Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το διορθώσω: Georgepan

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής

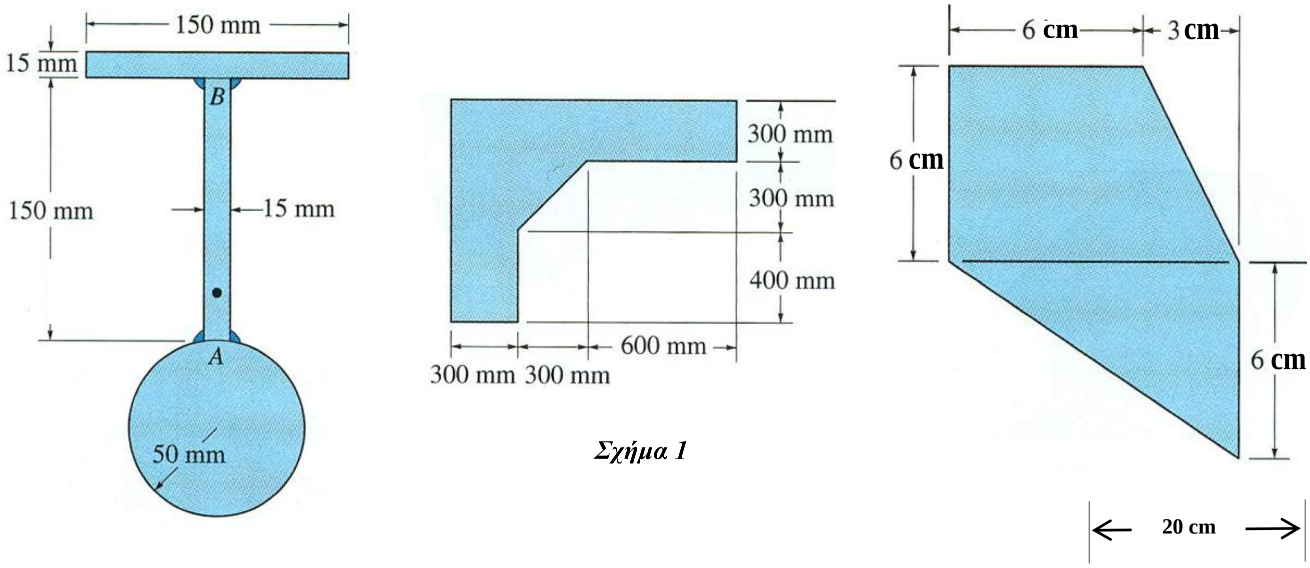
Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

9η σειρά ασκήσεων: Προσδιορισμός γεωμετρικού κέντρου επιπέδων επιφανειών

Άσκηση 1

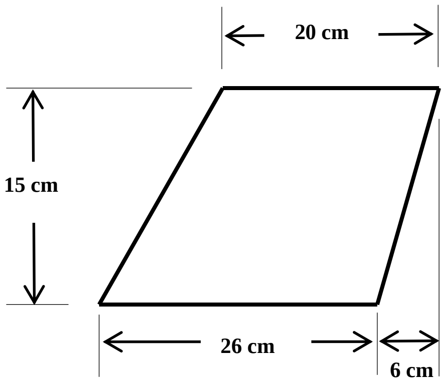
Να προσδιορισθούν τα γεωμετρικά κέντρα των κάτωθι επιφανειών (Σχ. 1):



Σχήμα 1

Άσκηση 2

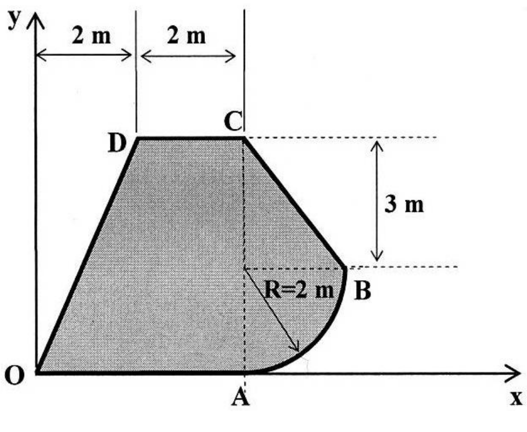
Προσδιορίστε το γεωμετρικό κέντρο της τραπεζοειδούς επιφάνειας που απεικονίζεται στο Σχ. 2.



Σχήμα 2

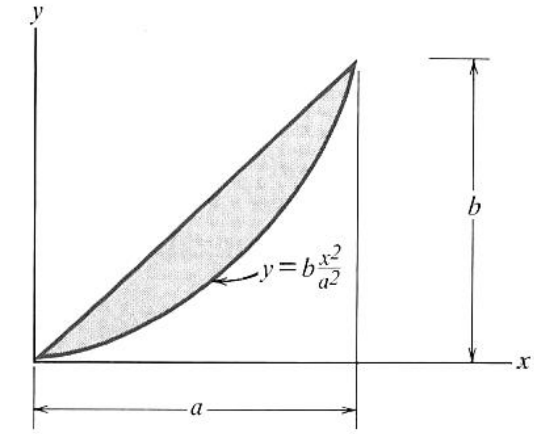
Άσκηση 3

Υπολογίστε την επιφανειακή ροπή πρώτης τάξης της επιφάνειας OABCDO ως προς το σύστημα αναφοράς του Σχ. 3 και προσδιορίστε το γεωμετρικό του κέντρο.
Σημείωση: Το τμήμα AB είναι τεταρτοκύκλιο.



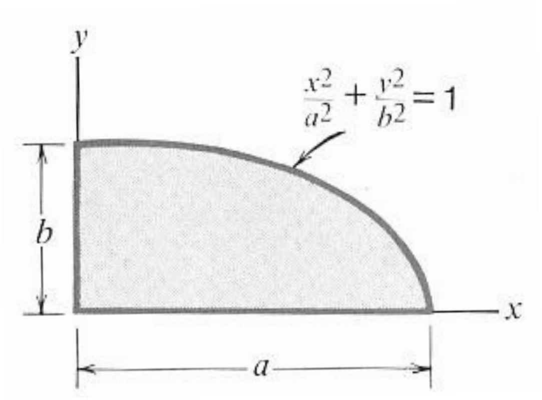
Σχήμα 3

Άσκηση 4
Προσδιορίστε το γεωμετρικό κέντρο της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του Σχ. 4.



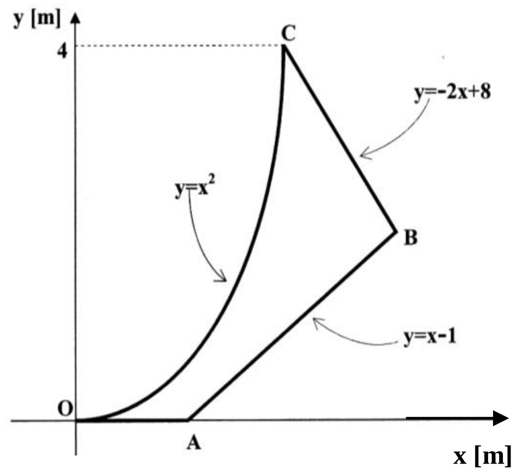
Σχήμα 4

Άσκηση 5
Προσδιορίστε το γεωμετρικό κέντρο της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του Σχ. 5.



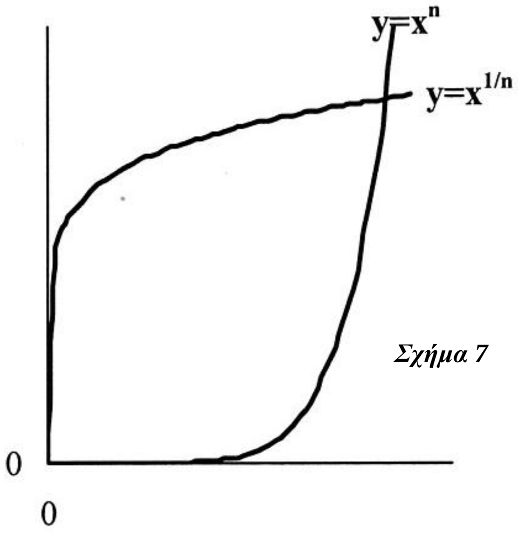
Σχήμα 5

Άσκηση 6
Υπολογίστε την επιφανειακή ροπή πρώτης τάξης της επιφάνειας OABCO ως προς το σύστημα αναφοράς που απεικονίζεται στο Σχ. 6 και προσδιορίστε το γεωμετρικό του κέντρο.



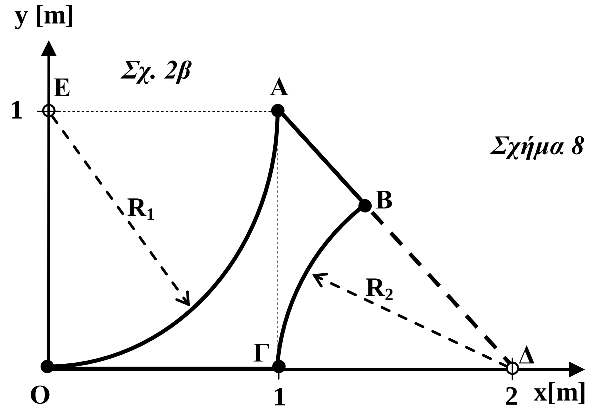
Σχήμα 6

Άσκηση 7
Να προσδιορισθεί το γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας του Σχ. 7 που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $y=x^n$ και $y=x^{1/n}$, όπου n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1, συναρτήσει της παραμέτρου n. Τι συμβαίνει όταν $n \to \infty$ και τι συμβαίνει για $n \to 1$;



Σχήμα 7

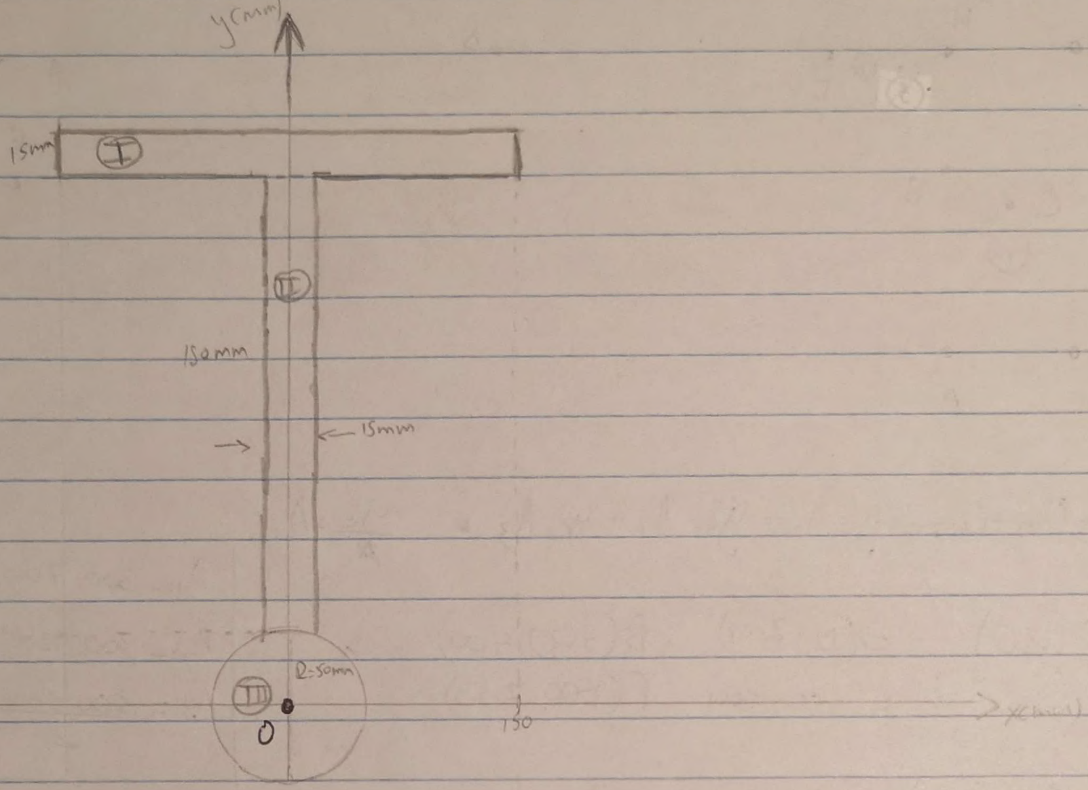
Άσκηση 8
Να προσδιορισθεί το γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας ΟΑΒΓΟ του Σχ. 8. Τα τμήματα ΟΑ και ΒΓ είναι τόξα κύκλου



Σχήμα 8

3η Σειρά ασκήσεων: Προσδιορισμός γεωμετρικού κέντρου επίπεδων επιφανειών.

Άσκηση 1



Ισχύει $y_c = \frac{Q_x}{A} = \frac{Q_{x_1} + Q_{x_2} + Q_{x_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{A_1 y_{c_1} + A_2 y_{c_2} + A_3 y_{c_3}}{A_1 + A_2 + A_3}$

$x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{Q_{y_1} + Q_{y_2} + Q_{y_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{A_1 x_{c_1} + A_2 x_{c_2} + A_3 x_{c_3}}{A_1 + A_2 + A_3}$

Έχω: $A_1 = 150 \cdot 15 = 2250 \ (mm)^2$ | $x_{c_3} = 0, \ y_{c_3} = 0$

$A_2 = 150 \cdot 15 = 2250 \ (mm)^2$ | $x_{c_2} = 0, \ y_{c_2} = 75 + 50 = 125 \ mm$

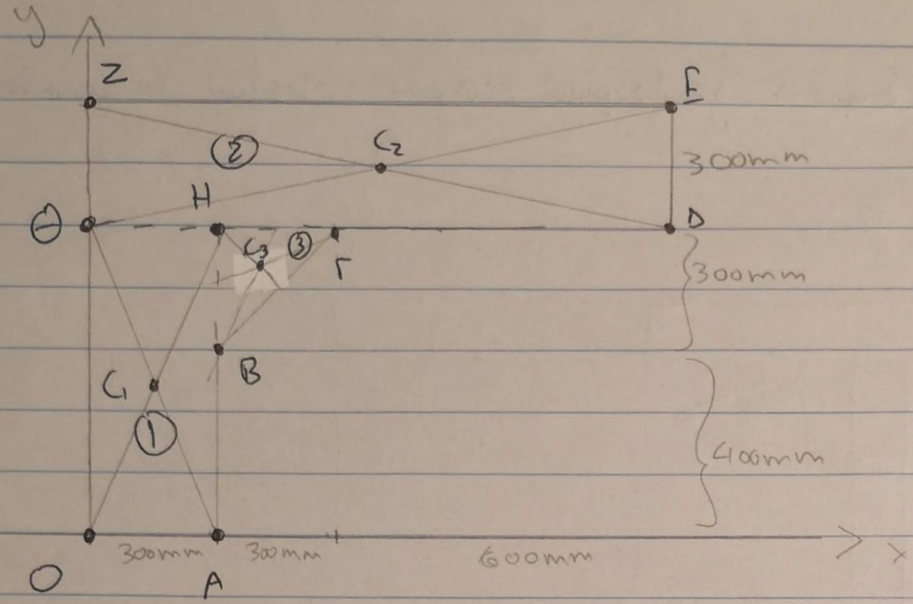
$A_3 = \pi \cdot 50^2 = 2500\pi = 7853{,}98 \ (mm)^2$ | $x_{c_1} = 0, \ y_{c_1} = 7{,}5 + 200 = 207{,}5 \ mm$

Άρα $y_c = \frac{2250 \cdot 207{,}5 + 2250 \cdot 125}{2 \cdot 2250 + 7853{,}98} = \frac{2250(207{,}5 + 125)}{2 \cdot 2250 + 7853{,}98} = \frac{2250 \cdot 332{,}5}{12353{,}98} = \frac{748125}{12353{,}98} = 60{,}56 \ mm$

και $x_c = \frac{0}{A} = 0$

Άρα $C(0, \ 60{,}56)$

Παρατήρηση: Το γεωμετρικό κέντρο του κύκλου είναι το O, και τα γεωμετρικά κέντρα των παρ/μων είναι τα σημεία τομής των διαγωνίων τους.



$Q_x = Q_{x_1} + Q_{x_2} + Q_{x_3} = y_{c_1} A_1 + y_{c_2} A_2 + y_{c_3} A_3 = y_c \cdot A$

$A_1 = 300 \cdot 700 = 210000 \ mm^2$

$A_2 = 300 \cdot 1200 = 360000 \ mm^2$

$A_3 = \frac{300 \cdot 300}{2} = \frac{90000}{2} = 45000 \ m$

Έχω $O(0,0)$ $\Theta(0,700)$ $B(300,400)$

$H(300,700)$ $E(1200,1000)$ $\Gamma(600,700)$

Άρα $C_1(150,350)$, $C_2(600,850)$, $C_3(400,600)$

Άρα $Q_x = 350 \cdot 210000 + 850 \cdot 360000 + 600 \cdot 45000 = 35 \cdot 21 \cdot 10^5 + 85 \cdot 36 \cdot 10^5 + 6 \cdot 45 \cdot 10^5$

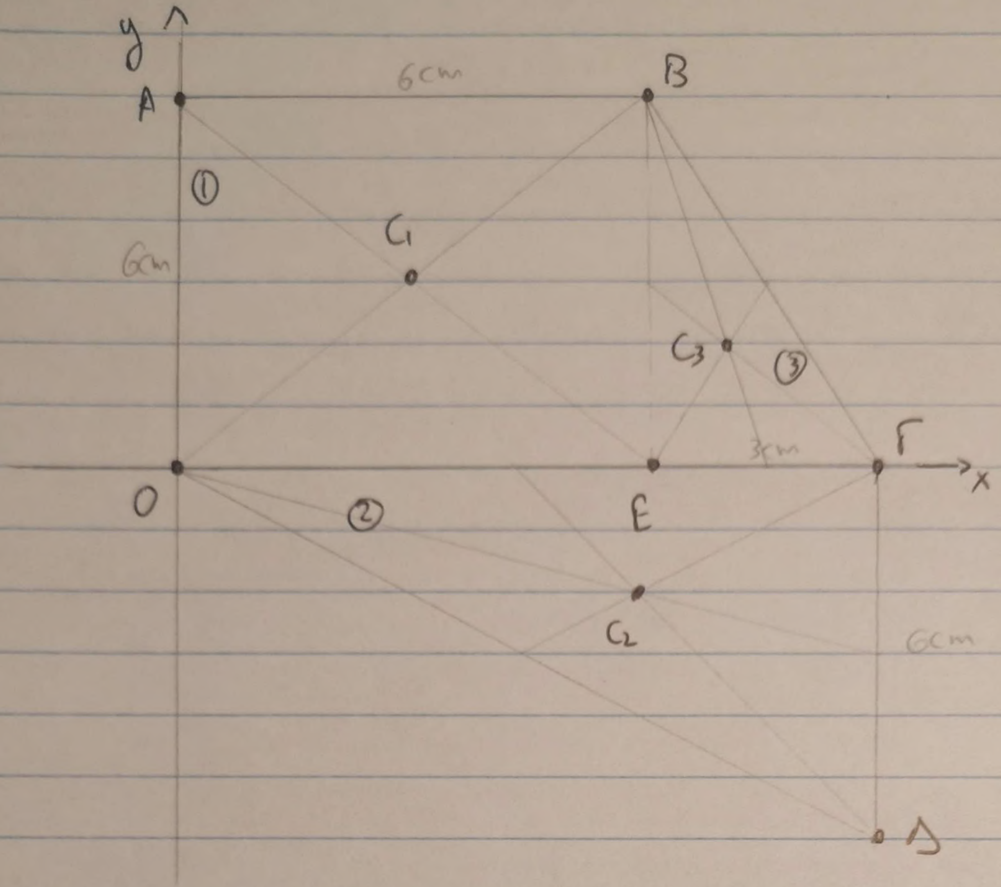
$= 10^5 (35 \cdot 21 + 85 \cdot 36 + 6 \cdot 45) = (735 + 3060 + 270)\, 10^5 = 4065 \cdot 10^5$

Άρα $y_c = \frac{Q_x}{A} = \frac{Q_x}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{4065 \cdot 10^5}{(21 + 36 + 4,5)\, 10^4} = \frac{40650}{61,5} = 660,976 \ mm$

Επίσης $x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{x_{c_1} A_1 + x_{c_2} A_2 + x_{c_3} A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(15 \cdot 21 + 60 \cdot 36 \cdot \quad 4 \cdot 45)\, 10^8}{61,5 \cdot \cancel{10^4}} = \frac{(315 + 2160 + 180) \cdot 10}{61,5} =$

$= \frac{26550}{61,5} = 431,707 mm$

Άρα $C(431,707,\ 660,976)$



Εχω $O(0,0)$ $E(6,0)$ $\Delta(9,-6)$

$B(6,6)$ $\Gamma(9,0)$

$A_1 = 6\cdot 6 = 36\,cm^2$

$A_3 = \frac{3\cdot 6}{2} = 9\,cm^2$

$A_2 = \frac{6\cdot 9}{2} = 27\,cm^2$

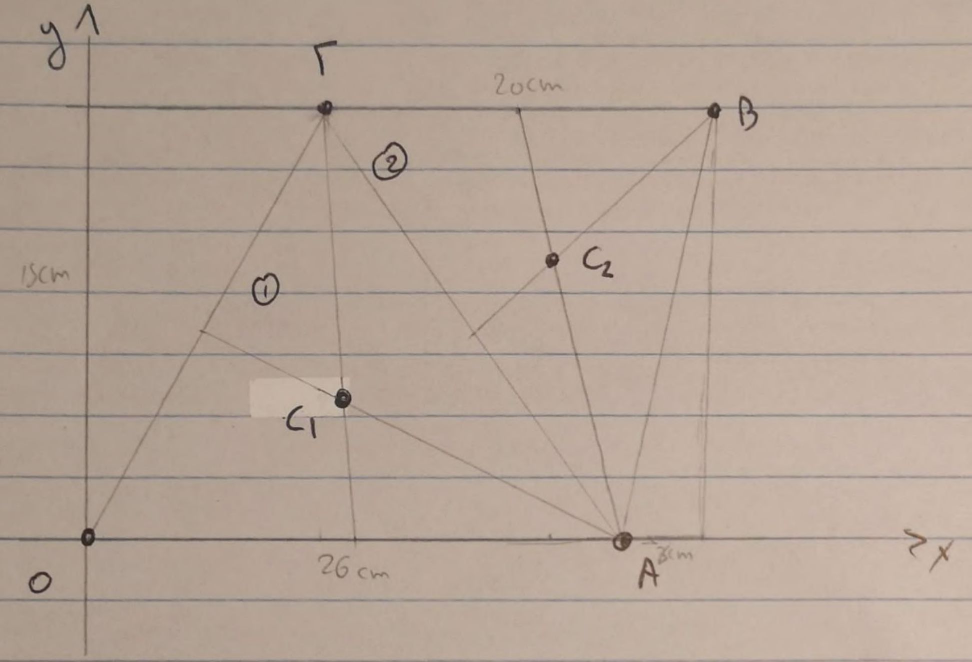
Άρα $G_1(3,3)$, $G_2(6,-2)$, $G_3(7,2)$

Άρα $y_c = \frac{Q_x}{A} = \frac{Q_{x_1}+Q_{x_2}+Q_{x_3}}{A_1+A_2+A_3} = \frac{y_{c_1}\cdot A_1 + y_{c_2}A_2 + y_{c_3}A_3}{A_1+A_2+A_3} = \frac{3\cdot 36+2\cdot 9-2\cdot 27}{36+9+27} = \frac{72}{72} = 1$

και $x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{x_{c_1}A_1 + x_{c_2}A_2 + x_{c_3}A_3}{A_1+A_2+A_3} = \frac{3\cdot 36+6\cdot 27+7\cdot 9}{72} = \frac{333}{72} = 4,625$

Άρα $C(4,625\ ,\ 1)$

Άσκηση 2



Έχω
$$\left.\begin{array}{l} O(0,0) \\ A(26,0) \\ B(33,15) \\ \Gamma(12,15) \end{array}\right\} \quad C_1(12{,}67, 5) \;,\; C_2(23{,}33, 10)$$

$$A_1 = \frac{26\cdot 15}{2} = 13\cdot 15 = 195\,cm^2$$

$$A_2 = \frac{20\cdot 15}{2} = 10\cdot 15 = 150\,cm^2$$

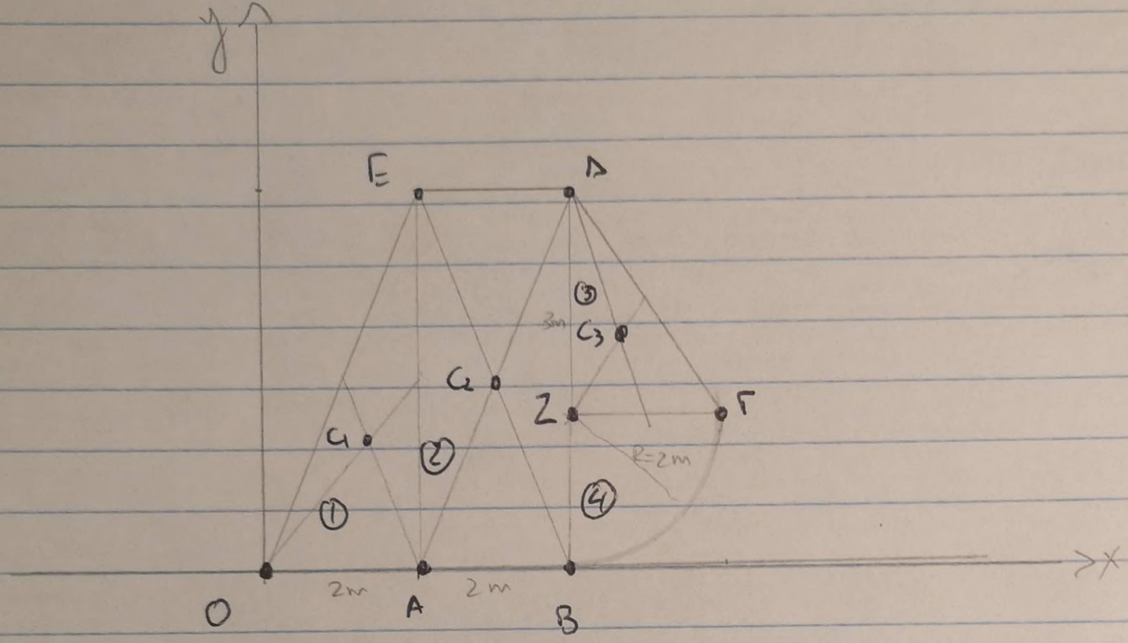
$$y_c = \frac{Q_x}{A} = \frac{y_{c1}A_1 + y_{c2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{5\cdot 195 + 10\cdot 150}{345} = \frac{975 + 1500}{345} = \frac{2475}{345} = 7{,}17$$

$$x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{x_{c1}A_1 + x_{c2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{12{,}67\cdot 195 + 23{,}33\cdot 150}{345} = \frac{2470{,}65 + 3499{,}5}{345} = \frac{5970{,}15}{345} =$$

$= 17{,}3$

Άρα $C(17{,}3,\ 7{,}17)$

Άσκηση 3



Έχω: $O(0,0)$ $\Delta(4,5)$
$A(2,0)$ $E(2,5)$
$B(4,0)$ $Z(4,2)$
$\Gamma(6,2)$

$A_1 = 5m^2$
$A_2 = 10m^2$
$A_3 = 3m^2$
$A_4 = \dfrac{\pi R^2}{4} = \dfrac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi = 3{,}14\ m^2$

Άρα έχω $C_1(1{,}33,\ 1{,}66)$, $C_2(3,\ 2{,}5)$, $C_3(4{,}67,\ 3)$

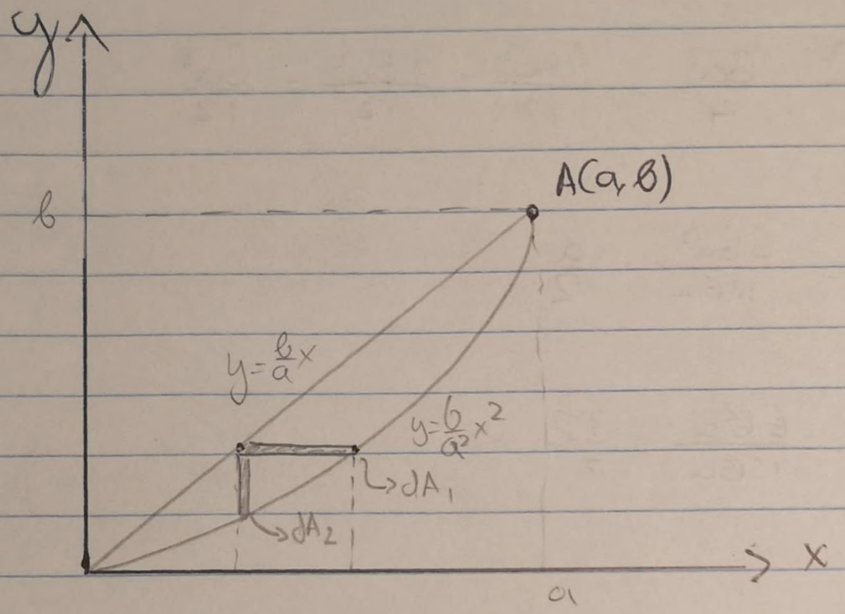
Έχω ότι $x_{c_4} = y_{c_4} = \dfrac{4R}{3\pi} = \dfrac{8}{3\pi} = 0{,}85$ από το κέντρο του. άρα $C_4(4{,}85,\ 1{,}15)$

$$x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{x_{c_1}A_1 + x_{c_2}A_2 + x_{c_3}A_3 + x_{c_4}A_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} = \frac{1{,}33 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 4{,}67 \cdot 3 + 4{,}85 \cdot 3{,}14}{30{,}57} = \frac{65{,}89}{21{,}14} = 3{,}11\ m$$

$$y_c = \frac{Q_x}{A} = \frac{y_{c_1}A_1 + y_{c_2}A_2 + y_{c_3}A_3 + y_{c_4}A_4}{A} = \frac{1{,}66 \cdot 5 + 2{,}5 \cdot 10 + 3 \cdot 3 + 1{,}15 \cdot 3{,}14}{30{,}57} = \frac{45{,}91}{21{,}14} = 2{,}17\ m$$

Άρα $C(3{,}11,\ 2{,}17)$

Άσκηση 4



$$dA_1=\left(\sqrt{\frac{a^2y}{b}}-\frac{ay}{b}\right)dy$$

$$dA_2=\left(\frac{b}{a}x-\frac{b}{a^2}x^2\right)dx$$

$$A=\int_0^a\left(\frac{b}{a}x-\frac{b}{a^2}x^2\right)dx=\left[\frac{bx^2}{2a}-\frac{bx^3}{3a^2}\right]_0^a=\frac{ba^2}{2a}-\frac{ba^3}{3a^2}=$$

$$=\frac{ba}{2}-\frac{ba}{3}=\frac{ba}{6}$$

1ος Τρόπος

$$Q_x=\int y\,dA_1=\int_0^b\left[y\left(\sqrt{\frac{a^2y}{b}}-\frac{ay}{b}\right)\right]dy=\int_0^b\left[y\left(\frac{a}{\sqrt{b}}y^{\frac{1}{2}}-\frac{ay}{b}\right)\right]dy=\int_0^b\left(\frac{ay^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b}}-\frac{ay^2}{b}\right)dy$$

$$=\left[\frac{2}{5}\frac{a}{\sqrt{b}}\cdot y^{\frac{5}{2}}-\frac{ay^3}{3b}\right]_0^b=\left[\frac{2a}{5\sqrt{b}}\cdot y^2\sqrt{y}-\frac{ay^3}{3b}\right]_0^b=\frac{2ab^2\cancel{\sqrt{b}}}{5\cancel{\sqrt{b}}}-\frac{ab^{\cancel{3}2}}{3\cancel{b}}=\frac{2ab^2}{5}-\frac{ab^2}{3}=$$

$$=\frac{6ab^2}{15}-\frac{5ab^2}{15}=\frac{ab^2}{15}$$

$$Q_y = \int x\,dA_2 = \int_0^a \left[x\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a^2}x^2\right)\right]dx = \int_0^a \left(\frac{b}{a}x^2 - \frac{b}{a^2}x^3\right)dx = \left[\frac{bx^3}{3a} - \frac{bx^4}{4a^2}\right]_0^a =$$

$$= \frac{ba^{\cancel{3}2}}{3\cancel{a}} - \frac{ba^{\cancel{4}2}}{4\cancel{a^2}} = \frac{ba^2}{3} - \frac{ba^2}{4} = \frac{4ba^2}{12} - \frac{3ba^2}{12} = \frac{ba^2}{12}$$

Άρα $x_c = \dfrac{Q_y}{A} = \dfrac{\frac{ba^2}{12}}{\frac{ba}{6}} = \dfrac{6ba^2}{12ba} = \dfrac{a}{2}$

και $y_c = \dfrac{Q_x}{A} = \dfrac{\frac{b^2a}{15}}{\frac{ba}{6}} = \dfrac{6b^2a}{15ba} = \dfrac{3b}{5}$

<u>2ος Τρόπος</u>

$$Q_x = \int y\,dA = \iint_A y\,dx\,dy = \int_0^b y\left(\int_{\frac{a}{b}y}^{\sqrt{\frac{a^2y}{b}}} dx\right)dy = \int_0^b \left[y\left(\sqrt{\frac{a^2y}{b}} - \frac{a}{b}y\right)\right]dy =$$

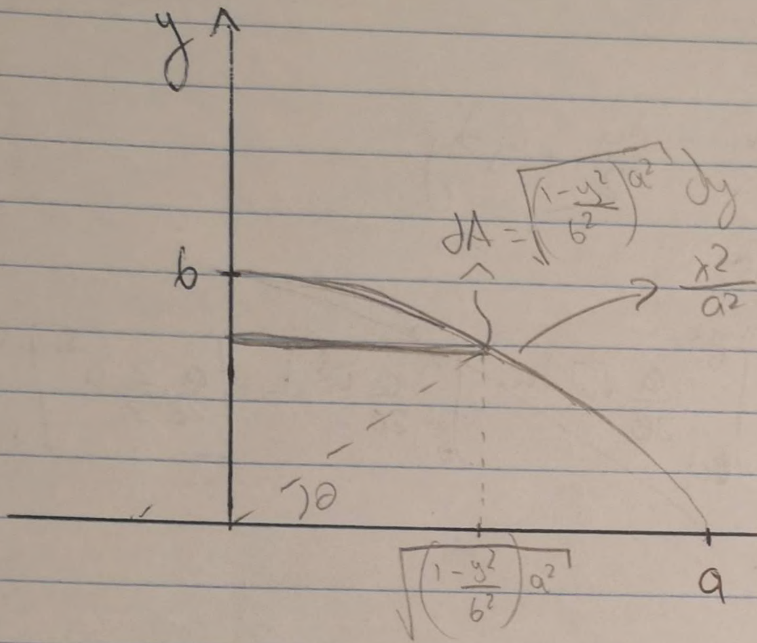
$$= \int_0^b \left[y\left(\frac{a}{\sqrt{b}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{b}y\right)\right]dy = \int_0^b \left(\frac{a}{\sqrt{b}}y^{\frac{3}{2}} - \frac{a}{b}y^3\right)dy = \frac{ab^3}{15}$$

$$Q_y = \int x\,dA = \iint_A x\,dx\,dy = \int_0^a x\left(\int_{\frac{b}{a^2}x^2}^{\frac{b}{a}x} dy\right)dx = \int_0^a \left[x\left(\frac{bx}{a} - \frac{bx^2}{a^2}\right)\right]dx = \int_0^a \left(\frac{bx^2}{a} - \frac{bx^3}{a^2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{bx^3}{3a} - \frac{bx^4}{4a^2}\right]_0^a = \frac{ba^3}{3a} - \frac{ba^4}{4a^2} = \frac{ba^2}{3} - \frac{ba^2}{4} = \frac{ba^2}{12}$$

Άρα πάλι $x_c = \dfrac{Q_y}{A} = \dfrac{a}{2}$ και $y_c = \dfrac{Q_x}{A} = \dfrac{3b}{5}$

Άσκηση 5

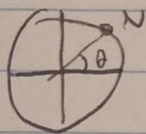


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2}$$

$$A = \int_0^a \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2}\, dx = \int_0^a \sqrt{\frac{(a^2 - x^2) b^2}{a^2}}\, dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Έχω $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, άρα το σημείο $N\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο.



Άρα $\exists\, \varphi \in [0, 2\pi)$: $\frac{x}{a} = \cos\varphi$ και $\frac{y}{b} = \sin\varphi$

, δηλαδή $x = a\cos\varphi$ και $y = b\sin\varphi \Rightarrow dx = -a\sin\varphi\, d\varphi$ και $dy = b\cos\varphi\, d\varphi$

Επίσης έχω ότι για $x = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

και $x = a \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

Άρα $A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{b}{\cancel{a}} \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\varphi}\, (-\cancel{a}\sin\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \sin\varphi \sqrt{1 - \cos^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \sin\varphi \sqrt{\sin^2\varphi}\, d\varphi =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{ab}{2} \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0\right) = \frac{ab\pi}{4}$

$$Q_x = \int y \, dA = \int_0^b y \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \, dy$$

Θέτω $u = b^2 - y^2 \Rightarrow du = -2y\,dy \Leftrightarrow -\frac{du}{2} = y\,dy$

Τα νέα άκρα $u_1 = b^2$, $u_2 = 0$

Άρα $Q_x = \int_{b^2}^{0} \frac{a}{b} \sqrt{u} \left(-\frac{1}{2}\right) du = \int_0^{b^2} \frac{a}{2b} \sqrt{u}\, du = \int_0^{b^2} \frac{a}{2b} u^{\frac{1}{2}} du = \left[\frac{a}{2b} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_0^{b^2}$

$$= \left[\frac{a}{3b} u\sqrt{u}\right]_0^{b^2} = \frac{a}{3\cancel{b}} \cdot b^2 \cdot \cancel{b} = \frac{ab^2}{3}$$

$$Q_y = \int x \, dA = \int_0^a x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{b}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

Θέτω $u = a^2 - x^2 \Rightarrow du = -2x\,dx \Leftrightarrow -\frac{du}{2} = x\,dx$

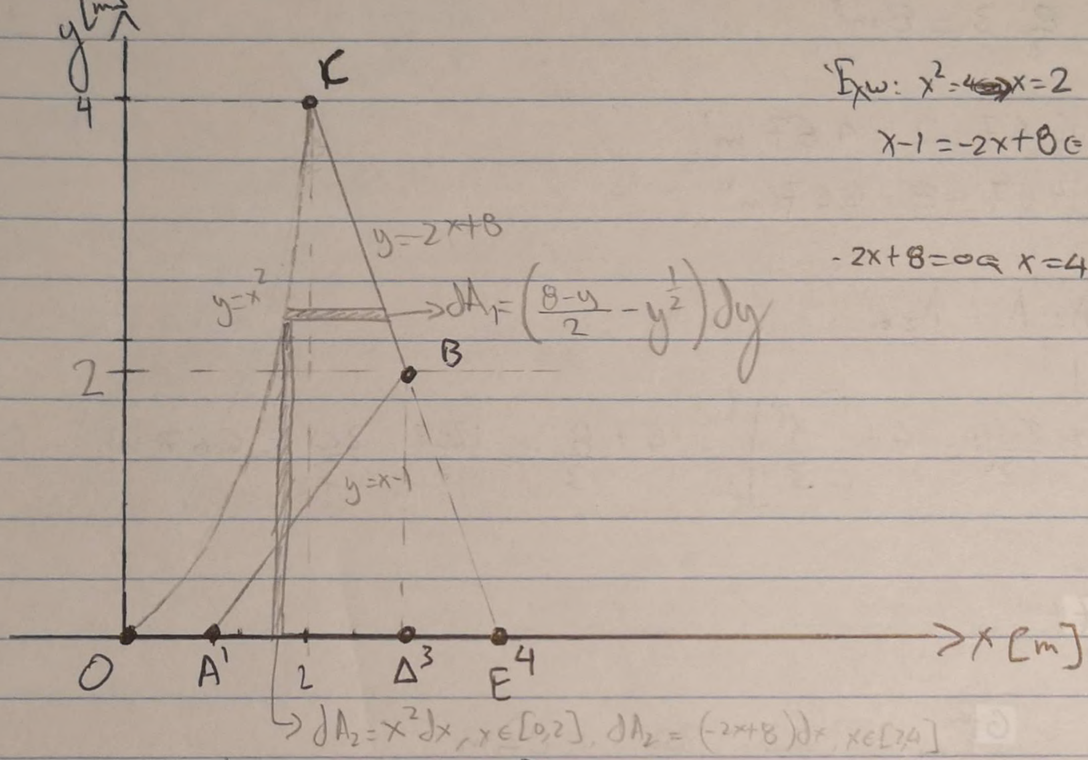
Τα νέα όρια $u_1 = a^2$, $u_2 = 0$

Άρα $Q_y = \frac{b}{a} \int_{a^2}^{0} \sqrt{u} \left(-\frac{1}{2}\right) du = \frac{b}{2a} \int_0^{a^2} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{b}{2a} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a^2} = \frac{b}{a} \left[\frac{1}{3} u\sqrt{u}\right]_0^{a^2} = \frac{b}{\cancel{a}} \frac{1}{3} a^2 \cancel{a} =$

$\frac{ba^2}{3}$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Άρα } x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{\frac{ba^2}{3}}{\frac{ab\pi}{4}} = \frac{4\cancel{b}a^{\cancel{2}}}{3\cancel{a}\cancel{b}\pi} = \frac{4}{3\pi} \cdot a \\ &y_c = \frac{Q_x}{A} = \frac{\frac{ab^2}{3}}{\frac{ab\pi}{4}} = \frac{4\cancel{a}b^{\cancel{2}}}{3\cancel{a}\cancel{b}\pi} = \frac{4}{3\pi} \cdot b \end{aligned}\right\} \Rightarrow C\left(\frac{4}{3\pi} \cdot a, \frac{4}{3\pi} \cdot b\right)$$

Άσκηση 6



Έχω: $x^2=4 \Leftrightarrow x=2$

$x-1=-2x+8 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x=3$

$-2x+8=0 \Leftrightarrow x=4$

ΟΕΓΟ : 1

$\overset{\triangle}{A E B}$: 2

Έχω A(1,0), B(3,2), E(4,0) $\Rightarrow C_2\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) = (2{,}67,\ 0{,}67)$

$A_2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 m^2$

$Q_x = Q_{x_1} - Q_{x_2}$

$Q_y = Q_{y_1} - Q_{y_2}$

$$Q_{x_1} = \int y \, dA_1 = \int_0^4 \left(4 - \frac{y}{2} - y^{\frac{1}{2}}\right) dy = \left[4y - \frac{y^2}{4} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \left[4y - \frac{y^2}{4} - \frac{2}{3} y \sqrt{y}\right]_0^4 =$$

$$= 4 \cdot 4 - \frac{4 \cdot 4}{4} - \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 = 16 - 4 - \frac{16}{3} = 12 - \frac{16}{3} = \frac{36-16}{3} = \frac{20}{3} = 6{,}67$$

$$Q_{y_1} = \int x \, dA_2 = \int_0^2 x^3 dx + \int_2^4 \left(-2x^2 + 8x\right) dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2\right]_2^4 = 4 + \left[\left(-\frac{128}{3} + 64 + \frac{16}{3} - 16\right)\right]$$

$$= 4 + \left(48 - \frac{112}{3}\right) = 4 + 48 - 37{,}33 = 4 + 10{,}67 = 14{,}67$$

$Q_{x2} = y_{c2} A_2 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2\, m^3$

$Q_{y2} = x_{c2} A_2 = \frac{8}{3} \cdot 3 = 8\, m^3$

Άρα $Q_x = 6,67 - 2 = 4,67\, m^3$

$Q_y = 14,67 - 8 = 6,67\, m^3$

Επίσης έχω $A = A_1 - A_2$

$A_1 = \int_0^2 x^2\, dx + \frac{\cancel{2} \cdot 4}{\cancel{2}} = 4 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 + \frac{8}{3} = \frac{12+8}{3} = \frac{20}{3} = 6,67\, m^2$

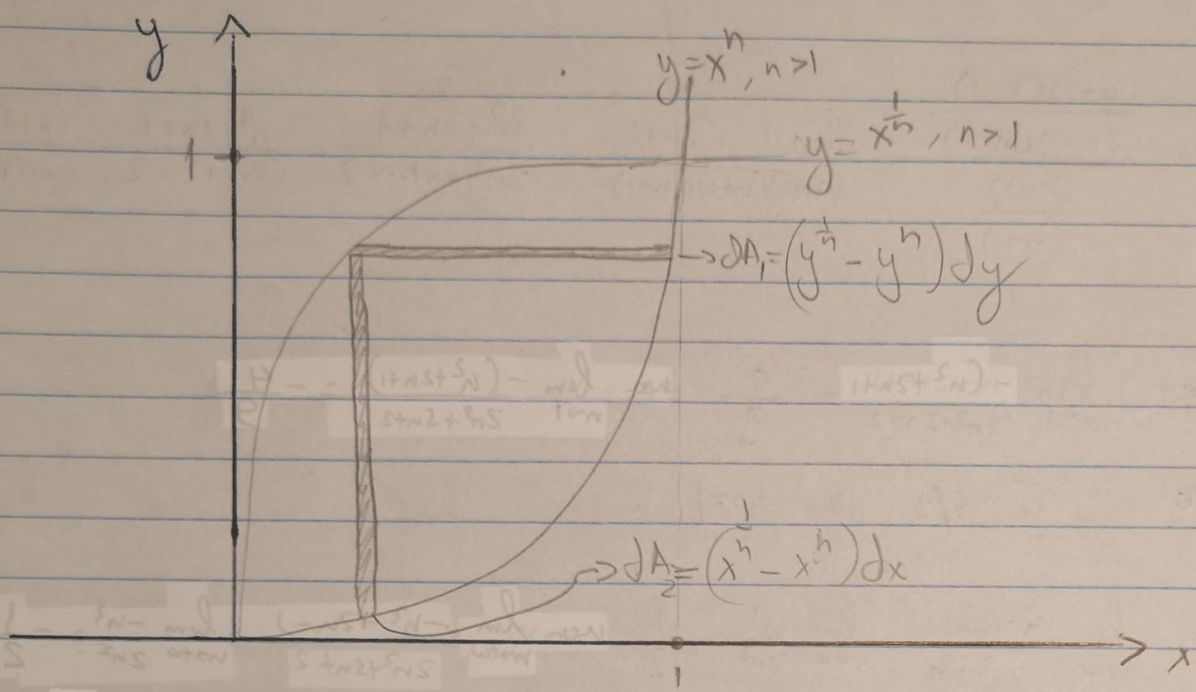
Άρα $A = 3,67\, m^2$

Άρα $x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{20}{3} - \frac{9}{3}} = \frac{\frac{20}{\cancel{3}}}{\frac{11}{\cancel{3}}} = \frac{20}{11} = 1,82\, m$

$y_c = \frac{Q_x}{A} = \frac{4,67}{3,67} = 1,27\, m$

Άρα $C(1,82, 1,27)$

Άσκηση 7



$x^n = x^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow (x^n)^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n \Leftrightarrow x^{n^2} = x \Leftrightarrow x^{n^2} - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^{n^2-1} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^{n^2-1} = 1 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow x = 1$ (στον θετικό ημιάξονα)

Άρα $A = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{n}} - x^n\right)dx = \left[\frac{n \cdot x^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$

$$Q_x = \int y\,dA_1 = \int_0^1 y\left(y^{\frac{1}{n}} - y^n\right)dy = \int_0^1 \left(y^{\frac{n+1}{n}} - y^{n+1}\right)dy = \left[\frac{n\,y^{\frac{2n+1}{n}}}{2n+1} - \frac{y^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{n+2} =$$

$$= \frac{n(n+2) - (2n+1)}{(2n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n-2n-1}{(2n+1)(n+2)} = \frac{n^2-1}{(2n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n-1)}{(2n+1)(n+2)}$$

$$Q_y = \int x\,dA_2 = \int_0^1 x\left(x^{\frac{1}{n}} - x^n\right)dx = \int_0^1 -\left(x^{n+1} - x^{\frac{n+1}{n}}\right)dx = -\left[\frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{n x^{\frac{2n+1}{n}}}{2n+1}\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{2n+1}\right) =$$

$$= -\frac{2n+1 - n(n+2)}{(n+2)(2n+1)} = -\frac{2n+1-n^2-2n}{(n+2)(2n+1)} = \frac{(n-1)(n+1)}{(n+2)(2n+1)}$$

Άρα $x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{\frac{(n+1)(n-1)}{(2n+1)(n+2)}}{\frac{(n-1)}{(n+1)}} = \frac{(n+1)(n+1)(n-1)}{(n-1)(2n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{2n^2+4n+n+2} = \frac{n^2+2n+1}{2n^2+5n+2}$

και $y_c = \frac{Q_x}{A} = \frac{\frac{(n+1)(n-1)}{(2n+1)(n+2)}}{\frac{(n-1)}{(n+1)}} = \frac{(n+1)^2(n-1)}{(2n+1)(n+2)(n-1)} = \frac{n^2+2n+1}{2n^2+4n+n+2} = \frac{n^2+2n+1}{2n^2+5n+2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(n+2)}$

Άρα $n \to 1$ έχω $\lim_{n\to 1} \frac{n^2+2n+1}{2n^2+5n+2} = \frac{4}{9} = x_c = y_c$

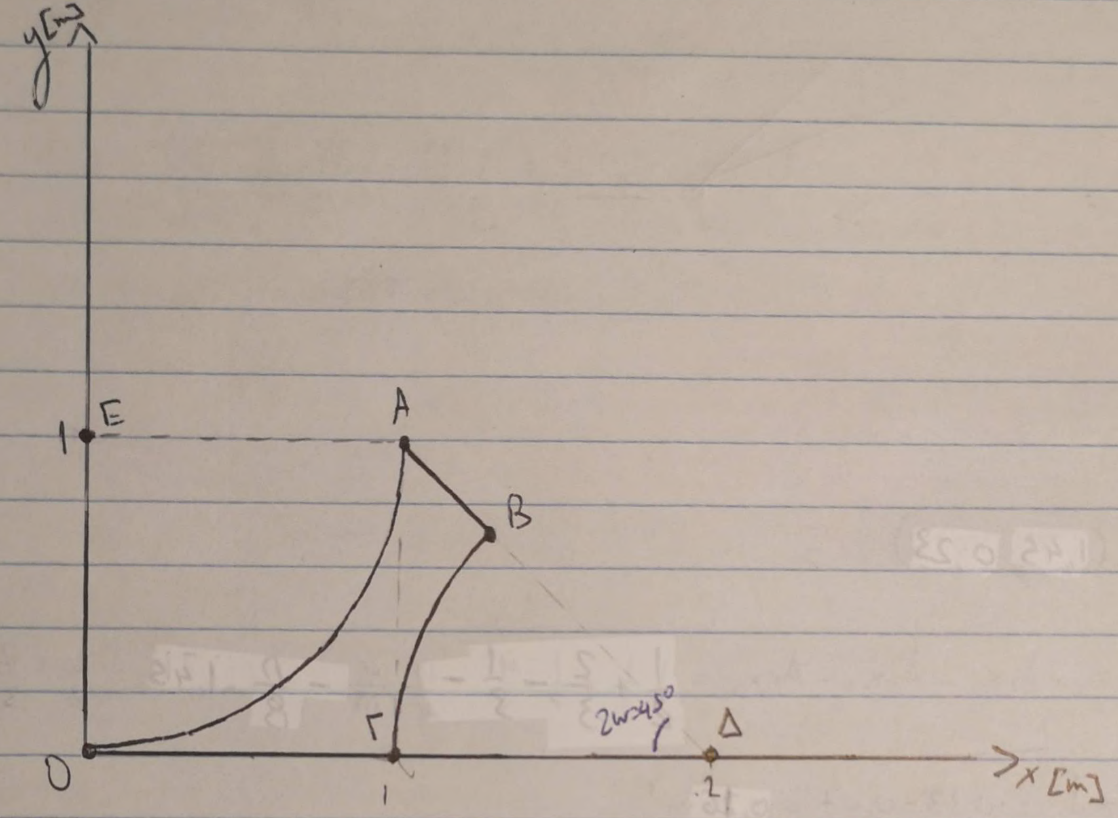
Άρα $x_c = 4/9$ και $y_c = 4/9$ όταν $n \to 1$

Αν $n \to +\infty$ τότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2+5n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2} = x_c = y_c$

Άρα $x_c = \frac{1}{2}$ και $y_c = \frac{1}{2}$

Όταν $n \to +\infty$ οι δύο συναρτήσεις σχηματίζουν τετράγωνο με πλευρά 1m

Άσκηση 8



ΟΓΑΕ: ① | $O(0,0)$ $\Delta(2,0)$
$\hat{A\Gamma\Delta}$: ② | $E(0,1)$
$E\widehat{OAE}$ ③ | $A(1,1)$
$\Delta\widehat{\Gamma B}\Delta$: ④ | $\Gamma(1,0)$

$\tan(\hat{A\Delta\Gamma}) = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = 1 \Rightarrow \hat{A\Delta\Gamma} = 45°$

$A_1 = 1 m^2$ $A_3 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{4}$ $A_4 = \frac{\pi R^2}{8} = \frac{\pi}{8}$

$A_2 = \frac{1}{2} m^2$

Άρα $A = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 = \frac{3}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{12-3\pi}{8} m^2$

$\simeq 0,322 m^2$

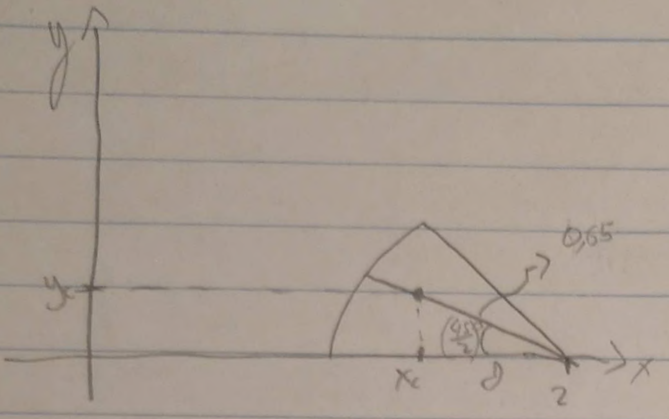
$Q_x = Q_{x_1} + Q_{x_2} - Q_{x_3} - Q_{x_4}$

$Q_y = Q_{y_1} + Q_{y_2} - Q_{y_3} - Q_{y_4}$

$C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $C_2\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Για το τεταρτοκύκλιο έχω ότι το γεωμετρικό του κέντρο απέχει από το κέντρο του απόσταση $x=y=\frac{4R}{3\pi}=\frac{4}{3\pi}$. Άρα $C_3\left(\frac{4}{3\pi}, 1-\frac{4}{3\pi}\right) = \left(\frac{4}{3\pi}, \frac{3\pi-4}{3\pi}\right)$

Για το τόξο έχω ότι το γ. κέντρο του βρίσκεται πάνω στην ευθεία που το διχοτομεί και απέχει απόσταση $\frac{2}{3\omega}\cdot R\sin\omega$, όπου $R=1$ και $\omega=\frac{45°}{2}$ άρα $\frac{2}{\frac{3\pi}{8}}\cdot 0,38 = \frac{16}{3\pi}\cdot 0,38 = 0,65 m$



$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{y_{c4}}{0,65} \Rightarrow y_{c4} = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot 0,65 = 0,38 \cdot 0,65$
$= 0,25$

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{d}{0,65} \Rightarrow d = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot 0,65 =$

$= 0,92 \cdot 0,65 = 0,6$

Άρα $x_c = 2 - 0,6 = 1,4$

Τελικά $C_4(1,4,\ 0,25)$

Άρα $Q_y = A_1 x_{c1} + A_2 x_{c2} - A_3 x_{c3} - A_4 x_{c4} = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{3} - \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{4}} \frac{4}{3\cancel{\pi}} - \frac{\pi}{8} \cdot 1,4 \Rightarrow = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0,55$

$= 0,5 - 0,55 + \frac{1}{3} = 0,33 - 0,07 = 0,28\ m^3$

και $Q_x = A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2} - A_3 y_{c3} - A_4 y_{c4} = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{\cancel{\pi}}{4} \frac{(3\pi - 4)}{3\cancel{\pi}} - \frac{\pi}{8} \cdot 0,25 =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{3\pi - 4}{12} - 0,1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - 0,45 - 0,1 = 0,5 + 0,17 - 0,55 = 0,67 - 0,55 = 0,12$

Άρα $x_c = \frac{Q_y}{A} = \frac{0,28}{0,32} = 0,88$

και $y_c = \frac{Q_x}{A} = \frac{0,12}{0,32} = 0,38$

$\Big\}\ C(0,88,\ 0,38)$