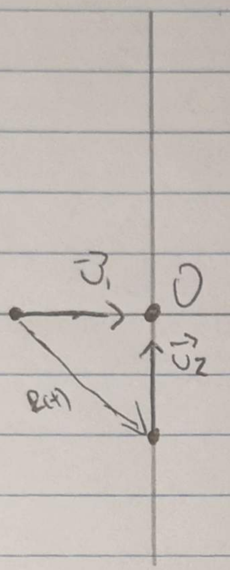
Φυσική I – Ασκήσεις – Ενότητα 3 – Σχετική Κίνηση – Συστήματα αναφοράς

Άσκηση 1



$\vec{v}_1 = 2\hat{x}$ m/s $\qquad \vec{r}_1(0) = -3\hat{x}$

$\vec{v}_2 = 3\hat{y}$ m/s $\qquad \vec{r}_2(0) = -3\hat{y}$

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_1(0) + \vec{v}_1 t = (-3,0) + (2t,0) = (2t-3)\hat{x}$$

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_2(0) + \vec{v}_2 t = -3\hat{y} + 3t\hat{y} = (3t-3)\hat{y}$$

Άρα $\vec{R}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) = (2t-3)\hat{x} + (3t-3)\hat{y} \Rightarrow \vec{v}_{12} = 2\hat{x} - 3\hat{y}$ m/s

$$|\vec{R}(t)| = s = \sqrt{(2t-3)^2 + (3t-3)^2} \Rightarrow s^2 = (2t-3)^2 + (3t-3)^2$$

Ψάχνω να βρω την χρονική στιγμή t_0 όπου $s = min \Rightarrow s^2 = min$

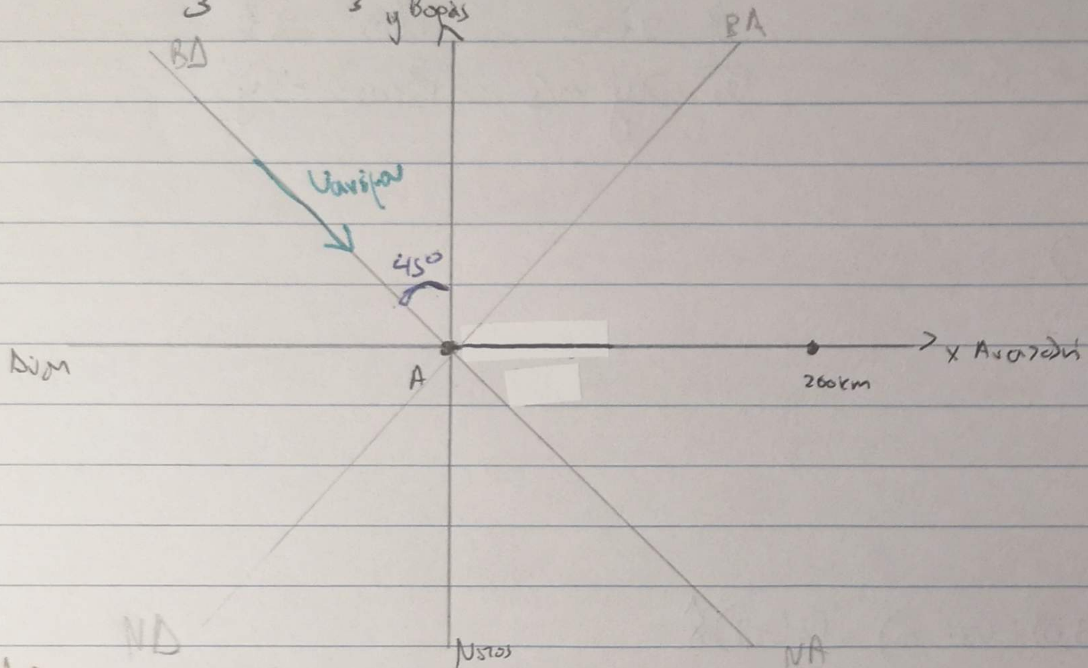
$$\frac{ds^2}{dt} = 0 \Rightarrow 4(2t-3) + 6(3t-3) = 0 \Rightarrow 8t - 12 + 18t - 18 = 0 \Rightarrow 26t = 30 \Rightarrow t = \frac{30}{26} \simeq 1{,}15 \text{ sec}$$

$\vec{r}_1(t_0) = -0{,}7\hat{x}$

$\vec{r}_2(t_0) = 0{,}45\hat{y}$

Άσκηση 2

$40min = \frac{2h}{3} \Rightarrow \frac{200}{\frac{2}{3}} = 300$ km/h



$|\vec{U}_{ανέμου}| = 30$ km/h

Πρέπει $\vec{U}_{ανέμου} + \vec{U}_{αεροπλάνου} = 300\hat{x}$

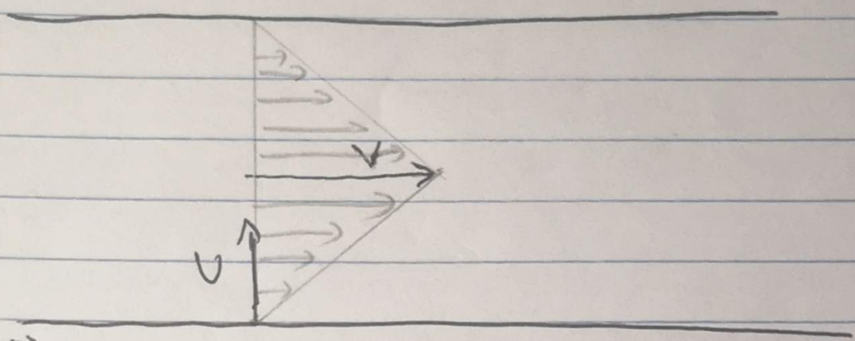
Έχω $\vec{v}_1 = \vec{U}_{ανέμου} = \frac{\sqrt{2}}{2}30\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}30\hat{y} = 15\sqrt{2}\hat{x} - 15\sqrt{2}\hat{y}$

$\vec{v}_2 = U_{αεροπλάνου} = a\hat{x} + b\hat{y}$

Άρα πρέπει $(15\sqrt{2} + a)\hat{x} + (-15\sqrt{2} + b)\hat{y} = 300\hat{x} + 0\hat{y} \Rightarrow \begin{cases} 15\sqrt{2} + a = 300 \\ -15\sqrt{2} + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 300 - 15\sqrt{2} \text{ km/h} \\ b = +15\sqrt{2} \text{ km/h} \end{cases}$

Άρα $U_{αεροπλάνου} = 278,79\hat{x} + 21,21\hat{y}$ km/h

Άσκηση 3



$\vec r(0)=\vec 0$

Έχω $U_{By}=U \xRightarrow[\vec r(0)=\vec 0]{} y_B=Ut$. Για να φτάσει στο $\frac{d}{2}$ θέλει χρόνο $t_0=\frac{d}{2U}$ και στο d χρόνο $2t_0$

$$U_{Bx}=\begin{cases}\frac{2V}{d}y_B, & 0\le y_B\le \frac{d}{2}\\ \frac{2(d-y_B)}{Vd}, & d\ge y_B\ge \frac{d}{2}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2V}{d}\cdot Ut, & 0\le t\le t_0\\ \frac{2V(d-Ut)}{d}, & t_0\le t\le 2t_0\end{cases}\Rightarrow X_B=\begin{cases}\frac{VU}{d}t^2+c_1, & t\in[0,t_0]\\ \frac{2Vdt-VUt^2}{d}+c_2, & t\in[t_0,2t_0]\end{cases}$$

Έχω για $t=0$, $x_B=0$ άρα $0=c_1$

Έχω για $t=t_0$, $x_B=\frac{VU}{d}t_0^2 \Rightarrow \frac{VUt_0^2}{d}=\frac{2Vdt_0-VUt_0^2}{d}+c_2\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{VUt_0^2}{d}=2Vt_0-\frac{VUt_0^2}{d}+c_2\Rightarrow \frac{2VUt_0^2}{d}=2Vt_0+c_2\Rightarrow c_2=\frac{2VUt_0^2}{d}-2Vt_0\Rightarrow$$

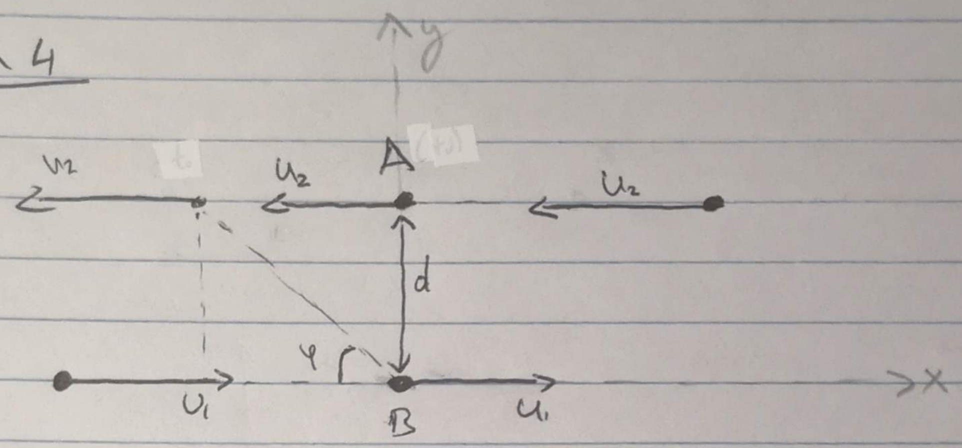
$$\Rightarrow c_2=\frac{2VU}{d}\cdot\frac{d^2}{4U^2}-\frac{2V\cdot d}{2U}\Rightarrow c_2=\frac{Vd}{2U}-\frac{Vd}{U}=-\frac{Vd}{2U}$$

Άρα
$$x_B=\begin{cases}\frac{VUt^2}{d}, & t\in[0,t_0]\\ \frac{2Vdt-VUt^2}{d}-\frac{Vd}{2U}, & t\in[t_0,2t_0]\end{cases}=\begin{cases}\frac{Vy_B^2}{Ud}, & y_B\in[0,\frac{d}{2}]\\ \frac{2Vdy_B-Vy_B^2}{Ud}, & y_B\in[\frac{d}{2},d]\end{cases}$$

Άρα η οριζόντια μετατόπιση της βάρκας είναι $x_B(2t_0)=\frac{2Vd2t_0-VU4t_0^2}{d}-\frac{Vd}{2U}=$

$$=4Vt_0-\frac{4VUt_0^2}{d}-\frac{Vd}{2U}=\frac{4V\cdot d}{2U}-\frac{4VU}{d}\cdot\frac{d^2}{4U^2}-\frac{Vd}{2U}=\frac{2Vd}{U}-\frac{Vd}{U}-\frac{Vd}{2U}=\frac{Vd}{U}-\frac{Vd}{2U}=\frac{Vd}{2U}$$

Άσκηση 4



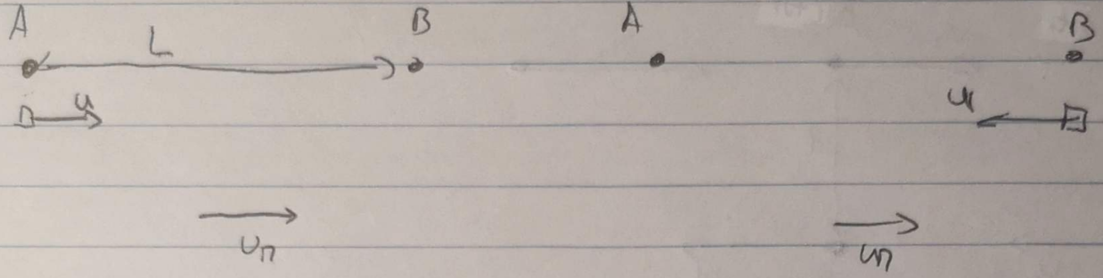
Έστω ότι η απόσταση των 2 καραβιών είναι $AB = d$, και ότι την στιγμή $t=0$ που το καράβι 2 βρίσκεται στο A και το καράβι 1 στο B το καράβι 1 προβάλλει βλήμα με ταχύτητα $\vec{v}=(v_1-a)\hat{x}+b\hat{y}$, έτσι ώστε να πετύχει το καράβι 2. Έχω $\frac{b}{a}=\tan\varphi$

Έστω ότι το βλήμα χρειάζεται χρόνο t_0 για να φτάσει το καράβι 2. Τότε έχω $y=bt \Rightarrow d=bt_0 \Rightarrow b=\frac{d}{t_0} \Rightarrow t_0=\frac{d}{b}$

Σε χρόνο t_0 το καράβι 2 έχει μετατοπισθεί κατά $x=v_2 t_0 = \frac{v_2 d}{b}$

Άρα $\tan\varphi = \frac{d}{x} = \frac{d}{u_2 t_0} = \frac{d}{\frac{u_2 \cdot d}{b}} = \frac{b}{u_2}$

Άσκηση 5



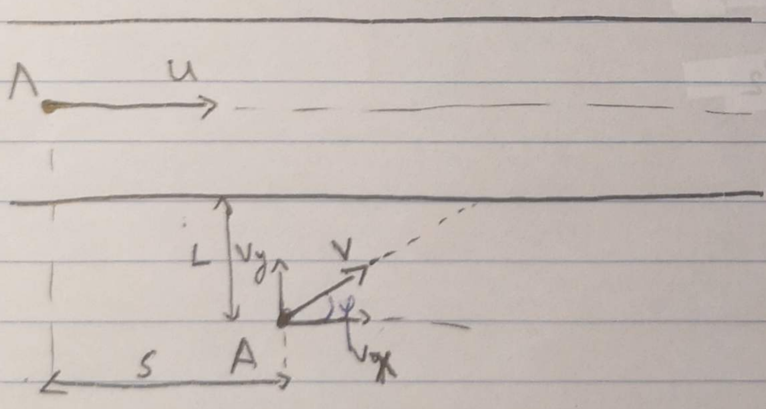
$$L=(u+u_\pi)t_1 \Rightarrow u+u_\pi=\frac{L}{t_1} \quad (1)$$

$$L=(u-u_\pi)t_2 \Rightarrow u-u_\pi=\frac{L}{t_2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow 2u=L\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right) \Rightarrow u=\frac{L}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$$

$$(1)(2) \Rightarrow 2u_\pi=\frac{L}{t_1}-\frac{L}{t_2} \Rightarrow u_\pi=\frac{L}{2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$$

Άσκηση 6



Ο Α θέλει χρόνο t_0 για να φτάσει στο οδόστρωμα.

$$L=V_y \cdot t_0 \Rightarrow t_0=\frac{L}{V_y}=\frac{L}{V\sin\varphi}$$

Σε χρόνο t_0 ο Α έχει διανύσει οριζόντια απόσταση $l=V_x t_0=\cancel{V}\cos\varphi\cdot\frac{L}{\cancel{V}\sin\varphi}=\frac{L}{\tan\varphi}$

ενώ το L έχει διανύσει οριζόντια απόσταση $h=u t_0=\frac{uL}{V\sin\varphi}$

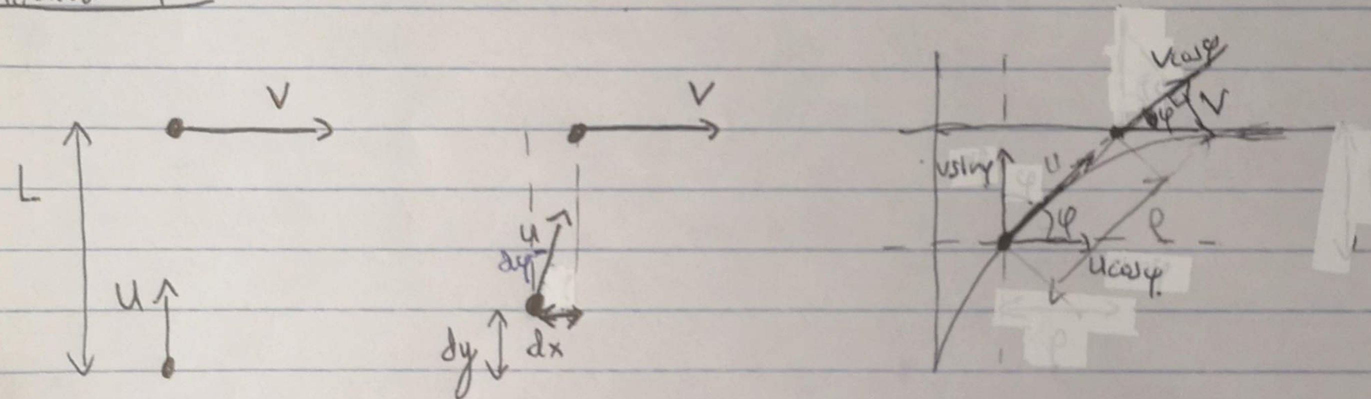
Πρέπει $s+\ell-h=max \Rightarrow s+\frac{L}{\tan\varphi}-\frac{uL}{V\sin\varphi}=max$

Άρα $\frac{d(s+\ell-h)}{d\varphi}=0 \Rightarrow \frac{d(\ell-h)}{d\varphi}=0 \Rightarrow \left(L\cot\varphi-\frac{uL}{V}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\right)'=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{L}{\sin^2\varphi}+\frac{uL}{V}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}=0 \Rightarrow \frac{uL\cos\varphi}{V\sin^2\varphi}-\frac{LV}{V\sin^2\varphi}=0 \Rightarrow uL\cos\varphi-LV=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\varphi=\frac{V}{u}$

Άσκηση 7



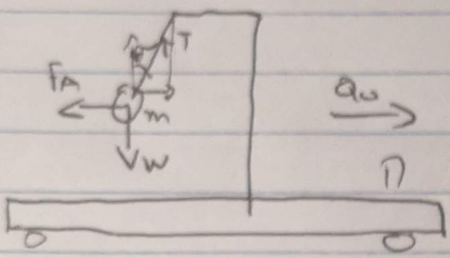
Σε χρόνο dt η γάτα έχει προχωρήσει κατά dx, τ.ς. $dx=Vdt \Rightarrow x=Vt$ $(x(0)=0)$.

Έστω τυχαία στιγμή t, όπου ο σκύλος βρίσκεται σε γωνία φ ως προς την γάτα και η απόστασή τους είναι ρ. Η ταχύτητα του σκύλου ως προς την γάτα είναι $\frac{d\rho}{dt}=V\cos\varphi-u \Rightarrow d\rho=(V\cos\varphi-u)dt$

$\Rightarrow \int_L^0 d\rho=\int_0^{t_0}(V\cos\varphi-u)dt \Rightarrow -L=\int_0^{t_0}V\cos\varphi\,dt-ut_0 \Rightarrow L=ut_0-V\int_0^{t_0}\cos\varphi\,dt$

Όμως έχω $\int_0^{t_0}u\cos\varphi\,dt=Vt_0 \Rightarrow \int_0^{t}\cos\varphi\,dt=\frac{Vt_0}{u}$. Άρα $L=ut_0-\frac{V^2t_0}{u}=\frac{(u^2-V^2)t_0}{u} \Rightarrow t_0=\frac{Lu}{u^2-V^2}$

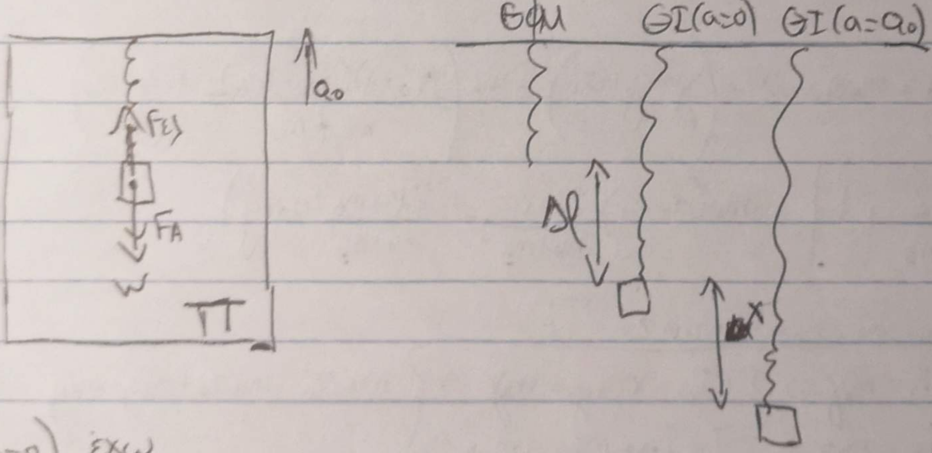
Άσκηση 8



Για τον κινούμενο παρατηρητή Π

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow T_x = F_A \Rightarrow T_x = ma_0 \Rightarrow T\sin\theta = ma_0 \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow T_y = W \Rightarrow T\cos\theta = mg\end{aligned}\right\} \tan\theta = \frac{ma_0}{mg} = \frac{a_0}{g}$$

Άσκηση 9



Στην ΘΙ(a=0) έχω

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \quad (1)$$

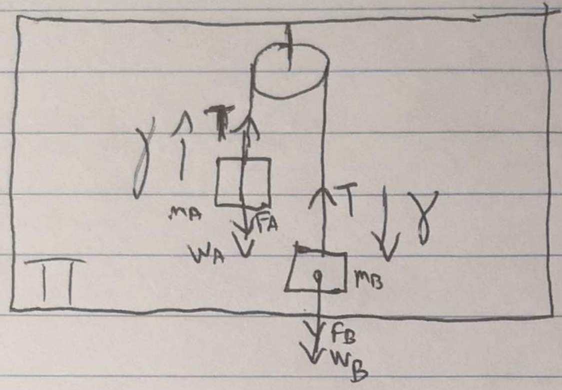
Στην ΘΙ(a=a_0) έχω (για τον Π)

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k(\Delta l + x) = mg + ma_0 \Rightarrow \cancel{k\Delta l} + kx = \cancel{mg} + ma_0 \Rightarrow x = \frac{ma_0}{k}$$

Άσκηση 10

ΔΤΠ

1) Αν $a_0 \uparrow$



Για παρατηρητή Π

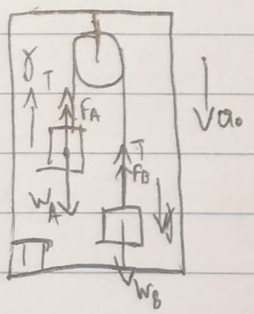
$$\left.\begin{aligned} &\Sigma F_A = m_A \gamma \Rightarrow T - m_A g - m_A a_0 = m_A \gamma \ (1) \\ &\Sigma F_B = m_B \gamma \Rightarrow m_B g + m_B a_0 - T = m_B \gamma \ (2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_B(a_0+g) - m_A(a_0+g) = \gamma(m_A+m_B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_0+g)(m_B-m_A) = \gamma(m_A+m_B) \Rightarrow \gamma = \frac{(a_0+g)(m_B-m_A)}{m_A+m_B} \ (3)$$

$$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} T = m_A\gamma + m_A g + m_A a_0 = m_A(\gamma + g + a_0) = m_A\left(\frac{(a_0+g)(m_B-m_A)}{m_A+m_B} + g + a_0\right) =$$

$$= m_A(a_0+g)\left[\frac{m_B-m_A}{m_A+m_B} + 1\right] = m_A(a_0+g)\frac{2m_B}{m_A+m_B} = \frac{2m_A m_B}{m_A+m_B}(a_0+g)$$

2) Αν $a_0 \downarrow$



Για τον παρατηρητή Π

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma F_A = m_A \gamma \Rightarrow T + F_A - m_A g = m_A \gamma \ (1) \\ &\Sigma F_B = m_B \gamma \Rightarrow -T - F_B + m_B g = m_B \gamma \ (2) \end{aligned}\right\} m_A a_0 - m_B a_0 + m_B g - m_A g = m_A\gamma + m_B\gamma \Rightarrow$$

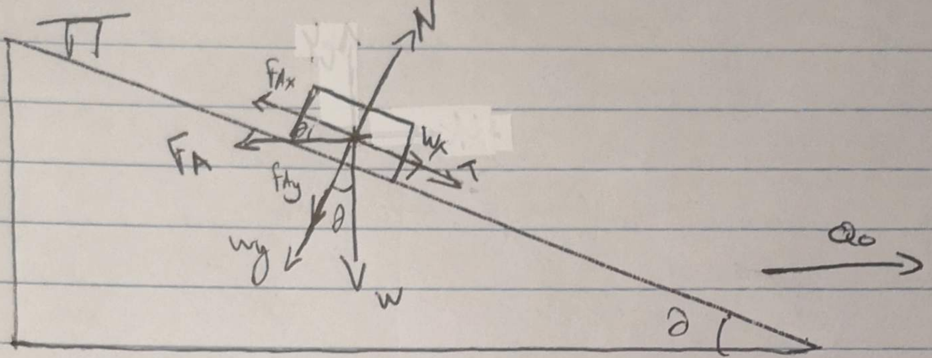
$$\Rightarrow a_0(m_A-m_B) - g(m_A-m_B) = \gamma(m_A+m_B) \Rightarrow \gamma(m_A+m_B) = (m_A-m_B)(a_0-g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{(m_A-m_B)(a_0-g)}{m_A+m_B} \ (3)$$

$$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} T = m_A\gamma + m_A g - m_A a_0 = m_A(\gamma + g - a_0) = m_A\left[\frac{(m_A-m_B)(a_0-g)}{(m_A+m_B)} - (a_0-g)\right] =$$

$$= m_A(a_0-g)\left[\frac{(m_A-m_B)}{m_A+m_B} - 1\right] = m_A(a_0-g)\left[\frac{m_A-m_B-m_A-m_B}{m_A+m_B}\right] = m_A(a_0-g)\frac{(-2m_B)}{m_A+m_B} = \frac{2m_A m_B(g-a_0)}{m_A+m_B}$$

Άσκηση 11



Για τον παρατηρητή Π

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = F_{Ay} + W_y \Rightarrow N = F_A \sin\theta + W\cos\theta$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow W_x + T = F_{Ax} \Rightarrow mg\sin\theta + f_s N = ma_0\cos\theta \Rightarrow mg\sin\theta + f_s(ma_0\sin\theta + mg\cos\theta) = ma_0\cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow g\sin\theta + f_s a_0 \sin\theta + f_s g\cos\theta = a_0\cos\theta \Rightarrow a_0(f_s\sin\theta - \cos\theta) = -g(f_s\cos\theta + \sin\theta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{g(f_s\cos\theta + \sin\theta)}{\cos\theta - f_s\sin\theta}$$

Πρέπει $\cos\theta - f_s\sin\theta > 0 \Rightarrow \cos\theta > f_s\sin\theta \Rightarrow \tan\theta < \frac{1}{f_s}$

και $f_s\cos\theta + \sin\theta > 0 \Rightarrow \tan\theta > -f_s$

$\Bigg\} \; -f_s < \tan\theta < \frac{1}{f_s}$

Αν έχω $a > a_0$ τότε το σώμα επιταχύνεται προς τα πάνω: άρα έχω $T = T_{ολ}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = F_{Ay} + W_y \Rightarrow N = ma\sin\theta + mg\cos\theta$

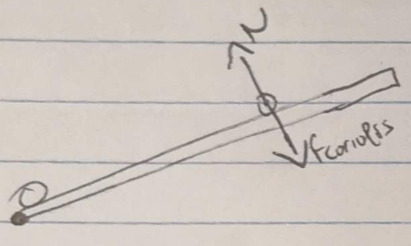
$\Sigma F_x = ma' \Rightarrow F_{Ax} - W_x - T_{ολ} = ma' \Rightarrow ma - mg\sin\theta - fN = ma' \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{m}a - \cancel{m}g\sin\theta - f\cancel{m}a\sin\theta - f\cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}a' \Rightarrow a' = a - g\sin\theta - fa\sin\theta - fg\cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow a' = a(1 - f\sin\theta) - g(\sin\theta + f\cos\theta)$

Με T προς τα πάνω μπορώ να βρω την ελάχιστη a_0

Άσκηση 12



Για έναν παρατηρητή πάνω στην έδαφο:

$\sum \vec{F}_{σφαίρας} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{φ} = m\vec{a} \Rightarrow -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\cancel{m} = \cancel{m}\vec{a} \Rightarrow a = \omega^2 r \Rightarrow$

$\Rightarrow r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

$$\left.\begin{array}{l} r(0)=0 \Rightarrow A+B=0 \\ r'(0)=u_0 \Rightarrow A\omega - B\omega = u_0 \end{array}\right\} A = \frac{u_0}{2\omega} \text{ και } B = \frac{-u_0}{2\omega}$$

Άρα $r(t) = \frac{u_0}{2\omega}e^{\omega t} - \frac{u_0}{2\omega}e^{-\omega t} = \frac{u_0}{2\omega}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) \Rightarrow r(t) = \frac{u_0}{\omega}\sinh(\omega t)$

Για $t = t_0$ έχω $r(t) = L$ άρα $L = \frac{u_0}{\omega}\sinh(\omega t_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sinh(\omega t_0) = \frac{\omega L}{u_0} \Rightarrow \omega t_0 = \sinh^{-1}\left(\frac{\omega L}{u_0}\right) \Rightarrow t_0 = \frac{\sinh^{-1}\left(\frac{\omega L}{u_0}\right)}{\omega}$

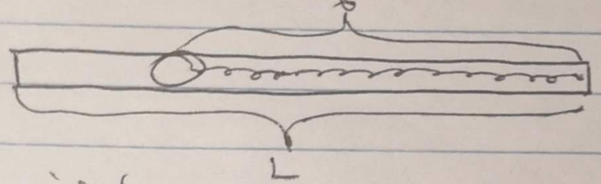
$\sum F_{εφαρμοσμένος} = m\vec{a}_{\varepsilon} \Rightarrow \vec{N} + \vec{F}_{cor} = m\vec{a}_{\varepsilon} \Rightarrow \vec{N} = -\vec{F}_{cor} + m\vec{a}_{\varepsilon} \Rightarrow N = +2\omega u' m + m\omega r = m\omega\left(r + 2u'\right)$

Έχω $r(t) = \frac{U_0}{2\omega}e^{\omega t} - \frac{U_0}{2\omega}e^{-\omega t} \Rightarrow u'(t) = \frac{U_0}{2} \cdot e^{\omega t} + \frac{U_0}{2}e^{-\omega t} = U_0 \sinh(\omega t)$

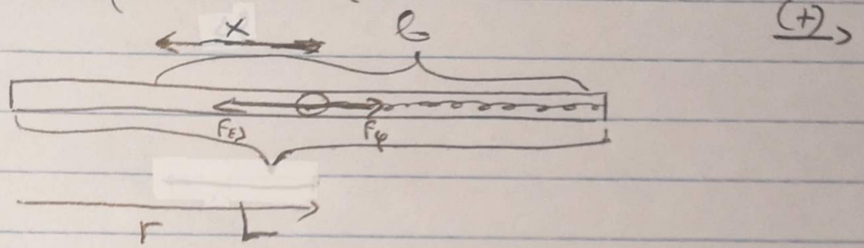
Άρα $N = m\omega\left(r + 2U_0\sinh(\omega t)\right) = m\omega\left(r + 2\omega r\right) = m\omega r\left(2\omega t\right)$

Άσκηση 13

Όταν το σύστημα είναι ακίνητο:



Όταν το σύστημα κινείται:



Για παρατηρητή επί του κυλίσματος της ράβδου: υπάρχει r_0 όπου

$\Sigma \vec{F}_\rho = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{F}_φ = \vec{0} \Rightarrow -k\vec{x} + \vec{F}_φ = \vec{0} \Rightarrow kx + m\omega^2 r_0 = 0$

Έχω $\ell - x = r \Rightarrow x = \ell - r$

Άρα $k(\ell - r_0) + m\omega^2 r_0 = 0 \Rightarrow k\ell - kr_0 + m\omega^2 r_0 = 0 \Rightarrow r_0(m\omega^2 - k) = -k\ell \Rightarrow r_0 = \frac{-k\ell}{m\omega^2 - k} = \frac{k\ell}{k - m\omega^2}$

Γενικότερα:

$\Sigma \vec{F}_\rho = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{F}_φ = m\vec{a} \Rightarrow kx + m\omega^2 r = ma \Rightarrow k(\ell - r) + m\omega^2 r = ma \Rightarrow$

$\Rightarrow k\ell - kr + m\omega^2 r = ma \Rightarrow r(m\omega^2 - k) + k\ell = ma \Rightarrow r(m\omega^2 - k) - r_0(m\omega^2 - k) = ma \Rightarrow$

$\Rightarrow ma = -(k - m\omega^2)(r - r_0) \Rightarrow m\ddot{r} = -(k - m\omega^2)(r - r_0)$

Θέτω $r - r_0 = y \Rightarrow \dot{r} = \dot{y} \Rightarrow \ddot{r} = \ddot{y}$ και $k - m\omega^2 = D$

Άρα $m\ddot{y} = -Dy$ άρα έχω ΑΑΤ με $D = k - m\omega^2$

Η επιτάχυνση: $\ddot{y} = -\frac{D}{m} y \Rightarrow \frac{-D}{m} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k - m\omega^2}{m} = \frac{k}{m} - \omega^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$

Άρα $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}}{2\pi}$

Άσκηση 14

$$\vec{\omega} = 2t\hat{x} - t^2\hat{y} + (2t+4)\hat{z}$$

$$\vec{r}' = (t^2+1)\hat{x}' - 6t\hat{y}' + 4t^3\hat{z}'$$

α) Η ταχύτητα του σώματος στο περιστρεφόμενο σύστημα είναι

$$\vec{u}' = 2t\hat{x}' - 6\hat{y}' + 12t^2\hat{z}'$$

Αφού τα 2 συστήματα έχουν κοινή αρχή αξόνων, τότε το διάνυσμα που συνδέει τις αρχές τους, $\vec{R} = \vec{0}$ και άρα $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{R} \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r}$

Η ταχύτητα ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς:

$$\vec{r}' = \vec{r} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$