Questions Cours

Yago iglesias

6 juin 2024

Table des matières

1 σ-algèbres

Question 1. *Donner la définition de σ-algèbre.*

Définition 1. Une σ-algèbre sur un ensemble E est une famille $\mathscr{A}$ de parties de E telle que :

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire
3. $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable

Question 2. *Montrer que la σ-algèbre des boréliens de $\mathbb{R}$ est la plus petite σ-algèbre contenant les intervalles ouverts.*

Démonstration. Soit $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ la σ-algèbre des boréliens de $\mathbb{R}$. On a que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ contient les intervalles ouverts par définition.

Soit $\mathscr{A}$ la plus petite σ-algèbre contenant les intervalles ouverts. On a que :

1. $\mathscr{A}$ contient les intervalles ouverts.
2. $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire car les intervalles ouverts le sont.
3. $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable car les intervalles ouverts le sont.

Donc $\mathscr{A}$ contient les boréliens (ils vérifient les trois propriétés ci-dessus). Ainsi, $\mathscr{B}$ vérifie la propriété demandée. □

2 CC1

Question 3. *Donner la définition de probabilité sur* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})$

Définition 2. Une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})$ est une application P de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ dans $[0,1]$ telle que :

1. $P(\mathbb{R}) = 1$
2. P est σ-additive

Question 4. *Donner la dfinition de fonction de répartition* F_P *d'une probabilité* P *sur* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$

Définition 3. La fonction de répartition d'une probabilité P sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})$ est l'application F_P de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par :

$$F_P(x) = P(]-\infty, x])$$

Question 5. *Montrer que* F_P *est continue à droite*

Démonstration. F_X est CAD car, si (x_n) est une suite décroissante qui tend vers x, on a que $\{X \leq x_{n+1}\} \subset \{X \leq x_n\}$ pour tout n et $\lim_n X \leq x_n = \cap_n \{X \leq x_n\} = \{X \leq x\}$. Par le comportement des probabilités pour des suites monotones dévénements (si (A_n) est une suite décroissante d'événements, alors $P(A_n) \implies P(\cap_n \{A_n\})$) on conclut que

$$\lim_n F_X(x_n) = \lim_n P(X \leq x_n) = P(\{X \leq x\}) = F_X(x)$$

□

3 Fonctions de répartition

Question 6. *Montrer que* $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

Démonstration. F_X est croissante, donc elle admet des limites en $-\infty$ et ∞.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} F_X(x) &= \lim_{n\to\infty} F_X(-n) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(X \in]-\infty,-n]) \\ &= P(\emptyset) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La deuxième demonstration est similaire. □

Question 7. *Montrer que* $\mathbb{P}(X=x) = F_X(x) - \lim_{y\to x^-} F_X(y)$

Démonstration. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left]x-\frac{1}{n},x\right]\right) &= \mathbb{P}\left(]-\infty,x]\right) - \mathbb{P}\left(\left]-\infty,x-\frac{1}{n}\right]\right) \\ &= F_X(x) - F_X(x-\frac{1}{n}) \end{aligned}$$

De plus,

$$\{x\} = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n, \quad B_n := \left]x-\frac{1}{n},x\right]$$

Comme F_x est continue a droite et B_n est décroissante, on a que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{x\}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(F_X(x) - F_X(x-\frac{1}{n})\right) \\ &= F_X(x) - \lim_{n\to\infty} F_X(x-\frac{1}{n}) \\ &= F_X(x) - \lim_{y\to x^-} F_X(y) \end{aligned}$$

□

4 CC2

Question 8. *Donner la définition de variable aléatoire réelle*

Définition 4. Soit $(\Omega,\mathscr{F},P)$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire réelle est une application $X:\mathscr{F}\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(B)\in\mathscr{F}$

Question 9. *Donner la définition de espérance d'une variable aléatoire réelle positive.*

Définition 5. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle positive. L'espérance de X est le réel positif ou infini défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq t)dt$$

Question 10. *Enoncer et démontrer l'inégalité de Markov*

Définition 6. Soit X une variable aléatoire réelle positive. Alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X > t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$

Démonstration. Soit $t > 0$. On a que $x\mathbb{1}_{\{X>x\}} < X$. Par croissance de l'espérance, on a que :

$$\mathbb{E}(x\mathbb{1}_{\{X>x\}}) < \mathbb{E}(X)$$

□

Or $\mathbb{E}(x\mathbb{1}_{\{X>x\}}) = x\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X>x\}}) = x\mathbb{P}(X > x)$. On a donc l'inégalité de Markov.

Question 11. *Montrer que si X admet une densité f, alors $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty xf(x)dx$*

Démonstration. Soit X une variable aléatoire réelle positive. On a que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(x)dx \right) dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x)\mathbb{1}_{[0,t]}dx \right) dt \\
&= \int_0^\infty f(x) \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,t]}dt \right) dx \\
&= \int_0^\infty xf(x)dx
\end{aligned}$$

□

5 Espérance variable aléatoire réelle

Question 12. *Donner la définition de espérance d'une variable aléatoire réelle.*

Définition 7. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle. L'espérance de X est le réel positif ou infini défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)$$

avec $X^+ = \max(X, 0) et X^- = \max(-X, 0)$. Elle es définie si les deux espérances est finie.

Question 13. *Montrer que* $\mathbb{E}(X^-) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X < -t)dt$

Démonstration. On a que

$$X^-(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X(\omega) \geq 0 \\ -X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) < 0 \end{cases}$$

Donc

$$X^-(\omega) > t \iff X(\omega) < -t$$

Ainsi,

$$P(X^- > t) = P(X < -t)$$

Et donc $\mathbb{E}(X^-) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X < -t)dt$. □

Question 14. *Montrer que si X admet un moment absolu d'ordre p, alors X admet un moment absolu d'ordre q pour tout $q \in [0, p]$. i.e. si $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$, alors $\mathbb{E}(|X|^q) < \infty$ pour tout $q \in [0, p]$.*

Démonstration. Si $0 \leq p \leq r$, on a les inégalités suivantes entre variables aléatoires positives :

$$|X|^p \leq \mathbb{1}_{\{|X| \leq 1\}} + |X|^r \mathbb{1}_{\{|X| > 1\}} \leq 1 + |X|^r$$

Par croissance de l'espérance des v.a. positives, on en déduit

$$\mathbb{E}(|X|^p) \leq \mathbb{E}(1) + \mathbb{E}(|X|^r) = 1 + \mathbb{E}(|X|^r) < +\infty$$

□

Question 15. *Donner la définition de variance d'une variable aléatoire réelle.*

Définition 8. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle. La variance de X est le réel positif ou infini défini par :

$$Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

Elle est définie si $\mathbb{E}(X^2)$ est finie.

Question 16. *Montrer que* $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Démonstration. On a que

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \end{aligned}$$

□

Question 17. *Enoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

Définition 9. Soit X une variable aléatoire réelle. Alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}$$

Démonstration. On a que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) &= \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq t^2) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{t^2} \\ &= \frac{Var(X)}{t^2} \end{aligned}$$

□

6 CC3

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n), n \geq 2$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Question 18. *Montrer que pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$*,* X_i *est une variable aléatoire.*

Démonstration. $X_i = \pi_i \circ X$ où π_i est la projection sur la i-ème coordonnée. Or π_i est continue, elle est borélienne, donc messurable $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Donc X_i est une variable aléatoire. □

Question 19. *Donner la définition d'indépendance de* $X_1, \ldots, X_n$*.*

Définition 10. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si pour tout $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \ldots \mathbb{P}(X_n \in B_n)$$

Question 20. *Montrer que si* $X_1, \ldots, X_n$ *sont indépendantes alors* $h_1(X_1), \ldots, h_n(X_n)$ *sont indépendantes, pour tout* $h_1, \ldots, h_n$ *boréliennes.*

Démonstration. Soit $h_1, \ldots, h_n$ boréliennes. On a que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(h_1(X_1) \in B_1, \ldots, h_n(X_n) \in B_n) &= \mathbb{P}(X_1 \in h_1^{-1}(B_1), \ldots, X_n \in h_n^{-1}(B_n)) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in h_1^{-1}(B_1)) \ldots \mathbb{P}(X_n \in h_n^{-1}(B_n)) \\ &= \mathbb{P}(h_1(X_1) \in B_1) \ldots \mathbb{P}(h_n(X_n) \in B_n)\end{aligned}$$

□

Supposons que $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Question 21. *Montrer que* $|\mathbb{E}(X_i X_j)| < \sqrt{\mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j^2)}$ *pour tout* i *et* j.

Démonstration. — On a que $|X_i X_j| \in \mathscr{L}^1$: $|x_i x_j| \leq (x_i^2 + x_j^2)$ et par croissance de l'espérance, on a que $|\mathbb{E}(X_i X_j)| \leq \mathbb{E}(|X_i X_j|) \leq \mathbb{E}(X_i^2) + \mathbb{E}(X_j^2) < \infty$.

— Considérons le trinôme $f(t) : \mathbb{E}(X_j^2)t^2 + 2\mathbb{E}(X_i X_j)t + \mathbb{E}(X_i^2)$. Il a des solutions si et seulement si son discriminant est positif, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\Delta = \mathbb{E}(X_i X_j)^2 - \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j^2) \geq 0$$

Or c'est un polynôme positif, donc son discriminant est négatif ou nul. Donc :

$$\Delta \leq 0$$

On retrouve bine l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Question 22. *Donner la définition de covariance et montrer que si* $X_1, \ldots, X_n$ *sont indépendantes, alors* $Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$.

Définition 11. Définition : $cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$., qui est aussi égal à $\mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j)))$.

On sait que :

$$\begin{aligned}Var(\sum_{i=1}^n X_i) &= \sum_{i,j=1}^n cov(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n Var(X_i) + \sum_{i \neq j} cov(X_i, X_j)\end{aligned}$$

Or si $i \neq j$, $cov(X_i, X_j) = 0$ car X_i et X_j sont indépendantes. Donc :

$$Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$$

7 Vecteurs aléatoires

Question 23. *Donner la définition de produit de convolution de deux densités. Et montrer que* $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.

Définition 12. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant des densités f et g. On a que :

$$(f * g)(s) = \int_{\mathbb{R}} f(s-t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(s-t)dt$$

Démonstration. Calculons $\mathbb{E}(h(X+Y))$, por tout h continue bornée.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X+Y)) &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x+y)f(x)g(y)\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h(s)f(s-t)g(t)\,ds\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(s)\left(\int_{\mathbb{R}} f(s-t)g(t)\,dt\right)\,ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(s)(f*g)(s)\,ds
\end{aligned}$$

□

8 Convergence

Question 24. *Donner la définition de convergence en loi d'une suite de variables aléatoires réelles.*

Démonstration. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles. On dit que (X_n) converge en loi vers X si pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que F_X est continue en x, on a que :

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

□

Question 25. *Montrer que si* X_i *est une suite de variables aléatoires réelles IID, alors* $\lim_n X_x = X_1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que F_{X_1} est continue en x. On a que :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) &= \lim_{n\to\infty} F_{X_1}(x) \\
&= F_{X_1}(x)
\end{aligned}$$

□

Question 26. *Donner la définition de convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires réelles.*

Définition 13. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles. On dit que (X_n) converge en probabilité vers X si pour tout $\epsilon > 0$, on a que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

Question 27. *Monter que la convergence en probabilité implique la convergence en loi.*

Démonstration. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers X.

$$\begin{array}{rcl} F_{X_n}(x) & = & \mathbb{P}(X_n \leq x) \\ & = & \mathbb{P}(X + (X_n - X) \leq x) \\ Z & \leq & \mathbb{P}(X + (X_n - X) \leq x, |X_n - X| \leq \epsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \\ & \leq & \mathbb{P}(X \leq x - \epsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X \leq x + \epsilon) \end{array}$$

Donc $\limsup_n F_{X_n}(x) \leq F_X(x)$. De meme :

$$\begin{array}{rcl} F_{X_n}(x) & = & \mathbb{P}(X_n \leq x) \\ & \geq & \mathbb{P}(X \leq x + (X - X_n), |X_n - X| \leq \epsilon) \\ & \geq & \mathbb{P}(X \leq x - \epsilon, |X_n - X| \leq \epsilon) \\ & \geq & \mathbb{P}(X \leq x - \epsilon) - \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X \leq x - \epsilon) \end{array}$$

Donc $\limsup_n F_{X_n}(x) \geq F_X(x)$.

Si F_X est continue en x, on a que $F_X(x) = \lim_n F_{X_n}(x)$. □

Question 28. *Donner la définion de convergence presque sûre d'une suite de variables aléatoires réelles.*

Définition 14. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles. On dit que (X_n) converge presque sûrement vers X si

$$\mathbb{P}(\Omega') = 1$$

avec $\Omega' = \{\omega \in \Omega, \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)\}$.

Question 29. *Donner la définition de la limite supérieure d'une suite d'événements et de la limite inférieure d'une suite d'événements.*

Définition 15. Soit (A_n) une suite d'événements. On définit la limite supérieure de (A_n) par :

$$\limsup_n A_n = \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} A_k$$

On définit la limite inférieure de (A_n) par :

$$\liminf_n A_n = \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} A_k$$

Question 30. *Enoncer et montrer le lemme de Borel-Cantelli I.*

Définition 16. Soit (A_n) une suite d'événements. Si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$

Démonstration. Notons $C_j = \cup_{k\geq j} A_k$. On a que (C_j) est une suite décroissante d'événements. Par continiué sequentielle décroissante de la probabilité, on a que :

$$P(C_j) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} P(\limsup_n A_n)$$

Par sous-σ-additivité de la probabilité, on a que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq P(C_j) \leq \sum_{k\geq j} P(A_k) := r_j$$

Par l'hypothèse, on a que r_j est le reste d'une série convergente, donc il tend vers 0. Ainsi on retoruve que

$$P(\limsup_n A_n) = 0$$

□

Question 31. *Enoncer le lemme de Borel-Cantelli II.*

Définition 17. Soit (A_n) une suite d'événements. Si

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty$$

et si les A_n sont indépendants, alors

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$$

Démonstration. Notons $C_j = \cup_{k\geq j} A_k$, $C_{j,l} = \cup_{j\leq k\leq l} A_k$. On a que les A_k^c sont indépendants et on a

$$P(C_{j,l}) = 1 - P(C_{j,l}^c) = 1 - P\left(\bigcap_{k=j}^{l} A_k^c\right) = 1 - \prod_{k=j}^{l} (1 - P(A_k))$$

Or l'inégalité de convexité donne que $e^{-x} \leq 1 - x$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc

$$1 \geq P(C_{j,l}) \geq 1 - \prod_{k=j}^{l} e^{-P(A_k)} = e^{-\sum_{k=j}^{l} P(A_k)}$$

Si on fixe j et on fait tendre l vers l'infini, on a que $P(C_{j,l})$ tend vers 1, grace a l'hypothèse de convergence de la série vers 1. Comme $C_{j,l}$ est croissante en l, on a que on a donc que

$$P(C_j) = \lim_{l \to +\infty} P(C_{j,l}) = 1$$

Comme cette égalité est vraie pour tout j, on a que

$$P(\limsup_n A_n) = P(\lim_n C_n) = \lim_n P(C_n) = 1$$

□

Question 32. *Montrer que si* $\sum_n^\infty \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) < \infty$ *pour tout* $\epsilon > 0$*, alors* (X_n) *converge presque sûrement vers* X*.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On pose $A_n = \{\omega \in \Omega, |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}$. En utilisant le premier lemme de Borel-Cantelli, on a que la probabilité de la réalisation infinie des A_n est nulle, i.e.

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$$

Or ceci est équivalent a la convergence presque sûre de (X_n) vers X. □

Question 33. *Montrer que si* (X_n) *converge en probabilité il existe une sous-suite* (X_{n_i}) *qui converge presque sûrement vers* X*.*

Démonstration. Nototns $\epsilon_i = 2^{-i}$. La convergence en probabilité implique la convergence de $\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon_i)$ quand m tends vers 0. On en déduit qu'il eixiste une suite strictement croissant d'indices (n_i) telle que

$$\forall i \leq 1, \quad \mathbb{P}(|X_{n_i} - X| > \epsilon_i) < \frac{1}{i^2}$$

Ainsi il suffit de vérifier que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(|X_{n_i} - X| \geq \epsilon) < \infty$$

En effet la convergence vers 0 des ϵ_i garanti qu'il existes i_0 tel que $\forall i \geq i_o, \quad \epsilon_{i_0} \leq \epsilon$. Pour tout $i \geq i_0$ on a donc que

$$\{|X_{n_i} - X| \geq \epsilon\} \subset \{|X_{n_i} - X| \geq \epsilon_i\}$$

Ainsi on peut majorer la série ci-dessus par i^{-2} a partir d'un certain rang, et donc elle converge. On a donc montré la convergence presque sûre de la sous-suite (X_{n_i}). □

Question 34. *Enoncer et demontrer la loi faible des grands nombres.*

Définition 18. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (IID)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Pr}} \mathbb{E}(X_1) \tag{1}$$

Démonstration. Commes les X_i sont IID, on a que $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1)$ pour tout i et donc $Var(X_i) = Var(X_1)$ pour tout i. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Comme les X_i sont IID, on a que $Var(S_n) = nVar(X_1)$ et par linéarité de l'esérance on a aussi que $\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X_1)$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a que :

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X_1)| \geq t) \leq \frac{nVar(X_1)}{t^2}$$

Si on pose $t = \epsilon n$, on a que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}\left(|S_n - n\mathbb{E}(X_1)| \geq \epsilon n\right) = \mathbb{P}\left(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)| \geq \epsilon\right) \leq \frac{Var(X_1)}{\epsilon^2 n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a ainsi que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

□