ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής

Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

22η σειρά ασκήσεων: Υδροστατική (εφαρμογές)

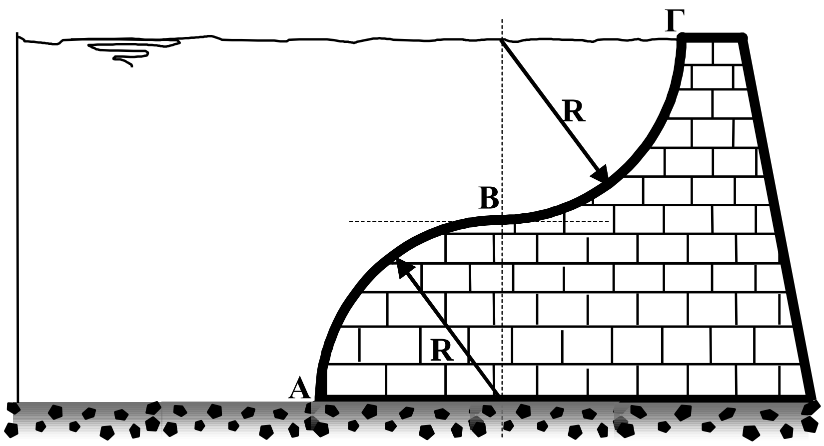
Άσκηση 1

Φράγμα αποτελείται από δύο συναρμοσμένα τμήματα μορφής τεταρτο-κυλίνδριου (Σχ.1) ακτίνας R=4m και βάθους (διάσταση κάθετη στο χαρτί) b=10m.

α. Να ευρεθεί το μέτρο της συνολικής υδροστατικής δύναμης που δέχεται το φράγμα όταν πληρωθεί με νερό μέχρι το σημείο Γ.

β. Να προσδιορισθεί ο φορέας της δύναμης του προηγουμένου ερωτήματος

Δίνεται το ειδικό βάρος του νερού $\gamma_{H2O}=10^4\ N/m^3$.



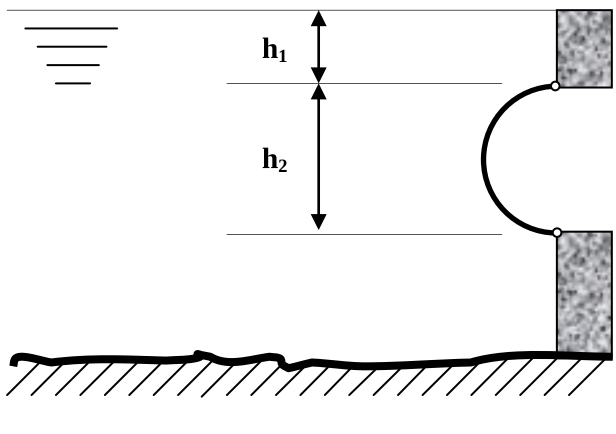
Σχήμα 1

Άσκηση 2

α. Να ευρεθεί η υδροστατική δύναμη στον ημισφαιρικό θόλο του Σχ.2.

β. Να ευρεθούν οι φορείς της οριζόντιας και κατακόρυφης συνιστώσας και ο φορέας της συνολικής υδροστατικής δύναμης.

Δίνεται το ειδικό βάρος του νερού $\gamma_{H2O}=10^4\ N/m^3$.



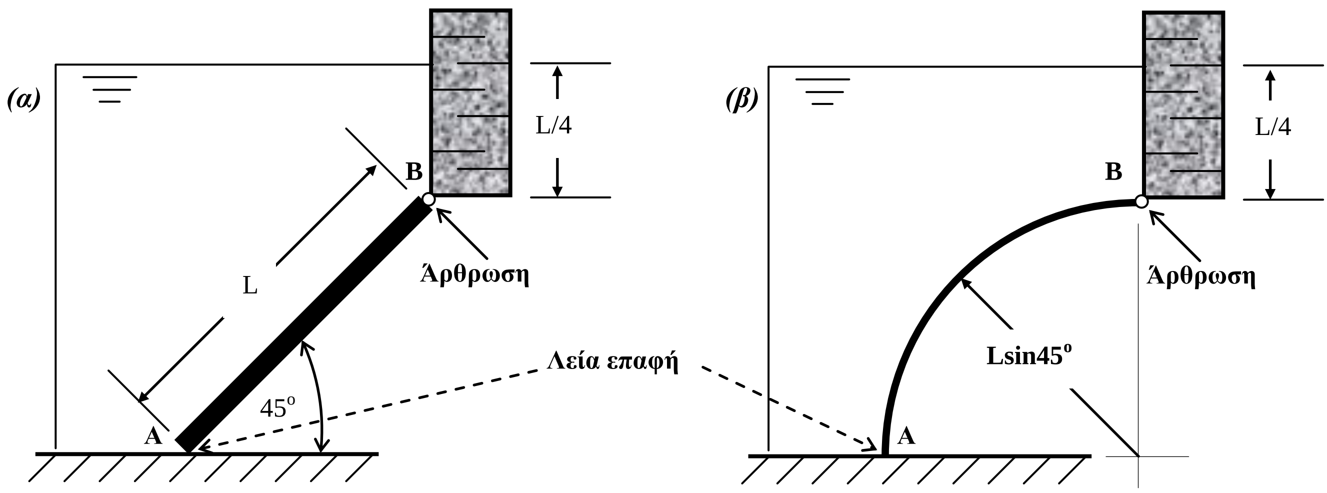
Σχήμα 2

Άσκηση 3

α Να ευρεθεί το πηλίκο της υδροστατικής δύναμης που δέχεται η επίπεδη ορθογωνική φραγματοθυρίδα του Σχ.3α διαστάσεων LxW=5x5 m^2 ως προς την αντίστοιχη δύναμη που δέχεται η φραγματοθυρίδα του Σχ.3β η οποία έχει πλάτος W και εγκάρσια διατομή μορφής τεταρτοκυκλίου ακτίνας $L\sin 45^o$.

β. Να ευρεθεί το πηλίκο των αντιδράσεων στα σημεία Α.

γ. Να ευρεθεί το πηλίκο των αντιδράσεων στα σημεία Β.



Σχήμα 3

Άσκηση 4

Η εγκάρσια διατομή καμπύλης φραγματοθυρίδας περιγράφεται από τη συνάρτηση $y=kx^3$ (Σχ.4).

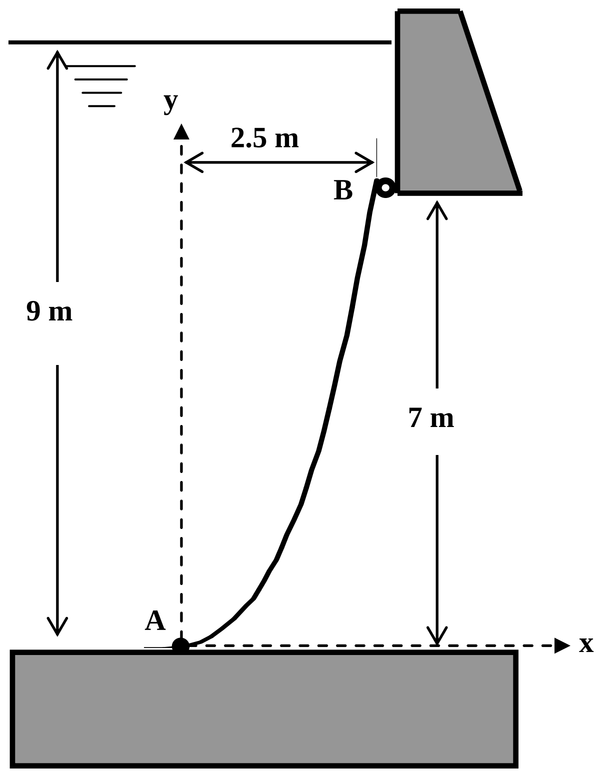
Προσδιορίστε:

α. Το μέτρο της υδροστατικής δύναμης που δρα στη θυρίδα ανά μονάδα πλάτους του φράγματος (διάσταση κάθετη στο επίπεδο του Σχ. 4).

β. Το σημείο στο οποίο η υδροστατική δύναμη συναντά την ελεύθερη επιφάνεια του νερού.

γ. Τις αντιδράσεις στην άρθρωση Α και στη λεία επαφή Β αν το βάρος της θυρίδας ανά μονάδα πλάτους είναι 100 kN.

Δίνεται: Ειδικό βάρος του νερού $\gamma=10^4$ N/m^3.



Σχήμα 4

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής

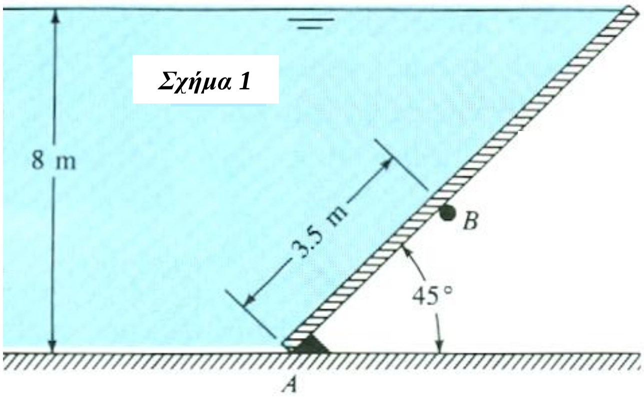
Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

23η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας: Η υδροστατική δύναμη

Άσκηση 1

Η επίπεδη τετραγωνική φραγματοθυρίδα του Σχ.1 δύναται να περιστρέφεται πέριξ οριζοντίου άξονος διερχομένου από το Β. Αγνοώντας το ίδιον βάρος της ελέγξτε αν στη συγκεκριμένη θέση ευρίσκεται σε ασταθή ή ευσταθή κατάσταση ισορροπίας.

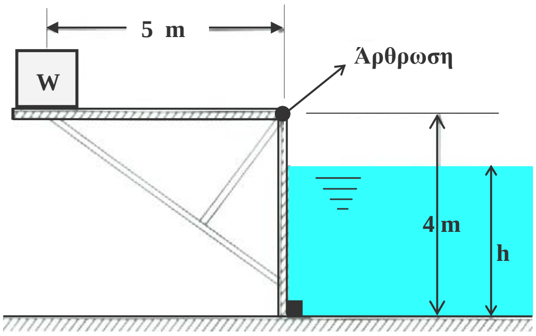


Σχήμα 1

Άσκηση 2

Το βάρος του αντιβάρου στο Σχ.2 είναι W =60 kN. Σε ποιο ύψος h του νερού θα ανοίξει η φραγματοθυρίδα της οποίας το πλάτος είναι 2 m;
(Αγνοήστε το ίδιον βάρος της φραγματοθυρίδας).

Σχήμα 2, 3



Άσκηση 3

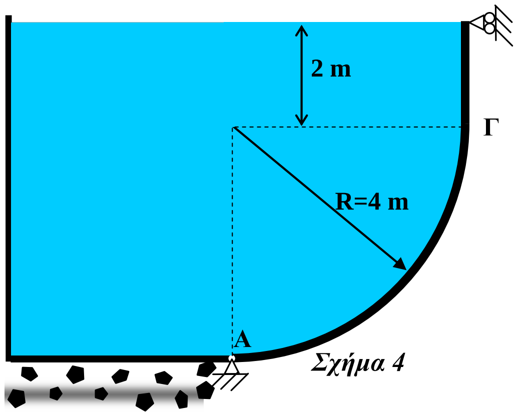
Για ποια τιμή του αντιβάρου W (Σχ.3) θα επίκειται άνοιγμα της φραγματοθυρίδας πλάτους 2m αν το ύψος του νερού στο φράγμα είναι h=3m;
(Αγνοήστε το ίδιον βάρος της φραγματοθυρίδας).

Άσκηση 4

Η φραγματοθυρίδα του Σχ.4, βάθους 1m αποτελείται από τεταρτοκύκλιο ΑΓ και ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Η φραγματοθυρίδα στηρίζεται με άρθρωση στο Α και κύλιση στο Β. Να υπολογισθεί:

α. Το διάνυσμα της υδροστατικής δύναμης που ασκείται στην φραγματοθυρίδα και το μέτρο της.
β. Ο φορέας της υδροστατικής δύναμης.
γ. Οι αντιδράσεις στηρίξεως στα Α και Β.

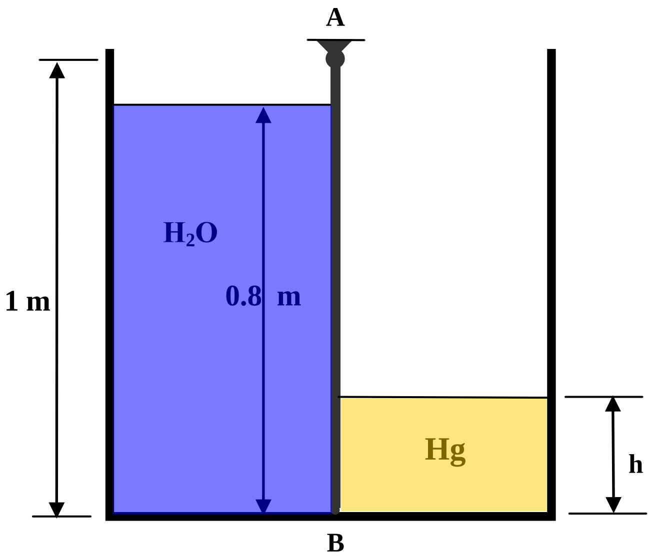
$\gamma_{νερού}=10^4$ N/m^3. *Αγνοήστε την ατμοσφαιρική πίεση.*



Σχήμα 4

Άσκηση 5

Το κυβικό δοχείο του Σχ.5 χωρίζεται σε δύο ίσους χώρους με τη βοήθεια κατακορύφου ελάσματος ΑΒ που εφάπτεται στον πυθμένα και δύναται να περιστρέφεται χωρίς τριβή πέριξ οριζοντίου άξονος διερχομένου από το Α. Αν το ειδικό βάρος του νερού είναι $\gamma=10^4$ N/m^3 και η ειδική βαρύτητα του υδραργύρου είναι $s_{Hg}=13.6$ να υπολογισθεί το ύψος h της στάθμης του υδραργύρου ώστε να μην αναμειχθούν τα υγρά.



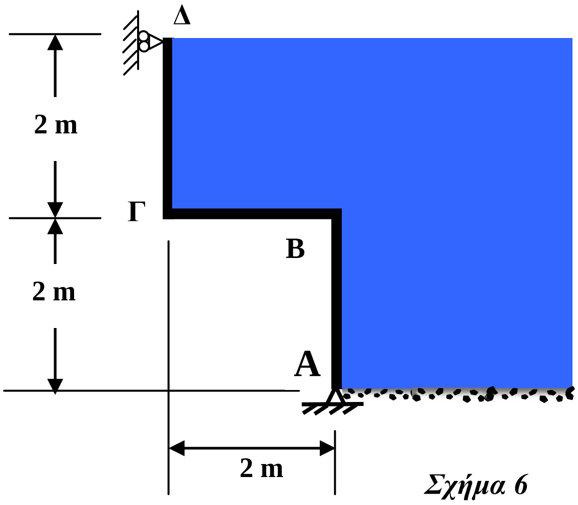
Σχήμα 5

Άσκηση 6

α. Να αποδειχθεί η σχέση μεταξύ της υψομετρικής διαφοράς δύο σημείων ηρεμούντος υγρού ειδικού βάρους γ με τη μεταξύ τους διαφορά πιέσεως.

β. Η φραγματοθυρίδα ΑΒΓΔ του Σχ.6, βάρους 9 kN, έχει πλάτος (κάθετα στο φύλλο) 4m και στηρίζεται με άρθρωση και κύλιση. Να ευρεθούν οι αντιδράσεις στα Α, Δ.

Η ατμοσφαιρική πίεση είναι 101 kPa και το ειδικό βάρος του νερού 10^4 N/m^3.



Σχήμα 6

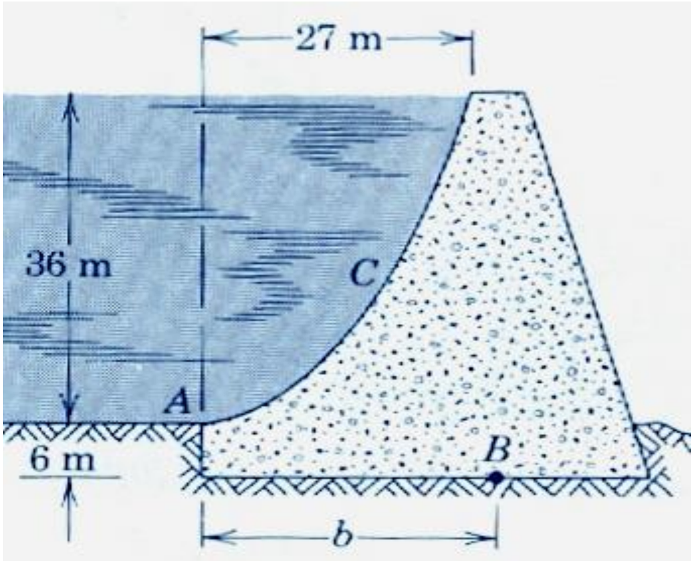
Άσκηση 7

Η διατομή του φράγματος του Σχ. 7 έχει μορφή κατακόρυφης παραβολής. Προσδιορίστε:

α. Το ανά μονάδα πλάτους του φράγματος (διάσταση κάθετη στο επίπεδο του Σχ. 7) μέτρο της υδροστατικής δύναμης.

β. Το σημείο Β στο οποίο η υδροστατική δύναμη τέμνει τη βάση του φράγματος.

Δίνεται: Ειδικό βάρος του νερού $\gamma=10^4$ N/m^3.

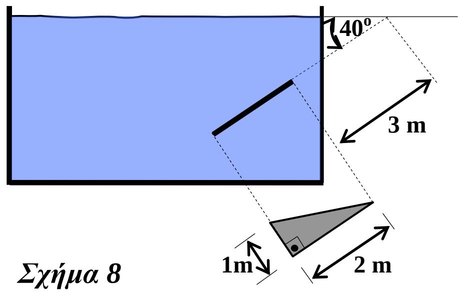


Σχήμα 7

Άσκηση 8

Επίπεδη τριγωνική επιφάνεια είναι βυθισμένη σε υγρό ειδικού βάρους 10^4 N/m^3 (Σχ.4). Υπολογίστε το σημείο εφαρμογής της υδροστατικής δύναμης.

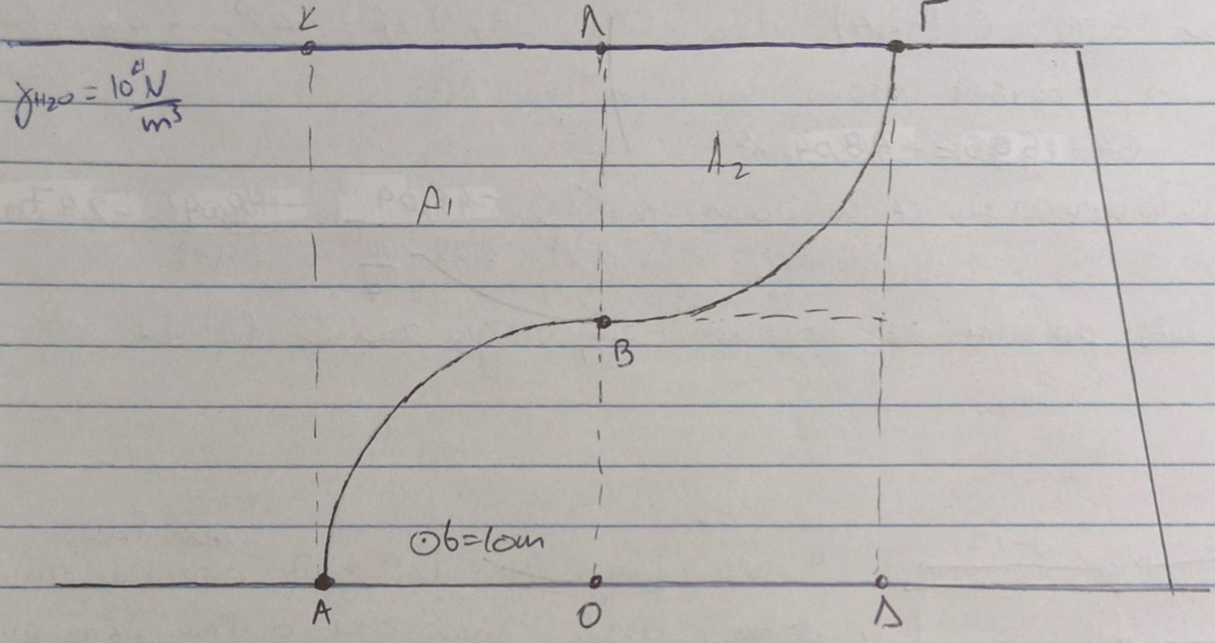
Να αγνοηθεί η ατμοσφαιρική πίεση.



Σχήμα 8

22η σειρά ασκήσεων: Υδροστατική (Εφαρμογές)

Άσκηση 1



Πλάτος (κάθετα στο χαρτί): b=10m
R=4m

Η οριζόντια συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης είναι ίση με την δύναμη που θα ασκούνταν στην προβολή του φράγματος στο ΓΔ.

Άρα $F_{op} = P_c \cdot A = \gamma z_c \cdot A = 10^4 \cdot R \cdot (2\cdot R \cdot b) = 10^4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10 = 32 \cdot 10^5 N = 3200 kN$

Η F_{op} ασκείται σε απόσταση $z_{cp} = y_{cp} = z_c + \frac{I_{xcxc}}{y_c A} = R + \frac{b(2R)^3}{12 \cdot y_c \cdot A} = R + \frac{\cancel{b} 8R^{\cancel{3}}}{12 \cdot R \cdot 2R \cdot \cancel{b}} = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3} m$ (Ή αλλιώς επειδή η επιφάνεια φτάνει στην επιφάνεια του υγρού $z_{cp} = y_{cp} = \frac{2 \cdot (2R)}{3} = \frac{16}{3} m$)

Η κάθετη συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης είναι ίση (κατά μέτρο) με το βάρος του υγρού πάνω από το φράγμα. Σπάω την δύναμη σε δύο, μια πάνω από το τεταρτοκύκλιο ΑΒ, $F_{καθ,1}$ και μια πάνω από το τεταρτοκύκλιο ΒΓ, $F_{καθ,2}$.

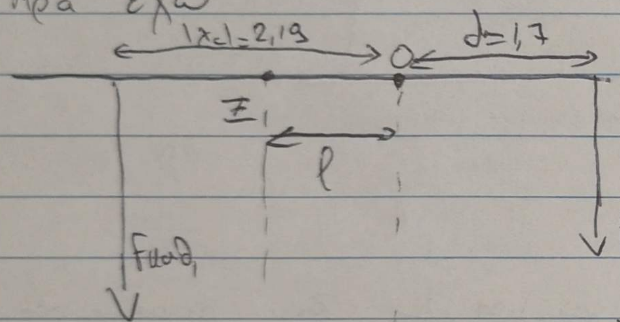
Έχω $A_1 = 2R \cdot R - \frac{\pi R^2}{4} = 32 - 4\pi = 19,43 m^2$ και $A_2 = \frac{\pi R^2}{4} = 4\pi = 12,57 m^2$

Άρα $F_1 = V_1 \gamma = b A_1 \gamma = 19,43 \cdot 10^5 = 1943 kN$
και $F_2 = V_2 \gamma = b A_2 \gamma = 12,57 \cdot 10^5 = 1257 kN$

Το γ. κέντρο του ΑΟΒ είναι $C(-\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$ με αρχή των αξόνων το Ο.
Άρα $C(-1,7 , 1,7)$ και άρα $Q_y = x_c A = -1,7 \cdot \frac{\pi R^2}{4} = -21,36$ m^3

Το γ. κέντρο του ΑΟΛΚ: $C'(-2,4)$ άρα $Q'_y = -2 \cdot R \cdot 2R = -4R^2 = -4 \cdot 4 \cdot 4 = -64 m^3$
Άρα το Q_y της επιφάνειας νερού πάνω από το $\widehat{AB}$:
$Q_y = Q'_y - Q_{1y} = -64 + 21,36 = -42,64$ m^3
Άρα η δύναμη $F_{καθ_1}$ ασκείται σε απόσταση $x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{-42,64}{R \cdot 2R - \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{-42,64}{19,43} = -2,19 m$ από το Ο.
Η δύναμη $F_{καθ_2}$ ασκείται σε απόσταση $d = \frac{4R}{3\pi}$ δεξιά του Ο, δηλαδή σε $d = 1,7m$

Άρα έχω



Η συνισταμένη των $F_{καθ_1}, F_{καθ_2}$ (ονομάζω $F_{καθ}$) ασκείται στην ευθεία όπου $\Sigma M = 0$. Έστω λοιπόν ότι βρίσκεται σε απόσταση l από το Ο. Τότε $\Sigma M_Ξ = 0 \Rightarrow F_{καθ_1} \cdot (2,19 - l) = F_{καθ_2} \cdot (d + l) \Rightarrow$

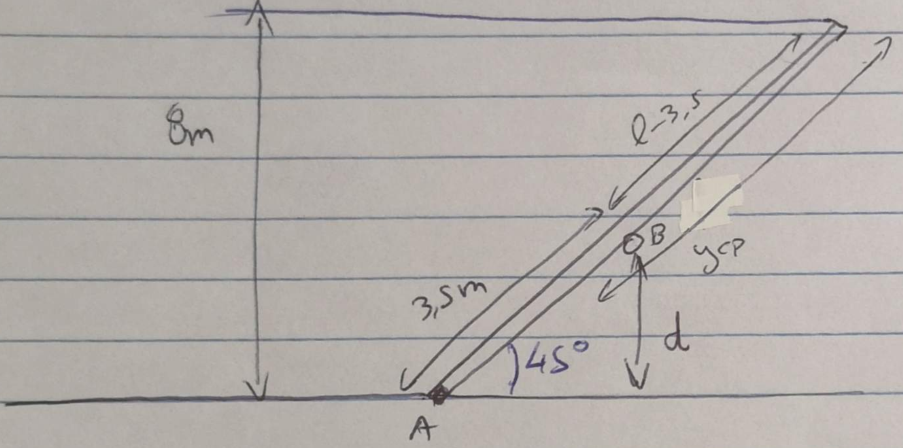
$\Rightarrow 1943 \cdot (2,19 - l) = 1257(1,7 + l) \Rightarrow 4255,17 - 1943 l = 1257 l + 2136,9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3200 l = 2118,27 \Rightarrow l = 0,66 m$ και έχει μέτρο $F_{καθ} = F_{καθ_1} + F_{καθ_2} = 3200 kN$

Τελικά έχω ότι η $F_{καθ}$ ασκείται πάνω στην ευθεία $x = -0,66$ και ότι η F_{op} ασκείται στην ευθεία $y = \frac{8}{3}$, με σύστημα αναφοράς με κέντρο το Ο.

Άρα η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο $F_H = \sqrt{F_{καθ}^2 + F_{op}^2} = 4525,48$ kN και ασκείται στην ευθεία που περνά από το σημείο $M(-0,66, \frac{8}{3})$ και σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x με $\tan\varphi = \frac{F_{καθ}}{F_{op}} = -1 \Rightarrow \varphi = -45°$

<u>23η σειρά ασκήσεων: Η υδροστατική δύναμη</u>

<u>Άσκηση 1</u>



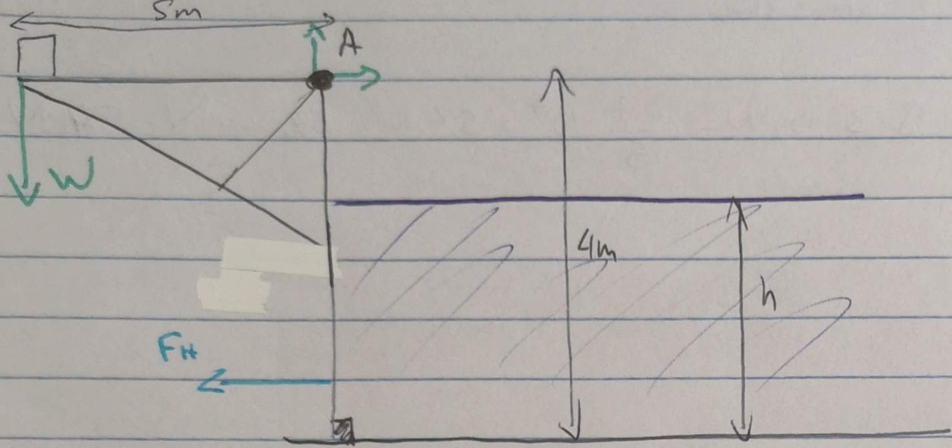
Επειδή η φραγματοθυρίδα φτάνει μόλις μέχρι την επιφάνεια του νερού, η υδροστατική δύναμη είναι μια κατανομή τριγωνικής μορφής και άρα ασκείται σε απόσταση $y_{cp} = \frac{2}{3} \cdot l$ από την επιφάνεια του νερού, όπου l το μήκος της φραγματοθυρίδας.

Έχω $\sin(45°) = \frac{d}{3,5} \Rightarrow d = 3,5 \sin(45°) = 2,47 m$

και έχω $\frac{d}{3,5} = \frac{l}{8} \Rightarrow l = \frac{8d}{3,5} = \frac{8 \cdot \cancel{3,5} \cdot \sin(45°)}{\cancel{3,5}} = 5,66 m$

Άρα $y_{cp} = 3,77 m$. Αφού $l - y_{cp} = 5,66 - 3,77 = 1,88 m < 3,5$ τότε η υδροστατική δύναμη ασκείται ανάμεσα στο A και στο B και άρα δεν μπορεί να στρέψει την φραγματοθυρίδα (θα έπρεπε να ασκείται πάνω από το B ώστε να προκαλεί ροπή ως προς αυτό). Άρα η φραγματοθυρίδα βρίσκεται σε ευσταθή θέση ισορροπίας. (εφόσον ισορροπεί, και δεν μπορούμε να προσθέσουμε άλλο νερό?)

Άσκηση 2



Πλάτος $b=2m$, ύψος $4m$

Αν $W=60kN$ σε ποιο ύψος h του νερού θα ανοίξει η φραγματοθυρίδα;

Στην φραγματοθυρίδα ασκείται η υδροστατική δύναμη η οποία έχει μέτρο

$$F_H = P_c \cdot A = \gamma z_c \cdot A = \gamma \cdot \frac{h}{2} \cdot 2h \Rightarrow F_H = 10^4 \cdot h^2$$

Η υδροστατική δύναμη ασκείται σε βάθος $z_{cp} = z_c + \frac{I_{x_c x_c}}{z_c \cdot A} = \frac{h}{2} + \frac{\frac{2 \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot h} =$

$$= \frac{h}{2} + \frac{h^3}{6h^2} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2h}{3}$$

Πρέπει $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 5W = F_H \cdot (4 - h + z_{cp}) \Rightarrow 5W = 10^4 \cdot h^2 \left(4 - h + \frac{2h}{3}\right) \Rightarrow 5W = 10^4 \cdot h^2 \left(4 - \frac{h}{3}\right)$ (1)

Άρα για $W=60kN$ έχω $5 \cdot 6 \cdot \cancel{10^4} = \cancel{10^4}\left(4h^2 - \frac{h^3}{3}\right) \Rightarrow -\frac{h^3}{3} + 4h^2 = 30$

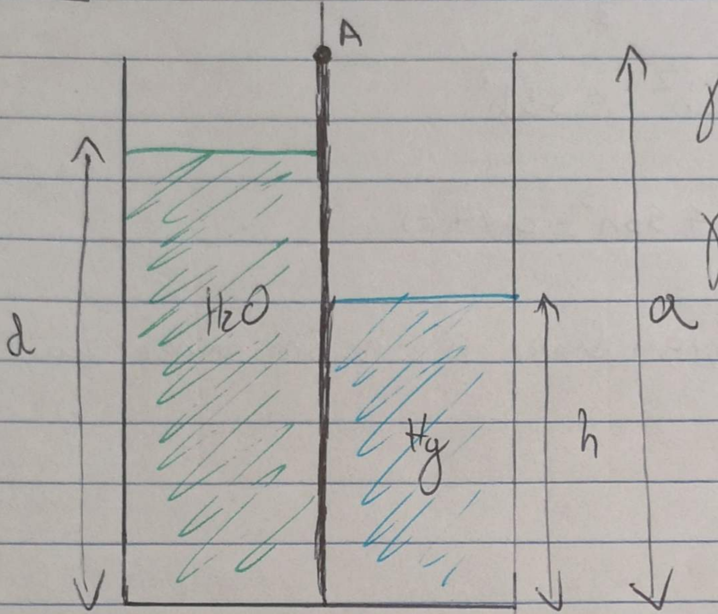
$\Rightarrow h = -2{,}49m$ απορρίπτεται ή $h = 3{,}2m$ δεκτή ή $h = 11{,}29m$ απορρίπτεται. Άρα για $h = 3{,}2m$ ανοίγει η φραγματοθυρίδα

Άσκηση 3

Από την σχέση (1), για $h=3m$ έχω:

$$5W = 10^4 \cdot g(4-1) \Rightarrow 5W = 10^4 \cdot g \cdot 3 \Rightarrow W = \frac{27}{5} \cdot 10^4 = 5{,}4 \cdot 10^4 = 54.000\,N = 54\,kN$$

Άσκηση 5



$\gamma_{H_2O} = 10^4 \frac{N}{m^3}$

$\gamma_{Hg} = 13{,}6 \cdot 10^4 \cdot \frac{kg}{m^3}$

Η υδροστατική δύναμη που ασκεί το νερό στο έδαφος

$F_{H_2O} = P_{C_{H_2O}} \cdot A = \gamma_{H_2O} \cdot z_C \cdot A = 10^4 \cdot \frac{d}{2} \cdot d \cdot a$ όπου a η πλευρά του κύβου.

Άρα $F_{H_2O} = \frac{10^4}{2} \cdot a d^2$

Η F_{H_2O} ασκείται σε απόσταση $z_{cp_1} = z_{c_1} + \frac{I_{xcxc}}{z_{c_1} A} = \frac{d}{2} + \frac{\frac{a d^3}{12}}{\frac{d}{2} \cdot a \cdot d} = \frac{d}{2} + \frac{\cancel{a} d^{\cancel{3}}}{6 \cancel{d^2} \cancel{a}} =$

$= \frac{d}{2} + \frac{d}{6} = \frac{2d}{3}$ από την επιφάνεια του νερού, δηλαδή σε απόσταση

$l_1 = a - d + z_{cp_1} = a - d + \frac{2d}{3} = a - \frac{d}{3}$ από το A.

Η υδροστατική δύναμη που ασκεί ο υδράργυρος στο έδαφος:

$F_{Hg} = P_{C_{Hg}} \cdot A = \gamma_{Hg} \cdot z_{c_2} \cdot A = 13{,}6 \cdot 10^4 \cdot \frac{h}{2} \cdot h \cdot a = 6{,}8 \cdot h^2 \cdot a \cdot 10^4 = 6{,}8 a \cdot 10^4 \cdot h^2$

Η F_{Hg} ασκείται σε απόσταση $z_{cp_2} = z_{c_2} + \frac{I_{xcxc}}{z_{c_2} \cdot A} = \frac{h}{2} + \frac{\frac{a h^3}{12}}{\frac{h}{2} \cdot a h} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2h}{3}$

από την επιφάνεια του υδραργύρου

Άρα σε απόσταση $l_2 = a - \frac{h}{3}$ από το A.

Πρέπει $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F_{H_2O} \cdot l_1 = F_{Hg} \cdot l_2 \Rightarrow \cancel{10^4} \frac{\cancel{a}}{2} \cdot d^2 \left(a - \frac{d}{3}\right) = 6{,}8 \cdot \cancel{10^4} \cancel{a} \cdot h^2 \left(a - \frac{h}{3}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d^2\left(a-\frac{d}{3}\right) = 13{,}6\,h^2\left(a-\frac{h}{3}\right) \Rightarrow ad^2 - \frac{d^3}{3} = 13{,}6\,a h^2 - 4{,}53\,h^3$$

Για $a = 1m$ έχω $d^2 - \frac{d^3}{3} = 13{,}6\,h^2 - 4{,}53\,h^3$

Για $d = 0{,}8m$ έχω $13{,}6\,h^2 - 4{,}53\,h^3 = 0{,}47 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = -0{,}18$ απορρίπτεται, ή $h = 0{,}19m$ δεκτό ή $h = 3m$ απορρίπτεται (>1)