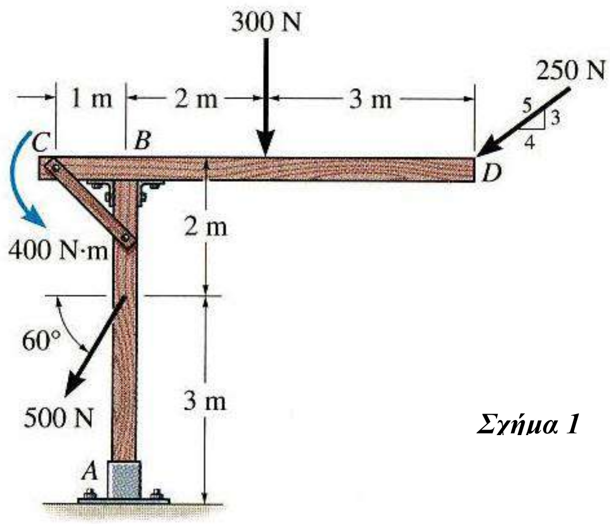
Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το διορθώσω: Georgepan

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής
Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)
7η σειρά ασκήσεων: Αναγωγή συστημάτων δυνάμεων και ροπών στο επίπεδο

Άσκηση 1

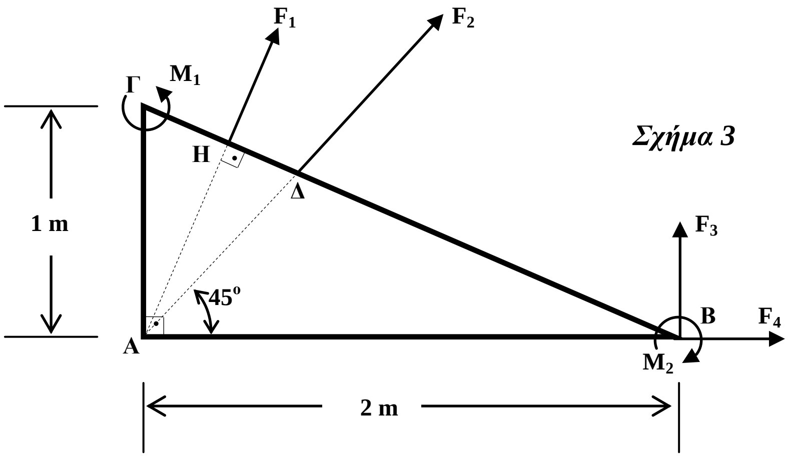
Αντικαταστήστε τη φόρτιση του πλαισίου του Σχ.1 με μια συνισταμένη δύναμη και προσδιορίστε το σημείο που τέμνει η γραμμή εφαρμογής της το μέλος CD.



Σχήμα 1

Άσκηση 2

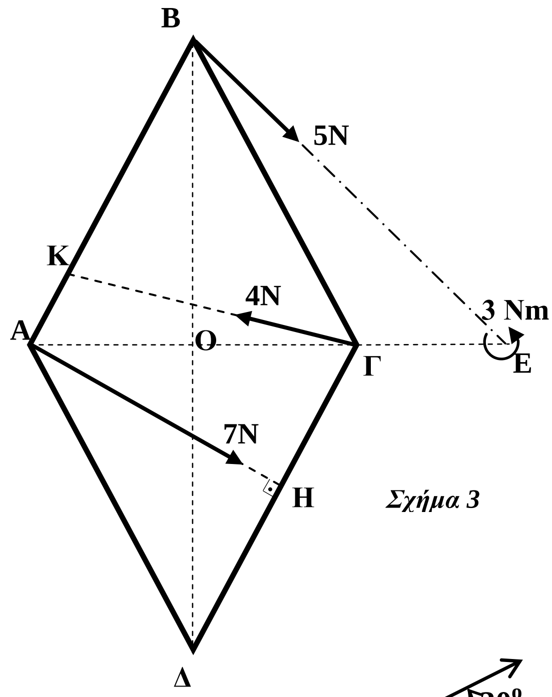
Να αναχθεί το σύστημα δυνάμεων και ροπών του Σχ.2 στο απλούστερο δυνατό. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι F_1=6 kN, F_2=8 kN, F_3=2 kN και F_4=3 kN. Τα μέτρα των ροπών είναι M_1= 2 Nm και M_2=4 Nm.



Σχήμα 3

Άσκηση 3

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του Σχ.3 είναι ρόμβος με ημιδιαγωνίους (ΟΒ)=2(ΟΑ)=4m. Ισχύει ότι (ΑΚ)=(ΑΒ)/4 και ότι (ΓΕ)=(ΟΓ). Να αναχθεί το σύστημα δυνάμεων και ροπών στο απλούστερο δυνατό.



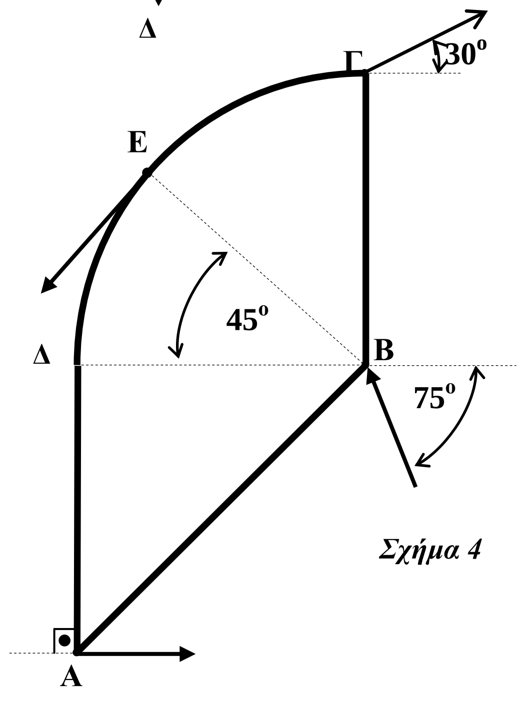
Σχήμα 3

Άσκηση 4

Για το επίπεδο σώμα ΑΒΓΔ του Σχ.4 δίνεται ότι:

- ΑΔ=ΔΒ=ΒΓ=1m
- Οι γωνίες ΑΔΒ και ΔΒΓ είναι ορθές
- Τα ΑΔ και ΒΓ είναι κατακόρυφα.
- Η καμπύλη ΓΔ είναι τεταρτοκύκλιο.

Οι τέσσερεις δυνάμεις του σχήματος έχουν μέτρο 1 kN εκάστη και η δύναμη που ασκείται στο Ε είναι εφαπτομένη του τεταρτοκυκλίου. Να ευρεθεί σημείο του σώματος στο οποίο αν ασκηθεί η συνισταμένη δύναμη το σύστημα να ισοδυναμεί με μία δύναμη και μόνο.



Σχήμα 4

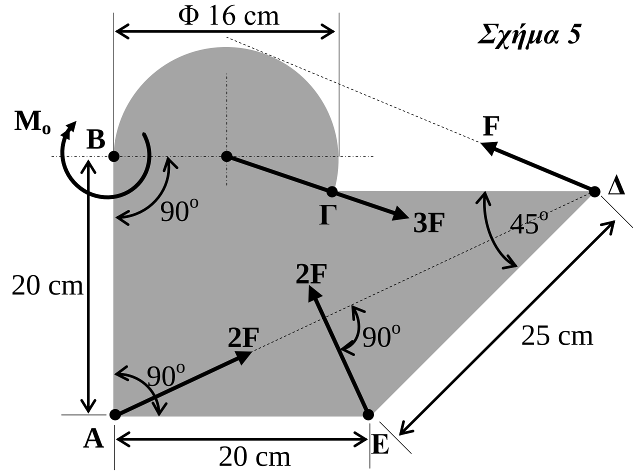
Άσκηση 5

Στο επίπεδο σώμα του Σχ.5 (ΓΔ//ΑΕ) ασκούνται τέσσερεις δυνάμεις και μία ροπή κάθετη στο επίπεδό του (F=3 kN, M_o=1 kNm). Ο φορέας της F εφάπτεται στο κυκλικό τόξο.

α. Να αναχθεί το σύστημα σε μία μόνο δύναμη.

β. Να υποδειχθεί το σημείο στο οποίο ο φορέας της δύναμης αυτής τέμνει την ευθεία που ορίζουν τα Α, Β.

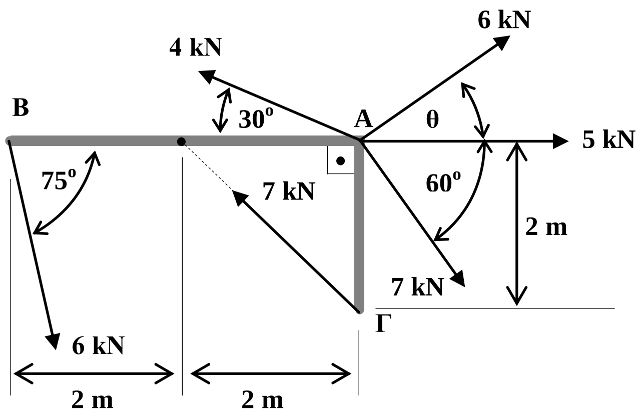
Σχήμα 5



Άσκηση 6

α. Υπολογίστε τη γωνία θ ώστε να μεγιστοποιείται η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο Α (Σχ.6).

β. Να υποδειχθεί σημείο του σώματος ΒΑΓ στο οποίο αν ασκηθεί μία και μόνη δύναμη θα ισοδυναμεί με το σύνολο των δυνάμεων που ασκού-νται στο σώμα.

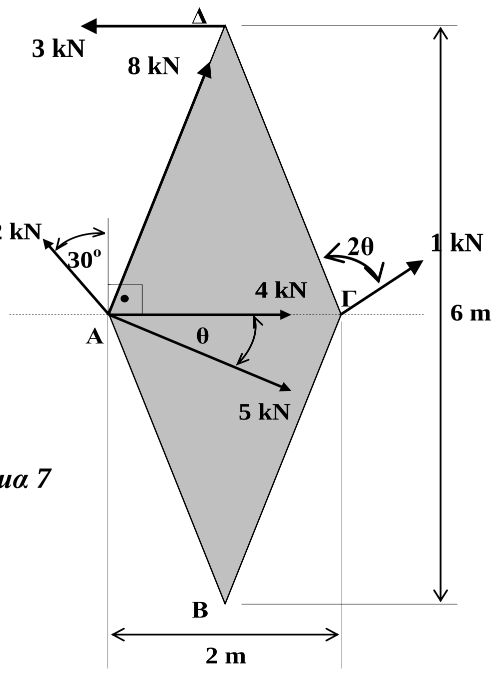


Σχήμα 6

Άσκηση 7

α. Να προσδιορισθεί η γωνία θ έτσι ώστε η συνισταμενη των δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στην κορυφή Α του ρόμβου ΑΒΓΔ (Σχ.7), να διέρχεται από το μεσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ.

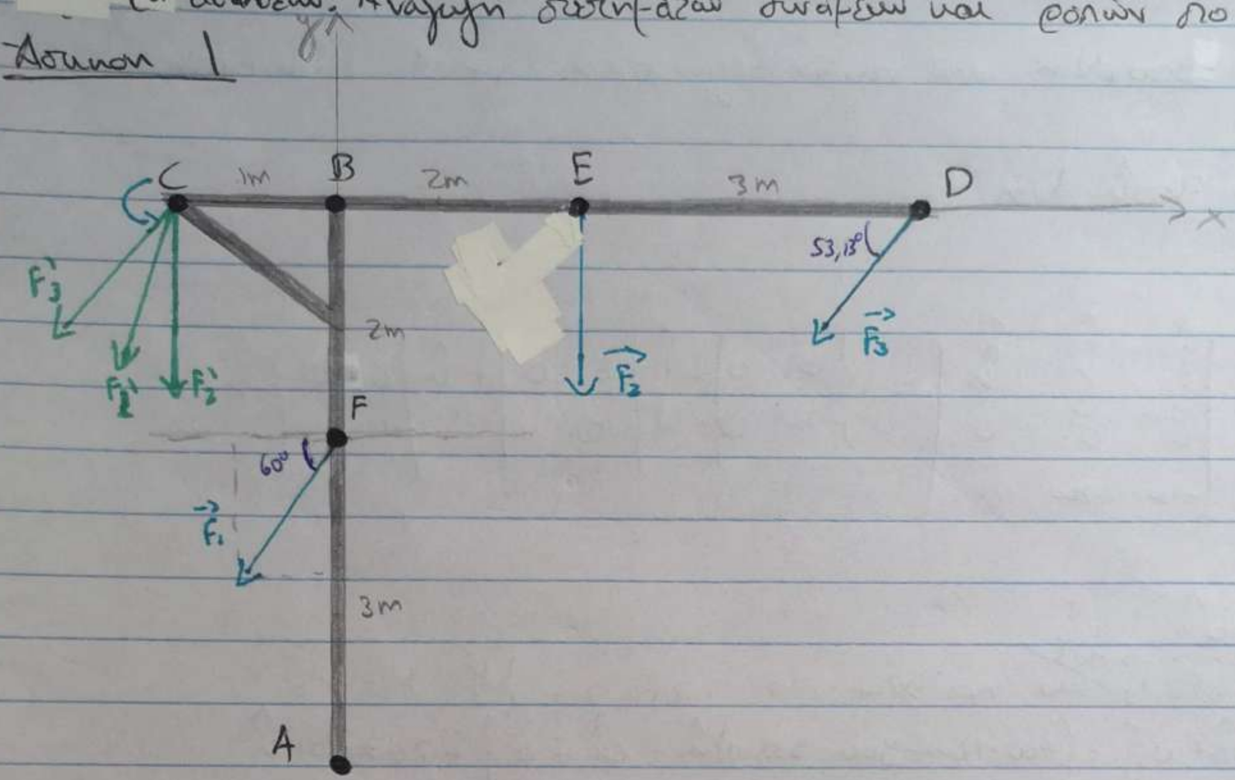
β. Να υποδειχθεί σημείο του περιγράμματος του ρόμβου στο οποίο αν ασκηθεί μία και μόνη δύναμη θα ισοδυναμεί με το σύνολο των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.



Σχήμα 7

7η Σειρά ασκήσεων: Αναγωγή συστημάτων δυνάμεων και ροπών στο Επίπεδο.

Άσκηση 1



$|\vec{F_1}| = 500 N \quad |M| = 400 N \cdot m$

$|\vec{F_2}| = 300 N$

$|\vec{F_3}| = 250 N$

Έχω: A(0, -5), B(0, 0), C(-1, 0), D(5, 0), E(2, 0), F(0, -2)

$|\vec{F_{1x}}| = |\vec{F_1}| \cos(60) = \frac{500}{2} = 250 N$

$|\vec{F_{1y}}| = |\vec{F_1}| \sin(60) = \frac{500\sqrt{3}}{2} = 250 \cdot \sqrt{3} = 433{,}01 N$

$\Rightarrow \vec{F_1} = -250\hat{i} - 433{,}01\hat{j} \ N$

$|\vec{F_{3x}}| = |\vec{F_3}| \cos(53{,}13°) = 250 \cdot 0{,}6 = 150$

$|\vec{F_{3y}}| = |\vec{F_3}| \sin(53{,}13°) = 250 \cdot 0{,}8 = 200$

$\vec{F_3} = -150\hat{i} - 200\hat{j} \ N$

Τέλος, έχω $\vec{F_2} = 0\hat{i} - 300\hat{j} \ N$

$\vec{CF} = +1\hat{i} - 2\hat{j} \Rightarrow \vec{M}_E^{\vec{F_1}} = \vec{CF} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ +1 & -2 & 0 \\ -250 & -433{,}01 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -433{,}01 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} +1 & 0 \\ -250 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} +1 & -2 \\ -250 & -433{,}01 \end{vmatrix} =$

$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + (-1 \cdot 433{,}01 - 2 \cdot 250)\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (-433{,}01 - 500)\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 933{,}01\hat{k} \ Nm$

$|\vec{M}_C^{F_2}| = |\vec{F_2}| \cdot |\vec{KE}| = 900\ Nm$ από κανόνα δεξιού χεριού έχω ότι είναι αρνητική.

Άρα:

$\vec{M}_C^{F_2} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 900\hat{u}\ Nm$

$\vec{CB} = 6\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{u}$

$$\vec{M}_C^{F_3} = \vec{CB} \times \vec{F_3} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ 6 & 0 & 0 \\ -150 & -200 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -200 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -150 & 0 \end{vmatrix} + \hat{u}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -150 & -200 \end{vmatrix} =$$

$= 0\hat{i} + 0\hat{j} - 1200\hat{u}$

Μεταφέρω τις $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ στο C και προσθέτω στο σύστημα τις $\vec{M}_C^{F_1}, \vec{M}_C^{F_2}, \vec{M}_C^{F_3}$.

Άρα $\Sigma M_C = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (400 - 1200 - 900 - 933{,}01)\hat{u} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 2633{,}01\hat{u}$

και $\vec{R} = \vec{F_1'} + \vec{F_2'} + \vec{F_3'} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = -400\hat{i} - 933{,}01\hat{j} + 0\hat{u}$

Ψάχνω σημείο $O(x, y, 0)$ τέτοιο ώστε $\vec{M}_O^{R} = 2633{,}01$

$\vec{OC} = (-1-x)\hat{i} - y\hat{j} + 0\hat{u}$

$$\vec{M}_O^{R} = \vec{OC} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ -1-x & -y & 0 \\ -400 & -933{,}01 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -y & 0 \\ -933{,}01 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -1-x & 0 \\ -400 & 0 \end{vmatrix} + \hat{u}\begin{vmatrix} -1-x & -y \\ -400 & -933{,}01 \end{vmatrix} =$$

$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + (933{,}01 \cdot (x+1) - 400y)\hat{u} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (933{,}01 \cdot x + 933{,}01 - 400y)\hat{u}$. Άρα πρέπει

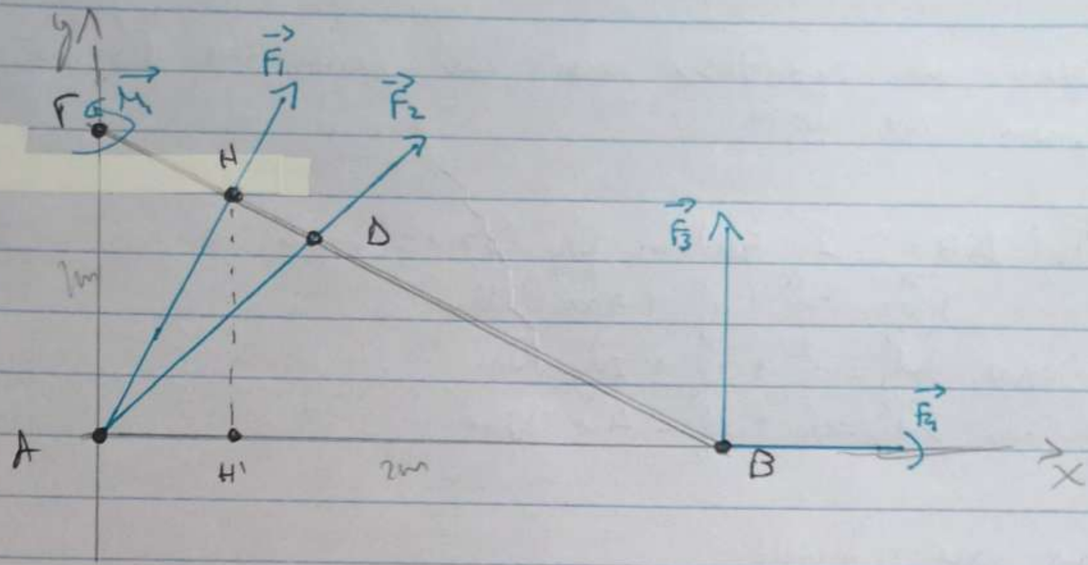
$933{,}01x - 400y + 933{,}01 = 2633{,}01 \Leftrightarrow 933{,}01x - 400y = 1700$

Το σημείο της CD που τέμνει η γραμμή εφαρμογής της τελικής δύναμης είναι για

$y = 0$: $x = \frac{1700}{933{,}01} \simeq 1{,}82$

Άρα $O(1{,}82, 0)$

Άσκηση 2



$|\vec{F_1}| = 6kN$
$|\vec{F_2}| = 8kN$
$|\vec{F_3}| = 2kN$
$|\vec{F_4}| = 3kN$

$|\vec{M_1}| = 2\,Nm$
$|\vec{M_2}| = 4\,kNm$

$\tan\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = 26{,}57°$ $\quad \sin\varphi = \frac{HH'}{BH} \Leftrightarrow HH' = 0{,}8m$

$\cos\varphi = \frac{BH}{AB} \Leftrightarrow BH = 1{,}79m$

$\cos\varphi = \frac{BH'}{BH} \Leftrightarrow BH' = 1{,}6m$

Η ευθεία ΑΔ: $y = x$
Η ευθεία ΒΓ: $y = -\frac{x}{2} + 1$

$x_\Delta = -\frac{x_\Delta}{2} + 1 \Leftrightarrow x_\Delta = 0{,}67\ m$

Άρα $A(0,0,0)$ $\quad H(0{,}4,\ 0{,}8,\ 0)$
$B(2,0,0)$ $\quad \Delta(0{,}67,\ 0{,}67,\ 0)$
$\Gamma(0,1,0)$

$\vec{AH} = 0{,}4\hat{i} + 0{,}8\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{AH}| = 0{,}89m \Rightarrow \hat{AH} = 0{,}45\hat{i} + 0{,}9\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow \vec{F_1} = 2{,}7\hat{i} + 5{,}4\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{A\Delta} = 0{,}67\hat{i} + 0{,}67\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{A\Delta}| = 0{,}95m \Rightarrow \hat{A\Delta} = 0{,}71\hat{i} + 0{,}71\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow \vec{F_2} = 5{,}68\hat{i} + 5{,}68\hat{j} + 0\hat{k}$

Επίσης έχω $\vec{F_3} = 0\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$
και $\vec{F_4} = 3\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

Μεταφέρω την $\vec{F_3}$ παράλληλα ώστε να είναι στην ευθεία $\vec{A\Gamma}$ και παίρνω την συνισταμένη των 4 δυνάμεων:

$\vec{R} = 11{,}38\hat{i} + 13{,}08\hat{j} + 0\hat{k}$

Όμως πρέπει να προσθέσω και την ροπή της $\vec{F_3}$ ως προς το A από την αρχική της θέση

$|\vec{M}_A^{\vec{F_3}}| = |\vec{F_3}| \cdot AB = 2 \cdot 2 = 4kNm$ με θετική φορά

Άρα: $\vec{M}_A^{\vec{F_3}} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 4000\hat{k}\ Nm$

Επίσης έχω $\vec{M}_1 = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}\ Nm$

και $\vec{M}_2 = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 4\hat{k}\ Nm$

Αθροίζοντας έχω τελικά:

$\vec{R} = 11{,}38\hat{i} + 13{,}08\hat{j} + 0\hat{k}\ kN$, $\Sigma\vec{M} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 3{,}998\hat{k}\ kNm$

Ψάχνω σημείο $O(x,y)$ τέτοιο ώστε αν μεταφέρω την $\vec{R}$ σε αυτό θα προστεθεί ροπή ίση και αντίθετη με την $\Sigma\vec{M}$.

Άρα πρέπει $\vec{M}_O^{\vec{R}} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 3{,}998\hat{k}\ kNm$

$\vec{OA} = -x\hat{i} - y\hat{j} + 0\hat{k}$

Άρα $\vec{M}_O^{\vec{R}} = \vec{OA} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -x & -y & 0 \\ 11{,}38 & 13{,}08 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k}\begin{vmatrix} -x & -y \\ 11{,}38 & 13{,}08 \end{vmatrix} =$

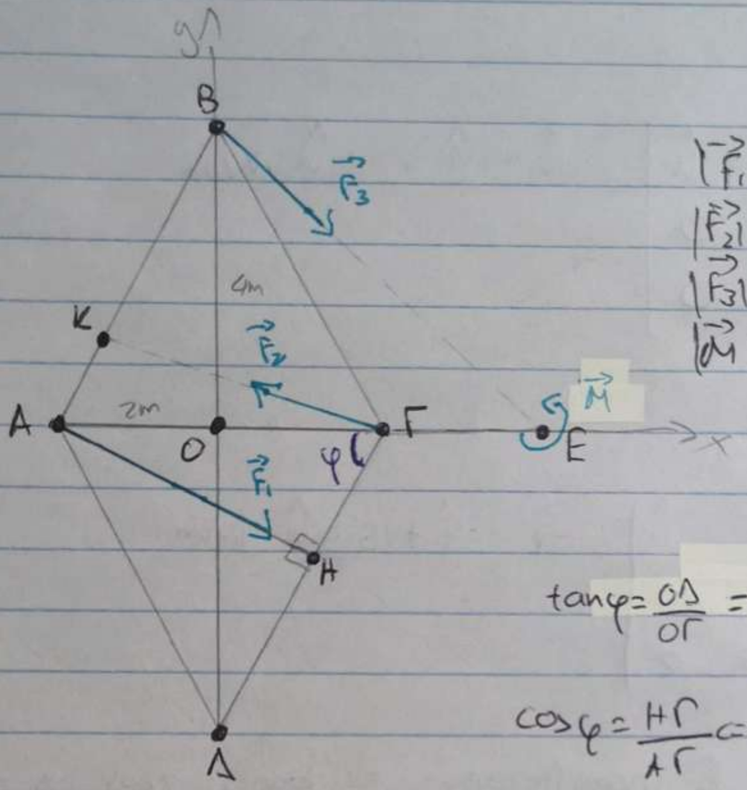
$= 0\hat{i} + 0\hat{j}\ (-13{,}08x + 11{,}38y)\hat{k}$

Άρα πρέπει $-13{,}08x + 11{,}38y = -3{,}998 \Leftrightarrow y = \frac{13{,}08x}{11{,}38} - \frac{3{,}998}{11{,}38} \Leftrightarrow y = 1{,}15x - 0{,}35 \ :(\varepsilon_2)$

Η (ε_2) τέμνει τον x στο: $x = \frac{0{,}35}{1{,}15} = 0{,}3$ και τον y στο $y = -0{,}35$

Αφού $x = 0{,}3 \in [0,2]$ τότε έχει φυσική σημασία.
Αφού $y = -0{,}35 \notin [0,1]$ τότε δεν έχει φυσική σημασία

Άσκηση 3



$|\vec{F_1}| = 7N$

$|\vec{F_2}| = 4N$

$|\vec{F_3}| = 5N$

$|\vec{M}| = 3Nm$

$OB = 2OA = 4m$

$\Rightarrow OA = 2m$

$\Gamma E = O\Gamma = 2m$

$AK = \frac{AB}{4} = \frac{\sqrt{OB^2+OA^2}}{4} = 1,12$

$AB = 4,48$

$\tan\varphi = \frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \varphi = 63,43°$

$\cos\varphi = \frac{H\Gamma}{A\Gamma} \Leftrightarrow H\Gamma = \cos\varphi \cdot A\Gamma = 1,79 m$

Έχω $\frac{A\Delta}{H\Gamma} = \frac{4,48}{1,79} = 2,50$ $H\Gamma = 0,4 A\Delta$

Είναι $O(0,0,0)$ $\Delta(0,-4,0)$

$A(-2,0,0)$ $E(4,0,0)$

$B(0,4,0)$ $K(-1,5,1,0)$

$\Gamma(2,0,0)$ $H(1,2,-1,6,0)$

$\vec{AH} = 3,2\hat{i} - 1,6\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{AH}| = \sqrt{12,8} = 3,58m \Rightarrow \hat{AH} = 0,89\hat{i} - 0,45\hat{j} + 0\hat{k}$

Άρα $\vec{F_1} = |\vec{F_1}|\hat{AH} = 7(0,89\hat{i} - 0,45\hat{j} + 0\hat{k}) = 6,23\hat{i} - 3,15\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{\Gamma K} = -3,5\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{\Gamma K}| = \sqrt{13,25} = 3,64m \Rightarrow \hat{\Gamma K} = 0,96\hat{i} + 0,27\hat{j} + 0\hat{k}$

Άρα $\vec{F_2} = |\vec{F_2}|\hat{\Gamma K} = 4(0,96\hat{i} + 0,27\hat{j} + 0\hat{k}) = 3,84\hat{i} + 1,08\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{BE} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{BE}| = \sqrt{32} = 5,66m \Rightarrow \hat{BE} = 0,71\hat{i} - 0,71\hat{j} + 0\hat{k}$

Άρα $\vec{F_3} = |\vec{F_3}| \cdot \hat{BE} = 5(0,71\hat{i} - 0,71\hat{j} + 0\hat{k}) = 3,55\hat{i} - 3,55\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{E\Gamma} = -2\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{u}$

$$\vec{M}_E^{\vec{F_2}} = \vec{E\Gamma} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ -2 & 0 & 0 \\ 3{,}84 & 1{,}08 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 2{,}16\hat{u} \ \ Nm$$

$\vec{EA} = -6\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{u}$

$$\vec{M}_E^{\vec{F_1}} = \vec{EA} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ -6 & 0 & 0 \\ 6{,}23 & -3{,}15 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 18{,}9\hat{u} \ \ Nm$$

Μεταφέρω τις $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ στο E, προσθέτοντας τις ροπές τους ως προς αυτό στο σύστημα.

Άρα έχω:

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 13{,}62\hat{i} - 5{,}62\hat{j} + 0\hat{u}$, $\vec{\Sigma M} = \vec{M} + \vec{M}_E^{\vec{F_1}} + \vec{M}_E^{\vec{F_2}} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 19{,}44\hat{u}$

Ψάχνω σημείο $O(x,y)$ τέτοιο ώστε $\vec{M}_O^{\vec{R}} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 19{,}44\hat{u}$

$\vec{OE} = (4-x)\hat{i} - y\hat{j} + 0\hat{u}$

$$\vec{M}_O^{\vec{R}} = \vec{OE} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{u} \\ 4-x & -y & 0 \\ 13{,}62 & -5{,}62 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \begin{vmatrix} 4-x & -y \\ 13{,}62 & -5{,}62 \end{vmatrix} \hat{u} =$$

$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + (5{,}62(x-4) + 13{,}62y)\hat{u} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (5{,}62x - 22{,}48 + 13{,}62y)\hat{u}$

Άρα πρέπει $5{,}62x + 13{,}62y - 22{,}48 = -19{,}44 \Leftrightarrow y = \frac{-5{,}62x}{13{,}62} + \frac{3{,}04}{13{,}62} \Leftrightarrow y = -0{,}41x + 0{,}22$

Για $y=0$: $x = \frac{0{,}22}{0{,}41} = 0{,}54$

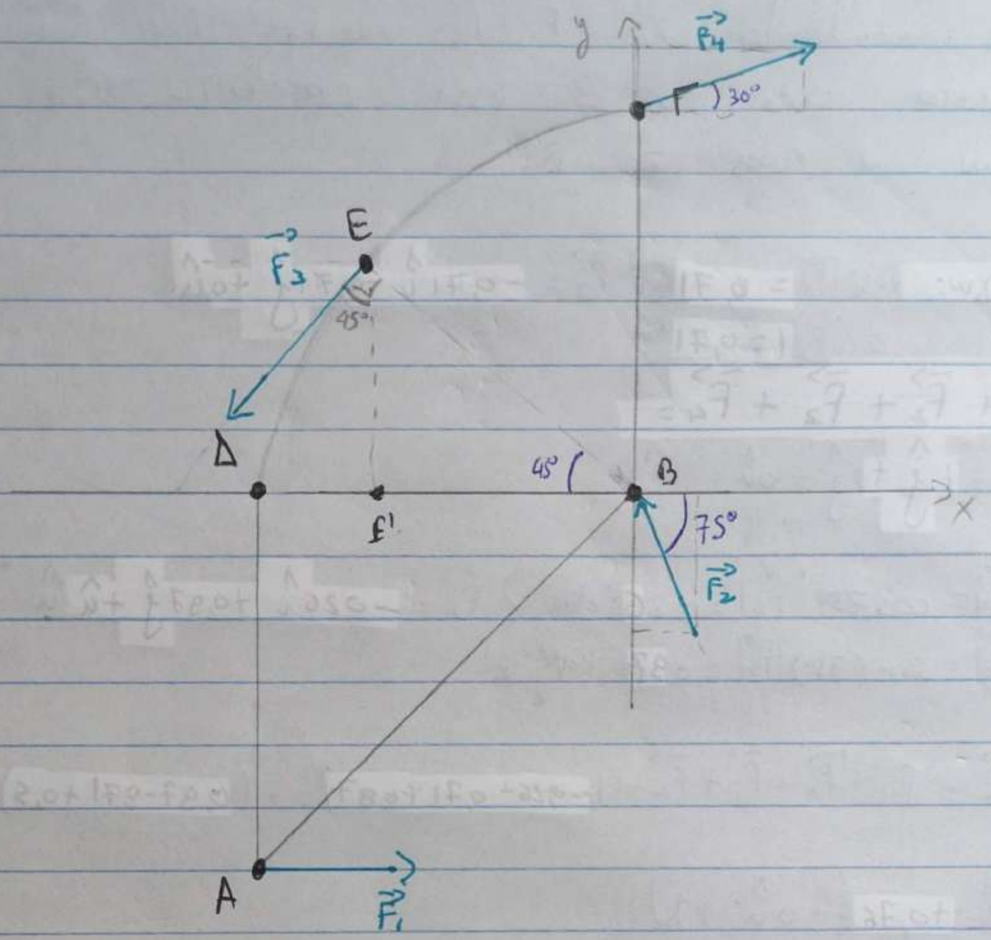
Άσκηση 4

$A\Delta = \Delta B = B\Gamma = 1m$

$A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma = 90°$

$A\Delta \perp B\Gamma$

$|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}| = |\vec{F_4}| = 1kN$



Έχω: $A(-1,-1,0)$, $B(0,0,0)$, $\Gamma(0,1,0)$, $\Delta(-1,0,0)$, $E(-0{,}71, 0{,}71, 0)$

$\sin(45°) = \frac{EE'}{EB} \Leftrightarrow EE' = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71$

$\cos(45°) = \frac{E'B}{EB} \Leftrightarrow E'B = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71$

$|\vec{F_{4x}}| = \cos(30)\cdot|\vec{F_4}| = 0{,}866 \cdot 1 = 0{,}866\ kN$

$|\vec{F_{4y}}| = \sin(30)|\vec{F_4}| = 0.5\ kN$

$\left(\vec{F_4} = 0{,}866\hat{i} + 0{,}5\hat{j} + 0\hat{u}\right)$

$|\vec{M_B^{F_{4x}}}| = |\vec{F_{4x}}| \cdot B\Gamma = 0{,}866\ kNm$, αρνητική από κανόνα δεξιού χεριού

$|\vec{M_B^{F_3}}| = |\vec{F_3}| \cdot BE = 1\ kNm$, θετική

$|\vec{M_B^{F_1}}| = |\vec{F_1}| \cdot \Delta A = 1\ kNm$, θετική

Μεταφέρω παράλληλα τις $\vec{F_1}$, $\vec{F_3}$ και $\vec{F_{4x}}$ έτσι ώστε οι φορείς τους να διέρχονται από το B και προσθέτω στο σύστημα τις ροπές που έχουν ως προς το B.

Έχω: $\left.\begin{array}{l} |\vec{F_{3x}}| = \sin(45)|\vec{F_3}| = 0{,}707 \text{ kN} \\ |\vec{F_{3y}}| = \cos(45)|\vec{F_3}| = 0{,}707 \text{ kN} \end{array}\right\} \vec{F_3} = -0{,}707\hat{i} - 0{,}707\hat{j} + 0\hat{k}$

$$\vec{F_1} = 1\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{F_{2x}}| = \cos(75)|\vec{F_2}| = 0{,}258 \text{ kN} \\ |\vec{F_{2y}}| = \sin(75^\circ)|\vec{F_2}| = 0{,}966 \text{ kN} \end{array}\right\} \vec{F_2} = -0{,}258\hat{i} + 0{,}966\hat{j} + 0\hat{k}$$

Άρα $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = (1 - 0{,}258 - 0{,}707 + 0{,}866)\hat{i} + (0{,}966 - 0{,}707 + 0{,}5)\hat{j} + 0\hat{k} =$

$= 0{,}901\hat{i} + 0{,}759\hat{j} + 0\hat{k}$ kN

Επίσης Έχω: $\left.\begin{array}{l} \vec{M_B^{F_{4x}}} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 0{,}866\hat{k} \text{ kNm} \\ \vec{M_B^{F_1}} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k} \text{ kNm} \\ \vec{M_B^{F_3}} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k} \text{ kNm} \end{array}\right\} \Sigma\vec{M} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 1{,}134\hat{k} \text{ kNm}$

Ψάχνω σημείο $O(x,y)$ τέτοιο ώστε $\vec{M_O^R} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 1{,}134\hat{k}$

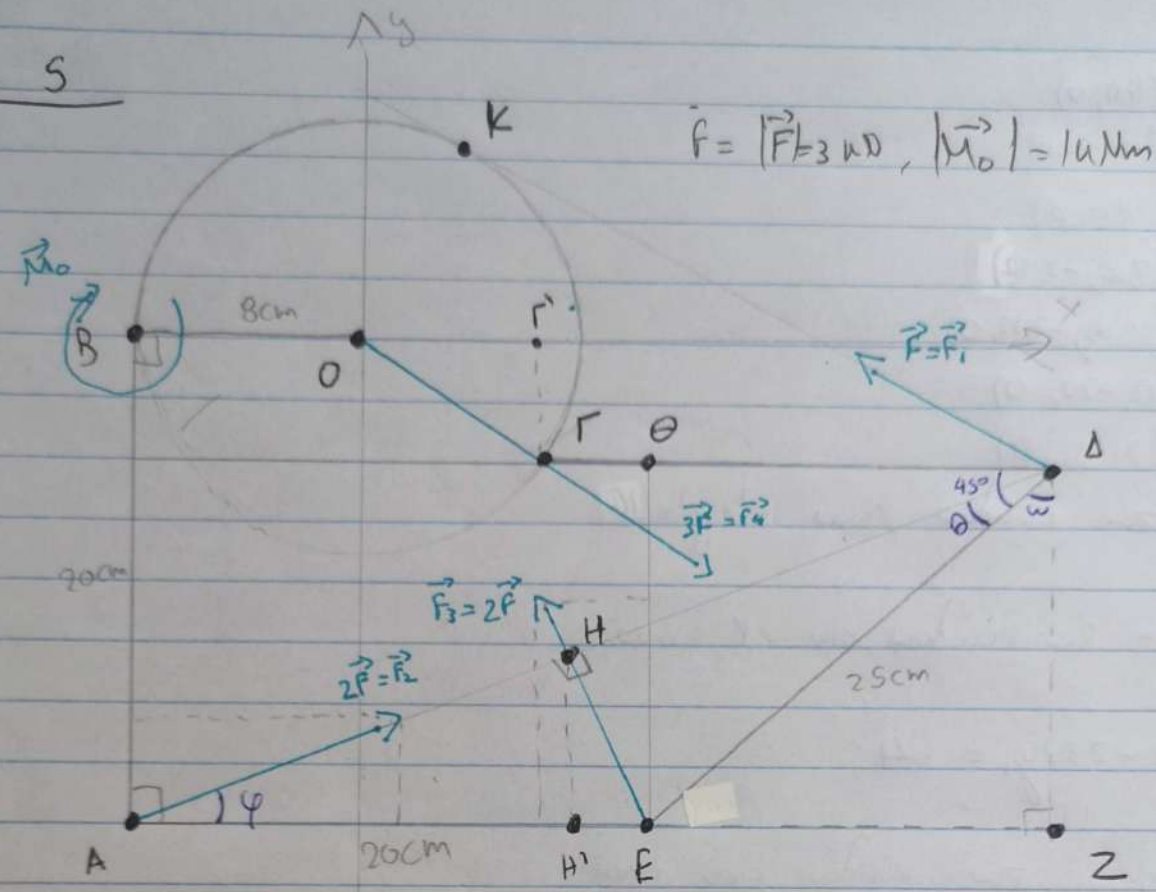
$$\vec{OB} = -x\hat{i} - y\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{M_O^R} = \vec{OB} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -x & -y & 0 \\ 0{,}901 & 0{,}759 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \begin{vmatrix} -x & -y \\ 0{,}901 & 0{,}759 \end{vmatrix}\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j}\,(-0{,}759x + 0{,}901y)\hat{k}$$

Άρα πρέπει $0{,}901y - 0{,}759x = -1{,}134 \Rightarrow y = 0{,}842x - 1{,}259$

Άσκηση 5

$f = |\vec{F}| = 3\,kN$, $|\vec{M}_0| = 14\,kNm$



$ΘE = \sin(45) \cdot EΔ = 17,68 = ΔZ$

Έχω $EZ = \sqrt{EΔ^2 - ΔZ^2} = \sqrt{25^2 - 17,68^2} = \sqrt{312,42} = 17,68\,cm$.

$\tan φ = \frac{ΔZ}{AZ} = \frac{17,68}{37,68} = 0,47 \Rightarrow φ = 25,14°$

Άρα $A\hat{Δ}Z = 180 - 90 - φ = 180° - 90° - 25,14° = 64,86°$

$\tan ω = \frac{EZ}{ZΔ} = \frac{17,68}{17,68} = 1 \Rightarrow ω = 45°$

Άρα $θ = A\hat{Δ}Z - ω = 68,97° - 45° = 23,97°$

Επίσης $A\hat{E}H = 90° - φ = 90° - 25,14° = 64,86°$

$ΓΓ' = AB - ΔZ = 20 - 17,68 = 2,32\,cm$

$OΓ' = \sqrt{OΓ^2 - ΓΓ'^2} = \sqrt{58,62} = 7,66\,cm$

Έχω: $O(0,0,0)$

$A(-8,-20,0)$

$B(-8,0,0)$

$\Gamma(7{,}66,\ -2{,}32,\ 0)$

$\Delta(29{,}68,\ -2{,}32,\ 0)$

$E(12,-20,\ 0)$

$K(x_1,y_1,0)$

Η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+y^2=64$

Η εφαπτομένη του κύκλου στο K είναι:

$$29{,}68x_1 - 2{,}32y_1 = 64$$

Όμως K σημείο του κύκλου άρα έχω

$$\begin{cases} 29{,}68x_1 - 2{,}32y_1 = 64 \\ x_1^2 + y_1^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2{,}32}{29{,}68}y_1 + \frac{64}{29{,}68} \\ x_1^2+y_1^2=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0{,}08y_1 + 2{,}16 \\ \end{cases}$$

$$② \xRightarrow{①} (0{,}08y_1+2{,}16)^2 + y_1^2 = 64 \Leftrightarrow 0{,}01y_1^2 + 4{,}67 + 0{,}35y_1 + y_1^2 = 64$$

$\Leftrightarrow 1{,}01y_1^2 + 0{,}35y_1 - 59{,}33 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -7{,}84$ ή $y_1 = 7{,}49$

Όμως θέλω τη λύση στο πρώτο τεταρτημόριο άρα $y_1=-7{,}84$ απορρίπτεται

Άρα $y_1 = 7{,}49 \Rightarrow x_1 = 2{,}76$. Άρα $K(2{,}76,\ 7{,}49)$

Έχω $\cos\varphi = \frac{AH}{AE} \Leftrightarrow AH = AE\cdot\cos(25{,}14°) = 18{,}11\,cm$

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi = \frac{HH'}{AH} &\Leftrightarrow HH' = \sin(25{,}14°)\cdot AH = 7{,}69\,cm \\ \cos\varphi = \frac{AH'}{AH} &\Leftrightarrow AH' = \cos(25{,}14°)\cdot AH = 16{,}39 \end{aligned}\right\} \Rightarrow H(8{,}39,\ -1,\ 0)$$

$\vec{A\Delta} = 37{,}68\hat{i} + 17{,}68\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{A\Delta}| = \sqrt{1732{,}36} = 41{,}62\,cm \Rightarrow \hat{A\Delta} = 0{,}91\hat{i} + 0{,}42\hat{j} + 0\hat{k}$ cm

$\vec{EH} = -3{,}61\hat{i} + 19\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{EH}| = \sqrt{374{,}03} = 19{,}34\,m \Rightarrow \hat{EH} = 0{,}19\hat{i} + 0{,}98\hat{j} + 0\hat{k}$ cm

$\vec{\Delta K} = -26{,}92\hat{i} + 9{,}81\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{\Delta K}| = \sqrt{820{,}92} = 28{,}65\,m \Rightarrow \hat{\Delta K} = -0{,}94\hat{i} + 0{,}34\hat{j} + 0\hat{k}$ cm

$\vec{O\Gamma} = 7{,}66\hat{i} - 2{,}32\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{O\Gamma}| = \sqrt{64{,}06} = 8 \Rightarrow \hat{O\Gamma} = 0{,}96\hat{i} - 0{,}29\hat{j} + 0\hat{k}$

Άρα $\vec{F_1} = |\vec{F_1}| \cdot \hat{\Delta K} = F\hat{\Delta K} = 3(-0{,}94\hat{i} + 0{,}34\hat{j} + 0\hat{k}) = -2{,}82\hat{i} + 1{,}02\hat{j} + 0\hat{k}$ kN

και $\vec{F_2} = |\vec{F_2}| \cdot \hat{A\Delta} = 2F \cdot \hat{A\Delta} = 6(0{,}91\hat{i} + 0{,}42\hat{j} + 0\hat{k}) = 5{,}46\hat{i} + 6{,}12\hat{j} + 0\hat{k}$ kN

και $\vec{F_3} = |\vec{F_3}| \cdot \hat{EH} = 6(0{,}19\hat{i} + 0{,}98\hat{j} + 0\hat{k}) = 1{,}14\hat{i} + 5{,}88\hat{j} + 0\hat{k}$ kN

και $\vec{F_4} = |\vec{F_4}| \cdot \hat{O\Gamma} = 3F \cdot \hat{O\Gamma} = 9(0{,}96\hat{i} - 0{,}29\hat{j} + 0\hat{k}) = 8{,}64\hat{i} - 2{,}61\hat{j} + 0\hat{k}$

Έχω: $\vec{OA} = -8\hat{i} - 20\hat{j} + 0\hat{k}$ cm

$\vec{OE} = 12\hat{i} - 20\hat{j} + 0\hat{k}$ cm

$\vec{O\Delta} = 29{,}68\hat{i} - 2{,}32\hat{j} + 0\hat{k}$

Άρα $$\vec{M}_O^{F_1} = \vec{O\Delta} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 29{,}68 & -2{,}32 & 0 \\ -2{,}82 & 1{,}02 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (30{,}27 - 6{,}54)\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 23{,}73\hat{k} \text{ kNcm}$$

$$\vec{M}_O^{F_2} = \vec{OA} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -8 & -20 & 0 \\ 5{,}46 & 6{,}12 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (-48{,}96 + 109{,}2)\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 60{,}24\hat{k} \text{ kNcm}$$

$$\vec{M}_O^{F_3} = \vec{OE} \times \vec{F_3} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 12 & -20 & 0 \\ 1{,}14 & 5{,}88 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (70{,}56 + 22{,}8)\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 93{,}36\hat{k} \text{ kNcm}$$

Επίσης έχω $\vec{M}_O = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 1\hat{k}\,kNm = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 100\hat{k}$ kNcm

Μεταφέρω τις $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ στο O και προσθέτω στο σύστημα τις ροπές τους ως προς αυτό.

Άρα έχω

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = (-2{,}82 + 5{,}46 + 1{,}14 + 8{,}64)\hat{i} + (1{,}02 + 6{,}12 + 5{,}88 - 2{,}61)\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{R} = 12{,}42\hat{i} + 10{,}41\hat{j} + 0\hat{k}$

και $\Sigma\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}_0^{F_1} + \vec{M}_0^{F_2} + \vec{M}_0^{F_3} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (23{,}73 + 60{,}24 + 93{,}36 - 100)\hat{k}$

$\Rightarrow \Sigma\vec{M} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 77{,}33\hat{k}$ kNcm

Ψάχνω να βρω σημείο Λ της AB ε x=-8 τέτοιο ώστε $\vec{M}_\Lambda^{\vec{R}} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 77{,}33\hat{k}$ kNcm

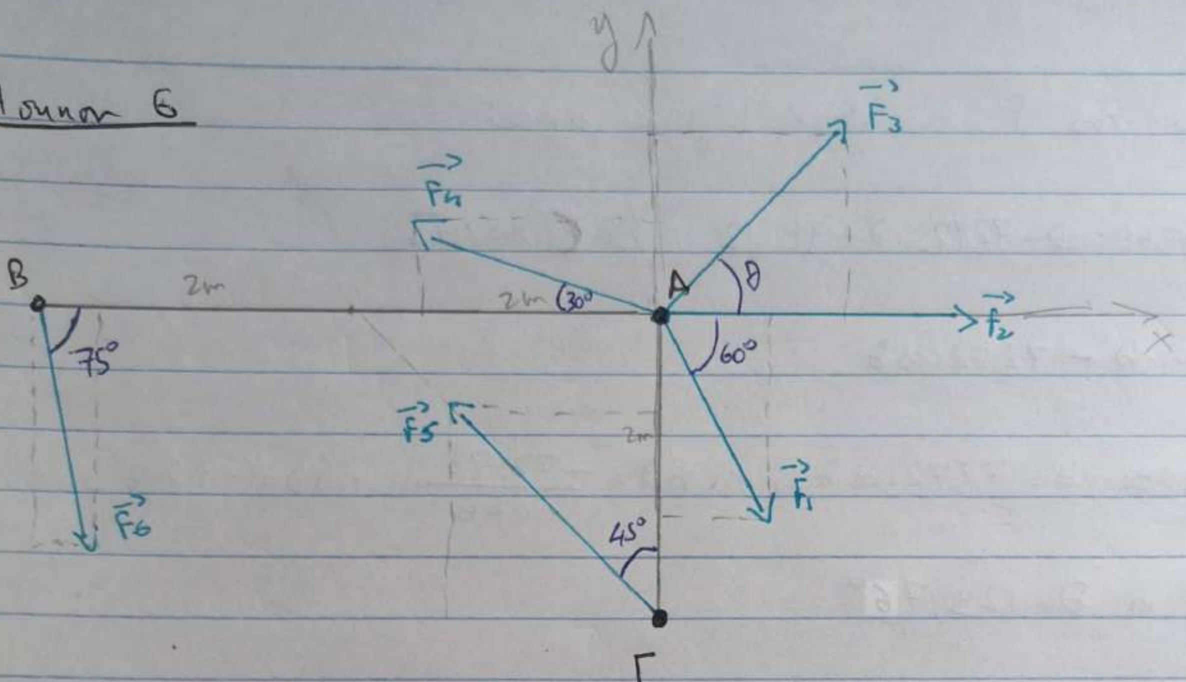
Άρα το Λ είναι της μορφής Λ(-8, y, 0)

$\vec{\Lambda O} = 8\hat{i} - y\hat{j} + 0\hat{k}$ cm

$$\vec{M}_\Lambda^{\vec{R}} = \vec{\Lambda O} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 8 & -y & 0 \\ 12{,}42 & 10{,}41 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (83{,}28 + 12{,}42y)\hat{k} \text{ kNcm}$$

Άρα πρέπει $83{,}28 + 12{,}42y = -77{,}33 \Rightarrow y = \frac{-160{,}61}{12{,}42} = -12{,}93 \in BA$. άρα δεκτό.

Άσκηση 6



Έχω: A(0,0,0) | $|\vec{F_1}| = 7kN$ | $|\vec{F_4}| = 4kN$
B(-4,0,0) | $|\vec{F_2}| = 5kN$ | $|\vec{F_5}| = 7kN$
Γ(0,-2,0) | $|\vec{F_3}| = 6kN$ | $|\vec{F_6}| = 6kN$

$|\vec{F_{1x}}| = \cos(60)\cdot|\vec{F_1}| = \frac{7}{2} = 3{,}5kN$
$|\vec{F_{1y}}| = \sin(60)\cdot|\vec{F_1}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 7 = 3{,}5\sqrt{3} = 6{,}06kN$ $\Rightarrow \vec{F_1} = 3{,}5\hat{i} - 6{,}06\hat{j} + 0\hat{k}$ kN

$\vec{F_2} = 5\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ kN

$|\vec{F_{3x}}| = \cos\theta\cdot|\vec{F_3}| = 6\cos\theta$
$|\vec{F_{3y}}| = \sin\theta|\vec{F_3}| = 6\sin\theta$ $\Rightarrow \vec{F_3} = 6\cos\theta\hat{i} + 6\sin\theta\hat{j} + 0\hat{k}$ kN

$|\vec{F_{4x}}| = \cos(30)\cdot|\vec{F_4}| = 3{,}46$ kN
$|\vec{F_{4y}}| = \sin(30)|\vec{F_4}| = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2kN$ $\Rightarrow \vec{F_4} = -3{,}46\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$ kN

Άρα η συνισταμένη των 4 αυτών δυνάμεων $\vec{F} = (5{,}04 + 6\cos\theta)\hat{i} + (6\sin\theta - 6{,}06)\hat{j} + 0\hat{k}$

$|\vec{F}| = \sqrt{(5{,}04 + 6\cos\theta)^2 + (6\sin\theta - 6{,}06)^2} = \sqrt{25{,}4 + 36\cos^2\theta + 60{,}48\cos\theta + 36\sin^2\theta + 36{,}72 - 72{,}72\sin\theta} =$

$= \sqrt{60{,}48\cos\theta - 72{,}72\sin\theta + 98{,}12}$

α)

Πρέπει το μέτρο της $\vec{F}$ να είναι μέγιστο άρα:

Θεωρώ $f(\theta) = 60,48\cos\theta - 72,72\sin\theta + 98,12$, $\theta \in [-180, 180]$

$f'(\theta) = -60,48\sin\theta - 72,72\cos\theta$

$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -60,48\sin\theta = 72,72\cos\theta \Leftrightarrow \tan\theta = -\dfrac{72,72}{60,48} \Leftrightarrow \tan\theta = -1,202 \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = -50,25^\circ$ ή $\theta = 129,75^\circ$

ΔΤΠ

1) Αν $\theta = -50,25^\circ$ τότε:

$\vec{F} = 8,88\hat{i} - 10,67\hat{j} + 0\hat{u}$, $\dfrac{-10,67}{8,88} = -1,202 = \tan\theta$ δεκτή

2) Αν $\theta = 129,75^\circ$ τότε

$\vec{F} = 1,2034\hat{i} - 1,4476\hat{j} + 0\hat{u}$, $\dfrac{-1,4476}{1,2034} = -1,203$? ίσως δεκτή.

β) ~~Υποθέτοντας ότι θ = −50,25° έχω~~

~~$\vec{F} = 8,88\hat{i} - 10,67\hat{j} + 0\hat{u}$~~

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{F}_{5x}| = \sin(45)|\vec{F}_5| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7 = 4,95\ kN \\ |\vec{F}_{5y}| = \cos(45)|\vec{F}_5| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7 = 4,95\ kN \end{array}\right\} \vec{F}_5 = -4,95\hat{i} + 4,95\hat{j} + 0\hat{u}\ kN$$

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{F}_{6x}| = \cos(75) \cdot |\vec{F}_6| = 0,26 \cdot 6 = 1,55\ kN \\ |\vec{F}_{6y}| = \sin(75) \cdot |\vec{F}_6| = 5,8\ kN \end{array}\right\} \vec{F}_6 = 1,55\hat{i} - 5,8\hat{j} + 0\hat{u}\ kN$$

Επίσης έχω:

$\vec{AB} = -4\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ m

$\vec{A\Gamma} = 0\hat{i} - 2\hat{j} + 0\hat{k}$ m

Άρα $\vec{M}_A^{F_5} = \vec{A\Gamma} \times \vec{F_5} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ -4{,}95 & 4{,}95 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 9{,}9\hat{k}$ kNm

και $\vec{M}_A^{F_6} = \vec{AB} \times \vec{F_6} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & 0 & 0 \\ 1{,}55 & -5{,}8 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 23{,}2\hat{k}$ kNm

Μεταφέρω τις $\vec{F_5}, \vec{F_6}$ στο A προσθέτοντας στο σύστημα τις ροπές που προκαλούν ως προς αυτό.

Άρα έχω:

$\vec{R} = (1{,}64 + 6\cos\theta)\hat{i} + (6\sin\theta - 6{,}91)\hat{j} + 0\hat{k}$ ~~kN~~ και $\sum\vec{M} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 13{,}3\hat{k}$ kNm

Ψάχνω σημείο $O(x,y,0)$ τέτοιο ώστε $\vec{M}_O^{R} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 13{,}3\hat{k}$ kNm

$\vec{OA} = -x\hat{i} - y\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{M}_O^{R} = \vec{OA} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -x & -y & 0 \\ (1{,}64 + 6\cos\theta) & (6\sin\theta - 6{,}91) & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \begin{vmatrix} -x & -y \\ (1{,}64+6\cos\theta) & (6\sin\theta - 6{,}91) \end{vmatrix}\hat{k} =$

$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + [-x(6\sin\theta - 6{,}91) + y(1{,}64 + 6\cos\theta)]\hat{k}$

Άρα πρέπει $y(1{,}64 + 6\cos\theta) - x(6\sin\theta - 6{,}91) = -13{,}3 \Leftrightarrow y = \dfrac{6\sin\theta - 6{,}91}{6\cos\theta + 1{,}64}x - \dfrac{13{,}3}{6\cos\theta + 1{,}64}$

Για $\theta = -50{,}25^{\circ}$ έχω:

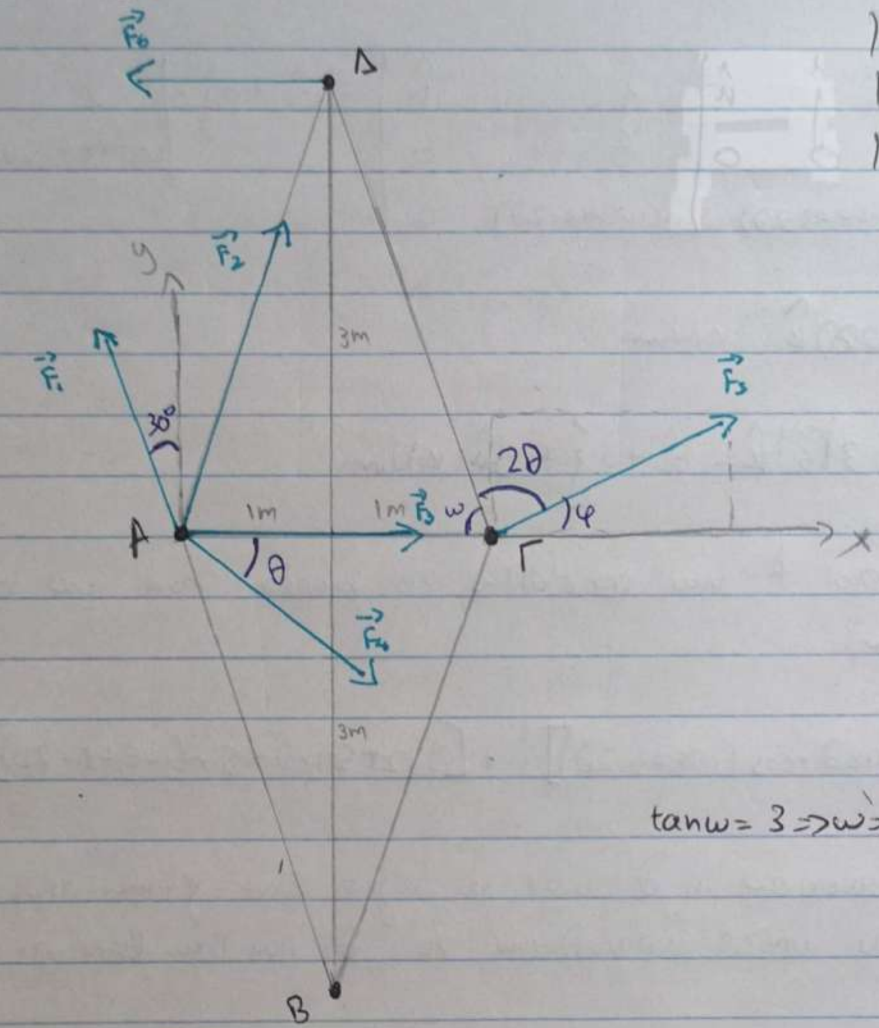
$$y = \frac{-11{,}52}{5{,}48}x - \frac{13{,}3}{5{,}48} \Rightarrow y = -2{,}1x - 2{,}43$$

Για $x=0$: $y = -2{,}43$ εντός του σώματος.

Για $y=0$: $x = -\frac{2{,}43}{2{,}1} = -1{,}16 \in BA$

Άσκηση 7

$|\vec{F_1}| = 2$ kN $\quad |\vec{F_4}| = 5$ kN
$|\vec{F_2}| = 8$ kN $\quad |\vec{F_5}| = 1$ kN
$|\vec{F_3}| = 4$ kN $\quad |\vec{F_6}| = 3$ kN



$\tan\omega = 3 \Rightarrow \omega = 71{,}57°$

Από Σειρά 1 Άσκηση 2 έχω:

α)

$$\left.\begin{aligned} \vec{F_1} &= -1\hat{i} + \sqrt{3}\,\hat{j} + 0\hat{u} \text{ kN} \\ \vec{F_2} &= 2{,}53\hat{i} + 7{,}59\hat{j} + 0\hat{u} \text{ kN} \\ \vec{F_3} &= 4\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{u} \text{ kN} \\ \vec{F_4} &= 5\cos\theta\,\hat{i} + 5\sin\theta\,\hat{j} \text{ kN} \end{aligned}\right\} \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = (5{,}53 + 5\cos\theta)\hat{i} + (9{,}32 + 5\sin\theta)\hat{j} + 0\hat{u}$$

και τελικά $\theta = 12{,}7°$, άρα $\vec{F} = 10{,}41\hat{i} + 10{,}41\hat{j}$

Επίσης έχω:
$$\left.\begin{aligned} |\vec{F_{5x}}| &= \cos\varphi \cdot |\vec{F_5}| = \cos(108{,}43 - 2\theta) \text{ kN} \\ |\vec{F_{5y}}| &= \sin\varphi \cdot |\vec{F_5}| = \sin(108{,}43 - 2\theta) \text{ kN} \end{aligned}\right\} \vec{F_5} = \cos(108{,}43 - 2\theta)\hat{i} + \sin(108{,}43 - 2\theta)\hat{j}$$

$$\vec{F_6} = -3\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{u}$$

Έχω: $\vec{A\Gamma} = 2\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ m

Άρα $\vec{M}_A^{F_5} = \vec{A\Gamma} \times \vec{F_5} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ \cos(108{,}43-2\theta) & \sin(108{,}43-2\theta) & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \cos(108{,}43-2\theta) & \sin(108{,}43-2\theta) \end{vmatrix}\hat{k}$

$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 2\sin(108{,}43-2\theta)\hat{k}$ kNm

και $\vec{M}_A^{F_6} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 3|\vec{F_6}|\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 9\hat{k}$ kNm

Μεταφέρω τις $\vec{F_5}, \vec{F_6}$ στο Α και προσθέτω τις ροπές τους ως προς αυτό στο σύστημα. Άρα έχω:

$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F_5} + \vec{F_6} = [2{,}53 + 5\cos\theta + \cos(108{,}43-2\theta)]\hat{i} + [9{,}32 + 5\sin\theta + \sin(108{,}43-2\theta)]\hat{j} + 0\hat{k}$

(Εδώ θα μπορούσα να συνεχίσω με θ ώστε να δείξω την γενική περίπτωση, αλλά οι πράξεις θα είναι πολλές οπότε αντικαθιστώ το θ που έχω βρει στο (α)).

Για $\theta = 12{,}7°$:

$\vec{R} = [2{,}53 + 5\cos(12{,}7°) + \cos(83{,}03°)]\hat{i} + [9{,}32 + 5\sin(12{,}7°) + \sin(83{,}03°)]\hat{j} + 0\hat{k} =$

$= 7{,}53\hat{i} + 11{,}41\hat{j} + 0\hat{k}$

Επίσης έχω $\Sigma\vec{M} = \vec{M}_A^{F_5} + \vec{M}_A^{F_6} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + (2\sin(108{,}43-2\theta) + 9)\hat{k}$

Για $\theta = 12{,}7°$: $\Sigma\vec{M} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + [2\sin(83{,}03°) + 9]\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 10{,}99\hat{k}$

Θέλω $O(x,y)$ τέτοιο ώστε $\vec{M}_O^{R} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 10{,}99\hat{k}$

$\vec{OA} = -x\hat{i} - y\hat{j} + 0\hat{k}$

$$\vec{M}_O^R = \vec{OA} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -x & -y & 0 \\ 7,53 & 11,41 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \begin{vmatrix} -x & -y \\ 7,53 & 11,41 \end{vmatrix} \hat{k} =$$

$$= 0\hat{i} + 0\hat{j} \, (-11,41x + 7,53y)\hat{k}$$

Άρα πρέπει $7,53y - 11,41x = -10,99 \Leftrightarrow y = \frac{11,41}{7,53}x - \frac{10,99}{7,53} \Leftrightarrow y = 1,52x - 1,46 : (\varepsilon)$

Η πλευρά ΓΔ: $y = -3x + 6$, $x \in [1,2]$

Το σημείο τομής των (ε), ΓΔ: $1,52x - 1,46 = -3x + 6 \Leftrightarrow 4,52x = 7,46 \Leftrightarrow x = 1,62 \in [1,2]$
άρα δεκτό. $x = 1,62 \Rightarrow y = 1,14$

Άρα ένα ζητούμενο σημείο είναι το $O_1(1,62, 1,14, 0)$

Η πλευρά ΑΔ: $y = 3x$, $x \in [0,1]$

Σημείο τομής ΑΔ,(ε): $3x = 1,52x - 1,46 \Leftrightarrow x = \frac{-1,46}{1,48} = -0,99$ απορ.

Η πλευρά ΑΒ: $y = -3x$, $x \in [0,1]$

Σημείο τομής ΑΒ,(ε): $-3x = 1,52x - 1,46 \Leftrightarrow 4,52x = 1,46 \Leftrightarrow x = 0,32 \in [0,1]$ δεκτό
Για $x = 0,32 \Rightarrow y = -0,96$

Άρα ένα δεύτερο ζητούμενο σημείο είναι το $O_2(0,32, -0,96, 0)$