Intégration et séries de Fourier

Un ensemble compréhensible de notes de cours

Auteur
Yago Iglesias

8 octobre 2024

Table des matières

1 Introduction

Ce document est un recueil de notes de cours sur l'intégration niveau L3. Il est basé sur les cours de M. Cyrille Lucas

à Université Paris Cité, cependant toute erreur ou inexactitude est de ma responsabilité. Ce document a été rédigé principalement par Yago Iglesias, mais plusieurs contributeurs peuvent être retrouvés dans la section contributeurs du répertoire GitHub. Un remerciement particulier est adressé à Erin Le Boulc'h pour sa participation active à la correction de ce document.

Les notes portent sur la théorie de la mesure, l'intégration et les séries de Fourier.

Toute erreur signalée ou remarque est la bienvenue. Sentez-vous libres de contribuer à ce document par le biais de GitHub, où vous pouvez trouver le code source de ce document et une version pdf à jour. Si vous n'êtes pas familiers avec *Git* ou LATEX, vous pouvez toujours me contacter par mail.

2 Théorie de la Mesure

2.1 Tribus

Définition 2.1 (Tribu)**.** Soit E un ensemble. Une tribu (ou σ-algèbre) $\mathscr{A}$ sur E est une partie de $\mathscr{P}(E)$ vérifiant :

1. $E \in \mathscr{A}$
2. $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathscr{A} \implies \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$

Proposition 2.1. *Toute intersection de tribus sur E est une tribu sur E.*

Démonstration. Si $\forall i \in I$, $\mathscr{A}_i$ est une tribu sur E. On a :

1. $\forall i \in I, E \in \mathscr{A}_i \implies E \in \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{A}_i$
2. $\forall i \in I, A \in \mathscr{A}_i \implies A^c \in \mathscr{A}_i \implies A^c \in \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{A}_i$
3. $\forall i \in I, \forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathscr{A}_i \implies \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}_i \implies \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{A}_i$

$\square$

Définition 2.2. Soit $\mathscr{C}$ un sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$. On note la tribu engendrée par $\mathscr{C}$, $\sigma(\mathscr{C})$ avec

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcap_{\mathscr{A} \text{ tribu}, \mathscr{C} \subset \mathscr{A}} \mathscr{A}$$

Remarque 2.1.1. *$\sigma(\mathscr{C})$ est bien une tribu comme intersection non vide de tribus, car $\mathscr{P}(E)$ est une tribu sur E qui contient $\mathscr{C}$.*

Définition 2.3 (Tribu borélienne)**.** On note Ω l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est la tribu $\sigma(\Omega)$, notée $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Remarque 2.1.2. *On peut étendre cette définition à tout espace topologique (ou moins fort, tout espace métrique), en particulier $\mathbb{R}^d$.*

Remarque 2.1.3. *$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est aussi engendrée par :*

- $\{]-\infty, a[\,,\, a \in \mathbb{R}\}$
- $\{]a, b[\,,\, a < b \in \mathbb{R}\}$
- $\{]a, b[\,,\, a < b \in \mathbb{Q}\}$

Définition 2.4 (Tribu produit)**.** Si $(E_1, \mathscr{A}_1)$ et $(E_2, \mathscr{A}_2)$ sont deux espaces mesurables (couple ensemble-tribu compatible) on note $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ la tribu sur $E_1 \times E_2$ engendrée par les rectangles $A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in \mathscr{A}_1$ et $A_2 \in \mathscr{A}_2$.

2.2 Mesures

On se donne $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable.

Définition 2.5 (Mesure)**.** On dit que $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est une mesure sur $(E, \mathscr{A})$ si :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. μ est σ-additive, c'est à dire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ tels que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ (deux à deux disjoints), alors
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Remarque 2.2.1. *On appelle mesurables les ensembles qui sont dans $\mathscr{A}$.*

Remarque 2.2.2. *Comme $\mu(A_n) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ est bien définie.*

Remarque 2.2.3. *μ mesurable donne l'additivité (finie). Cependant, la réciproque est fausse.*

Exemple 2.2.1. Soit $m : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

$$m(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

est additive mais pas σ-additive.

Exemple 2.2.2. Sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, on a la mesure de Dirac en $x_0 \in \mathbb{R}$, notée δ_{x_0}, définie par :

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 2.2.3. Sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, on a la mesure de comptage, notée ν, définie par :

$$\nu(A) = \begin{cases} \#A & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. 1. L'espace de départ est bien une tribu car $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ est une tribu sur $\mathbb{R}$. L'espace d'arrivée est bien $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ car $\#A \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

2. $\nu(\emptyset) = \#\emptyset = 0$

3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de boréliens deux à deux disjoints :

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \begin{cases} \#A & \text{si } \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est fini si $\exists k, A_k$ infini (cas 1) ou si les éléments sont finis mais tous non vides à partir d'un certain rang (cas 2).

(a) Cas 1 : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) \geq \nu(A_k) = +\infty$.

(b) Cas 2 : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = +\infty$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \nu(A_n) \in \mathbb{N}$ et $\nu(A_n)$ ne stationne pas en 0. Donc il existe une suite infinie d'éléments non vides, donc tels que $\nu(A_n) \geq 1$. Donc la somme diverge.

Par contre si $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est fini, alors $A_n = \emptyset$ à partir d'un certain rang. Donc le cardinal de $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est fini et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \nu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ car ils sont deux à deux disjoints.

□

Proposition 2.2 (Propriétés élémentaires). *Nous avons 5 propriétés élémentaires :*

1. *Croissance. Si* A *et* B *mesurables, avec* $A \subset B$*, alors* $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ *et* $\mu(A) \leq \mu(B)$*. De plus, si* $\mu(B)$ *est finie, alors* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$*.*
2. *Crible. Si* A *et* B *mesurables*
$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$
3. *Continuité croissante. Soit* A_n *une suite croissante d'ensembles mesurables* $A_n \subset A_{n+1}$*, alors*
$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$
4. *Continuité décroissante. Soit* A_n *une suite décroissante d'ensembles mesurables* $A_{n+1} \subset A_n$*, telle que* $\mu(A_0) < +\infty$*, alors :*
$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$
5. *Sous-additivité. Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'ensembles mesurables, alors :*
$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Démonstration. Nous allons démontrer les propriétés dans l'ordre.

1. Soit $B = A \cup (B \setminus A)$, alors A et $B \setminus A$ sont disjoints. Donc
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$
Donc $\mu(B) \geq \mu(A)$. Donc $\mu(B) < \infty$ alors $\mu(A) < \infty$ et $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
2.
$$\begin{aligned} \mu(A) + \mu(B) &= \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) \\ \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus (A \cap B)) \end{aligned}$$
3. On pose $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour $n \geq 1$. On a que les B_n sont disjoints et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Donc
$$\begin{aligned} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \quad \text{par } \sigma\text{-additivité} \end{aligned}$$

Si l'un des A_n vérifie $\mu(A_n) = +\infty$, alors $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = +\infty$ et l'égalité est donc vraie.
Si tous les A_n sont finis, on a :

$$\begin{aligned}
\mu(B_n) &= \mu(A_n) - \mu(A_{n-1}) \\
\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) + \mu(A_0) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu(A_0) + \sum_{n=1}^{N} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)
\end{aligned}$$

4. On définit $C_n = A_0 \setminus A_n$, alors les C_n sont croissants et mesurables. Donc

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) &= \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_0 \setminus A_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_0) - \mu(A_n) \\
&= \mu(A_0) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

Or $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = A_0 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et donc $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = \mu(A_0) - \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.

5. On pose $D_n = A_n \cap \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i\right)^c$. Les D_n sont disjoints et mesurables par σ-additivité.

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_n) \qquad \text{par } \sigma\text{-additivité}
\end{aligned}$$

et $D_n \subset A_n$ donc $\mu(D_n) \leq \mu(A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

□

Remarque 2.2.4. *Dans le (4\) de la proposition 2.2, l'hypothèse $\mu(A_0) < +\infty$ est nécessaire. En effet, soit ν la mesure de comptage. Soit*

$$A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$$

On a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ et $\nu(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2.6 (Vocabulaire des mesures)**.** Soit μ une mesure sur $(E, \mathscr{A})$.

— $(E,\mathscr{A},\mu)$ est un espace mesuré si $(E,\mathscr{A})$ est un espace mesurable et μ est une mesure sur $(E,\mathscr{A})$.
— μ est dite finie si $\mu(E) < +\infty$.
— μ est une probabilité si $\mu(E) = 1$.
— μ est σ-finie si $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec $A_n \in \mathscr{A}$ et $\mu(A_n) < +\infty$.
— On dit que x est un atome de μ si $\mu(\{x\}) > 0$.
— μ est diffuse si elle n'a pas d'atomes.

2.3 Fonctions mesurables

Définition 2.7. Soient $(E,\mathscr{A})$ et $(F,\mathscr{B})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : E \to F$ est dite mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ pour tout $B \in \mathscr{B}$.
Dans le cas où E et F sont munis de leur tribus boréliennes (si elles existent), on dit que f est borélienne.

Proposition 2.3. *Si $f : (E,\mathscr{A}) \to (F,\mathscr{B})$ et $g : (F,\mathscr{B}) \to (G,\mathscr{C})$ sont mesurables, alors $g \circ f : (E,\mathscr{A}) \to (G,\mathscr{C})$ est mesurable.*

Démonstration. Soit $C \in \mathscr{C}$. On a que $g^{-1}(C) \in \mathscr{B}$ car g est mesurable et $f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathscr{A}$ car f est mesurable. Comme $f^{-1}(g^{-1}(C)) = (g\circ f)^{-1}(C)$, on a que $g \circ f$ est mesurable. □

Proposition 2.4. *Pour que $f : (E,\mathscr{A}) \to (F,\mathscr{B})$ soit mesurable, il suffit qu'il existe $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ telle que :*

1. $f^{-1}(C) \in \mathscr{A}$ *pour tout* $C \in \mathscr{C}$.
2. $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}$

Démonstration. Posons $\mathscr{G} = \{B \in \mathscr{B} \,|\, f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$. On a que $\mathscr{C} \subset \mathscr{G}$. Montrons que $\mathscr{G}$ est une tribu sur F.

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathscr{A}$ donc $\emptyset \in \mathscr{G}$.
2. Soit $B \in \mathscr{G}$, alors $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \mathscr{A}$ donc $B^c \in \mathscr{G}$.
3. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{G}$, alors $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathscr{A}$ donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{G}$.

Ainsi $\mathscr{G}$ est une tribu sur F et $\mathscr{C} \subset \mathscr{G}$. On a donc :

$$\sigma(\mathscr{B}) = \sigma(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{G}) = \mathscr{G}$$

Donc $\mathscr{B} \subset \mathscr{G} \subset \mathscr{B}$, donc $\mathscr{B} = \mathscr{G}$. On a donc que f est mesurable. □

Exemple 2.3.1 (Application)**.** Si $(F,\mathscr{B}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, on peut prendre $\mathscr{C} = \{]-\infty,\ t[\,|\, t \in \mathbb{R}\}$. On a que $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Et donc il suffit d'étudier la mesurabilité de $f^{-1}(]-\infty, t[)$.

Remarque 2.3.1. *Si $f : (E, \mathscr{B}(E)) \to (F, \mathscr{B}(F))$, alors f continue $\Longrightarrow f$ mesurable :*
Soit U un ouvert de F, alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E car f est continue, et donc $f^{-1}(U) \in \mathscr{B}(E)$.

Proposition 2.5. *La fonction $\mathbb{1}_A : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{A}$.*

Démonstration. $f^{-1}(]-\infty, t]) = \begin{cases} \emptyset & si \quad t < 0 \\ A^c & si \quad t \in [0,1[\\ E & si \quad t \geq 1 \end{cases}$
donc f mesurable si et seulement si $A^c \in \mathscr{A}$, si et seulement si $A \in \mathscr{A}$. □

Proposition 2.6.

$$f_1 : (E, \mathscr{A}) \to (F_1, \mathscr{B}_1)$$
$$f_2 : (E, \mathscr{A}) \to (F_2, \mathscr{B}_2)$$

$$\begin{aligned} g : (E \times E, \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}) \quad &\to \quad (F_1 \times F_2, \mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2) \\ x \quad &\mapsto \quad (f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

alors g est mesurable si f_1 et f_2 le sont

Démonstration.

$$\mathscr{B} \otimes \mathscr{B}_2 = \sigma \{B_1 \times B_2, B_1 \in \mathscr{B}_1, B_2 \in \mathscr{B}_2\}$$
$$g^{-1}(B_1 \times B_2) = x \in E, f_1(x) \in B_1 et f_2(x) \in B_2$$
$$\underbrace{f_1^{-1}(B_1)}_{\in \mathscr{A} \text{ car } f_1 \text{ mesurable}} \quad \cap \quad \underbrace{f_2^{-1}(B_2)}_{\in \mathscr{A} \text{ car } f_2 \text{ mesurable}}$$

donc $g^{-1}(B_1 \times B_2) \in \mathscr{A}$ □

Proposition 2.7. *Si f et $g(E, \mathscr{A}) \to (F, \mathscr{B}(\mathbb{R})$ sont mesurables, alors les fonctions suivantes sont mesurables :*

- $f + g$
- fg
- $\inf(f, g)$
- $f^+ = \sup(f, 0)$
- $f^- = \sup(-f, 0)$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{B}(\mathbb{R})) \quad &\to \quad (\mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathscr{B}(\mathbb{R})) \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad x + y \end{aligned}$$

est continue donc mesurable. De même pour le reste. □

Définition 2.8. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ et $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$
Dans $\overline{\mathbb{R}^+}, \forall a \in \overline{\mathbb{R}^+}$:

- $a + (+\infty) = +\infty$
- $a \cdot (+\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Définition 2.9. Si a_n est une suite dans $\overline{\mathbb{R}}$. On définit

- $\sup a_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } +\infty \text{ est dans la suite} \\ +\infty & \text{si } \forall M > 0 \ \exists n, a_n > M \\ \sup a_n \in \mathbb{R} & \text{si } a_n \text{ est majoré} \end{cases}$
- De même pour le inf
- $\limsup a_n = \overline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \downarrow \sup_{k\geq n} a_k \in \overline{\mathbb{R}}$
- $\liminf a_n = \underline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \uparrow \inf_{k\geq n} a_k \in \overline{\mathbb{R}}$

Remarque 2.3.2. *On travaillera avec $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$, les boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont*

$$\sigma(\{[-\infty, a], a \in \mathbb{R}\})$$

Remarque 2.3.3. $\limsup a_n$ *est la plus grande valeur d'adhérence de la suite a_n, et* $\liminf a_n$ *est la plus petite valeur d'adhérence de la suite a_n.*

Proposition 2.8. *Si f_n est une suite de fonctions mesurables*

$$f_n(E, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

alors les fonctions suivantes sont mesurables :

1. $\sup f_n$, *qui est* $x \mapsto \sup f_n(x)$
2. $\inf f_n$
3. $\limsup f_n$
4. $\liminf f_n$

En particulier si f_n converge simplement dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim f_n = \limsup f_n$ *est mesurable. De plus* $\{x \in E, f_n(a)$ *converge*$\}$ *est mesurable.*

Démonstration. 1. $f(x) = \inf f_n(x)$

$$\begin{aligned} f^{-1}([-\infty, a[) &= \{x \in E, \inf f_n < a\} \\ &= \{x \in E, \exists N \in \mathbb{N}, f_N(x) < a\} \\ &= \bigcup_{N\in\mathbb{N}} f_N^{-1}([-\infty, a[)) \\ &\in \mathscr{A} \end{aligned}$$

2. On peut faire de même pour sup
3.
$$\begin{aligned} \liminf f_n &= \lim_{n\to\infty} \uparrow \inf_{k\geq n} a_k \\ &= \sup_{n\in N} \inf_{k\geq n} f_n \\ &\in \mathscr{A} \end{aligned}$$
donc liminf et limsup sont mesurables.
4.
$$\{x \in E, f_n \text{ converge}\} = (\liminf f_n - \limsup f_n)^{-1}(\{0\})$$
et $\{0\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ donc $\{f_n \in E, f_n(x)$ converge $\} \in \mathscr{A}$.

□

2.4 Classes monotones

Définition 2.10. $\mathscr{M} \subset \mathscr{P}(E)$ est une classe monotone si
- $E \in \mathscr{M}$
- si $A, B \in \mathscr{M} et A \subset B$ alors $B \setminus A \in \mathscr{M}$
- si $A_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{M}$ est croissante par l'inclusion, alors $\cup A_n \in \mathscr{M}$

Remarque 2.4.1. *Toute tribu est une classe monotone.*

Définition 2.11. On définit la classe monotone engendrée par $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(E)$
$$\mathscr{M}(\mathscr{C}) = \bigcap_{\mathscr{M}\text{classe monotone et}\mathscr{C}\subset\mathscr{M}} \mathscr{M}$$

Démonstration. Toute intersection de classes monotones est une classe monotone : c'est la même démonstration que pour la proposition 2.1 sur les tribus. □

Théorème 2.1 (Lemme de classe monotone)**.** *Si $\mathscr{C}$ est stable par intersections finies, alors*
$$\mathscr{M}(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$$

Démonstration. —
$$\mathscr{M}(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$$
car $\sigma(\mathscr{C})$ contient $\mathscr{C}$ et $\sigma(\mathscr{C})$ est une classe monotone car c'est une tribu.

—

$$\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{M}\mathscr{C}$$

On a que $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ contient $\mathscr{C}$. Il suffit de montrer que $\mathscr{M}\mathscr{C}$ est une tribu.

- $E \in \mathscr{M}(\mathscr{C})$
- $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ est stable par passage au complémentaire car on peut prendre $B = E$ et alors $A \subset B$ et $B \setminus A = A^c$
- Stabilité par union dénombrable :
  Idée : $\cup A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, avec $B_n = \cup_{k<n} A_k$ et l'union est croissante. Il faut montrer que $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ est stable par union finie. On peut montrer que $\mathscr{M}(\mathscr{C})$ stable par intersection finie. On peut juste montrer qu'elle est stable par intersection de 2 éléments.

  Fixons $A \in \mathscr{M}(\mathscr{C})$. On regarde $\mathscr{M}_A = \{B \in \mathscr{M}(\mathscr{C}), A \cap B \in \mathscr{M}(\mathscr{C})\}$ On veut montrer que $\mathscr{M}_A = \mathscr{M}\mathscr{C}$. On va montrer que $\mathscr{M}_A$ est une classe monotone. On a deja $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}_A$.
  - $E \in \mathscr{M}_A$?. On a $A \cap E = A \in \mathscr{C} \subset \mathscr{M}_A$
  - Si $B \in \mathscr{M}_A$, $B' \in \mathscr{M}_A$, et $B \subset B'$ montrons que $B' \setminus B \in \mathscr{M}_A$
    $A \cap (B' \setminus B) = \underbrace{(A \cap B')}_{\in \mathscr{M}(\mathscr{C})} \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathscr{M}(\mathscr{C})} \in \mathscr{M}\mathscr{C}$ et $A \cap B \subset A \cap B'$
  - Soit B_n a valeur dans $\mathscr{M}_A$ une suite croissante :

    $$A \cap (\cup B_n) = \cup (A \cap B_n)$$

    donc $A \cap (\cup B_n) \in \mathscr{M}\mathscr{C}$ et $\cup B_n \in \mathscr{M}_A$

  Donc $\mathscr{M}_A$ est une classe monotone, donc $\mathscr{M}_A = \mathscr{M}\mathscr{C}$ qui est équivalent à :

  $$\forall A \in \mathscr{C}, \forall B \in \mathscr{M}\mathscr{C}, A \cap B \in \mathscr{M}\mathscr{C} (*)$$

  Soit $B \in \mathscr{M}\mathscr{C}$.

  $$\mathscr{M}_B = \{A \in \mathscr{M}\mathscr{C}, A \cap B \in \mathscr{M}\mathscr{C}\}$$

  On sait que $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}_B$ En effet, $A \in \mathscr{C}$, on a bien $B \in \mathscr{M}\mathscr{C}$, donc $A \cap B \in \mathscr{M}\mathscr{C}$ d'après (*).
  De plus, $\mathscr{M}_B$ est une classe monotone, même preuve que ci-dessous (car dans cette preuve on n'utilise pas que $A \in \mathscr{C}$).
  Donc $\mathscr{M}_B = \mathscr{M}\mathscr{C}$ et donc :

  $$\forall B \in \mathscr{M}\mathscr{C}, \forall A \in \mathscr{M}\mathscr{C}, A \cap B \in \mathscr{M}\mathscr{C}$$

□

Théorème 2.2 (Lemme d'unicité des mesures). *Soit* μ *et* ν *deux mesures sur* $(E, \mathscr{A})$*. On suppose qu'il existe* $\mathscr{C}$ *stable par intersections finies tel que* $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}$ *et* $\forall C \in \mathscr{C}, \mu(C) = \nu(C)$ *alors :*

- *Si* $\mu(E) = \nu(E) < +\infty$*, alors* $\mu = \nu$*.*
- *S'il existe une suite* $E_n \in \mathscr{C}$ *croissante avec* $E = \cup E_n$ *et* $\mu(E_n) = \nu(E_n) < +\infty$*, alors* $\mu = \nu$*.*

Démonstration. — On regarde $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{A}, \mu(A) = \nu(A)\}$. Montrons que c'est une classe monotone :

  - $\mu(E) = \nu(E)$,donc $E \in \mathscr{G}$.
  - Soit $A, B \in \mathscr{G}$, $A \subset B$, vérifions que $B \setminus A \in \mathscr{G}$:

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus B) &= \mu(B) - \mu(A) \\ &= \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A) \end{aligned}$$

  - Si $A_n \in \mathscr{G}$ est une suite croissante,

$$\begin{aligned} \mu(\cup A_n) &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \\ &= \nu(\cup A_n) \end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{G}$ est une classe monotone que contient $\mathscr{C}$. Donc $\mathscr{G} \supset \mathscr{M}\mathscr{C} = \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}$ et donc $\mathscr{G} = \mathscr{A}$ et donc $\mu = \nu$.

- On restreint μ à E_n, $\mu_n A \mapsto \mu(E_n \cap A)$. Alors μ_n est une mesure et $\mu_n < +\infty$
  On a :

$$\begin{aligned} \forall C \in \mathscr{C}, \mu(E_n \cap C) &= \nu(E_n \cap C) \\ &= \nu_n(C) \end{aligned}$$

  donc $\mu_n = \nu_n$ et d'après le (1) on a $\forall A \in \mathscr{A}, \nu(A) = \lim \mu_n(A)$

□

Remarque 2.4.2. *D'après ce théorème, la fonction de répartition caractérise la loi.*

$$\mathscr{C} = \{]-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$$

$\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ *et* $\mathscr{C}$ *stable par intersections finies*

si $\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = F_Y(t)$ *alors* $\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}_Y(B)$

Proposition 2.9 (Opérations sur les mesures). $(E, \mathscr{A}, \mu)$ *un espace mesuré.*

- *Si* $B \in \mathscr{A}$*, on définit* $\mu_B : A \mapsto \mu(A \cap B)$ *qui est une mesure.*

— $\lambda \in \mathbb{R}^+$ *alors* $\lambda\mu$ *est une mesure.*
— ν *une mesure sur* $(E,\mathscr{A})$*, alors* $\mu+\nu$ *est une mesure.*

Théorème 2.3 (Mesure de Lebesgue)**.** *Il existe une unique mesure* λ *sur* $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *telle que*

$$\forall a<b, \lambda([a,b])=b-a$$

On l'appelle la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$*.*

Démonstration. — Existence : Admise
— Unicité :
$\mathscr{C}=\{[a,b],a<b\}\cup\emptyset$ et stable par intersections finies et $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Si $\mu([a,b])=b-a=\nu([a,b])$ alors $\mu=\nu$, par le lemme d'unicité des mesures.

□

3 Intégration par rapport à une mesure

3.1 Intégrale d'une fonction mesurable positive

On travaille avec $(E,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré.

Définition 3.1 (Fonction étagée)**.** Soit $f:(E,\mathscr{A})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On dit que f est une fonction étagée si elle prend un nombre fini de valeurs. Si $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sont les valeurs prises par f, on note $A_i=f^{-1}(\{\alpha_i\})$ et on a

$$f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$$

on dit que c'est **l'écriture canonique** de f.

Remarque 3.1.1. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ *est étagée mais pas en escalier.*

Définition 3.2 (Intégrale d'une fonction étagée positive)**.** Si $f=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ est une fonction étagée positive, on définit

$$\int f d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i)\in[0,+\infty]$$

Avec la convention $0\cdot\infty=0$.

Remarque 3.1.2. *La valeur de $\int f d\mu$ ne dépend pas de l'écriture canonique de f, i.e. si*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

Proposition 3.1 (Linéarité et croissance)**.** *Soient f, g deux fonctions étagées positives.*

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$
2. *Si* $f \leq g$ *alors* $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

Démonstration. 1. $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^{m} \alpha'_j \mathbb{1}_{A'_j}$ On introduit $B_{ij} = A_i \cap A'_j$, $\beta_{ik} = \alpha_i$ et $\beta'_{ik} = \alpha'_k$. On a alors

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \mathbb{1}_{B_{ij}}, \quad \int f \mu = \sum_{i,j} \beta_{ij} \mu(B_{ij})$$

et

$$g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta'_{ij} \mathbb{1}_{B_{ij}}, \quad \int g \mu = \sum_{i,j} \beta'_{ij} \mu(B_{ij}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int (af + bg) d\mu &= \int \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a\beta_{ij} + b\beta'_{ij}) \mathbb{1}_{B_{ij}} \right) d\mu \\
&= \sum_{i,j} (a\beta_{ij} + b\beta'_{ij}) \mu(B_{ij}) \\
&= a \sum_{i,j} \beta_{ij} \mu(B_{ij}) + b \sum_{i,j} \beta'_{ij} \mu(B_{ij}) \\
&= a \int f d\mu + b \int g d\mu
\end{aligned}$$

2. Si $f \leq g$ alors $g - f$ est étagée positive.

$$\begin{aligned}
\int g d\mu &= \int (f + (g - f)) d\mu \\
&= \int f d\mu + \underbrace{\int (g - f)\, d\mu}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

Donc $\int g d\mu \geq \int f d\mu$.

$\square$

Notation 3.1. On note $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives.

Définition 3.3 (Intégrale d'une fonction mesurable positive)**.** Soit $f : (E, \mathscr{A}) \to (\overline{\mathbb{R}^+}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}^+}))$ une fonction mesurable positive. On définit

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{g \in \mathcal{E}_+ \\ g \leq f}} \int g d\mu$$

Remarque 3.1.3. *L'ensemble en question n'est pas vide car $0 \in \mathcal{E}_+$ et $0 \leq f$. Et donc*

$$\int f d\mu \geq \int 0 \quad d\mu = 0$$

Remarque 3.1.4. *Si g est étagée positive,*

$$\sup_{\substack{h \in \mathcal{E}_+ \\ h \leq g}} \int h d\mu \leq \int g d\mu \text{ intégrale définie précédemment}$$

et de plus $h \in \mathcal{E}_+$ et $h \leq g$ et donc

$$\int g d\mu \leq \sup_{\substack{h \in \mathcal{E}_+ \\ h \leq g}} \int h d\mu$$

et donc on a l'égalité entre les deux définitions.

Remarque 3.1.5. *On notera :*

- $\int f d\mu$
- $\int f(x) d\mu(x)$
- $\int f(x) \mu(dx)$
- $\int_E f(x) \mu(dx)$
- $\int_{x \in E} f(x) d\mu(x)$
- *Et même* $\mu(f)$

Proposition 3.2 (Croissance et séparation)**.** *1. Si f, g mesurables positives $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$*

2. Si $\mu(\{x : f(x) > 0\}) = 0$ alors $\int f d\mu = 0$

Démonstration. 1. $\{h \in \mathcal{E}_+ : h \leq f\} \subset \{h \in \mathcal{E}_+ : h \leq g\}$ donc

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

2. Soit h étagée positive telle que $h \leq f$. $h^{-1}(\overline{\mathbb{R}^{+*}}) \subset f^{-1}(\overline{\mathbb{R}^{+*}})$ et donc
$$\mu(h^{-1}(\overline{\mathbb{R}^{+*}})) \leq \mu(f^{-1}(\overline{\mathbb{R}^{+*}})) = 0$$
Donc $h = 0 \cdot \mathbb{1}_{A_i} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ Alors $A_i \subset h^{-1}(\{0\})$ et donc $\mu(A_i) = 0$. Donc $\int h d\mu = 0$. et donc $\int f d\mu = 0$.

□

Théorème 3.1 (Convergence monotone). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives.*
On note $f = \lim\limits_{n\to\infty} \uparrow f_n$. Alors on a
$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Remarque 3.1.6. *f_n suite croissante de fonctions (et pas suite de fonctions croissantes ...).*
$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f_{n+1}$$

Démonstration. —
$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$
et donc $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu$. et finalement
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$
.

— Soit $h \in \mathcal{E}_+$ telle que $h \leq f$, montrons que $\int h d\mu \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.
Soit $a \in [0, 1[$
$$E_n = \{x \in E : ah(x) \leq f_n(x)\}$$
E_n est mesurable car $E_n = (ah - f_n)^{-1}(\mathbb{R}^-)$.
On a $f_n \to f$ et donc $a < 1$ et donc $ah < f$ et donc pour un n assez grand, $f_n \geq ah$.
Donc $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.
Or $f_n \geq ah\mathbb{1}_{E_n}$ et donc
$$\begin{aligned} \int f_n d\mu \geq \int ah\mathbb{1}_{E_n} d\mu &= \sum_{i=1}^{k} a\alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \\ \text{car } ah\mathbb{1}_{E_n} = \sum_{i=1}^{k} a\alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap E_n} \text{ est étagée positive} &= a\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \end{aligned}$$
or E_n est une suite croissante d'ensembles avec $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$ et donc
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap E_n) &= \mu(A_i) \\ \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu &\geq a \int h d\mu \end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout $a \in [0,1[$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu &\geq \int h d\mu \\ \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu &\geq \sup_{\substack{h\in\mathcal{E}_+ \\ h\leq f}} \int h d\mu = \int f d\mu \end{aligned}$$

□

Exemple 3.1.1 (Contre-exemple à la convergence monotone pour une suite non croissante).

$$f_n = \mathbb{1}_{[n,\infty[}$$

$$f_n \to 0, \quad \forall x$$

Et on a $\int f_n d\lambda = \infty$ or $\int 0 d\lambda = 0$.

Proposition 3.3. *Soit f mesurable positive.*
Alors il existe f_n suite croissante de fonctions étagées positives telles que

$$\forall x \in E, f_n(x) \to f(x)$$

Démonstration.

$$n \geq 1, i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in E : f(x) \geq n\} \in \mathscr{A} \\ B_{n,i} &= \left\{x \in E : \frac{i}{2^n} \leq f(x) < \frac{i+1}{2^n}\right\} \in \mathscr{A} \\ f_n &= n\mathbb{1}_{A_n} + \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{i}{2^n}\mathbb{1}_{B_{n,i}} \end{aligned}$$

En général, A_n et $B_{n,i}$ ne sont pas des intervalles.
Par construction $f_n \leq fn$ et f_n est une suite croissante, c'est pour cette raison qu'on a subdivisé avec 2^n intervalles, et pas n intervalles.
A-t-on $f_n \to f$?

$$f_n(x) = 2^{-1} i_n(x) \underbrace{\mathbb{1}_{B_{n,i_n(x)}}(x)}_{=1}$$

Si $\mathbb{1}_n(x)$ est tel que $x \in B_{n,i_n(x)}$

$$2^{-n} i_n(x) \leq f_n(x) \leq 2^{-n}(i_n(x) + 1)$$

donc $2_{-n} i_n(x) \to f(x)$

Et donc $f_n(x) \to f(x)$ □

Remarque 3.1.7. *Les fonctions données par la proposition précédente vérifient les hypothèses du théorème 3.1, donc*

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$$

Proposition 3.4 (Linéarité). *Soient f, g mesurables positives et $a, b \geq 0$.*

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$$

Démonstration.

$$f_n \in \mathcal{E}_+, f_n \uparrow\to f$$
$$g_n \in \mathcal{E}_+, g_n \uparrow\to g$$
$$\underbrace{\int af_n + bg_n\, d\mu}_{\text{Par } 3.1 \to \int af+bg\, d\mu} = a \underbrace{\int f_n d\mu}_{\text{Par } 3.1 \to \int f d\mu} + b \underbrace{\int g_n d\mu}_{\text{Par } 3.1 \to \int g d\mu}$$

□

Proposition 3.5 (TCM pour les suites). *Soit f_n une suite de fonctions mesurables positives.*
Alors,

$$\int \sum_n^{\infty} f_n d\mu = \sum_n^{\infty} \int f_n d\mu$$

Démonstration. On regarde $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ est une suite de fonctions mesurables positives. Et $S_{n+1} - S_n = f_{n+1} > 0$ et donc S_n est une suite croissante de fonctions mesurables positives. D'après le 3.1, on a

$$\begin{aligned}
\int \lim_{n\to\infty} S_n(x) d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int S_n(x) d\mu(x) \\
\int \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x) d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{n} f_k(x) d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f_k(x) d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int f_k(x) d\mu(x)
\end{aligned}$$

□

Définition 3.4 (μ-presque partout)**.** Soit P une propriété sur $x \in E$ ($P(x) \in \{Vrai, Faux\}$)
On dit que P est vraie μ-presque partout (μ-p.p.) si

$$\{x \in E : P(x) = Faux\} \in \mathscr{A} \quad \text{et} \quad \mu(\{x \in E : P(x) = Faux\}) = 0$$

ou s'il existe $B \in \mathscr{A}$ tel que $\{x \in E : P(x) = Faux\} \subset B$ et $\mu(B) = 0$

Définition 3.5 (Mesure à densité)**.** Soit f une fonction mesurable positive.
On définit

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathscr{A} & \to & \overline{\mathbb{R}^+} \\ A & \mapsto & \displaystyle\int \mathbb{1}_A f d\mu \\ & & = \displaystyle\int_A f d\mu \end{array}$$

Alors ν est une mesure sur $(E, \mathscr{A})$ et on l'appelle mesure à densité par rapport à μ.

Démonstration. 1. L'ensemble de départ est mesurable.

2. $\nu(\emptyset) = \int \mathbb{1}_\emptyset f d\mu = \int 0 d\mu = 0$
3. A_n suite d'ensembles disjoints, on regarde

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup A_n\right) &= \int \mathbb{1}_{\bigcup A_n} f d\mu \\ &= \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k}\right) f d\mu \\ &= \int \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k} f d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int \mathbb{1}_{A_k} f d\mu \end{aligned}$$

d'après le **TCM** pour les séries, car $\forall k \geq 1,\ \mathbb{1}_{A_k} f$ est mesurable positive.

$\square$

Remarque 3.1.8. *On veut, pour g mesurable positive, montrer que*

$$\int g d\nu = \int g f d\mu$$

Démonstration. Nous allons utiliser ce schéma de preuve :

1. Vrai pour $\mathbb{1}_A$?

2. Vrai pour g étagée positive ?
3. Vrai pour g mesurable positive ?

1. Si $g = \mathbb{1}_A$, avec $A \in \mathscr{F}$, alors

$$\begin{aligned} \int g d\nu &= \int \mathbb{1}_A d\nu = \nu(A) \\ &= \int \mathbb{1}_A f d\mu = \int g f d\mu \end{aligned}$$

2. Si $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, alors

$$\begin{aligned} \int g d\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \nu(A_i) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f \mathbb{1}_{A_i} d\mu \\ &= \int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \right) f d\mu \\ &= \int g f d\mu \end{aligned}$$

3. Si g est mesurable positive, alors On prend $g_n \uparrow g$ une suite de fonctions étagées positives. Alors

$$\begin{aligned} \int g d\nu &= \lim_{n\to\infty} \int g_n d\nu \quad \text{par le théorème 3.1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int g_n f d\mu \end{aligned}$$

On remarque que $g_n f$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives et donc on peut appliquer le théorème 3.1 et donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int g_n f d\mu &= \int \lim_{n\to\infty} g_n f d\mu \\ &= \int g f d\mu \end{aligned}$$

□

Exemple 3.1.2 (loi normale sur $\mathbb{R}$). (Même proba sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, qui est la loi de X $\mathscr{N}(0,1)$)

$$\begin{aligned} \nu(B) = \mathscr{P}_\lambda(B) &= \mathscr{P}(X \in B) \\ &= \int \mathbb{1}_B(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\lambda(x) \\ &= \int \mathbb{1}_B f d\lambda \end{aligned}$$

Donc ν a la même densité que f par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Proposition 3.6 (Inégalité de Markov). *Soit f une fonction mesurable positive.*

1. *Pour tout $a > 0$ on a*

$$\mu\left(\{x \in E : f(x) \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu$$

2. *Si $\int f d\mu < \infty$ alors $f < \infty$ μ-p.p.*
3. *$\int f d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-p.p.*
4. *$f = g$ μ-p.p. $\Longrightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$*

Démonstration. 1. $f \geq a\mathbb{1}_{f \geq a}$

$$\int f d\mu \geq a\mu\left(\{x \in E : f(x) \geq a\}\right)$$

2. $A_k = \{x \in E : f(x) \geq a\}$ On a $A_\infty = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ intersection décroissante.

$$\begin{aligned} \mu(A_1) &= 1 \int f d\mu \text{ d'après le (1)} \\ &< \infty \text{ par hypothèse} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mu A_\infty &= \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \\ \mu(A_n &\leq \frac{1}{n} \int f du \end{aligned}$$

Donc $\mu(An) \to 0$ et donc $\mu(A_\infty) = 0$.

3. $f = 0$ μ-p.p. $\Longrightarrow \int f d\mu = 0$ par 3.2.
$\Leftarrow$: Soit f mesurable positive telle que $\int f d\mu = 0$.
$B_n = \left\{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$
$\bigcup B_n$ est une suite croissante.
$\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} = \{x \in E : f(x) > 0\}$

□

Théorème 3.2 (Lemme de Fatou)**.** *Soit f_n est une suite de fonctions mesurables positives.*
Alors
$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Démonstration. $\liminf f_n = \lim_{n\to\infty} \uparrow \inf_{k\geq n} f_k$
On regarde $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives.
Donc d'après le théorème 3.1, on a
$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \int \liminf f_n d\mu$$
Si $p \geq n$, alors $g_n \leq f_p$ et donc
$$\int g_n d\mu \leq \int f_p d\mu$$
et donc
$$\forall p \geq n, \int f_p d\mu \geq \int g_n d\mu$$
Et donc $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\inf_{p\geq n} \int f_p d\mu \geq \int g_n d\mu$$
Et en passant à la limite, on a
$$\liminf \int f_n d\mu \geq \int \liminf f_n d\mu$$
□

Exemple 3.1.3. $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$

$$\begin{aligned} f_{2k} &= \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]} \\ f_{2k+1} &= \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} \\ \liminf f_n &= \mathbb{1}_{\{\frac{1}{2}\}} \\ \int f_n d\lambda &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$
$$0 = \int \liminf f_n d\lambda \leq \liminf \int f_n d\lambda = \frac{1}{2}$$

Théorème 3.3 (Égalité Riemann-Lebesgue sur un segment, fonctions positives)**.** *Soit f mesurable positive :* $f([a,b], \mathscr{B}([a,b])) \to \mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

On suppose f Riemann intégrable sur $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$$

Démonstration. □

3.2 Exemples de calculs d'intégrales

Exemple 3.2.1. La mesure de Dirac

$$\int f d\delta_x = f(x)$$

Démonstration. — f indicatrice
- — f étagée
- — f mesurable positive

En utilisant ce schéma, on peut montrer l'égalité, comme pour la remarque 3.1.8. □

Exemple 3.2.2. Mesure de comptage :

$$\int f d\nu_c = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$$

3.3 Fonctions intégrables

On travaille sur $(E, \mathscr{A}, \mu)$.

Définition 3.6. Soit f mesurable, $f : (E,\mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
On dit que f est intégrable par rapport à μ si :

$$\int f^+ d\mu < +\infty \quad \text{et} \quad \int f^- d\mu < +\infty$$

où $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = -\min(f,0)$. On définit alors

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Remarque 3.3.1. *De façon équivalente, on dit que f est intégrable si*

$$\int |f| d\mu < +\infty$$

Remarque 3.3.2.

$$f = f^+ - f^-$$
$$|f| = f^+ + f^-$$

Remarque 3.3.3. *f^+ et f^- sont mesurables positives, donc $\int f^+ d\mu$ et $\int f^- d\mu$ sont définies.*

Remarque 3.3.4. *Si $f \geq 0$ on retrouve bien la définition originale.*

Remarque 3.3.5. *Par contre, si $\int f^+ d\mu = +\infty$ on dit que f n'est pas intégrable, même si elle est positive.*

Définition 3.7. On note $\mathbb{L}^1$ l'espace des fonctions intégrables.

Proposition 3.7 (Propriétés de l'intégrale)**.** *1. Inégalité triangulaire. $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$.*

2. Linéarité : $\mathbb{L}^1$ est un espace vectoriel.

3. Croissance : si $f, g \in \mathbb{L}^1$ et $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

4. Si $f, g \in \mathbb{L}^1$ $f = g\mu$-p.p. alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned}
|\int f d\mu| &= \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \\
&\leq \left|\int f^+ d\mu\right| + \left|\int f^- d\mu\right| \\
&\leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \\
\text{linéarité fonctions positives} &\leq \int f^+ f^- d\mu \\
&\leq \int |f| d\mu
\end{aligned}$$

2.

3. $f \leq g$, $g = f + (g - f)$

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \int (g - f) d\mu$$

Or $(g - f)^- = 0$, donc $\int (g - f) d\mu > 0$. Donc $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

4. Si $f = g$ μ-p.p., alors $f^+ = g^+$ μ-p.p. et $f^- = g^-$ μpp.
Donc $\int f d\mu = \int f^+ \mu + \int f^- d\mu = \int g^+ \mu + \int g^- d\mu = \int g d\mu$

□

Définition 3.8 (Intégrale des fonctions complexes)**.**

$$F : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C})) \quad \text{mesurable.}$$

Ce qui est équivalent à dire que $Re(f)$ et $Im(f)$ sont mesurables. On dit que f est intégrable et on note

$$f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}$$

si
$$\int |f|d\mu < +\infty$$
On pose
$$\int f d\mu = \int Re(f)d\mu + \int Im(f)d\mu$$

Proposition 3.8. *1. Inégalité triangulaire.* $|\int f d\mu| \leq \int |f|d\mu$.

2. Linéarité : $\mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}$ *est un espace vectoriel.*

3. Si $f, g \in \mathbb{L}^1$ $f = g\mu$*-p.p. alors* $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Démonstration. 1.
$$\forall b \in \mathbb{C}, \quad |b| = \sup_{a_1, a_2 \in \mathbb{R} a_1^2 + a_2^2 = 1} a_1 Re(b) + a_2 Im(b)$$

2.

$\square$

Théorème 3.4 (Convergence dominée)**.** *Soit* f_n *une suite de fonctions dans* $\mathbb{L}^1$ *avec :*

— *Il existe* f *mesurable à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f_n \to f$, μ*-p.p..*

— *Il existe* $g : (E, A) \to (\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+))$ *mesurable positive avec* $\int g d\mu < +\infty$ *telle que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x)| \leq g(x) \quad \mu\text{-p.p.}$$

Alors $f \in \mathbb{L}^1$ *et*
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$
et de plus
$$\int |f_n - f| d\mu \to 0$$

Exemple 3.3.1 (Contre-exemple sans domination)**.**
$$f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n[} \to 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$
$$\forall n, \quad \int f_n d\mu = 1 \to 1 \neq 0 = \int 0 d\mu$$

3.4 Intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème 3.5 (Continuité sous le signe intégrale)**.** *Soit* $f : U \times E \to \mathbb{R}$ *où* (U, E) *est un espace métrique.*
On suppose :

1. $\forall u \in U, \quad f(u, \cdot) : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *mesurable.*
2. μ*-p.p. (en* x*)* $f(\cdot, x) : U \to \mathbb{R}$ *est continue en* $u_0 \in U$*.*
3. *Il existe* g *intégrable telle que*

$$\forall u \in U, \quad |f(u, x)| \leq g(x) \quad \mu\text{-p.p. en } x$$

Alors la fonction

$$F(u) = \int f(u, x) d\mu(x)$$

est bien définie pour tout $u \in U$ *et elle est continue en* $u_0 \in U$*.*

Démonstration. Il faut montrer que si u_n est une suite avec $u_n \to u_0, \quad n > 0$, alors $F(u_n) \to F(u_0)$.
F est bien définie car $\forall u \in U, f(u, \cdot)$ mesurable et $|f(u, \cdot)| \leq g(\cdot)$ qui est intégrable.

Posons $f_n(x) = f(u_n, x)$ et $f_n(x) \to f(u_0, x)$.

$$|f_n(x)| = |f(u_n, x)| \leq g(x) \mu\text{-p.p.}$$

D'après le TCD , $\underbrace{\int f_n(x) d\mu(x)}_{=F(u_n)} \to \underbrace{\int f(u_0, x) d\mu(x)}_{=F(u_0)}$ □

Exemple 3.4.1. Soit μ une mesure diffuse sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et $\phi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mu)$. On définit

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{]-\infty, u]} \phi(x) d\mu(x) \\ &= \int \phi \mathbb{1}_{]-\infty, u]}(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

alors F est continue.

Démonstration. On pose $f(u, x) = \phi(x) \mathbb{1}_{]-\infty, u]}(x)$ Il suffit de vérifier que $f(\cdot, x)$ est continue et qu'elle est dominée. Le reste est trivial :

— $u \mapsto f(u, x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } u \geq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  est continue en $\mathbb{R} \setminus \{x\}$. Comme μ est diffuse, $\mu\{x\} = 0$ et donc $f(\cdot, x)$ est continue μ-p.p..

— $|f(u,x)| = |\phi(x)\mathbb{1}_{]-\infty,u]}(x)| \leq |\phi(x)|$ qui est intégrable.

□

Théorème 3.6 (Dérivation sous le signe intégrale)**.** *On suppose que $U = I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $u_0 \in I$.*

$$f : I \times E \to \mathbb{R}$$

1. $\forall u \in I, \quad f(u,\cdot) \in \mathbb{L}^1_R(E, \mathscr{A}, \mu)$
2. μ-*p.p.*, $f(\cdot, x)$ *est dérivable en* $u_0 \in I$ *de dérivée* $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$.
3. *Il existe* $g \in \mathbb{L}^1$ *telle que*

$$\forall u \in I, \quad |f(u,x) - f(u_0,x)| \leq g(x)|u - u_0|\mu\text{-}\textit{p.p.}$$

Alors $F(u) = \int f(u,x)d\mu$ *est dérivable au point* u_0 *et sa dérivée est* $F'(u_0) = \int \dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)d\mu(x)$

Remarque 3.4.1. *La fonction* $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0,\cdot)$ *n'est définie que* μ-*p.p.. Il suffit de la prolonger n'importe comment et cela suffit à définir* $\int \dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)d\mu(x)$. *Comme le prolongement se fait sur un ensemble de mesure nulle, cela ne change pas la valeur de l'intégrale, c'est pour cela que l'on peut donner une liberté absolue pour le prolongement, par exemple en lui donnant la valeur 0.*

Démonstration. Soit $u_n \to u_0, \quad n > 0, \quad u_n \neq u_0$.
On regarde

$$\begin{aligned} \frac{F(u_n) - F(u_0)}{u_n - u_0} &= \frac{1}{u_n - u_0}\int f(u_n,x) - (u_0,x)df\mu(x) \\ &= \int \frac{f(u_n,x) - f(u_0,x)}{u_n - u_0}d\mu(x) \end{aligned}$$

— $\frac{f(u_n,x)-f(u_0,x)}{u_n-u_0} \to \dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)$

— $\left|\frac{f(u_n,x)-f(u_0,x)}{u_n-u_0}\right| \leq g(x)$

Donc d'après le TCD on a

$$\frac{F(u_n) - F(u_0)}{u_n - u_0} \to \int \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)d\mu(x)$$

□

Remarque 3.4.2. *On peut changer les hypothèses 2 et 3 pour avoir une forme plus pratique :*

2. *μ-p.p. $f(\cdot,x)$ est dérivable sur I.*
3. *Il existe $g\in\mathbb{L}^1$ telle que*

$$\forall u\in I\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right|\leq g(x)\quad \mu\text{-p.p.}$$

Ceci implique, par le théorème des accroissements finis, la majoration de l'hypothèse 3.

et dans ce cas on a que F est dérivable sur I tout entier.

Remarque 3.4.3. *Si f est à valeurs complexes cela marche aussi.*

Exemple 3.4.2 (Transformée de Fourier)**.** Si $\phi\in\mathbb{L}^1$ on définit sa transformée de Fourier : $\hat{\phi}(u)=\int e^{iux}\phi(x)d\lambda(x)$ alors $\hat{\phi}$ est bien définie dans $\mathbb{R}$ et continue (par le théorème de continuité sous le signe intégrale).
Si de plus on a $\int|x\phi(x)|d\lambda(x)<\infty$ alors $\hat{\phi}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$\hat{\phi}'(u)=\int ixe^{iux}\phi(x)d\lambda(x)$$

Théorème 3.7 (Régularité C^k sous le signe intégrale)**.** *Soit $f:I\times E\to\mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$*

1. $\forall u\in I,\quad f(u,\cdot)\in\mathbb{L}^1(E,\mathscr{A},\mu)$
2. *μ-p.p., $u\mapsto f(u,x)$ est C^k sur I.*
3. *Il existe $g_k\in\mathbb{L}^1$ tel que*

$$\forall u\in I,\quad \left|\frac{\partial^i f}{\partial u^i}(u,x)\right|\leq g_k(x)\quad \mu\text{-p.p.}$$

Alors $F(u)=\int f(u,x)\ \ d\mu$ est C^k sur I, avec $F^{(i)}(u)=\int\dfrac{\partial^i f}{\partial u^i}(u,x)\ \ d\mu(x)$

4 Mesure produits

4.1 Espace produit, tribu produit

Définition 4.1 (Tribu produit)**.** Soient $(E,\mathscr{A})$ et $(F,\mathscr{B})$ deux espaces mesurables on définit la tribu produit.

$$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}=\sigma\left(\{A\times B\mid A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}\}\right)$$

Remarque 4.1.1. *Les ensembles de type $A\times B, A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}$ sont appelés rectangles ou pavés mesurables.*

Définition 4.2. On étend la définition à n tribus :

$$\mathscr{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_n = \sigma\left(\{A_0 \times \cdots \times A_n \mid A_0 \in \mathscr{A}_0, \ldots, A_n \in \mathscr{A}_n\}\right)$$

Cette définition est associative.

Proposition 4.1. $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$

Démonstration. TD □

Notation 4.1. Pour $C \subset E \times F$, on note :

$$C_x = \{y \in F \mid (x,y) \in C\}$$

$$C^y = \{x \in E \mid (x,y) \in C\}$$

Pour $f : E \times F \to G$:

$$f_x(y) = f(x,y) \quad (\mathbb{1}_C)_x = \mathbb{1}_{C_x}$$
$$f^y(x) = f(x,y) \quad (\mathbb{1}_C)^y = \mathbb{1}_{C^y}$$

Proposition 4.2. *1. Si $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, alors*

$$\forall x \in E, \quad C_x \in \mathscr{B}$$

$$\forall y \in F, \quad C_y \in \mathscr{A}$$

2. Soit $f(E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) \to (C, \mathscr{C})$ mesurable alors :

$$\forall x \in E, \quad f_x(F, \mathscr{B}) \to (C, \mathscr{C}) \text{ mesurable}$$

$$\forall y \in F, \quad f_y(E, \mathscr{A}) \to (C, \mathscr{C}) \text{ mesurable}$$

Démonstration. 1. Soit $x \in E$ montrons que $\forall C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \quad C_x \in \mathscr{B}$.$\forall C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \quad C_x \in \mathscr{B}$.
On regarde $\mathscr{T} = \{C \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}, C_x \in \mathscr{B}\}$ et montrons que c'est une tribu :
(a) $\emptyset_x = \emptyset \in \mathscr{B}$
(b) Soit C tel que $C_x \in \mathscr{B}$

□

4.2 Construction de la mesure produit

Théorème 4.1. *Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur $(E, \mathscr{A})$ et $(F, \mathscr{B})$ respectivement.*

1. Il existe une unique mesure σ-finie sur $(E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ telle que $\forall A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}, \mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

2. $\forall C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

$$\mu \otimes \nu(C) = \int_E \nu(C_x) d\mu(x) = \int_F \mu(C^y) d\nu(y)$$

Démonstration. **1. Unicité :**

μ et ν sont σ-finies, on se donne donc $E_n \uparrow E$ et $F_n \uparrow F$ tels que $\mu(E_n) < +\infty$ et $\nu(F_n) < +\infty$.
On pose $C_n = E_n \times F_n$ et on a que $C_n \uparrow E \times F$.
Soient m_1 et m_2 deux mesures qui vérifient les propriétés de la proposition.

$$\begin{aligned} m_1(E_n \times F_n) &= \mu(E_n)\nu(F_n) < +\infty \\ &= m_2(E_n \times F_n) \end{aligned}$$

- m_1 et m_2 coincident sur $\{A \times B \mid A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}$ qui engendre $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ et stable par intersections finies.
- $m_1(C_n) = m_2(C_n) < +\infty$ et $C_n \uparrow E \times F$ donc $m_1 = m_2$ d'après le théorème d'unicité des mesures.

□

Remarque 4.2.1. *On peut itérer* $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes (\ldots \otimes (\mu_{n-1} \otimes \mu_n) \ldots)$ *et c'est associatif.*

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i)$$

Exemple 4.2.1. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est le produit des mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}$:

$$\lambda_n = \underbrace{\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda}_{n \text{ fois}}$$

et elle vérifie :

$$\lambda_n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Remarque 4.2.2. *Si* $X \perp\!\!\!\perp Y$*, alors* $\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$.

4.3 Les théorèmes de Fubini

Théorème 4.2 (Fubini-Tonelli)**.** *Soient* μ *et* ν *deux mesures* σ*-finies sur* $(E, \mathscr{A})$ *et* $(F, \mathscr{B})$ *respectivement. Soit* $f : (E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) \to ([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ *une fonction mesurable.*

1. *Les fonctions :*

$$x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y)$$

$$y \mapsto \int f(x, y) d\mu(x)$$

sont respectivement $\mathscr{A}$ *et* $\mathscr{B}$ *mesurables.*

2. *On a :*

$$\begin{aligned}\int_{E\times F} fd(\mu\otimes\nu) &= \int_E\int_F f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)\\ &= \int_F\int_E f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)\end{aligned}$$

Démonstration. □

Théorème 4.3 (Fubini-Lebesgue)**.** *Soit* $f\in\mathbb{L}^1(E\times F,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B},\mu\otimes\nu)$*.*

1.

$$\begin{aligned}&\mu\text{-}\textit{p.p.},\quad y\mapsto f(x,y)\in\mathbb{L}^1(F,\mathscr{B},\nu)\\ &\nu\text{-}\textit{p.p.},\quad x\mapsto f(x,y)\in\mathbb{L}^1(E,\mathscr{A},\mu)\end{aligned}$$

2. *On a que les fonctions suivantes sont bien définies sauf sur un ensemble de mesure nulle et que :*

$$x\mapsto\int f(x,y)d\nu(y)\ \text{ est dans }\ \mathbb{L}^1(E,\mathscr{A},\mu)$$

$$y\mapsto\int f(x,y)d\mu(x)\ \text{ est dans }\ \mathbb{L}^1(F,\mathscr{B},\nu)$$

3. *On a :*

$$\begin{aligned}\int_{E\times F} fd(\mu\otimes\nu) &= \int_E\int_F f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)\\ &= \int_F\int_E f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)\end{aligned}$$

Démonstration. On regarde $|f|$, qui est mesurable positive d'après Fubini-Tonelli. On a donc :

$$\int|f|d(\mu\otimes\nu)=\int\int|f|d\nu(y)d\mu(x)<+\infty$$

par hypothèse.
On a donc $x\mapsto\int|f|(x,y)d\nu(y)$ est finie μ-p.p. car son intégrale est finie.
i.e : μ-p.p., $\int|f|d\nu(y)<+\infty, |f|(x,y)\in\mathbb{L}^1(F,\mathscr{B},\nu)$
De plus $\int\left[\int|f|(x,y)d\nu(y)\right]d\mu(x)<+\infty$. Donc $x\mapsto\int f(x,y)d\nu(y)$ est bien définie et est dans $\mathbb{L}^1(E,\mathscr{A},\mu)$ car

$$\int\left|\int f(x,y)d\nu(y)\right|d\mu(x)<\int\int|f|d\nu(y)d\mu(x)<+\infty$$

De même pour les deux autres fonctions.

$f = f^+ - f^-$, donc on a :

$$\begin{aligned}
\int f d(\mu\otimes\nu) &= \int f^+ d(\mu\otimes\nu) - \int f^- d(\mu\otimes\nu) \\
&= \int\int f^+(x,y)d\nu(y)d\mu(x) - \int\int f^-(x,y)d\nu(y)d\mu(x) \quad \text{(Fubini-Tonelli)} \\
&= \int \left(\int f^+(x,y)d\nu(y) - \int f^-(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) \\
&= \int\int f^+(x,y) - f^-(x,y)d\nu(y)d\mu(x) \\
&= \int\int f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)
\end{aligned}$$

De même dans l'autre sens. □

Remarque 4.3.1. *L'hypothèse $f \in \mathbb{L}^1(E\times F, \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}, \mu\otimes\nu)$ est indispensable.*

5 La formule de changement de variables

Proposition 5.1 (Formule de changement de variable linéaire)**.** *Soit $b \in \mathbb{R}^d$, $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ inversible et*

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\
x &\longmapsto Mx + b
\end{aligned}$$

Alors, pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$,

$$\lambda_d(f(A)) = |\,\mathbf{det}(M)|\lambda_d(A)$$

Remarque 5.0.1. *Si M n'est pas inversible, $\lambda_d(f(A)) = 0$, car l'image est incluse dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^d$, qui est donc de mesure nulle.*

Démonstration. On admet que la mesure de Lebesgue est invariante par translation et c'est la seule a multiplication près (exo). On peut donc supposer $b = 0$. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ borélien.

$B \mapsto \lambda_d(f(B))$ est une mesure qui est invariante par translation.

$f(\emptyset) = \emptyset$ et f est bijective, donc l'image d'un d'une famille deux à deux disjoints est aussi deux à deux disjoints, et donc elle est σ-additive.

$$\begin{aligned}
\lambda_d(f([B+a])) &= \lambda_d(f(B) + f(a)) \\
&= \lambda_d(f(B))
\end{aligned}$$

alors elle est un multiple de λ_d.

Il suffit de vérifier que $\lambda_d(f([0,1]^d)) = |\,\mathbf{det}(M)|$.

— Si M est diagonale $M = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_d \end{pmatrix}$, alors

$$\lambda_d(f([0,1]^d)) = \lambda_d([0,a_1] \times \cdots \times [0,a_d]) = \left|\prod_{i=1}^{d} a_i\right| = |\det(M)|$$

— Si M est orthogonale, le coefficient vaut 1 car M conserve la boule unité.

— Si M est symétrique définie positive, le coefficient vaut $\det(M)$ car M est diagonale après un changement de base.

— Dans le cas, $M = PS$ avec P orthogonale et S symétrique définie positive, avec $S = \sqrt{M^t M}$ et $P = MS^{-1}$. Donc le coefficient vaut $|\det(P)||\det(S)| = |\det(M)|$.

□

Rappel 5.0.1. *U, D ouverts de $\mathbb{R}^d$, $\phi : U \to D$ est un C^1-difféomorphisme si ϕ est bijective et C^1 sur U et ϕ^{-1} est C^1 sur D. Dans ce cas $\forall u \in U, \quad \phi'(u)$ est inversible.*

Théorème 5.1 (Changement de variables)**.** *Soit $\phi : U \to D$ un C^1-difféomorphisme alors pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}^+$mesurable positive :*

$$\int_D f(x)d\lambda(x) = \int_U f(\phi(u))|J_\phi(u)|d\lambda(u)$$

où $J_\phi = \det(\phi(u))$ est le jacobien de ϕ en u.

6 Espace L^2

6.1 Définition et premières propriétés

Définition 6.1. On définit l'ensemble des fonctions (réelles ou complexes) de carré intégrable sur un intervalle $(E, \mathscr{A}, \mu)$ noté $\mathbb{L}^2(E, \mathscr{A}, \mu) = \left\{ f : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \mid \int_E |f|^2 \, d\mu < \infty \right\}$.

Proposition 6.1. *Sur $\mathbb{L}^2(E, \mathscr{A}, \mu)$, la relation $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ μ-p.p. définit une relation d'équivalence.*

Définition 6.2. On définit l'espace quotient $L^2(E, \mathscr{A}, \mu) = \mathbb{L}^2(E, \mathscr{A}, \mu)/\sim$.

Remarque 6.1.1. *En fait, on fait le travail dans tous les espaces L^p.*

$$\mathbb{L}^p(E,\mathscr{A},\mu) = \left\{ f : (E,\mathscr{A}) \to (\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R})) \mid \int_E |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

et en particulier dans L^1.

Remarque 6.1.2. *Dans la suite, on identifie (abusivement) un élément de L^1 avec un représentant dans $\mathbb{L}^1$. En particulier, ils ont la même intégrale.*

Sur L^2, on note $||f||_2 = \sqrt{\int_E |f|^2 \, d\mu}$

Théorème 6.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soient f,g mesurables sur $(E,\mathscr{A},\mu)$, alors*

$$\int |fg| \, d\mu \leq ||f||_2 \, ||g||_2$$

En particulier, $fg \in L^1$ si $f,g \in L^2$.
Et il y a égalité si f et g sont colinéaires :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad f = \lambda g \ \text{ ou } \ g = \lambda f$$

Démonstration. Si $||f||_2 = 0$, alors $f = 0$ μ-p.p. donc $fg = 0$ μ-p.p. et l'inégalité est vraie et de même si $||g||_2 = 0$.

Supposons donc que $||f||_2 > 0$ et $||g||_2 > 0$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, alors on regarde

$$0 \leq \int (f+tg)^2 d\mu = \int f^2 d\mu + 2t \int fg d\mu + t^2 \int g^2 d\mu$$

avec $fg \in L^1$ car $|fg| \leq \frac{f^2 g^2}{2}$. C'est un polynôme de degré 2 en t qui est positif pour tout t donc son discriminant est négatif.

$$\Delta = (2 \int fg d\mu)^2 - 4 \int f^2 d\mu \int g^2 d\mu \leq 0$$

$$\int fg d\mu \leq \sqrt{\int f^2 d\mu \int g^2 d\mu}$$

Le cas d'égalité est immédiat : $\Delta = 0$ Donc :

$$\exists t \ \text{ tel que } \ \int (f+tg)^2 d\mu = 0$$

$$f + tg = 0 \mu\text{-p.p.}$$

f et g sont colinéaires μ-p.p..

Si $||f||_2 = +\infty$ ou $||g||_2 = +\infty$, l'inégalité est évidente. □

Corollaire 6.2. *Si μ est une mesure finie, alors $L^2(E,\mathscr{A},\mu) \subset L^1(E,\mathscr{A},\mu)$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int |f|\, d\mu = \int |f| * 1 d\mu &\leq \sqrt{\int f^2 d\mu}\sqrt{\int 1^2 d\mu} \\ &\leq \|f\|_2 \sqrt{\mu(E)} \\ &< \infty\end{aligned}$$

En particulier si μ est une mesure de probas. □

6.2 Lien avec les probabilités

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$ espace probabilisé.
$X : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mesurable "variable aléatoire".
C'est quoi la loi ?

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) &\to [0,1] \\ B &\mapsto \mathscr{P}(X \in B)\end{aligned}$$

$\mathscr{P}_X$ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
Soit X une variable aléatoire réelle positive

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^{+\infty} \mathscr{P}(X > t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{X(\omega)>t} d\mathscr{P}(\omega)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{X(\omega)>t} d\mathscr{P}(\omega)d\lambda(t) \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{X(\omega)>t} d\lambda(t)d\mathscr{P}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} X(\omega)d\mathscr{P}(\omega)\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}^+} \mathscr{P}_X(]t, +\infty[)d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{X(\omega)>t} d\mathscr{P}_X(\omega)d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{X(\omega)>t} d\lambda(t)d\mathscr{P}_X(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} x d\mathscr{P}_X(x)\end{aligned}$$

En particulier, si $\mathscr{P}_X = fd\lambda$, "X est à densité par rapport à Lebesgue", alors $\forall g$ mesurable positive,

$$\int g(x)d\mathscr{P}_X(x) = \int g(x)f(x)d\lambda(x)$$

et donc ("formule de transfert") :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int g(x)f(x)d\lambda(x)$$

Exemple 6.2.1. Soit μ une mesure et f une fonction mesurable positive.
Si $\nu(A) = \int f\mathbb{1}_A d\mu$, alors ν est la mesure de densité f par rapport à μ.

6.2.1 Sur l'indépendance

$X \perp\!\!\!\perp Y, \quad \forall A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{(X,Y)}(A,B) = \mathscr{P}(X \in A \text{ et } Y \in B) &= \mathscr{P}(X \in A)\mathscr{P}(Y \in B)\\ &= \mathscr{P}_X(A)\mathscr{P}_Y(B)\end{aligned}$$

$\mathscr{P}_{(X,Y)} \to [0,1]$ mesure sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ telle que

$$\forall A, B \mathscr{P}_{(X,Y)}(A \times B) = \mathscr{P}(X \in A \text{ et } Y \in B)$$

donc $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \mathscr{P}_{(X,Y)} = \mathscr{P}_X \otimes \mathscr{P}_Y$.

De même pour $(X_1, \ldots, X_n)$, ils sont indépendants si et seulement si $\mathscr{P}_{(X_1,..,X_n)} = \mathscr{P}_{X_1} \otimes ... \otimes \mathscr{P}_{X_n}$

6.3 L'espace de Hilbert L^2

Définition 6.3. On définit pour $f, g \in L^2(E, \mathscr{A}, \mu)$.

$$\langle f, g\rangle = \int fgd\mu$$

est un produit scalaire sur $L^2(E, \mathscr{A}, \mu)$.

— $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ est bilinéaire
— $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ est symétrique
— $\langle f,f\rangle > 0$ et $\langle f,f\rangle = 0$ si et seulement si $f = 0$ (presque partout)

Démonstration. — par linéarité de l'intégrale
— évident

— $\int f^2 d\mu = 0 \iff f^2 = 0 \quad \mu$-p.p. (2.1.12)

$\square$

Remarque 6.3.1. *En particulier,* $||f||_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ *est une norme sur l'espace vectoriel* $L^2_{\mathbb{R}}(E, \mathscr{A}, \mu)$.

Définition 6.4. On dit que $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert si E est muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et si E est complet pour la norme induite $||\cdot|| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}^2$.

Théorème 6.3 (Riesz). $L^2(E, \mathscr{A}, \mu)$ *est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Soit f_n une suite de Cauchy dans $L^2(E, \mathscr{A}, \mu)$, alors il existe une sous-suite f_{k_n} telle que

$$||f_{k_{n+1}} - f_{k_n}||_2 \leq 2^{-n}$$

On pose $g_n = f_{k_n}$

$$\begin{aligned}
\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_{n+1} - g_n|\right)^2 d\mu &= \lim_{N\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{N} |g_{n+1} - g_n|\right)^2 d\mu \\
&= \lim_{N\to\infty} \int \left(\sum_{1\leq i,j\leq N} |g_{i+1} - g_i|\, |g_{j+1} - g_j|\right) d\mu \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{1\leq i,j\leq N} \int |g_{i+1} - g_i|\, |g_{j+1} - g_j|\, d\mu \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{1\leq i,j\leq N} ||g_{i+1} - g_i||_2\, ||g_{j+1} - g_j||_2 \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} ||g_{n+1} - g_n||_2\right)^2 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

car $||g_{n+1} - g_n||_2 \leq 2^{-n}$.

En particulier, $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_{n+1} - g_n|\right)^2$ est μ-intégrable, donc finie μ-p.p. donc $\sum_{n=1}^{\infty} |g_{n+1} - g_n|$ est finie μ-p.p.. $\sum_{n=1}^{\infty} g_{n+1}(x) - g_n(x)$ est absolument convergente μ-p.p. (en x). $\square$

Exemple 6.3.1. $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage.

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum a_n^2 < \infty\right\} = L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$$

$$\langle a, b\rangle = \sum a_n b_n$$

$$||a||_2 = \sqrt{\sum a_n^2}$$

Exemple 6.3.2. $E = \mathbb{R}/\mathbb{Z}(= B_1)$ On regarde μ la mesure de Lebesgue induite sur $[0,1]$.

$$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathscr{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \mu) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad 1 - \text{périodique} \mid \int_{[0,1]} f^2 d\lambda < \infty \right\}$$

C'est dans cet espace qu'on fera des séries de Fourier.

Remarque 6.3.2. *Si les fonctions sont à valeurs complexes, on définit le produit scalaire par :*

$$\langle f, g \rangle = \int f\overline{g} d\mu$$

Cela munit $L^2(E, \mathscr{A}, \mu)$ d'une structure d'espace de Hilbert complexe.

6.4 Classes denses de fonctions

Théorème 6.4. *Dans $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$:*

1. *L'espace des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.*
2. *L'espace des fonctions continues (à support compact\) est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ (pour la norme de l'espace de Hilbert\).*

Démonstration. 1. $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d), f = f^+ + f^-$
Il suffit d'approcher f^+. On sait qu'il existe une suite <u>croissante</u> f_n de fonctions étagées positives avec $f_n \to f^+ \mu$-p.p.
$0 \le f_n \le f^+$ donc les f_n sont intégrables. $0 \le f_n^2 \le {f^+}^2 \le f^2$ donc $\int f_n^2 d\lambda_d \le \int f^2 d\lambda_d \le \infty$ donc $f_n \in L^2_{\mathbb{R}}$

2. admis

□

7 Espaces de Hilbert

7.1 Définitions, premières propriétés

Définition 7.1. Soit H un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Un produit scalaire est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que

1. $\forall y \in H, x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire
2. $\forall x, y \in H, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. $\forall x \in H, \langle x, x \rangle \ge 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ vérifie seulement les deux premières propriétés, on dit que c'est un produit hermitien.

Remarque 7.1.1. $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$. *$y \mapsto \langle x, y\rangle$ est antilinéaire. $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est dite sesquilinéaire (linéaire en la première variable et antilinéaire en la seconde\). On note en général $||x||_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. On montrera que c'est une norme.*

Remarque 7.1.2.

$$\begin{aligned} ||x+y||_2^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= ||x||_2^2 + 2\Re\langle x, y\rangle + ||y||_2^2 \end{aligned}$$

Proposition 7.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit H un espace de Hilbert, alors*

$$\forall x, y \in H, |\langle x, y\rangle| \leq ||x||_2\, ||y||_2$$

Démonstration. — Si $||y|| = 0, \quad 0 \leq 0$.

— Sinon on regarde

$$0 \leq ||x+ty||^2 = ||x||^2 + 2t\Re\langle x, y\rangle + t^2\, ||y||^2$$

qui est un polynôme du second degré en t. On pose $\Delta = 4\Re\langle x, y\rangle^2 - 4\,||x||^2\,||y||^2 \leq 0$. Donc $|\Re\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||$.

Si on est dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on a fini. Sinon :

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= |\langle x, y\rangle|\, e^{i\theta} \\ |\langle x, y\rangle| &= e^{-i\theta}\langle x, y\rangle \\ &= \left\langle e^{-i\theta}x, y\right\rangle \end{aligned}$$

Or $|\langle x, y\rangle| = \left|\Re(\left\langle e^{-i\theta}x, y\right\rangle)\right| \leq \left|\left|e^{-i\theta}x\right|\right|\, ||y|| = ||x||\, ||y||$.

□

Corollaire 7.1. $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *définit une norme sur H si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.*

Démonstration. 1. Par définition $||x|| \geq 0$.

2.

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= ||x||^2 + 2\Re\langle x, y\rangle + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2\,|\langle x, y\rangle| + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2\,||x||\,||y|| + ||y||^2 \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

3. Soit λ un scalaire :

$$\begin{aligned}
||\lambda x||^2 &= \langle \lambda x, \lambda x \rangle \\
&= \lambda\overline{\lambda} \langle x, x \rangle \\
&= |\lambda|^2 \, ||x||^2 \\
||\lambda x|| &= |\lambda| \, ||x||
\end{aligned}$$

4. $||x|| = 0 \implies \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$ par définition du produit scalaire.

$\square$

Proposition 7.2 (Identités remarquables)**.** *Soient* $x, y \in H$*,* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *un produit scalaire sur* H *et* H *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*

1. Identité de Polarisation :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i \, ||x+iy||^2 - i \, ||x-iy||^2 \right)$$

2. Dans un $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, on a :*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 \right)$$

3. Identité de la médiane / du parallélogramme :

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2 \left(||x||^2 + ||y||^2 \right)$$

4. Pythagore : Si $\langle x, y \rangle = 0$*, alors*

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

Définition 7.2. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.

Démonstration.

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\Re \langle x, y \rangle + ||y||^2$$

$$||x-y||^2 = ||x||^2 - 2\Re \langle x, y \rangle + ||y||^2$$

Par différence $\Re(\langle x, y \rangle) = \frac{1}{4} \left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 \right)$

1.

$$\begin{aligned}
||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2 \underbrace{\Re \langle x, y \rangle}_{=\Re(-i\langle x,y \rangle) = \Im \langle x,y \rangle} + ||y||^2 \\
||x-iy||^2 &= ||x||^2 - 2\Im \langle x, y \rangle + ||y||^2 \\
\Im \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} \left(||x+iy||^2 - ||x-iy||^2 \right) \\
\langle x, y \rangle &= \Re \langle x, y \rangle + i\Im \langle x, y \rangle
\end{aligned}$$

D'où l'identité de polarisation.

2. On démontre la deuxième identité en utilisant la différence, car sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\Re(\langle x,y\rangle) = \langle x,y\rangle$.
3. L'identité de la médiane est immédiate en additionnant les deux premières équations.
4. Et enfin, si $\langle x,y\rangle = 0$, alors $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

□

Remarque 7.1.3. *Dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, le théorème de Pythagore n'admet pas de réciproque.*

Définition 7.3. H muni de son produit scalaire est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme associée au produit scalaire.

7.2 Projection orthogonale dans un espace de Hilbert

Définition 7.4. F un sous espace de H, on définit l'othogonal de F par $F^\perp = \{y \in H, \forall x \in F, \langle x,y\rangle = 0\}$.

Proposition 7.3. *F,G deux sous-espaces vectoriels de H, alors :*
- *$F^\perp$ est fermé.*
- *Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.*
- *$F^\perp = \overline{F}^\perp$.*

Démonstration. — Soit $x_n \in F^\perp$ tel que $x_n \to x$, montrons que $x \in F^\perp$. Soit $y \in F$, montrons que $\langle x,y\rangle = 0$.

$$|\langle x_n - x, y\rangle| \leq \underbrace{||x_n - x||}_{\to 0}\,||y||$$

$$\underbrace{\langle x_n, y\rangle}_{=0} - \langle x,y\rangle \to 0$$

donc la suite stationne en 0, donc $\langle x,y\rangle = 0$.

— Soit $x \in G^\perp$, montrons que $x \in F^\perp$.
Soit $y \in F$ montrons que $\langle x,y\rangle = 0$. Or $F \subset G$ donc $y \in G$ et donc $\langle x,y\rangle = 0$.

— Par le 2 $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$.
Montrons que $F^\perp \subset \overline{F}^\perp$.
Soit $x \in F^\perp$, montrons que $x \in \overline{F}^\perp$.
Soit $y \in \overline{F}$, montrons que $\langle x,y\rangle = 0$.
Soit $y_n \in F$ tel que $y_n \to y$, on a

$$|\langle x, y - y_n\rangle| \leq ||x||\,||y - y_n|| \to 0$$

or
$$|\langle x, y-y_n\rangle| = \langle x,y\rangle - \underbrace{\langle x,y_n\rangle}_{=0}$$

Donc $\langle x,y\rangle = 0$.

□

Remarque 7.2.1. *D'après Cauchy-Schwarz,*
$$\forall y \in H, \quad x \mapsto \langle x,y\rangle \text{ est continue}$$
$$\forall x \in H, \quad y \mapsto \langle x,y\rangle \text{ est continue}$$

Théorème 7.2 (Projection orthogonale sur un sous espace fermé)**.** *Soit F un sous espace fermé de H.*

- $\forall x \in H, \exists! y \in F, ||x-y|| = \mathrm{d}(x,F)$.
  Où $\mathrm{d}(x,F) = \inf_{y\in F} ||x-y||$.
  On note $y = p_F(x)$ cet unique point, cela définit une application $p_F : H \to F$.
- $p_F(x)$ *est l'unique vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$.*
- $\forall x \in H, \quad ||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + ||x-p_F(x)||^2$.
- p_F *est linéaire et continue.*
- F *et $F^\perp$ sont dits supplémentaires orthogonaux.*
$$H = F + F^\perp \text{ et } F\cap F^\perp = \{0\}$$
  Et
$$\forall x \in F, \forall y \in F^\perp, \langle x,y\rangle = 0$$
  On note cela $H = F \oplus F^\perp$.

Démonstration. — Soit $y_n \in F$ tel que $||x-y_n|| \to \mathrm{d}(x,F)$. Comme H est complet, il suffit de montrer que y_n est de Cauchy. On prend $a = x - y_n$ et $b = x - y_m$.
$$\begin{aligned}
||a+b||^2 + ||a-b||^2 &= 2\,||a||^2 + 2\,||b||^2 \\
||a-b||^2 &= 2\left(||a||^2 + ||b||^2\right) - ||a+b||^2 \\
||y_n - y_m||^2 &= 2\left(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2\right) - 4\left|\left|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right|\right|^2 \\
&\le 2\left(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2\right) - 4\ \mathrm{d}(x,F)^2
\end{aligned}$$

Si N est assez grand pour que $\forall n \ge N, \left|||x-y_n||^2 - \mathrm{d}(x,F)^2\right| \le \frac{\varepsilon}{4}$.
Si $n, m \ge N$ on a
$$\begin{aligned}
||y_n - y_m||^2 &\le 2\left(\mathrm{d}(x,F)^2 + \frac{\varepsilon}{4} + \mathrm{d}(x,F)^2 + \frac{\varepsilon}{4}\right) - 4\ \mathrm{d}(x,F)^2 \\
&\le \varepsilon
\end{aligned}$$

y_n est donc de Cauchy et donc converge vers un point $y \in H$, $y_n \in F$ donc $y \in F$ car F est fermé.

Unicité : Supposons que y et y' soient deux points de F qui réalisent le minimum.

$$||y-y'||^2 = 2\left(\mathsf{d}(x,F)^2 + \mathsf{d}(x,F)^2\right) - 4\,\mathsf{d}(x,F)^2 \leq 0$$

Donc $y = y'$.

— Montrons que $x - p_F(x) \in F^\perp$.
Soit $z \in F$, montrons que $\langle x - p_F(x), z\rangle = 0$.
On pose $y = p_F(x) \in F$. Soit $t \in \mathbb{R}^p$, on a $y + tz \in F$ Donc

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}(x,F)^2 &\leq ||x-(y+tz)||^2 \\
&\leq ||x - tz - y||^2 \\
&= ||x-y||^2 - 2\Re\langle x-y, tz\rangle + t^2 ||z||^2 \\
&\leq \mathsf{d}(x,F)^2 - 2t\Re\langle x-y, z\rangle + t^2||z||^2
\end{aligned}$$

Donc $2t\Re\langle x-y,z\rangle + t^2||z||^2 \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^p$. En particulier pour $t = 0$ on a $\Re\langle x-y,z\rangle = 0$
En utilisant itz à la place de tz on trove $\Im\langle x-y,z\rangle = 0$

Unicité : Supposons y et y' deux points de F tels que $\forall z \in F, \langle x-y,z\rangle = 0$ et $\langle x-y',z\rangle = 0$.
$\forall x \in F, \langle y-y',z\rangle = 0$, or $y - y' \in F$ donc $\langle y-y', y-y'\rangle = 0$ donc $y = y'$.

— D'après 2, $x - p_F(x) \perp p_F(x)$, donc par Pythagore,

$$||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + ||x - p_F(x)||^2$$

— Montrons que $p : F(x+\lambda y) = p_F(x) + \lambda p_F(y)$.
Montrons que $p_F(x) + \lambda p_F(y)$ vérifie 2.
Montrons que $x + \lambda y - p_F(x) - \lambda p_F(y) \in F^\perp$.

$$\underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \lambda(\underbrace{y - p_F(y)}_{\in F^\perp}) \in F^\perp$$

Montrons que p_F est continue.
Comme p_F est linéaire, il suffit de montrer que p_F est continue en 0.
p_F continue si et seulement si $\exists M,\ ||p_F(x)|| \leq M\,||x||$.

D'après 3, $||p_F(x)||^2 = ||x||^2 - ||x-p_F(x)||^2 \leq ||x||^2$. Donc p_F est continue et

$$|||p_F(x)||| \leq 1$$

— $x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp \text{ d'après } 2}$.

□

Remarque 7.2.2. *Si F est de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F, alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.*

Remarque 7.2.3. *Si F n'est pas fermé rien ne fonctionne.*

Corollaire 7.3. — *Si F est fermé, alors $F^{\perp\perp} = F$.*

— *F est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Démonstration. — C'est le point 5 du théorème.

— $\overline{F}^\perp = F^\perp$

- — Si F est dense, $\overline{F}^\perp = H^\perp = \{0\}$.
- — Sinon $\overline{F} \subsetneq H$ et $\overline{F} \oplus \overline{F}^\perp = H$. Donc $\overline{F}^\perp \neq \{0\}$.

□

7.3 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 7.4 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert, $\phi : H \to \mathbb{C}$ une forme **linéaire continue**.*
*Alors il existe un **unique** $y \in H$ **tel que** $\forall x \in H, \phi(x) = \langle x, y \rangle$. De plus $|||\phi||| = ||y||$.*

Démonstration. Si $\phi = 0$ alors $y = 0$ convient.
Si ce n'est pas le cas on regarde $F = \phi^{-1}(\{0\})$, ϕ est continue donc F est fermé.
$F \subsetneq H$ car $\phi \neq 0$.
En fait, $\dim F^\perp = 1$
Si $x, y \in F^\perp$, $x \neq 0, y \neq 0$, $\phi(x) \neq 0, \phi(y) \neq 0$
$\frac{\phi(x)}{\phi(y)} = \lambda \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$
$\phi(x - \lambda y) = 0$ donc $x - \lambda y \in F \cap F^\perp$ donc $x = \lambda y$

□

7.4 Bases orthonormales

Définition 7.5. On dit que H est séparable s'il existe une partie dénombrable dense de H. Ou encore une suite de points dense dans H.

Exemple 7.4.1. $\mathbb{R}$ est séparable ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et dénombrable).

Exemple 7.4.2. $\mathbb{L}^2$ est séparable.

Démonstration. On a vu que les fonctions continues à support compact sont denses dans $\mathbb{L}^2$.

Toute fonction continue à support compact peut être approchée par une fonction étagée à valeurs rationnelles, avec pour ensemble de niveaux des pavés à coordonnées rationnelles.

$$\sum_{k=-n^2}^{n^2} f_\epsilon\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}$$

avec f_ϵ un rationnel $\frac{\epsilon}{4}$-proche de $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

— approche f en $||\cdot||_2$.

□

Exemple 7.4.3. $\mathbb{L}^2(\mathbb{N})$ et $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang à valeurs rationnelles.

Définition 7.6 (Base orthonormale / hilbertienne)**.** On dit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale/hilbertienne de H si

1. $||e_n|| = 1, \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. L'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans H.

Exemple 7.4.4. $l^2(\mathbb{N})$ et $\langle a, b\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k\overline{b_k}$. $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ avec 1 en position k.

$$\langle e_i, e_j\rangle = \sum e_i\overline{e_j} = \delta_{ij}$$

L'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang, donc dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{N})$.

Exemple 7.4.5.

$$l^2_{\mathbb{C}}([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$$

$$\langle f, g\rangle = \int_{[0,1]} f\overline{g}d\lambda$$

on pose

$$\begin{aligned} e_n : [0,1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{2ni\pi t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_n, e_m\rangle &= \int e^{2ni\pi t} e^{-2mi\pi t} d\lambda(t) \\ &= \int e^{2i\pi(n-m)t} d\lambda(t) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

car $\int_0^1 cos(2\pi t)dt = 0 = \int_0^1 sin(2\pi t)dt$.

Théorème 7.5. *Si H est un espace de Hilbert séparable, alors H admet une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit A une partie dénombrable dense de H.

- On construit avec A une famille orthonormale.
- On vérifie que c'est une base hilbertienne.

$A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

- Montrons le premier point :

  Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \leq n \exists f_0, \ldots, f_p \subset \{a_0, \ldots, a_n\}$ tel que $(f_0, \ldots, f_p)$ est libre dans H et $\text{Vect}(f_0, \ldots, f_p) = \text{Vect}(a_0, \ldots, a_n)$.
  On le montre par récurrence sur n.

  - $n = 0$: $f_0 = a_0$ si $a_0 \neq 0$. (a_0) est libre, sinon $p = -1$ (la famille est vide).
  - Hérédité :
    - Si $a_{n+1} \in \text{Vect}(a_0, \ldots, a_n)$ on garde $(f_0, \ldots, f_p)$ convient.
    - Si $a_{n+1} \notin \text{Vect}(a_0, \ldots, a_n)$, alors $(f_0, \ldots, f_n, a_{n+1})$ convient.

  On travaille avec $f_0, \ldots, f_p$.
- Soit F un sous espace vectoriel fermé. Supposons que $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F.

$$\begin{aligned} p_F : H &\to H \\ x &\mapsto \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \end{aligned}$$

  vérifie $x - p_F \in F^\perp$. Donc c'est bien la projection orthogonale sur F.

Posons $F_n = \mathbf{Vect}\,(f_0, \ldots, f_n)$. alors :

$$\begin{aligned}
e_0 &= \frac{f_0}{||f_0||} \\
e_1 &= \frac{f_1 - p_{F_0}(f_1)}{||f_1 - p_{F_0}(f_1)||} \\
&\vdots \\
e_n &= \frac{f_n - p_{F_{n-1}}(f_n)}{||f_n - p_{F_{n-1}}(f_n)||} \\
&= \frac{f_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \langle f_n, e_k \rangle e_k}{\left|\left| f_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \langle f_n, e_k \rangle e_k \right|\right|} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

On vérifie que $||e_n|| = 1$ et par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i < n, \langle e_n, e_i \rangle = 0$. Or $e_n \in F_n$ et $\mathbf{Vect}\,((e_n)_{n\in\mathbb{N}}) \supset A$ Et $\mathbf{Vect}\,((e_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies. Or A est dense dans H, donc $\mathbf{Vect}\,((e_n)_{n\in\mathbb{N}}) = H$.

□

Proposition 7.4 (Inégalité de Bessel). *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de H. Alors $\forall x \in H, \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq ||x||^2$.*

Démonstration. □

Proposition 7.5 (Identité de Parseval). *H espace de Hilbert séparable, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H, alors :*

$$\forall x \in H, x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

$$||x||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

$$\forall x, y \in H, \langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$$

Démonstration. □

Proposition 7.6 (Unicité des coefficients). *Sous les mêmes hypothèses, si*

$$\sum_{n=0}^{k} \lambda_n e_n \to_{k\to\infty} x$$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \langle x, e_n \rangle$.

On dit que (λ_n) *est la suite des coefficients de* x *dans la base (hilbertienne)* (e_n).

Démonstration. □

8 Séries de Fourier

8.1 Définitions

Définition 8.1. On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{L}^p(\mathbb{T}, \mathscr{B}(\mathbb{T}), \lambda_{\mathbb{T}})$ pour $p = 1, 2$ l'espace des fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 1-périodiques, munie de la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1[$ telles que leur restriction à $[0,1[$ soit dans $\mathbb{L}^p([0,1[, \mathscr{B}([0,1[), \lambda)$ pour $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$.

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p \, d\lambda_{\mathbb{T}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 8.2. Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, on note

$$c_n(f) = \int_{[0,1]} f(t) e^{-2i\pi n t} dt$$

le coefficient de Fourier d'ordre n de f.

On appelle la série de Fourier de f la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi n t}$$

vue comme une série de fonctions abstraite.

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{2i\pi n t}$$

les sommes partielles de la série de Fourier de f.

Proposition 8.1 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Si* $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$*, alors* $\lim_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.

Démonstration. □

Remarque 8.1.1. *Comme on travaille avec des fonctions* 1*-périodiques*

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi n t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}} f(t) e^{-2i\pi n t} dt$$

Définition 8.3 (Coefficients de Fourier réels)**.** On peut travailler avec (de préférence si f est à valeurs réelles)

$$a_0(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

$$a_n(f) = 2\int_0^1 f(t)\cos(2\pi nt)dt$$

$$b_n(f) = 2\int_0^1 f(t)\sin(2\pi nt)dt$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$$
$$b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

et

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}$$

$$c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$$

Proposition 8.2 (Parité)**.** — *Si f est paire, alors $b_n(f) = 0$ et $c_{-n}(f) = c_n(f)$.*

— *Si f est impaire, alors $a_n(f) = 0$ et $c_{-n}(f) = -c_n(f)$.*

8.2 Observations dans $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$

On pose $e_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{2i\pi nt} \end{array}$

$\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{n,m}$.

On veut montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$. $\mathrm{Vect}((e_n))$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques.

Théorème 8.1. *$\mathrm{Vect}((e_n))$ est dense dans $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ (l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$).*

Démonstration. □

Corollaire 8.2 (Conséquences)**.** — *Bessel :*

$$\forall f \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}), \quad ||S_N(f))||_{L^2(\mathbb{T})} \leq ||f||_{L^2(\mathbb{T})}$$

— *Parseval :*

$$\forall f \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}), \qquad \lim_{N\to\infty} ||S_N(f) - f||_{L^2(\mathbb{T})} = 0$$
$$\forall f \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}), \qquad ||f||^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$
$$\forall f, g \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}), \qquad \int f\bar{g}d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\bar{c}_n(g)$$

Inversement, si (a_n) est une suite de $l^2(\mathbb{Z})$, alors les sommes partielles $\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2i\pi nt}$ forment une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, donc elle converge dans $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ vers une limite f et $\langle f, e_m \rangle = \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2i\pi nt}, e_m \right\rangle = a_m$.

Théorème 8.3.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) & \to & l^2(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

est une isométrie.

8.3 Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Proposition 8.3. *Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$ et $c_n(f)$ sommables, alors $\exists \tilde{f} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ telle que $f =_{\mathbb{L}^1} \tilde{f}$ et*

$$\left\| S_N(f) - \tilde{f} \right\|_\infty \to_{N\to\infty} 0$$

Proposition 8.4. *Si f est continue, 1-périodique et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors f est limite uniforme de la série de Fourier.*

Théorème 8.4 (Dirichlet)**.** *Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors*

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$