Αν βρείτε κάποιο λάθος PM me να το διορθώσω: Georgepan

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Πειραματικής Μηχανικής

Τηλέφωνα: +210 772 1313, +210 772 1263 (γραφείο)
+210 772 4025, +210 772 4235, +210 772 1317, +210 7721310 (εργαστήρια)
Τηλεομοιότυπο (Fax): +210 7721302
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου (e-mail): stakkour@central.ntua.gr

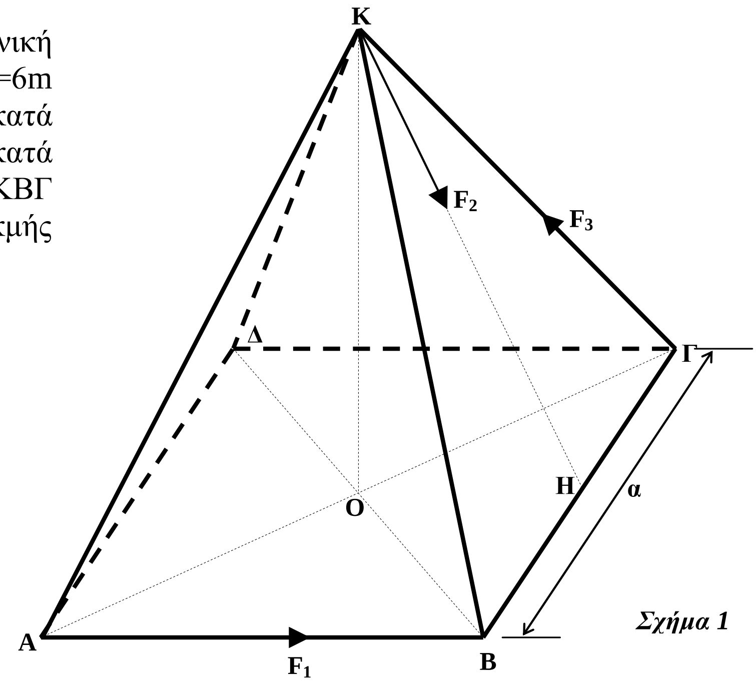
ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

4η σειρά ασκήσεων: Εφαρμογές του εσωτερικού γινομένου στη Μηχανική (Β΄ Μέρος)

Άσκηση 1

Στην τετραγωνικής βάσης (α=4m) κανονική πυραμίδα ΚΑΒΓΔ του Σχ.1, ύψους ΟΚ=6m δρουν τρεις δυνάμεις: Η $\mathbf{F_1}$ μέτρου 4Ν κατά μήκος της ακμής ΑΒ, η $\mathbf{F_2}$ μέτρου 3Ν κατά μήκος της διαμέσου ΚΗ του τριγώνου ΚΒΓ και η $\mathbf{F_3}$ μέτρου 3Ν κατά μήκος της ακμής ΓΚ.

1. Να ευρεθεί η συνισταμένη $\mathbf{R_{23}}$ των $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$.
2. Να υπολογισθεί η γωνία μεταξύ των $\mathbf{R_{23}}$ και $\mathbf{F_1}$.
3. Να υπολογισθούν οι προβολές της $\mathbf{R_{23}}$ επί των ευθειών ΑΔ και ΑΚ.
4. Να υπολογισθεί η προβολή της $\mathbf{R_{23}}$ επί της ευθείας ΑΜ όπου Μ το μέσον του ύψους ΚΟ.



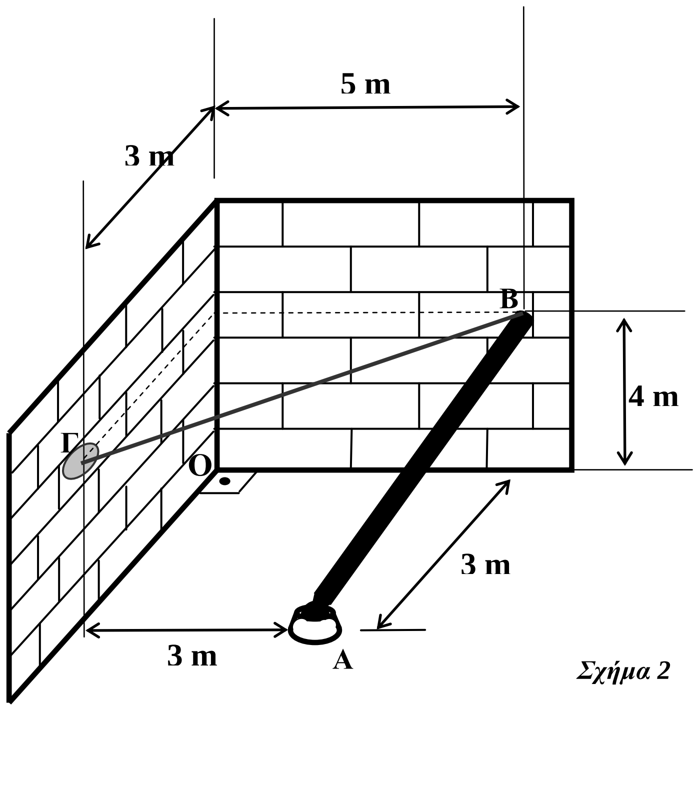
Σχήμα 1

Άσκηση 2

Η ράβδος ΑΒ του Σχ.2 στηρίζεται με άρθρωση στο έδαφος (σημείο Α) και ακουμπά σε κατακόρυφο λείο τοίχο (σημείο Β). Το σχοινί ΒΓ (Γ σημείο κατακόρυφου τοίχου, κάθετου στον προηγούμενο) ασκεί στη ράβδο δύναμη μέτρου 2 kN ενώ ο τοίχος της ασκεί δύναμη μέτρου 2.5 kN.

Υπολογίστε:

1. Τη γωνία μεταξύ κάθε δύναμης και της ευθείας ΟΒ.
2. Την προβολή της δύναμης που ασκεί το σχοινί επί του φορέα της ράβδου.
3. Τη συνισταμένη των δυνάμεων που δρουν στο σημείο Β.
4. Τη γωνία μεταξύ του σχοινιού και της συνισταμένης του προηγουμένου ερωτήματος.

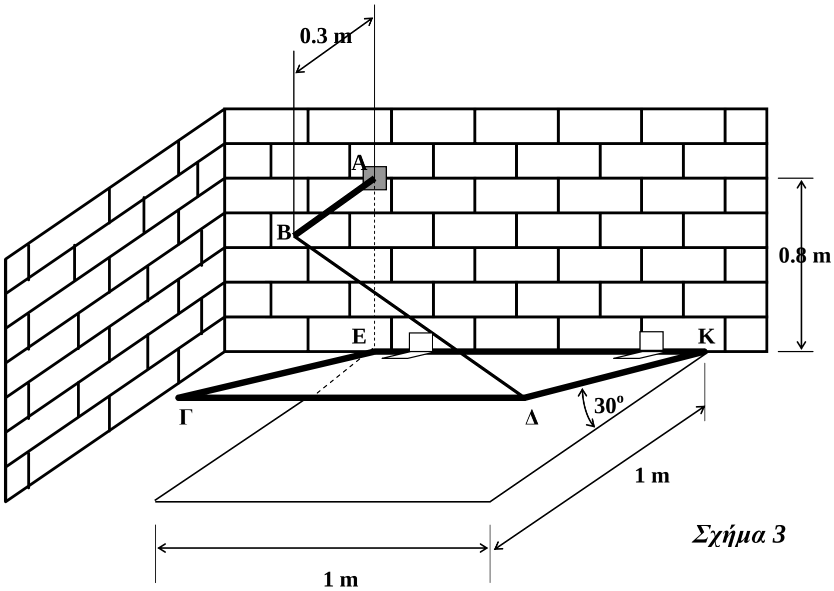


Σχήμα 2

Άσκηση 3

Τετραγωνική καταπακτή ΓΔΚΕ ισορροπεί στη μισάνοιχτη θέση του Σχ.3 με τη βοήθεια σχοινιού ΒΔ. Ο βραχίονας ΑΒ είναι πακτωμένος κάθετα στον κατακόρυφο τοίχο. Το σκοινί εφελκύεται με δύναμη 5 kN.

1. Να ευρεθούν οι συνιστώσες της δύναμης κατά τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ.
2. Να ευρεθεί η γωνία μεταξύ της δύναμης και της ευθείας ΚΓ.

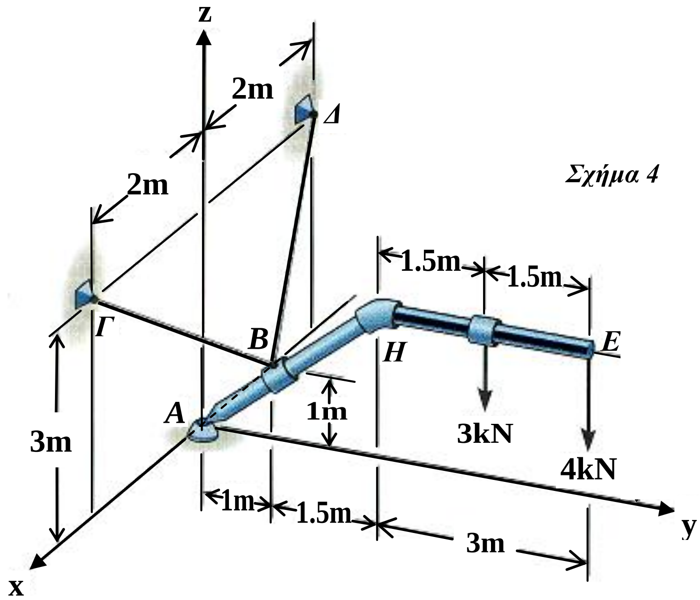


Σχήμα 3

Άσκηση 4

Αβαρής ιστός ΑΒΗΕ (εντός του κατακορύφου επιπέδου yAz, ΗΕ//Αy) στηρίζεται με χωρική άρθρωση στο Α και δύο σχοινιά ΒΓ, ΒΔ και φορτίζεται με δύο κατακόρυφες δυνάμεις (Σχ.4).

1. Υπολογίστε την προβολή των κατάκορύφων δυνάμεων στην κατεύθυνση ΒΓ.
2. Αν η δύναμη που ασκεί κάθε σκοινί είναι 6 kN υπολογίστε την προβολή της συνισταμένης των δύο δυνάμεων κατά την ευθεία ΓΕ

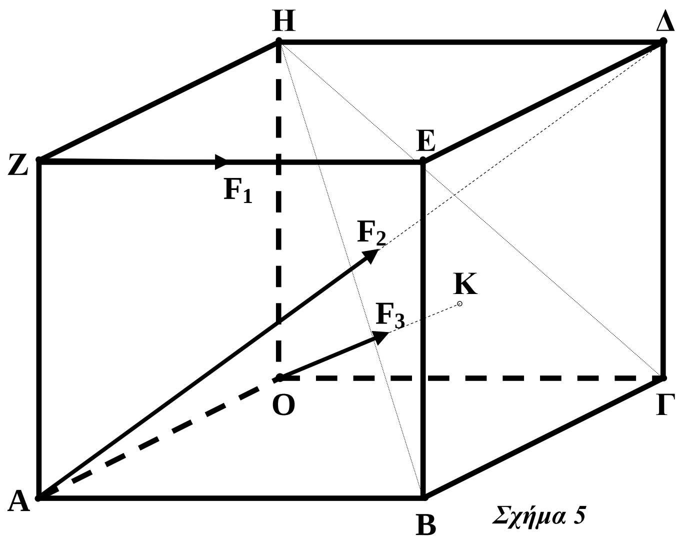


Σχήμα 4

Άσκηση 5

Στον κύβο του Σχ.5, ακμής α=10 cm, ασκούνται τρεις δυνάμεις $\mathbf{F_1}$ (κατά μήκος της ακμής ΖΕ), $\mathbf{F_2}$ (κατά μήκος της διαγωνίου ΑΔ) και $\mathbf{F_3}$ (κατά μήκος της ΟΚ, όπου Κ το γεωμετρικό κέντρο του τριγώνου ΗΒΓ). Τα μέτρα των $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ και $\mathbf{F_3}$ είναι ίσα με 4, 2 και 6 kN, αντίστοιχα.

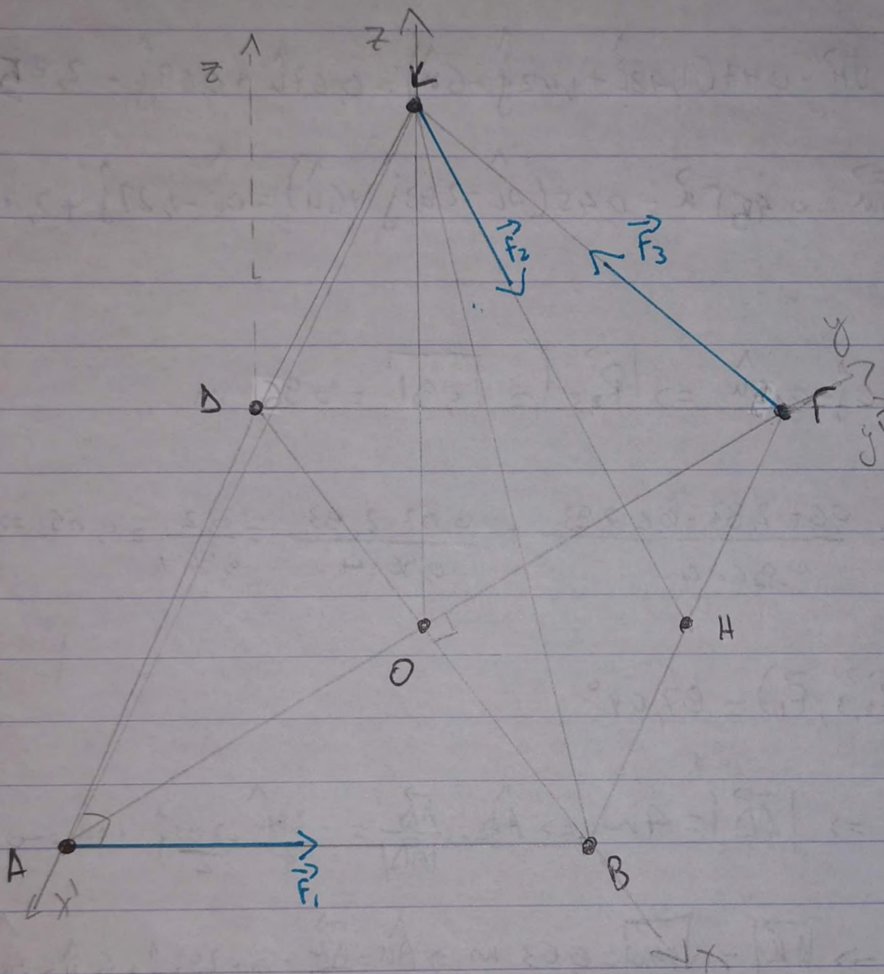
1. Ποια η γωνία μεταξύ των F_2 και F_3;
2. Υπολογίστε την προβολή της F_2 στην κατεύθυνση της F_3.
3. Υπολογίστε την προβολή της F_1 κατά την συνισταμένη των F_2 και F_3.



Σχήμα 5

4η Σειρά ασκήσεων: Εφαρμογές των διανυσματικών γινομένων στη Μηχανική (Β' Μέρος)

Άσκηση 1



AB = BΓ = a = 4m => AΓ = 5,66

OK = 6m

$|\vec{F_1}| = 4N$

$|\vec{F_2}| = 3N$

$|\vec{F_3}| = 3N$

1ος Τρόπος

Με σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το O (xyz)

Έχω: O(0,0,0)

A(0,-2,83,0)

B(2,83,0,0)

Γ(0,2,83,0)

Δ(-2,83,0,0)

K(0,0,6)

$H\left(\frac{2,83}{2}, \frac{2,83}{2}, 0\right) = (1,42, 1,42, 0)$

$\vec{AB} = 2,83\hat{i} + 2,83\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{16,02} = 4m$

$\vec{KH} = 1,42\hat{i} + 1,42\hat{j} - 6\hat{k} \Rightarrow |\vec{KH}| = \sqrt{40,03} = 6,33m$

$\vec{\Gamma K} = 0\hat{i} - 2,83\hat{j} + 6\hat{k} \Rightarrow |\vec{\Gamma K}| = \sqrt{44,01} = 6,63m$

1,18

Εχω: $\vec{F_1} = \frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{AB}|}\vec{AB} = \frac{4}{4}\vec{AB} = \vec{AB} = 2,83\hat{i} + 2,83\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{F_2} = \frac{|\vec{F_2}|}{|\vec{KH}|}\vec{KH} = \frac{3}{6,33}\vec{KH} = 0,47(1,42\hat{i} + 1,42\hat{j} - 6\hat{k}) = 0,67\hat{i} + 0,67\hat{j} - 2,8\hat{k}$

$\vec{F_3} = \frac{|\vec{F_3}|}{|\vec{\Gamma K}|}\vec{\Gamma K} = \frac{3}{6,63}\vec{\Gamma K} = 0,45\vec{\Gamma K} = 0,45(0\hat{i} - 2,83\hat{j} + 6\hat{k}) = 0\hat{i} - 1,27\hat{j} + 2,7\hat{k}$

1) $\vec{R}_{2,3} = \vec{F_2} + \vec{F_3} = 0,67\hat{i} - 0,6\hat{j} - 0,15\hat{k} \Rightarrow |\vec{R}_{2,3}| = \sqrt{0,91} = 0,91$ m

2) $\cos(\widehat{\vec{R}_{2,3}, \vec{F_1}}) = \frac{\vec{R}_{2,3} \cdot \vec{F_1}}{|\vec{R}_{2,3}||\vec{F_1}|} = \frac{0,67 \cdot 2,83 - 0,6 \cdot 2,83}{0,96 \cdot 4} = \frac{0,07 \cdot 2,83}{0,96 \cdot 4} = \frac{0,2}{0,96 \cdot 4} = 0,05 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{R}_{2,3}, \vec{F_1}}) = 0,05 \Rightarrow (\widehat{\vec{R}_{2,3}, \vec{F_1}}) = 87,04°$

3) $\vec{A\Delta} = -2,83\hat{i} + 2,83\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{A\Delta}| = 4m \Rightarrow \hat{A\Delta} = \frac{\vec{A\Delta}}{|\vec{A\Delta}|} = -\frac{2,83\hat{i}}{4} + \frac{2,83}{4}\hat{j} + 0\hat{k} = -0,71\hat{i} + 0,71\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{AK} = 0\hat{i} + 2,83\hat{j} + 6\hat{k} \Rightarrow |\vec{AK}| = \sqrt{44,01} = 6,63$ m $\Rightarrow \hat{AK} = \frac{\vec{AK}}{|\vec{AK}|} = 0\hat{i} + \frac{2,83}{6,63}\hat{j} + \frac{6}{6,63}\hat{k} = 0\hat{i} + 0,43\hat{j} + 0,9\hat{k}$

$\underline{\vec{R}_{2,3} | \hat{A\Delta}} = (\vec{R}_{2,3}\, \hat{A\Delta})\hat{A\Delta} = (-0,67 \cdot 0,71 - 0,6 \cdot 0,71)\hat{A\Delta} = (-0,48 - 0,43)\hat{A\Delta} = -0,91\hat{A\Delta} =$

$= -0,91(-0,71\hat{i} + 0,71\hat{j} + 0\hat{k}) = 0,65\hat{i} - 0,65\hat{j} + 0\hat{k}$

$\underline{\vec{R}_{2,3} | \hat{AK}} = (\vec{R}_{2,3} \cdot \hat{AK})\hat{AK} = (-0,6 \cdot 0,43 - 0,15 \cdot 0,9)\hat{AK} = (-0,26 - 0,14)\hat{AK} = -0,4(0\hat{i} + 0,43\hat{j} + 0,9\hat{k}) =$
$= 0\hat{i} - 0,17\hat{j} - 0,36\hat{k}$

4) Εχω $M(0,0,3)$. Άρα $\vec{AM} = 0\hat{i} + 2,83\hat{j} + 3\hat{k} \Rightarrow |\vec{AM}| = \sqrt{17} = 4,12 \Rightarrow \hat{AM} = \frac{\vec{AM}}{|\vec{AM}|} = 0\hat{i} + 0,69\hat{j} + 0,73\hat{k}$

$\underline{\vec{R}_{2,3} | \hat{AM}} = (\vec{R}_{2,3} \cdot \hat{AM})\hat{AM} = (-0,6 \cdot 0,69 - 0,15 \cdot 0,73)\hat{AM} = (-0,41 - 0,11)\hat{AM} = -0,52(0\hat{i} + 0,69\hat{j} + 0,73\hat{k})$
$= 0\hat{i} - 0,36\hat{j} - 0,38\hat{k}$

1) 2ος Τρόπος

Με σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το Δ (x'y'z')

Έχω:

$\Delta(2,2,0)$	$\vec{AB} = 0\hat{i} + 4\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow \lvert\vec{AB}\rvert = 4$
$A(4,0,0)$	
$B(4,4,0)$	$\vec{KH} = 0\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k} \Rightarrow \lvert\vec{KH}\rvert = \sqrt{40} = 6{,}32m$
$\Gamma(0,4,0)$	
$\Delta(0,0,0)$	$\vec{\Gamma K} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k} \Rightarrow \lvert\vec{\Gamma K}\rvert = \sqrt{44} = 6{,}63m$
$K(2,2,6)$	
$H(2,4,0)$	

$$\vec{F_1} = \frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{AB}|}\vec{AB} = \frac{4}{4}\vec{AB} = \vec{AB} = 0\hat{i} + 4\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{F_2} = \frac{|\vec{F_2}|}{|\vec{KH}|}\vec{KH} = \frac{3}{6{,}32}\vec{KH} = 0{,}47(0\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) = 0\hat{i} + 0{,}95\hat{j} - 2{,}85\hat{k}$$

$$\vec{F_3} = \frac{|\vec{F_3}|}{|\vec{\Gamma K}|}\vec{\Gamma K} = \frac{3}{6{,}63}\vec{\Gamma K} = 0{,}45(2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) = 0{,}9\hat{i} - 0{,}9\hat{j} + 2{,}7\hat{k}$$

Άρα $\vec{R}_{2,3} = 0{,}9\hat{i} + 0{,}05\hat{j} - 0{,}15\hat{k} \Rightarrow |\vec{R}_{2,3}| = \sqrt{0{,}84} = 0{,}92$

2) $\cos(\vec{R}_{2,3}, \vec{F_1}) = \frac{\vec{R}_{2,3}\cdot\vec{F_1}}{|\vec{R}_{2,3}||\vec{F_1}|} = \frac{4\cdot 0{,}05}{0{,}92\cdot 4} = \frac{0{,}05}{0{,}92} = 0{,}054 \Rightarrow (\vec{R}_{2,3}, \vec{F_1}) = 86{,}88^\circ$

3) $\vec{A\Delta} = -4\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{A\Delta}| = 4m \Rightarrow \hat{A\Delta} = \frac{\vec{A\Delta}}{|\vec{A\Delta}|} = -\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{AK} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k} \Rightarrow |\vec{AK}| = \sqrt{44} = 6{,}63m \Rightarrow \hat{AK} = \frac{\vec{AK}}{|\vec{AK}|} = -0{,}3\hat{i} + 0{,}3\hat{j} + 0{,}9\hat{k}$

$\vec{R}_{2,3}\big|_{\vec{A\Delta}} = (\vec{R}_{2,3}\cdot\hat{A\Delta})\hat{A\Delta} = -0{,}9\,\hat{A\Delta} = 0{,}9\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{R}_{2,3}\big|_{\hat{AK}} = (\vec{R}_{2,3}\cdot\hat{AK})\hat{AK} = (-0{,}3\cdot 0{,}9 + 0{,}3\cdot 0{,}05 - 0{,}15\cdot 0{,}9)\hat{AK} = (-0{,}27 + 0{,}02 - 0{,}14)\hat{AK} = -0{,}39\hat{AK} =$

$= -0{,}39(-0{,}3\hat{i} + 0{,}3\hat{j} + 0{,}9\hat{u}) = 0{,}12\hat{i} - 0{,}12\hat{j} - 0{,}35\hat{u}$

4) $M(2,2,3)$

Άρα $\overrightarrow{AM} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{u} \Rightarrow |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{17} = 4{,}12m$

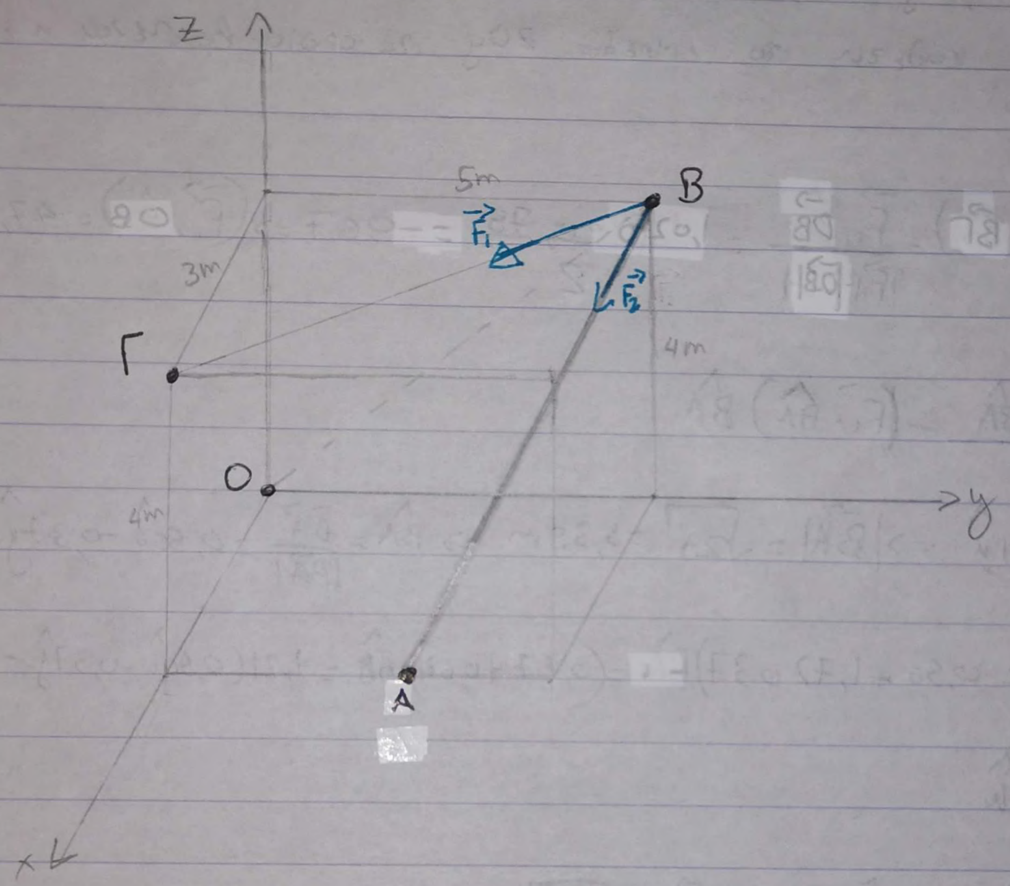
Άρα $\hat{AM} = \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = \frac{-2}{4{,}12}\hat{i} + \frac{2}{4{,}12}\hat{j} + \frac{3}{4{,}12}\hat{k} = -0{,}49\hat{i} + 0{,}49\hat{j} + 0{,}73\hat{u}$

$\overrightarrow{R_{2,3}} \,|\, \hat{AM} = (\overrightarrow{R_{2,3}} \cdot \hat{AM}) \cdot \hat{AM} = (-0{,}9 \cdot 0{,}49 + 0{,}49 \cdot 0{,}05 - 0{,}73 \cdot 0{,}15)\hat{AM} =$

$= (-0{,}44 + 0{,}02 - 0{,}11)\hat{AM} = -0{,}53\hat{AM} = -0{,}53(-0{,}49\hat{i} + 0{,}49\hat{j} + 0{,}73\hat{u})$

$= 0{,}26\hat{i} - 0{,}26\hat{j} - 0{,}39\hat{k}$

Άσκηση 2



Έχω: $O(0,0,0)$ και $|\vec{F_1}| = 2kN$
$A(3,3,0)$ $|\vec{F_2}| = 2{,}5kN$ (κάθετη στο επίπεδο zOy, βρίσκεται πάνω στην ακμή του παραλληλεπιπέδου στο σχήμα, και όχι πάνω στην ευθεία AB)
$B(0,5,4)$
$\Gamma(3,0,4)$ Άρα $\vec{F_2} = 2{,}5\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{u}$ kN

$\vec{B\Gamma} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 0\hat{u} \Rightarrow |\vec{B\Gamma}| = \sqrt{34} = 5{,}83m$, άρα $\hat{B\Gamma} = \frac{\vec{B\Gamma}}{|\vec{B\Gamma}|} = \frac{3}{5{,}83}\hat{i} - \frac{5}{5{,}83}\hat{j} + 0\hat{u} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{B\Gamma} = 0{,}51\hat{i} - 0{,}86\hat{j} + 0\hat{u}$

Άρα $\vec{F_1} = |\vec{F_1}| \cdot \hat{B\Gamma} = 2 \cdot (0{,}51\hat{i} - 0{,}86\hat{j} + 0\hat{u}) = 1{,}02\hat{i} - 1{,}72\hat{j} + 0\hat{u}$ kN

1) $\vec{OB} = 0\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{u} \Rightarrow |\vec{OB}| = \sqrt{41} = 6,4m \Rightarrow \hat{OB} = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|} = 0\hat{i} + 0,78\hat{j} + 0,63\hat{u}$

Άρα $\hat{BO} = -\hat{OB} = 0\hat{i} - 0,78\hat{j} - 0,63\hat{u}$

Εφόσον η $\vec{F_2}$ είναι κάθετη στο επίπεδο zOy, στο οποίο βρίσκεται η ευθεία OB, τότε $(\vec{F_2}, \hat{BO}) = 90°$

Επίσης, έχω: $\cos(\vec{F_1}, \hat{BO}) = \frac{\vec{F_1} \cdot \hat{BO}}{|\vec{F_1}| |\hat{BO}|} = \frac{1,72 \cdot 0,78}{2} = 0,67 \Rightarrow (\vec{F_1}, \hat{BO}) = 47,93°$

2) Ψάχνω $\underline{\vec{F_1} | \hat{BA}} = (\vec{F_1} \cdot \hat{BA}) \hat{BA}$

$\vec{BA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{u} \Rightarrow |\vec{BA}| = \sqrt{29} = 5,39m \Rightarrow \hat{BA} = \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} = 0,56\hat{i} - 0,37\hat{j} - 0,74\hat{u}$

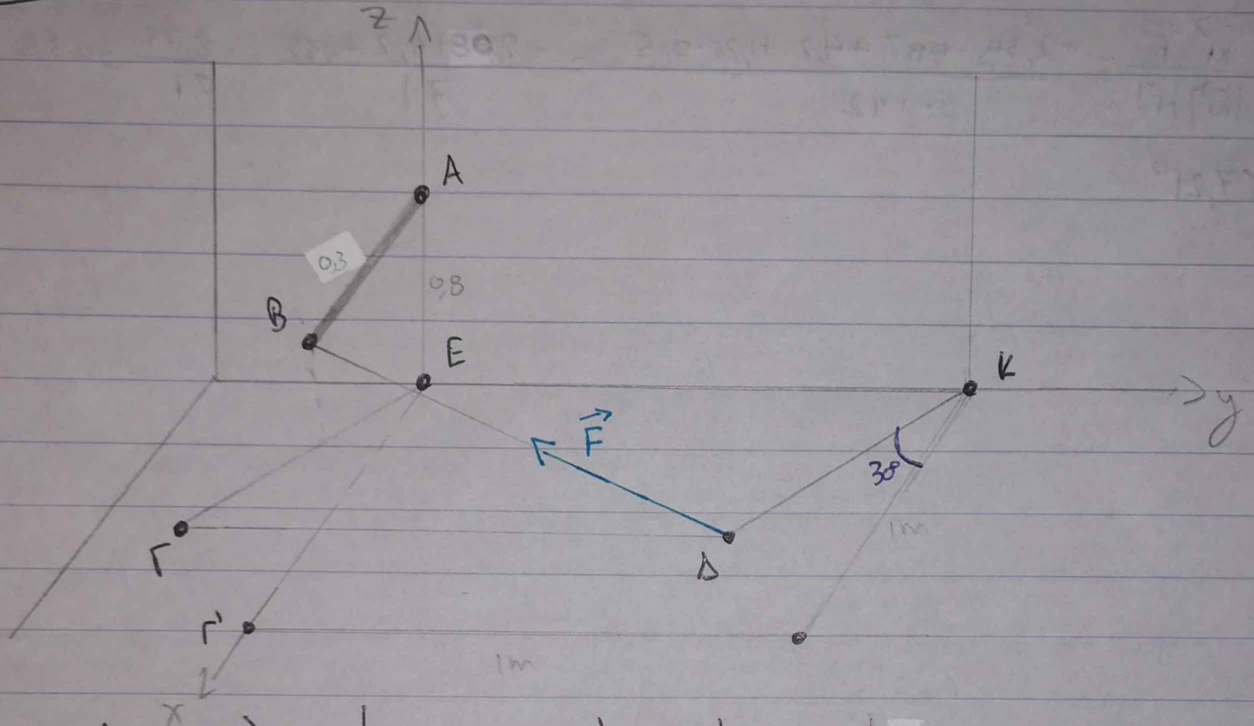
Άρα $\underline{\vec{F_1} | \hat{BA}} = (1,02 \cdot 0,56 + 1,72 \cdot 0,37)\hat{BA} = (0,57 + 0,64)\hat{BA} = 1,21(0,56\hat{i} - 0,37\hat{j} - 0,74\hat{u}) =$

$= 0,68\hat{i} - 0,45\hat{j} - 0,9\hat{u}$

3) $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = 3,52\hat{i} - 1,72\hat{j} + 0\hat{u} \Rightarrow |\vec{R}| = \sqrt{15,35} = 3,92m$

4) $\cos(\vec{R}, \vec{B\Gamma}) = \frac{\vec{R} \cdot \vec{B\Gamma}}{|\vec{R}| \cdot |\vec{B\Gamma}|} = \frac{3 \cdot 3,52 + 5 \cdot 1,72}{3,92 \cdot 5,83} = \frac{10,56 + 8,6}{22,85} = \frac{19,16}{22,85} = 0,84 \Rightarrow (\vec{R}, \vec{B\Gamma}) = 33,02°$

Άσκηση 3



Έχω

$A(0,0,0{,}8)$
$B(0{,}3,0,0{,}8)$
$\Gamma(0{,}87,0,0{,}5)$
$\Delta(0{,}87,1,0{,}5)$
$E(0,0,0)$
$K(0,1,0)$

$\sin(30) = \frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma E} \Leftrightarrow \Gamma\Gamma' = \sin(30)\cdot \Gamma E = \frac{1}{2} = 0{,}5\,m$

$\cos(30) = \frac{E\Gamma'}{\Gamma E} \Leftrightarrow E\Gamma' = \cos(30)\cdot \Gamma E = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}87\,m$

$|\vec{F}| = 5kN$

$\vec{\Delta B} = -0{,}57\hat{i} - 1\hat{j} + 0{,}3\hat{k} \Rightarrow |\vec{\Delta B}| = \sqrt{1{,}41} = 1{,}19\,m$

Άρα $\vec{F} = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{\Delta B}|}\vec{\Delta B} = \frac{5}{1{,}19}\vec{\Delta B} = 4{,}2(-0{,}57\hat{i} - 1\hat{j} + 0{,}3\hat{k}) = -2{,}39\hat{i} - 4{,}2\hat{j} + 1{,}26\hat{k}$

1) $\vec{AB} = 0{,}3\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{AB}| = 0{,}3m \Rightarrow \hat{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = 1\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{A\Gamma} = 0{,}87\hat{i} + 0\hat{j} - 0{,}3\hat{k} \Rightarrow |\vec{A\Gamma}| = \sqrt{0{,}85} = 0{,}92m \Rightarrow \hat{A\Gamma} = \frac{\vec{A\Gamma}}{|\vec{A\Gamma}|} = 0{,}95\hat{i} + 0\hat{j} - 0{,}33\hat{k}$

$\vec{F}_{/AB} = \vec{F}\cdot\hat{AB} = -2{,}39$, $\vec{F}_{/A\Gamma} = \vec{F}\cdot\hat{A\Gamma} = -2{,}39\cdot 0{,}95 - 0{,}33\cdot 1{,}26 = -2{,}27 - 0{,}42 = -2{,}69$

2) $\vec{ur} = 0{,}87\hat{i} - 1\hat{j} + 0{,}5\hat{u} \Rightarrow |\vec{ur}| = \sqrt{2} = 1{,}42m$

$$\cos(\vec{ur}, \hat{\vec{F}}) = \frac{\vec{ur}\cdot\vec{F}}{|\vec{ur}|\,|\vec{F}|} = \frac{-2{,}39\cdot 0{,}87 + 4{,}2 + 1{,}26\cdot 0{,}5}{5\cdot 1{,}42} = \frac{-2{,}08 + 4{,}2 + 0{,}63}{7{,}1} = \frac{2{,}75}{7{,}1} = 0{,}39$$

$$\Rightarrow (\vec{ur}, \hat{\vec{F}}) = 67{,}21^\circ$$

Άσκηση 4

Έστω οι κατακόρυφες δυνάμεις $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ με $|\vec{F_1}| = 3kN$ και $|\vec{F_2}| = 4kN$

Τότε έχω: $\vec{F_1} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 3\hat{k}$ kN

$\vec{F_2} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 4\hat{k}$ kN

1)

$$\left.\begin{aligned} &A(0,0,0)\\ &B(0,1,1)\\ &Γ(2,0,3)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{BΓ} = 2\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow |\vec{BΓ}| = 3m \text{ άρα } \hat{BΓ} = \frac{\vec{BΓ}}{|\vec{BΓ}|} = 0,67\hat{i} - 0,33\hat{j} + 0,67\hat{k}$$

Η προβολή της $\vec{F_1}$ στη BΓ: $\vec{F_1}_{\parallel \hat{BΓ}} = (\vec{F_1} \cdot \hat{BΓ})\hat{BΓ} = -3 \cdot 0,67\,\hat{BΓ} = -2,01 \cdot (0,67\hat{i} - 0,33\hat{j} + 0,67\hat{k})$

$= -1,35\hat{i} + 0,66\hat{j} - 1,35\hat{k}$ kN

Η προβολή της $\vec{F_2}$ στη BΓ: $\vec{F_2}_{\parallel \hat{BΓ}} = (\vec{F_2} \cdot \hat{BΓ})\hat{BΓ} = -4 \cdot 0,67\,\hat{BΓ} = -2,68(0,67\hat{i} - 0,33\hat{j} + 0,67\hat{k}) =$

$= -1,8\hat{i} + 0,88\hat{j} - 1,8\hat{k}$

2) $|\vec{F_Γ}| = |\vec{F_Δ}| = 6kN$

Από σειρά ασκήσεων 2, άσκηση 8 έχω:

$\vec{BΓ} = 2\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k}$, $|\vec{BΓ}| = 3m$

$\vec{BΔ} = -2\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k}$, $|\vec{BΔ}| = 3m$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Άρα } \vec{F_Γ} = \frac{|\vec{F_Γ}|}{|\vec{BΓ}|}\vec{BΓ} = \frac{6}{3}\vec{BΓ} = 2\vec{BΓ} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}\\ &\text{και } \vec{F_Δ} = \frac{|\vec{F_Δ}|}{|\vec{BΔ}|}\vec{BΔ} = \frac{6}{3}\vec{BΔ} = 2\vec{BΔ} = -4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}\end{aligned}\right\} \text{Η συνισταμένη τους } R = 0\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$$

Έστω Η' η προβολή του Η στον άξονα y
Έχω $\tan\theta = 1 = \frac{HH'}{AH'} \Leftrightarrow HH' = AH' = 2,5m$

Άρα έχω: $\Gamma(2,0,3)$
$E(0,5.5,2,5)$

$\vec{E\Gamma} = 2\hat{i} - 5.5\hat{j} + 0,5\hat{k} \Rightarrow |\vec{E\Gamma}| = \sqrt{34,5} = 5,87m$

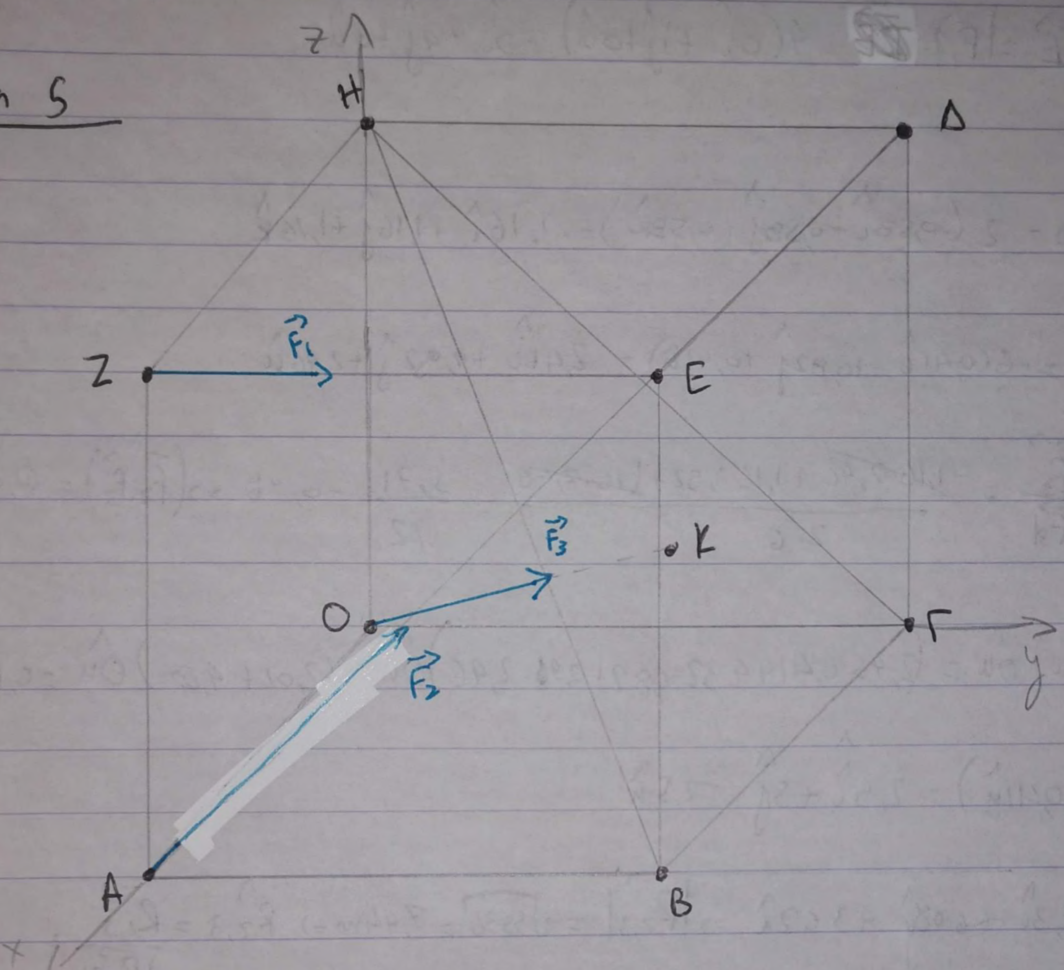
Άρα $\hat{E\Gamma} = \frac{\vec{E\Gamma}}{|\vec{E\Gamma}|} = 0,34\hat{i} - 0,94\hat{j} + 0,08\hat{k}$

Ψάχνω την προβολή της $\vec{R}$ στην ΕΓ, δηλαδή

$\vec{R}_{\parallel E\Gamma} = (\vec{R}\cdot\hat{E\Gamma})\hat{E\Gamma} = (4\cdot0,94 + 8\cdot0,08)\hat{E\Gamma} = (3,76 + 0,64) = 4,4\hat{E\Gamma} = 4,4(0,34\hat{i} - 0,94\hat{j} + 0,08\hat{k})$

$= 1,5\hat{i} - 4,14\hat{j} + 0,35\hat{k}$

Άσκηση 5



Έχω: $a = AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = 10cm$
$|\vec{F_1}| = 4kN$
$|\vec{F_2}| = 2kN$
$|\vec{F_3}| = 6kN$

O(0,0,0) Δ(0,10,10) $K(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}) = (3{,}33, 6{,}67, 3{,}33)$
A(10,0,0) E(10,10,10)
B(10,10,0) H(0,0,10)
Γ(0,10,0) Z(10,0,10)

$\vec{ZE} = 0\hat{i} + 10\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow |\vec{ZE}| = 10m$

$\vec{OK} = 3{,}33\hat{i} + 6{,}67\hat{j} + 3{,}33\hat{k} \Rightarrow |\vec{OK}| = \sqrt{66{,}66} = 8{,}16m \Rightarrow \hat{OK} = \frac{\vec{OK}}{|\vec{OK}|} = 0{,}41\hat{i} + 0{,}82\hat{j} + 0{,}41\hat{k}$

$\vec{A\Delta} = -10\hat{i} + 10\hat{j} + 10\hat{k} \Rightarrow |\vec{A\Delta}| = \sqrt{300} = 17{,}32m \Rightarrow \hat{A\Delta} = \frac{\vec{A\Delta}}{|\vec{A\Delta}|} = -0{,}58\hat{i} + 0{,}58\hat{j} + 0{,}58\hat{k}$

Άρα $\vec{F}_1 = \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{ZE}|}\vec{ZE} = |\vec{F}_1|\cdot\hat{ZE} = 4(0\hat{i}+1\hat{j}+0\hat{k}) = 0\hat{i}+4\hat{j}+0\hat{k}$

$\vec{F}_2 = |\vec{F}_2|\cdot\hat{A\Delta} = 2(-0{,}58\hat{i}+0{,}58\hat{j}+0{,}58\hat{k}) = -1{,}16\hat{i}+1{,}16\hat{j}+1{,}16\hat{k}$

$\vec{F}_3 = |\vec{F}_3|\cdot\hat{OK} = 6(0{,}41\hat{i}+0{,}82\hat{j}+0{,}41\hat{k}) = 2{,}46\hat{i}+4{,}92\hat{j}+2{,}46\hat{k}$

1) $\cos(\widehat{\vec{F}_2,\vec{F}_3}) = \frac{\vec{F}_2\cdot\vec{F}_3}{|\vec{F}_2||\vec{F}_3|} = \frac{\cancel{-1{,}16\cdot 2{,}46}+1{,}16\cdot 4{,}92+\cancel{1{,}16\cdot 2{,}46}}{2\cdot 6} = \frac{5{,}71}{12} = 0{,}48 \Rightarrow (\widehat{\vec{F}_2,\vec{F}_3}) = 61{,}59$

2) $\underline{\vec{F}_2 \parallel OK} = (\vec{F}_2\cdot\hat{OK})\hat{OK} = (-1{,}16\cdot 0{,}41 + 1{,}16\cdot 0{,}82 + 0{,}41\cdot 1{,}16)\hat{OK} = (1{,}16\cdot 0{,}82)\hat{OK} = 0{,}95\,\hat{OK}$

$= 0{,}95(0{,}41\hat{i}+0{,}82\hat{j}+0{,}41\hat{k}) = 0{,}39\hat{i}+0{,}78\hat{j}+0{,}39\hat{k}$ kN

3) $\vec{R}_{2,3} = \vec{F}_2+\vec{F}_3 = 2{,}3\hat{i}+6{,}08\hat{j}+3{,}62\hat{k} \Rightarrow |\vec{R}_{2,3}| = \sqrt{55{,}36} = 7{,}44\,m \Rightarrow \hat{R}_{2,3} = \frac{\vec{R}_{2,3}}{|\vec{R}_{2,3}|} =$

$= 0{,}31\hat{i}+0{,}82\hat{j}+0{,}49\hat{k}$ kN

Τέλος $\underline{\vec{F}_1 \parallel \vec{R}_{2,3}} = (\vec{F}_1\cdot\hat{R}_{2,3})\hat{R}_{2,3} = 4\cdot 0{,}82\cdot\hat{R}_{2,3} = 3{,}28\,\hat{R}_{2,3} = 3{,}28(0{,}31\hat{i}+0{,}82\hat{j}+0{,}49)$

$= 1{,}02\hat{i}+2{,}69\hat{j}+1{,}61$ kN