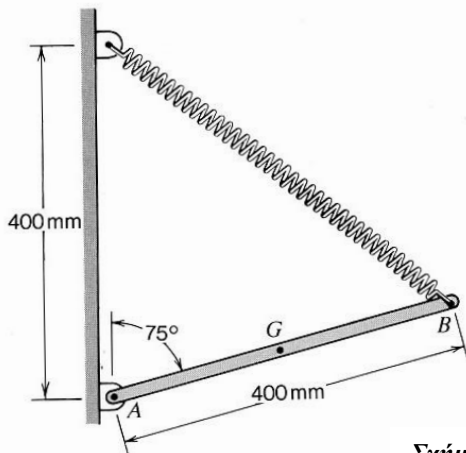


Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το διορθώσω: Georgera

**ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)****14^η σειρά ασκήσεων: Ισορροπία σε δύο διαστάσεις****Άσκηση 1**

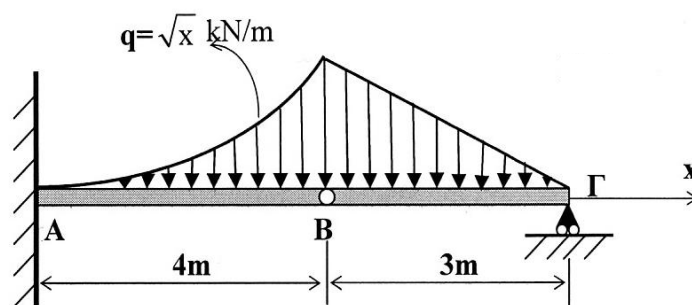
Ο σηματοδότης κυκλοφοριακής ρύθμισης φορτίζεται όπως φαίνεται στο Σχ.1. Υπολογίστε τις αντιδράσεις στην πάκτωση Α.

**Σχήμα 1****Σχήμα 2****Άσκηση 2**

Η σταθερά του ελατηρίου του Σχ.2 είναι ίση με 2 kN/m και το φυσικό του μήκος είναι 400 mm. Αν η ράβδος AB ισορροπεί στη θέση που απεικονίζεται στο σχήμα, υπολογίστε τη μάζα της ράβδου, γνωρίζοντας ότι το κέντρο μάζας της είναι στο μέσο G.

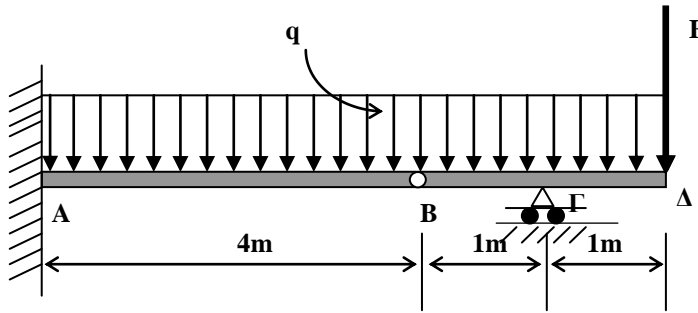
Άσκηση 3

Η αρθρωτή δοκός ΑΒΓ (άρθρωση στο Β) στηρίζεται με πάκτωση στο Α και κύλιση στο Γ, φέρει δε καταναμημένο φορτίο όπως φαίνεται στο Σχ.3. Υπολογίστε τις αντιδράσεις στηρίξεων και τη δύναμη που μεταβιβάζεται στην άρθρωση Β.

**Σχήμα 3**

Άσκηση 4

Η δοκός του Σχ.4 στηρίζεται με πάκτωση στο Α, κύλιση στο Γ, φέρει δε εσωτερική άρθρωση στο Β. Για τη φόρτιση του Σχ.4 υπολογίστε τις αντιδράσεις στηρίξεως. Δίνεται: $q=10 \text{ kN/m}$ και $F=50 \text{ kN}$.

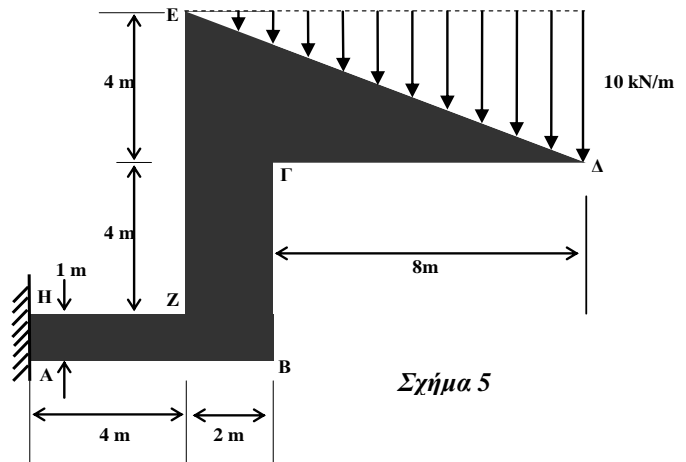


Σχήμα 4

Άσκηση 5

Ο πρόβολος του Σχ.5 είναι πακτωμένος στη θέση ΑΗ και φέρει τριγωνικώς κατανομημένο φορτίο κατά μήκος της ΕΔ. Να ευρεθούν:

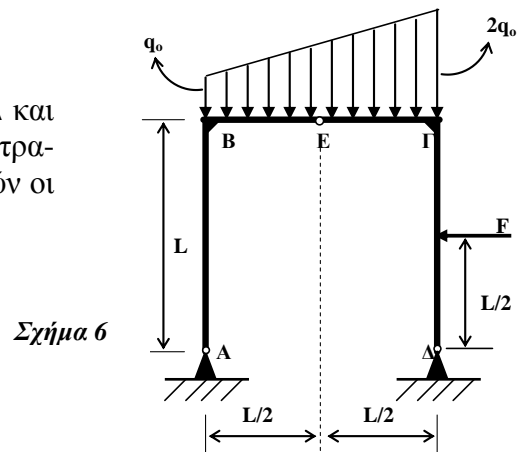
- Το κέντρο βάρους της διατομής.
- Οι αντιδράσεις στήριξης, αν το βάρος ανά μονάδα επιφάνειας του υλικού του προβόλου είναι $\rho=1 \text{ kN/m}^2$.



Σχήμα 5

Άσκηση 6

Το πλαίσιο του Σχ.6 στηρίζεται με αρθρώσεις στα Α και Δ και φέρει εσωτερική άρθρωση στο Ε. Το πλαίσιο φορτίζεται μεραπεζοειδές φορτίο στο οριζόντιο τμήμα του. Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στηρίξεως. ($F=4 \text{ kN}$, $q_0=2 \text{ kN/m}$, $L=4 \text{ m}$).

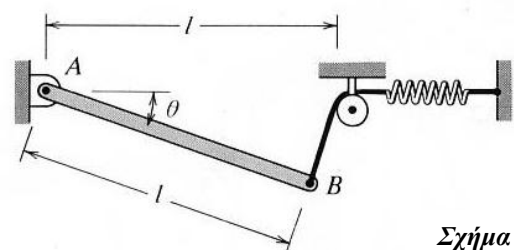


Σχήμα 6

Άσκηση 7

Η ομοιόμορφη ράβδος ΑΒ στηρίζεται με άρθρωση στο Α και καλώδιο που ενώνεται με οριζόντιο ελατήριο (Σχ.7). Το ελατήριο ευρίσκεται στο φυσικό του μήκος όταν η ράβδος είναι οριζόντια ($\theta=0^\circ$). Η σταθερά του είναι 2.5 kN/m . Το μήκος της ράβδου είναι $l=600 \text{ mm}$. Θεωρώντας την τροχαλία ιδανική:

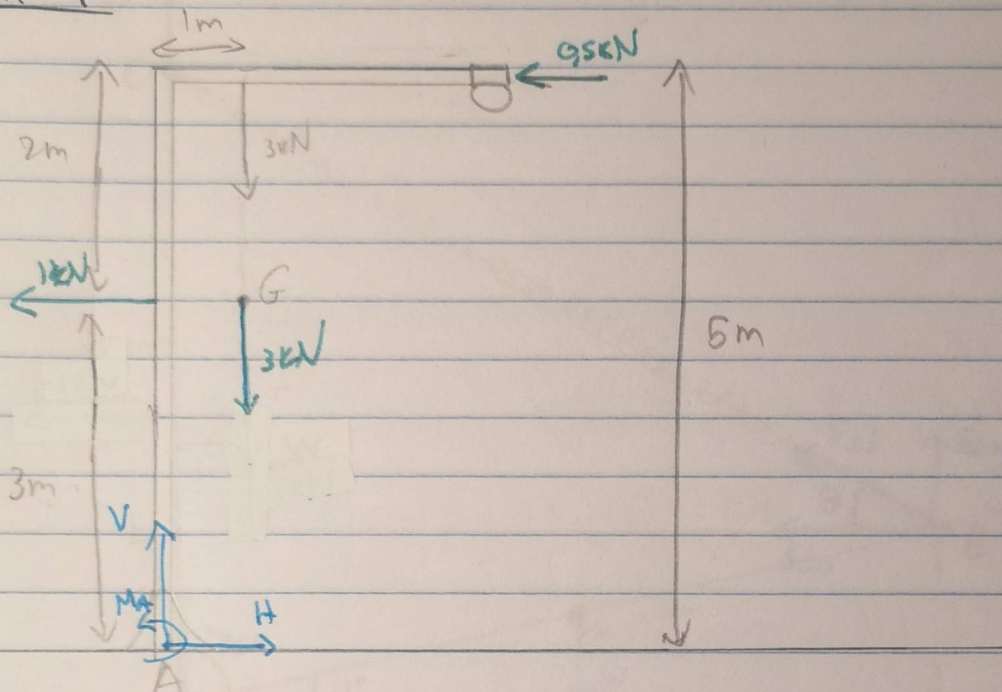
- Υπολογίστε τη μάζα της ράβδου αν στη στατική θέση ισορροπίας $\theta=30^\circ$.
- Εκφράστε τη μάζα της ράβδου συναρτήσει της σταθεράς του ελατηρίου k , του μήκους l και της γωνίας θ στη στατική θέση ισορροπίας.



Σχήμα 7

14^η Σειρά ασκήσεων: Ισορροπία σε δύο διαστάσεις

Άσκηση 1

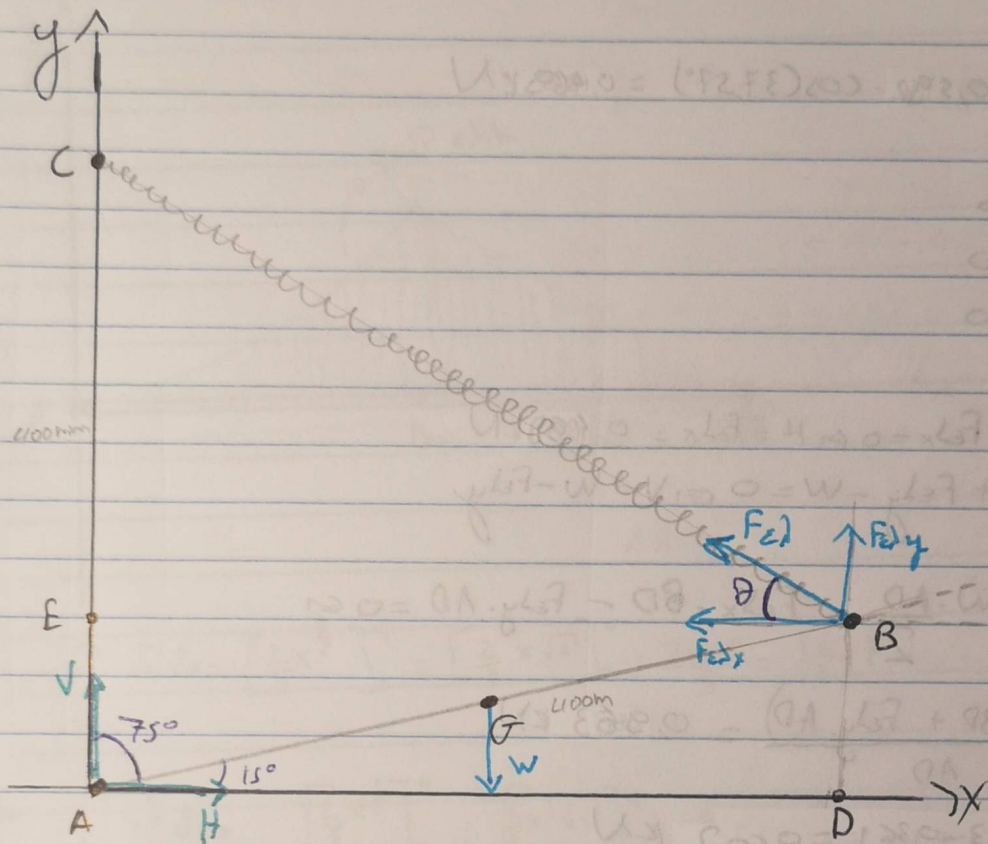


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H - 1 - 0.5 = 0 \Rightarrow H = 1.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - 3 = 0 \Rightarrow V = 3$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 0.5 \cdot 5 = 0 \Rightarrow M_A = -2.5 \text{ kN}$$

Ασκηση 2



Για το ελατήριο έχουμε:

$$L_0 = 400 \text{ mm} = 0,4 \text{ m}$$

$$k = 2 \text{ kN/m}$$

$$\text{Έχουμε } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2ACAB \cos 75^\circ = 2AB^2 - 2AB^2 \cdot \cos 75^\circ = (1 - 0,25) AB^2 = 1,48 \cdot 0,4^2 = 0,24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = 0,487 \text{ m}$$

$$\text{Αρα έχουμε } |F_{el}| = |kx| = k|\Delta L| = k(L - L_0) = 2 \cdot 0,087 = 0,174 \text{ kN}$$

$$\text{Έχουμε } \sin(15^\circ) = \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = \sin(15^\circ) \cdot AB = 0,1 \text{ m}$$

$$\cos(15^\circ) = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD = \cos(15^\circ) \cdot AB = 0,39 \text{ m}$$

$$\text{Αρα } \tan \theta = \frac{EC}{EB} = \frac{AC - BD}{AD} = \frac{0,3}{0,39} = 0,769 \Rightarrow \theta = 37,57^\circ$$

$$F_{Ely} = F_E \sin \theta = 0,174 \cdot \sin(37,57^\circ) = 0,106 \text{ kN}$$

$$F_{Ex} = F_E \cos \theta = 0,174 \cdot \cos(37,57^\circ) = 0,138 \text{ kN}$$

$$\text{poereri} \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{array} \right.$$

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H - F_{Ex} = 0 \Leftrightarrow H = F_{Ex} = 0,138 \text{ kN}$$

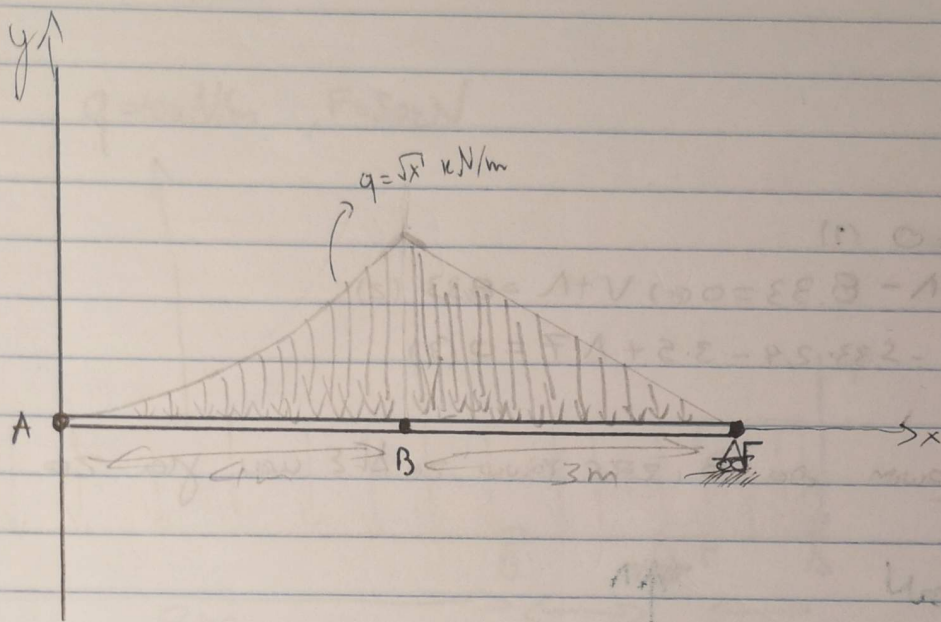
$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow N + F_{Ely} - W = 0 \Leftrightarrow V = W - F_{Ely}$$

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow \frac{W \cdot AD}{2} - F_{Ex} \cdot BD - F_{Ely} \cdot AD = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W = \frac{2(F_{Ex} \cdot BD + F_{Ely} \cdot AD)}{AD} = 0,283 \text{ kN}$$

$$\text{Apoi} \quad V = 0,283 - 0,106 = 0,177 \text{ kN}$$

Arunon 3

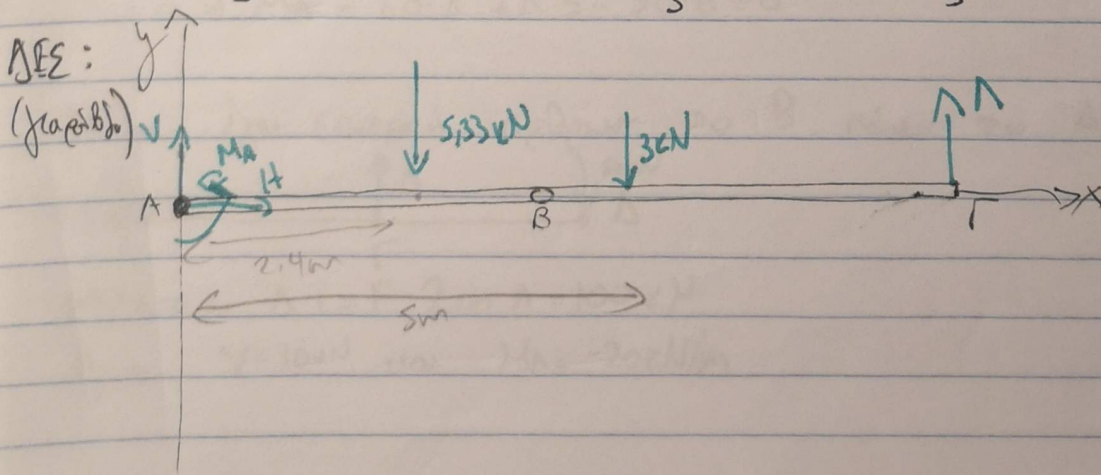


$$F_{eq1} = \int_0^4 q dx = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_0^4 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3} \text{ kN}$$

$$x_{eq} = \frac{\int_0^4 x \sqrt{x} dx}{\frac{16}{3}} = \frac{\int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx}{\frac{16}{3}} = \frac{\left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4}{\frac{16}{3}} = \frac{\left[\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} \right]_0^4}{\frac{16}{3}} = \frac{\frac{2}{5} \cdot 4^2 \cdot 2}{\frac{16}{3}} = \frac{\frac{4^3 \cdot 3}{5 \cdot 16}}{\frac{16}{3}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 16 \cdot 3} = \frac{12}{5} = 2.4 \text{ m}$$

$$F_{eq2} = \int_0^3 \left(-\frac{2}{3}x + 2 \right) dx = \left[-\frac{2x^2}{6} + 2x \right]_0^3 = \frac{-2 \cdot 9}{6} + 6 = 3 \text{ kN}$$

$$x_{eq2} = \frac{\int_0^3 x \left(-\frac{2}{3}x + 2 \right) dx}{3} + 4 = \frac{\int_0^3 \left(-\frac{2}{3}x^2 + 2x \right) dx}{3} + 4 = \frac{\left[-\frac{2x^3}{9} + x^2 \right]_0^3}{3} + 4 = \frac{-\frac{2 \cdot 3 \cdot 9}{9} + 9}{3} + 4 = \frac{-2 + 9}{3} + 4 = \frac{7}{3} + 4 = 1 + 4 = 5 \text{ m}$$



Πεδίο:

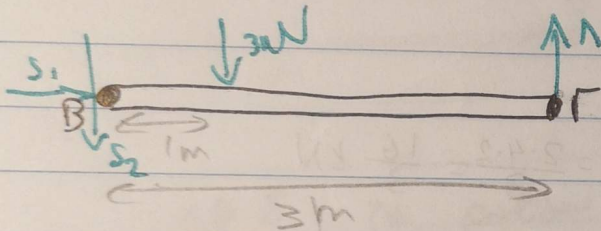
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V + \Lambda - 8,33 = 0 \Leftrightarrow V + \Lambda = 8,33 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow M_A - 8,33 \cdot 2,4 - 3 \cdot 5 + \Lambda \cdot 7 = 0 \quad (3)$$

Από: Έκω αφέρεται στο Β τότε είναι το ΔFE και για το ΒΓ



οπότε $\sum M_B = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1 = \Lambda \cdot 3 \Leftrightarrow \Lambda = 1 \text{ kN} \quad (4)$

Από ② & ④ $V = 7,33 \text{ kN} \quad (5)$

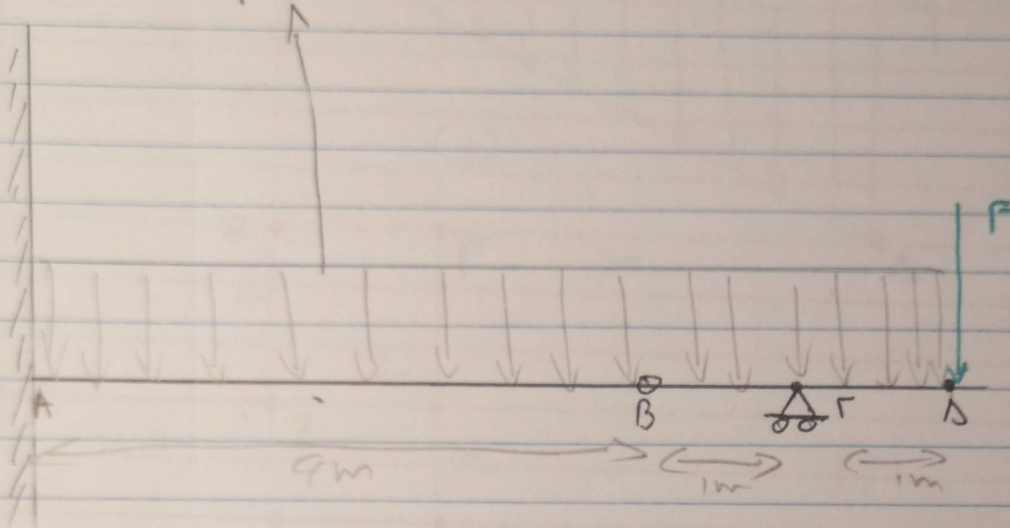
και ③ & ④ $M_A = 20,79 \text{ kNm}$

$$\sum F_x^{\text{af}} = 0 \Rightarrow S_1 = 0 \text{ kN}$$

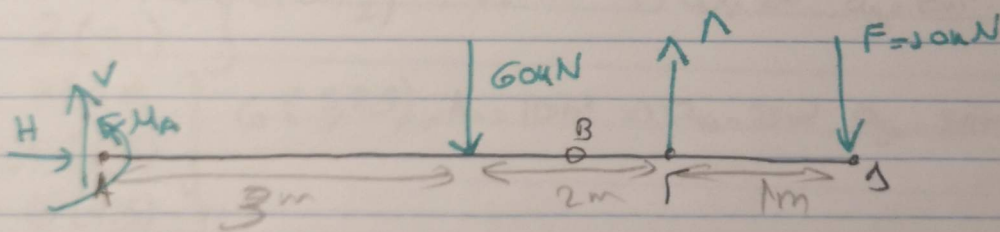
$$\sum F_y^{\text{af}} = 0 \Rightarrow S_2 = 1 - 3 = -2 \text{ kN}$$

Ασκηση 4

$$q = 10 \text{ kN/m}, F = 50 \text{ kN}$$



Καίτοι το $\Delta F = \Sigma$ το παθάνω

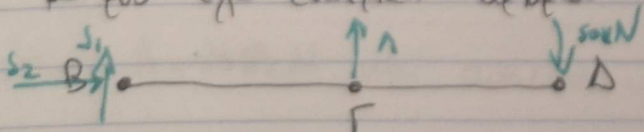


$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V + 1 - 60 - 50 = 0 \Rightarrow V + 1 = 110$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - 60 \cdot 3 + 1 \cdot 5 - 50 \cdot 6 = 0$$

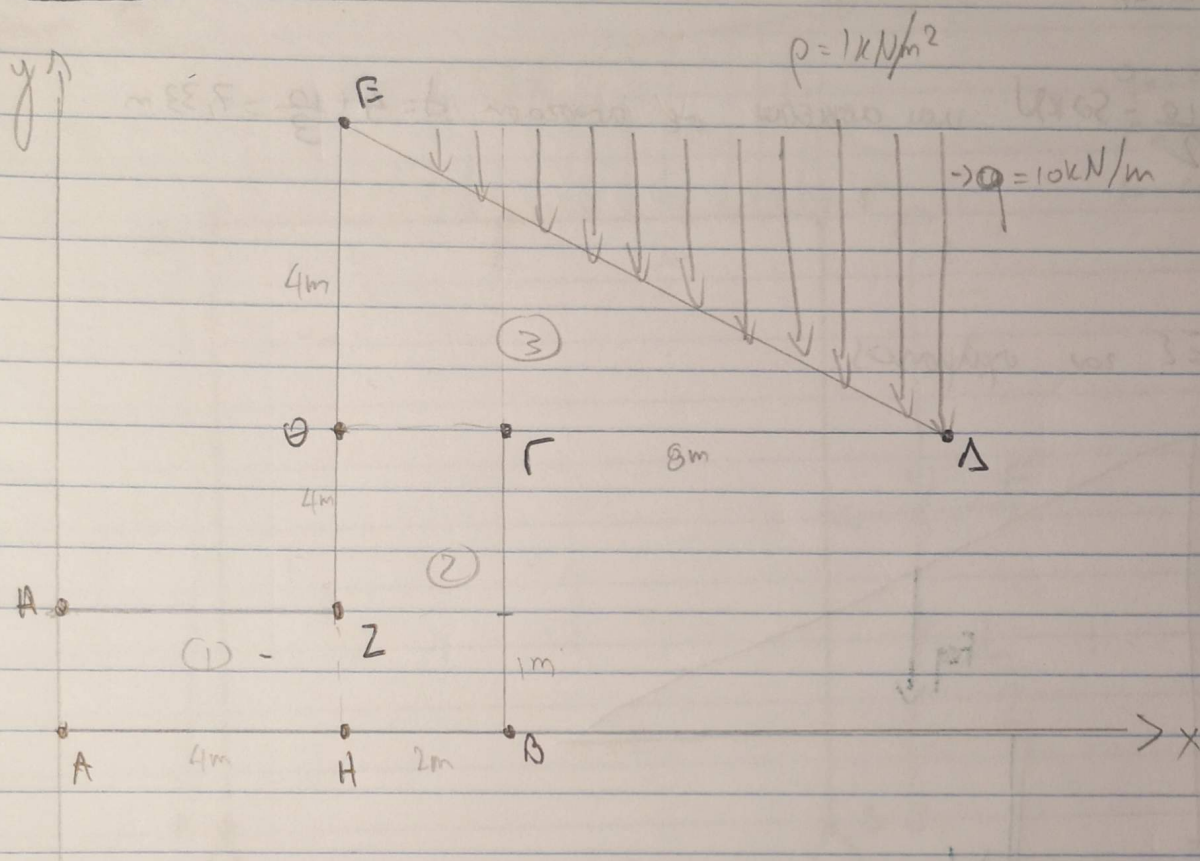
Καίτοι έχω εσωτερική αράδα στο B, παίνω το ΔΕΕ του BD



$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 1 \cdot 1 = F \cdot 2 \Rightarrow 1 = 2F \Rightarrow F = 0.5 \text{ kN}$$

Αρα $V = 10 \text{ kN}$ και $M_A = -20 \text{ kN/m}$

Asunon S



$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} E_{xw} \quad A(0,0) \\ Z(4,1) \end{array} \right\} C_1(2, \frac{1}{2}), A_1 = 4m^2 \Rightarrow Q_{x1} = 2m^3, Q_{y1} = 8m^3 \\
 & \left. \begin{array}{l} H(4,0) \\ \Gamma(6,5) \end{array} \right\} C_2(5, 2.5), A_2 = 10m^2 \Rightarrow Q_{x2} = 25m^3, Q_{y2} = 50m^3 \\
 & \left. \begin{array}{l} \Theta(4,5) \\ E(4,9) \\ \Delta(14,5) \end{array} \right\} C_3(7.33, 6.33), A_3 = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20m^2 \Rightarrow Q_{x3} = 126.67m^3, Q_{y3} = 146.67m^3
 \end{aligned}$$

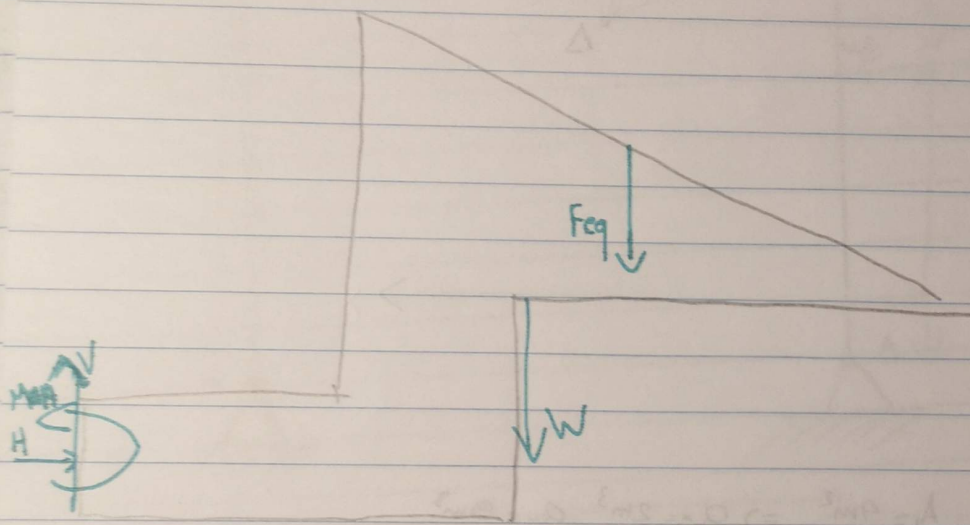
$$\begin{aligned}
 & \text{Enons } A = 34m^2, Q_x = Q_{x1} + Q_{x2} + Q_{x3} = 153.67m^3 \Rightarrow x_c = \frac{204.67}{34} = 6.02m \\
 & Q_y = Q_{y1} + Q_{y2} + Q_{y3} = 204.67m^3 \Rightarrow y_c = \frac{153.67}{34} = 4.52m
 \end{aligned}$$

$$W = p \cdot A = 34kN \text{ uas adunat pe } x_c.$$

~~Feq = 100 kN~~

$F_{eq} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ kN}$ και αποκεντρω σε αποσταση $d = 4 + \frac{10}{3} = 7,33 \text{ m}$

και να το ΔΕΕ του οχήματος



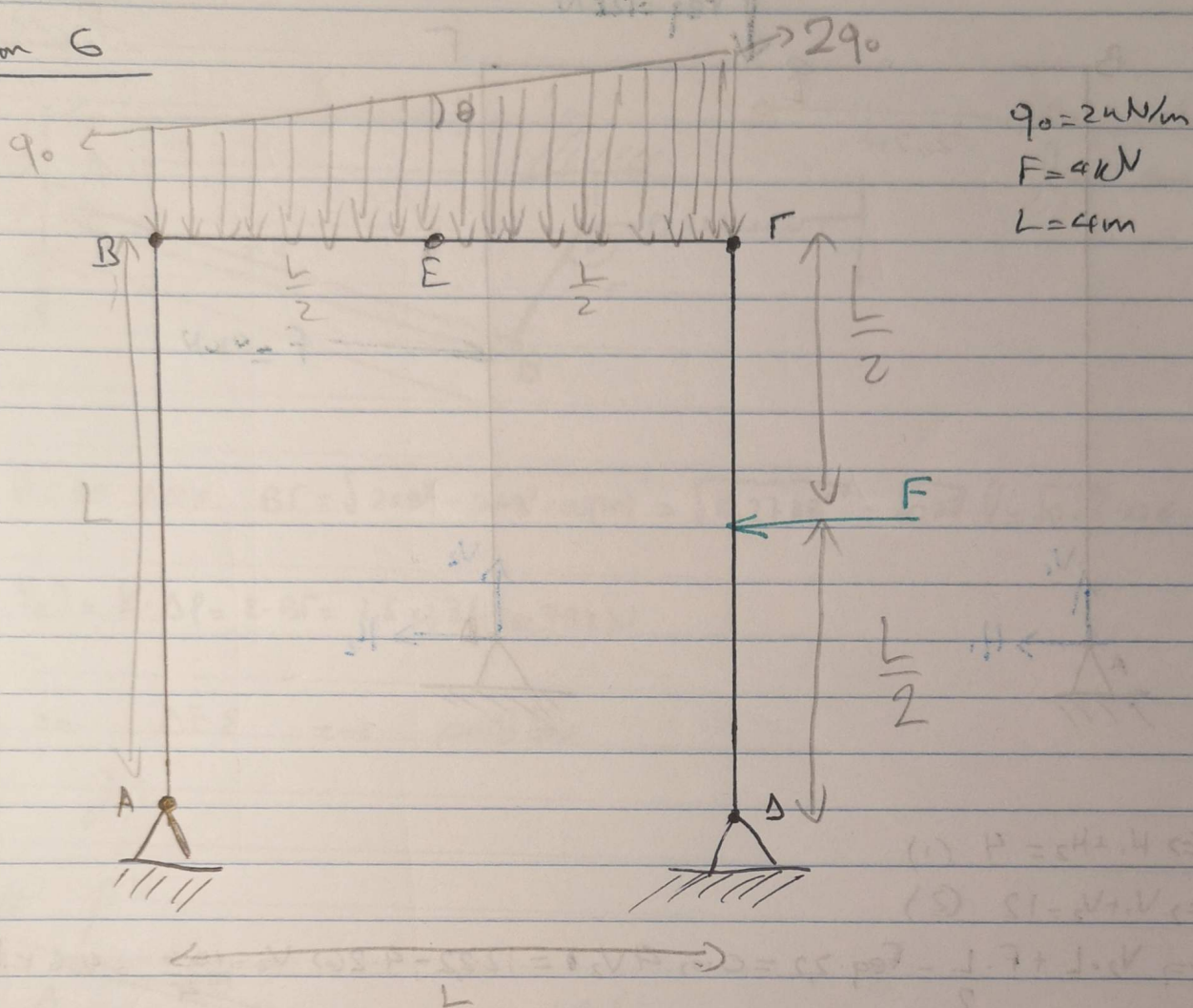
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = W + F_{eq} = 50 + 34 = 84 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_H = 6,02 \cdot W + 7,33 \cdot F_{eq} = 204,68 + 366,5 = 571,18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Το αυτοκίνητο δεν ασκείται η H

Άσκηση 6



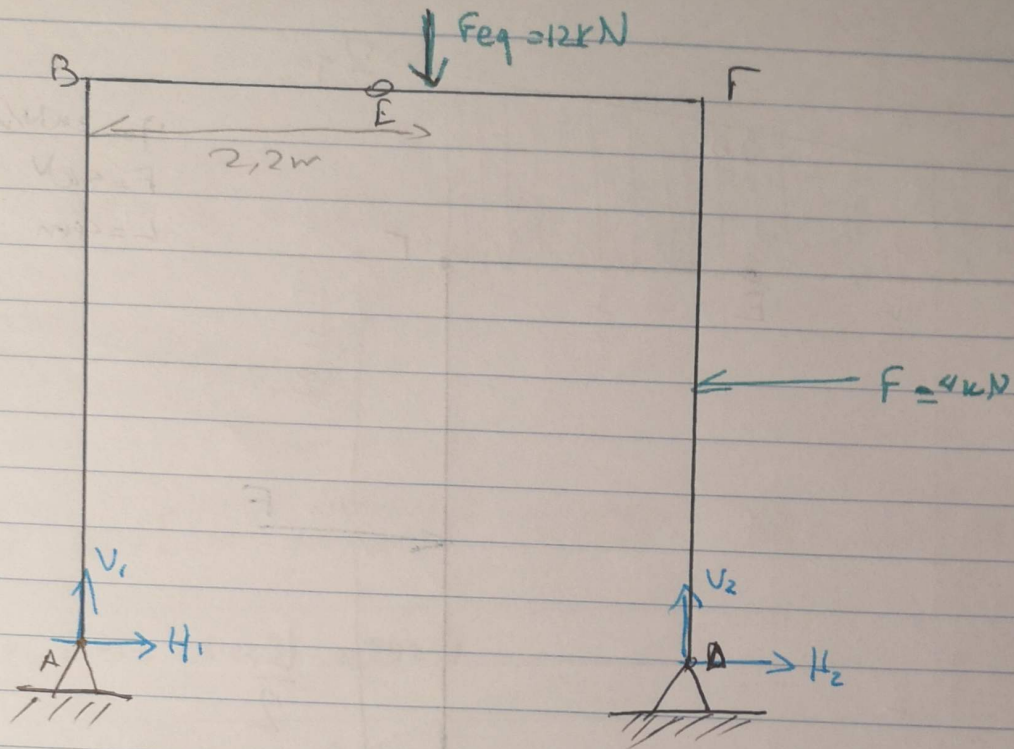
Βήμα 1ο: Εξίσωση της Καμπύλης

$$F_{eq} = \frac{(q_0 + 2q_0) \cdot L}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ kN}, \quad \tan \theta = \frac{q_0}{L} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 2$$

$$A_0 \quad Q_y = \iint_A x \, dA = \int_0^L x \left(\int_0^{\frac{x}{2}+2} dy \right) dx = \int_0^4 x \left[\frac{x}{2} + 2 \right] dx = \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} + x^2 \right]_0^4 =$$

$$= \frac{64}{6} + 16 = 26,67 \Rightarrow x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{26,67}{12} = 2,22 \text{ m}$$

Βήμα 2ο: ΔΕΕ του πλαισίου:



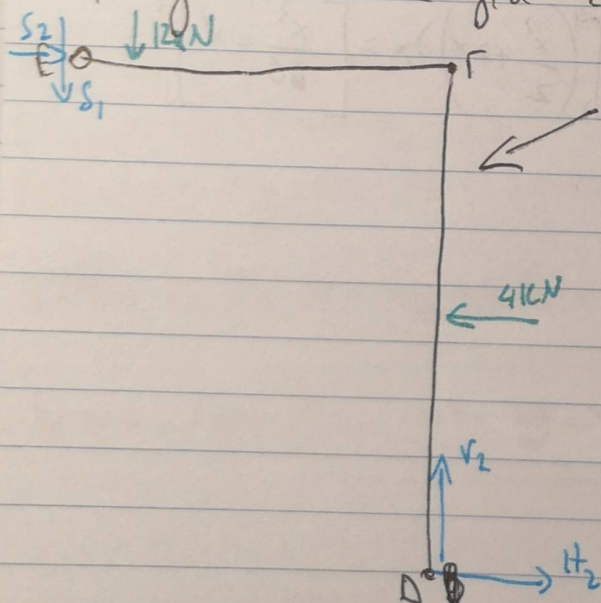
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_1 + H_2 = 4 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 = 12 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_2 \cdot L + F \cdot \frac{L}{2} - F_{eq} \cdot 2.2 = 0 \Rightarrow 4V_2 + 4 \cdot \frac{L}{2} - 12 \cdot 2.2 = 0 \Rightarrow 4V_2 = 12 \cdot 2.2 - 4 \cdot 2 \Rightarrow V_2 = \frac{10.4}{4} = 2.6 \text{ kN} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \text{from (3)} \Rightarrow V_1 = 9.4 \text{ kN}$$

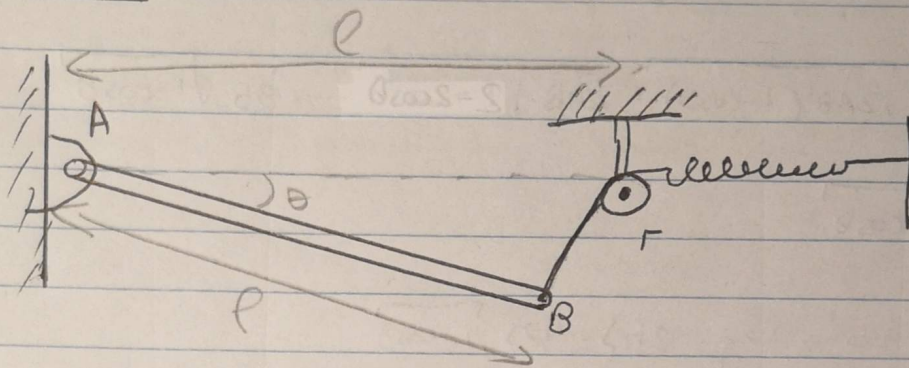
\sum moments to the left of the cut for the section ABE



$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 12 \cdot 0.2 + 4 \cdot 2 - 4.6 \cdot 2 - H \cdot 4 = 0 \Rightarrow H_2 = 0.3 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow V_1 \cdot 2 = H_1 \cdot 4 \Rightarrow H_1 = \frac{V_1}{2} = 3.7 \text{ kN}$$

Ασκηση 7



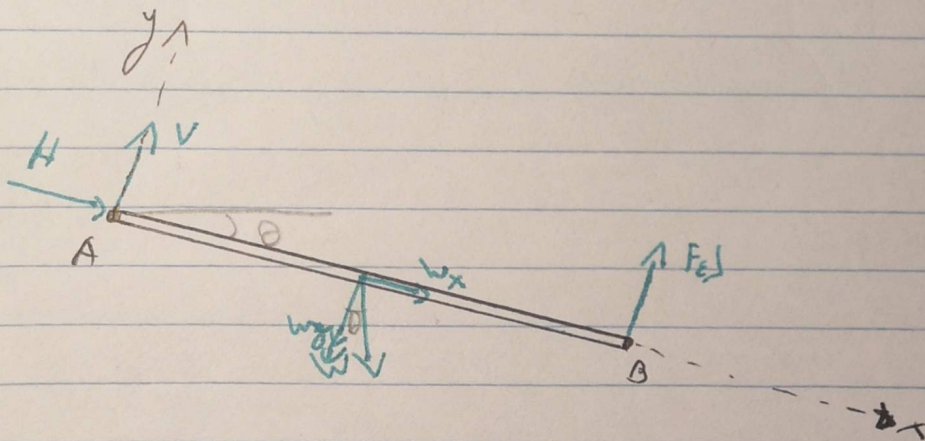
$$K = 2,5 \text{ kN/m}$$

$$l = 0,6 \text{ m}$$

$$\text{Αν } \theta = 30^\circ \text{ τότε } BF = \sqrt{2AB^2 - 2AB^2 \cos(30^\circ)} = \sqrt{0,27 AB^2} = \sqrt{0,27} \cdot l = \sqrt{0,27} \cdot 0,6 = 0,31 \text{ m}$$

$$\text{Άρα } F_{el} = K \cdot \Delta l = K \cdot BF = 2,5 \cdot 0,31 = 0,78 \text{ kN}$$

Κάνω το ΔΕΣ της άρθρωσης



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H = -W_x \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + F_{el} = W_y \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow W_y \cdot 0,3 - F_{el} \cdot 0,6 = 0 \Rightarrow W_y = \frac{F_{el} \cdot 0,6}{0,3} = 2 F_{el} = 1,56 \text{ kN} \quad (3)$$

$$\text{Από (2) και (3)} \Rightarrow V = W_y - F_{el} = F_{el} = 0,78 \text{ kN}$$

$$\text{Επίσης έχω ότι } \cos \theta = \frac{W_x}{W} \Rightarrow W = \frac{W_x}{\cos \theta} = 1,8 \text{ kN} \Rightarrow m = \frac{W}{g} = 0,18 \text{ kg}$$

b) Para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$:

$$BF = \Delta l = \sqrt{2AB^2 - 2AB^2 \cdot \cos \theta} = \sqrt{2AB^2(1 - \cos \theta)} = \sqrt{2}AB \sqrt{1 - \cos \theta} = 0,85 \sqrt{1 - \cos \theta}$$

$$\text{Para } F_E = K\Delta l = 2,125 \sqrt{1 - \cos \theta}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow W_y \cdot 0,3 - F_E \cdot 0,6 = 0 \Rightarrow W_y = 2F_E = 4,25 \sqrt{1 - \cos \theta}$$

$$W = \frac{W_y}{\cos \theta} = \frac{4,25 \sqrt{1 - \cos \theta}}{\cos \theta}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{\frac{4,25 \sqrt{1 - \cos \theta}}{\cos \theta}}{g} = \frac{4,25 \cdot \sqrt{1 - \cos \theta}}{10 \cdot \cos \theta} = 0,425 \frac{\sqrt{1 - \cos \theta}}{\cos \theta}$$

**Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το
διορθώσω: Georgera**