Logique

Un ensemble compréhensible de notes de cours

Auteur
Yago Iglesias

9 novembre 2024

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Ordres **1**
2.1 Les axiomes des ordres 1
2.2 Morphismes d'ordres 2
2.3 Bon ordre 2

3 Axiomatisation de l'arithmétique **3**
3.1 Introduction 3
3.2 Définition inductive 4
3.3 Axiomatisation et les axiomes de Peano 4
3.4 Définition par récurrence 4
3.5 Quelques propriétés de $\mathbb{N}$ 8

4 La théorie des ensembles **8**
4.1 Axiomes de la théorie des ensembles 8

5 Comparaison des ensembles infinis **11**
5.1 Axiome du choix 11

1 Introduction

Ce document est un recueil de notes de cours sur la logique niveau L3. Il est basé sur les cours de Mme. Sylvy Anscombe à Université Paris Cité, cependant toute erreur ou inexactitude est de ma responsabilité. Si bien Yago IGLESIAS est l'auteur de ce document, il n'est pas le seul contributeur. Un remerciement particulier à Gabin Dudillieu pour sa participation active à la rédaction de ce document. Tout futur contributeur peut se retouver dans la section contributeurs du répertoire GitHub.

Toute erreur signalée ou remarque est la bienvenue. Sentez-vous libres de contribuer à ce document par le biais de GitHub, où vous pouvez trouver le code source de ce document et une version pdf à jour. Si vous n'êtes pas familiers avec *Git* ou LaTeX, vous pouvez toujours me contacter par mail.

2 Ordres

2.1 Les axiomes des ordres

Définition 2.1 (Relation d'ordre)**.** On dit que la relation $\leqslant$ sur un ensemble E non vide est une relation d'ordre au sens large sur E si elle est :

— Réflexive : $\forall x \in E,\, x \leqslant x$

— Anti-symétrique : $\forall x, y \in E,\, (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \implies x = y$

— Transitive : $\forall x, y, z \in E,\, (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \implies x \leqslant z$

Aussi, on dit que la relation $<$ sur un ensemble E non vide est une relation d'ordre au sens strict sur E si :

$$\forall x,\, y \in E,\, x < y \iff x \leqslant y \quad \text{et} \quad x \neq y$$

On peut l'axiomatiser de la manière suivante :

$<$ est une relation d'ordre strict sur E si elle est :

- Irréflexive : $x \nless x$
- Transitive : $\forall x,\, y,\, z \in E,\, (x < y \text{ et } y < z) \implies x < z$

On peut aussi maintenant définir $\leqslant$ de la manière suivante :

$$x \leq y \iff x < y \quad \text{ou} \quad x = y$$

Définition 2.2 (Ensemble ordonné)**.** On dit qu'un ensemble $(E, \leqslant)$ est ordonné si E est non vide et qu'il est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$.

Définition 2.3 (Relation totale)**.** On dit qu'une relation d'ordre $\leqslant$ est totale sur E si pour $\forall x$, $y \in E$, x et y sont comparables.

Lemme 2.1. *Soit $<$ une relation d'ordre strict, soit $\leqslant$ l'ordre large associé, $\leqslant$ est totale si et seulement si :*

$$\forall x,\, y \in E(x < y \text{ ou } y < x \text{ ou } x = y \text{ (Trichotomie)})$$

Exemple 2.1.1.
- $x \sqsubseteq y$ si et seulement si $|x| \leqslant |y|$ pour $x,\, y \in \mathbb{C}$, n'est pas anti-symétrique car $-1 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq -1$: ce n'est pas une relation d'ordre large car $1 \neq -1$.
- $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$: Ensemble ordonné d'ordre large pas total ($\{2\} \nsubseteq \{17\}$ et $\{17\} \nsubseteq \{2\}$)
- $(\mathbb{N}, \leqslant)$: Ensemble ordonné d'ordre large total, et qui admet en plus un minimum
- $(\mathbb{Q}, \leqslant)$: Ensemble ordonné d'ordre large total, et ensemble qui est dense
- $(\mathbb{R}, \leqslant)$: Ensemble ordonné d'ordre large total, et ensemble qui est dense

2.2 Morphismes d'ordres

Définition 2.4. Un morphisme d'ordres entre 2 ensembles d'ordre $(A, \leqslant_A)$, $(B, \leqslant_B)$ est une application $\varphi : A \to B$ tel que $\forall x,\, y \in A,\, x \leqslant_A y \iff \varphi(x) \leqslant_B \varphi(y)$

Définition 2.5. Un isomorphisme d'ordres est un morphisme d'ordres bijectif.

Remarque 2.2.1. *Un isomorphisme est une bijection croissante dont la réciproque est croissante.*

2.3 Bon ordre

Définition 2.6. Une relation d'ordre $\leqslant$ sur E définit un bon ordre sur E si :

- $\leqslant$ est un ordre total
- Tous sous-ensemble de E non vide a un plus petit élément, c'est-à-dire pour tout $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$ tel que $\forall b \in A,\, a \leqslant b$

Exemple 2.3.1.
- $(\mathbb{N}, \leqslant)$: Bon ordre
- $(\mathbb{Z}, \leqslant)$: N'est pas un bon ordre car $]-\infty, 0]$ n'est pas borné à gauche

- $([0,1], \leqslant)$: N'est pas un bon ordre ($]0,1]$ n'admet pas de minimum)
- $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$: N'est pas un bon ordre : Pas total
- $(\emptyset, \emptyset)$: Bon ordre

Proposition 2.1. *Soit $(A, \leqslant_A)$ un bon ordre. Soit $B \subseteq A$ et soit $\leqslant_B$ une relation d'ordre large de B, alors $(B, \leqslant_B)$ est bien ordonnée.*

Démonstration. Soit $C \subseteq B$ non vide, alors $C \subseteq A$ non vide. Donc il existe $c \in C$ l'élément le plus petit de C par rapport à $\leqslant_A$. On veut que c soit l'élément le plut petit pour $\leqslant_B$. Soit $d \in C$, donc $c \leqslant_A d$ et puis $c \leqslant_B d$.

□

Exemple 2.3.2.
- $(\left\{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}^*\right\}, \leqslant)$ n'est pas un bon ordre
- $(\left\{-\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}^*\right\}, \leqslant)$ est un bon ordre : il existe un isomorphisme $(\left\{-\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}^*\right\}, \leqslant) \rightarrow (\mathbb{N}, \leqslant)$

Proposition 2.2. *Un ensemble non vide total ordonné $(E, \leqslant)$ est bien ordonné si et seulement si il vérifie la propriété de récurrence bien fondée pour tout sous ensemble $J \subseteq E$:*

$$\forall y \in E,\ \forall z \in E,\ \text{avec } z < y,\ \text{alors } (z \in J \implies y \in J) \implies J = E$$

Démonstration. On reformule par contraposée la proposition de récurrence bien fondée :

$\exists x \in E \setminus J \implies \exists y \in E \setminus J$ tel que $\forall z \in E,\ z < y \implies z \in J$ ce qui veut dire que $y = \min(E \setminus J)$

C'est la proposition des bons ordres pour $E \setminus J \subseteq E$.

□

Exemple 2.3.3. Pour $x, y \in \mathbb{Z}$, on écrit $x|y$ si et seulement si $\exists z \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x \cdot z$
- $(\mathbb{Z}, |)$ n'est pas un bon ordre car $-1|1| - 1$ et $-1 \neq 1$
- $(\mathbb{N}, |)$ est une relation d'ordre pas totale car $2 \nmid 3 \nmid 2$
- $(\mathbb{N}, \leqslant)$ bon ordre car il n'existe pas de suite infinie décroissante dans $\mathbb{N}$

3 Axiomatisation de l'arithmétique

3.1 Introduction

Nous avons besoin d'une définition explicite de $\mathbb{N}$. Un exemple est la définition naïve suivante :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \emptyset \\ 1 & = & | \\ 2 & = & || \\ 3 & = & ||| \\ & \cdots & \end{array}$$

où $S(x) = x\ |$. Mais cela est loin d'être pratique.

3.2 Définition inductive

On se place dans un univers avec deux symboles : 0 et S.

De cette manière, l'ensemble des entiers naturels est défini comme le plus petit ensemble $\mathbb{N}$ qui contient 0 et qui est stable (clôt) par application du successeur S, i.e. si $x \in \mathbb{N}$ alors $S(x) \in \mathbb{N}$.

Notons $Cl(A)$ la clôture de A par application de S et le fait que $0 \in A$:

$$Cl(A) = \{0 \in A \text{ et } x \in \mathbb{N} \implies S(x) \in A\}$$

Remarque 3.2.1. *Si chacun des ensembles d'une famille $(A_i)i \in I$ vérifie $Cl(A)$, alors leur intersection aussi.*

Ainsi, $\mathbb{N} = \bigcap_{Cl(A)} A$.

3.3 Axiomatisation et les axiomes de Peano

Définition 3.1 (Axiomes pour les naturels)**.** — Successeur non nul : $\forall x \in \mathbb{N}, S(x) \neq 0$

— Injectivité du successeur : $\forall x, y \in \mathbb{N}, S(x) = S(y) \implies x = y$

— Récurrence : Pour toute propriété P « bien définie » sur $\mathbb{N}$ alors

$$(P(0) \wedge \forall x \in \mathbb{N}, P(x) \implies P(S(x))) \implies \forall x \in \mathbb{N}, P(x)$$

Lemme 3.1 (Raisonement par récurrence)**.** *Tout entier est soit 0 soit un successeur :*

$$\forall x \in \mathbb{N}, x = 0 \vee \exists y \in \mathbb{N}, x = S(y)$$

Démonstration. Par récurrence, la propriété $P(x) = x = 0 \vee \exists y \in \mathbb{N}, x = S(y)$.

— $P(0)$ est vraie car $0 = 0$.

— On suppose $P(x)$ vraie, donc $P(S(x))$.

Notons que dans cette preuve la propriété de récurrence n'est pas utilisée. □

Définition 3.2 (Prédécesseur)**.** Pour tout élément non nul, on appelle prédécesseur de x un élément y tel que $S(y) = x$.

Exercice 3.3.1. Montrer que les trois axiomes de Peano sont indépendants, c'est à dire, construire pour chacun des axiomes un contre-modèle $\mathscr{N}$, avec un élément distingué 0 et une fonction $S : \mathscr{N} \to \mathscr{N}$, où l'axiome dont on veut montrer qu'il est indépendant n'est pas vérifié, mais les deux autres le sont.

3.4 Définition par récurrence

On peut définir $\leq$ par :

$$x \leq y \iff \text{il existe une suite finie } x, S(x), S(S(x)), \ldots, S(S(\ldots S(x))\ldots) = y$$

mais ceci n'est pas une définition du premier ordre.

L'objectif est de définir $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

— $x + 0 = x$
— $x + S(y) = S(x + y)$

Mas pour cela nous avons besoin du théorème suivant :

Théorème 3.1 (Dedekind 1888). *Si E un ensemble non vide, $a \in E$ et $h : E \to E$ une fonction. Alors il existe une unique fonction $f : \mathbb{N} \to E$ telle que :*

— $f(0) = a$
— $f(S(x)) = h(f(x))$

Démonstration. L'unicité se démontre par récurrence. Soit g une fonction vérifiant les mêmes propriétés que f.

— $g(0) = a = f(0)$
— Si on a $g(x) = f(x)$ alors $f(S(x)) = h(f(x)) = h(g(x)) = g(S(x))$

Démontrons maintenant l'existence. Nous avons besoin d'une relation entre les éléments de E et les éléments de $\mathbb{N}$, pour pouvoir définir une propriété de clôture. Pour cela on travaillera sur les sous ensembles de $\mathbb{N} \times E$. Cette propriété de clôture est inspirée par la définition de f, pour les sous-ensembles R de $\mathbb{N} \times E$.

$$Cl(A) = (0, a) \in R \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in E, (n, y) \in R \implies (S(n), h(y)) \in R$$

On peut vérifier que si R est le graphe d'une fonction f alors on retrouve les équations du théorème.

L'ensemble des $R \subset \mathbb{N} \times E$ vérifiant la propriété de clôture est non vide car il contient $\mathbb{N} \times E$. On peut donc poser :

$$G = \bigcap_{Cl(R)} R$$

Il s'agit de montrer que G est le graphe d'une fonction f vérifiant les équations du théorème. Pour cela, il suffit de montrer que G est une fonction.

— On a bien $Cl(G)$.
— Tout élément $n \in \mathbb{N}$ possède une unique image par la relation de graphe G. Par récurrence :
  — Pour $n = 0$, on a $(0, a) \in G$ car $Cl(G)$.
  — Pour $n = S(x)$, on a $(n, h(y)) \in G$, pour $(n, y) \in G$.
— Tout élément $n \in \mathbb{N}$ possède une unique image par la relation de graphe G. Par récurrence :
  — Pour $n = 0$ s'il existe $b \neq a$ tel que $(0, b) \in G$. On a que $G' = G \setminus \{(0, b)\}$ vérifie $Cl(G')$, donc $G' \subset G$ ce qui est absurde.
  — Si $n = S(m)$. Par hypothèse de récurrence n a une seule image par G, qu'on note X.On sait aussi que $S(n)$ a pour image $h(x)$. Supposons que $S(n)$ ait pour image $y \neq h(x)$. On pose $G' = G \setminus \{(n, y)\}$ et on va aboutir à une contradiction en montrant que G' vérifie $Cl(G')$.
    — On note que $(0, a) \in G$ et comme $0 \neq S(n)$, on a $(0, a) \in G'$.
    — Soit $d \in \mathbb{N}$ et $z \in E$ tel que $(d, z) \in G'$ alors $(d, z) \in G$ et donc $(S(d), h(z)) \in G$.
      — Si $d \neq m$ et $S(d) \neq S(n)$ alors $(S(d), h(z)) \in G'$.
      — Si $d = m$, donc $z = x$ et alors $(S(d), h(z)) = (m, h(x)) \in G'$.

— Si $d \neq n$ alors $(S(d), h(z)) \in G'$.

Donc $Cl(G')$ ce qui est absurde.

$\square$

Exercice 3.4.1. Démontrer que chacun des axiomes de Peano sont bien nécessaire pour le théorème de Dedekind.

Corollaire 3.2 (Définition par récurence avec paramèttre)**.** *Soit A un ensemble et E un ensemble non vide. Soit $g : A \to E$ et $h : E \times A \to E$ deux fonctions. Alors il existe une unique fonction $f : \mathbb{N} \times A \to E$ telle que :*

— $f(0, y) = g(y)\ \forall y \in A$

— $f(S(x), y) = h(f(x, y), y)\ \forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in A$

Démonstration. On note E^A l'ensemble des fonctions de A dans E On veut définir par récurrence la fonction

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : A & \to & E^A \\ x & \mapsto & f_x : A \to E \\ & & y \mapsto f(x,y) \end{array} \tag{1}$$

— Unicité : Soit f, f' deux fonctions vérifiant les propriétés du corollaire. On définit $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ en utilisant 1. Donc $f = f' \iff \tilde{f} = \tilde{f}'$. Maintenant on étudie juste l'unicité de $\tilde{f}$.

  — $\tilde{f}(0) = g = \tilde{f}'(0)$

  — $\tilde{f}(S(x)) = \tilde{h}(\tilde{f}(x))$ et $\tilde{f}'(S(x)) = \tilde{h}(\tilde{f}'(x))$.

  Comme elles vérifient les équations du théorème de Dedekind, on a $\tilde{f} = \tilde{f}'$ et donc $f = f'$.

— Existence : Soit

$$\begin{array}{rcl} \tilde{h} : E^A & \to & E^A \\ k & \mapsto & h(k(y), y) \end{array}$$

  Soit $\tilde{f} : \mathbb{N} \to E^A$ définie par le théorème de récurrence :

  — $\tilde{f}(0) = g$

  — $\tilde{f}(S(x)) = \tilde{h}(\tilde{f}(x))$

  Maintenant

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} \times A & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & \tilde{f}(x)(y) \end{array}$$

  et

  — $f(0, y) = \tilde{f}(0)(y) = g(y)$

  —

$$\begin{array}{rcl} f(S(x), y) & = & \tilde{f}(S(x))(y) \\ & = & \tilde{h}(\tilde{f}(x))(y) \\ & = & h(\tilde{f}(x)(y), y) \\ & = & h(f(x, y), y) \end{array}$$

$\square$

Exemple 3.4.1. On veut définir l'addition par récurrence comme suit :

- $x + 0 = x$
- $x + S(y) = S(x + y)$

Pour le faire on pose :

- $A = \mathbb{N}$
- $g = id_{\mathbb{N}}$
- $h(x, y) = S(x)$

Par le corollaire précédent, il existe une unique fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ f(0, y) & = & g(y) = y \\ f(S(x), y) & = & h(f(x, y), y) = S(f(x, y)) \end{array}$$

Ainsi, l'addition est bien définie par récurrence.

Exemple 3.4.2. On veut définir une fonction $mult : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} x \cdot 0 & = & 0 \\ x \cdot S(y) & = & x \cdot y + x \end{array}$$

Comme pour la multiplication on commence par poser :

- $A = \mathbb{N}$
- $g = 0$
- $h(x, y) = x + y$

Et on a par le corollaire précédent :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ f(0, y) & = & g(y) = 0 \\ f(S(x), y) & = & h(f(x, y), y) = f(x, y) + y \end{array}$$

Et ainsi la multiplication est bien définie par récurrence.

Exemple 3.4.3 (Puissances itérées de Knuth)**.** Wikipedia

- $x \uparrow 0 = 1$
- $x \uparrow S(y) = x^{x \uparrow y}$
- $x \uparrow\uparrow y = \underbrace{x \uparrow x \uparrow \ldots \uparrow x}_{y \text{ fois}}$

3.5 Quelques propriétés de $\mathbb{N}$

Proposition 3.1. $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, x + (y + z) = (x + y) + z$

Démonstration. — $z = 0 : x + (y + 0) = x + y = (x + y) + 0$

— $z = S(z')$:

$$\begin{aligned} x + (y + S(z')) &= x + S(y + z') \\ &= S(x + (y + z')) \\ &= S((x + y) + z') \\ &= (x + y) + S(z') \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2. *Propriétés de l'addition et de la multiplication*

- $0 + x = 0,\ \forall x \in \mathbb{N}$
- $S(x) + y = S(x + y),\ \forall x, y \in \mathbb{N}$
- $x + y = y + x,\ \forall x, y \in \mathbb{N}$
- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,\ \forall x, y, z \in \mathbb{N}$
- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,\ \forall x, y, z \in \mathbb{N}$
- $0 \cdot x = 0,\ \forall x \in \mathbb{N}$
- $S(x) \cdot y = x \cdot y + y,\ \forall x, y \in \mathbb{N}$
- $x \cdot y = y \cdot x,\ \forall x, y \in \mathbb{N}$
- $1 \cdot x = x \cdot 1 = x,\ \forall x \in \mathbb{N}$

Exemple 3.5.1. Montrer que, à partir des axiomes ou les propriétés déjà démontrés, on a :

$$\begin{aligned} z + x = z' + x &\implies z = z' \\ x + z = y + z' &\implies z = z' \end{aligned}$$

Démonstration. Si $z + S(n) = z' + S(n)$ alors $S(z + n) = S(z' + n)$. Par injectivité de S on a $z + n = z' + n$ et donc $z = z'$. □

4 La théorie des ensembles

On note par $A \subset B$ que $\forall x \in A, x \in B$

4.1 Axiomes de la théorie des ensembles

Axiome 4.1 (Extensionnalité)**.**

$$\forall A\ \forall B (A = B \iff \forall x (x \in A \iff x \in B))$$

Axiome 4.2 (Compréhension)**.** Pour toute propriété $P(x)$, exprimée dans le langage de la théorie des ensembles du premier ordre,

$$\forall A \ \exists B \subset A \text{ des éléments de } A \text{ qui vérifient } P(x)$$

Qui est équivalent à :

$$\forall A \ \exists B \ \forall x (x \in B \iff x \in A \wedge P(x))$$

Cet ensemble est unique par extensionnalité et il est noté $\{x \in A \mid P(x)\}$.

Axiome 4.3 (Des paires)**.**

$$\forall A \ \forall B \ \exists C \ \forall \ x \ (x \in C \iff x = A \vee x = B)$$

Il est noté $\{A, B\}$.

Axiome 4.4 (Réunion)**.**

$$\forall A \ \exists B \ (\forall x \in B \iff (\exists C \in A \wedge x \in C))$$

Noté $\bigcup A$.

Axiome 4.5 (Ensemble des parties)**.**

$$\forall A \exists B \forall C (C \in B \iff \forall C \subseteq A)$$

On note $B = \mathcal{P}(A)$.

Axiome 4.6 (Infini)**.**

$$\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall x (x \in A \implies x \cup \{x\} \in A))$$

On peut noter cette opération x^+.

Remarque 4.1.1. *Soit A un ensemble non vide, on définit alors :*

$$\bigcap A = \left\{ x \in \bigcup A \mid \forall B \ (B \in A \iff x \in B) \right\}$$

Soit A un ensemble donné par l'axiome de l'infini, on considère l'ensemble :

$$\left\{ B \in \mathcal{P}(A) \mid \emptyset \in B \wedge \forall x (x \in B \implies x^+ \in B) \right\} = \mathbb{N}$$

Notez bien que l'axiome de l'infini est valide pour :

$$\mathbb{N} \cup \left\{ \mathbb{N}, \mathbb{N}^+, \mathbb{N}^{++}, \ldots \right\}$$

Proposition 4.1 (Couples de Wiener-Kuratowski)**.** *À deux ensembles a, B on peut associer un ensemble, noté (A, B) défini par*

$$(A, B) = \{\{A\}, \{A, B\}\}$$

On a pour tout A, B, C, D :

$$((A, B) = (C, D) \iff (A = C \wedge B = D))$$

Démonstration. Si $A = C \wedge B = D$, alors $(A, B) = (C, D)$.
On suppose (A,B) = (C,D), i.e. $\{\{A\}, \{A, B\}\} = \{\{C\}, \{C, D\}\}$.

— Si $A \neq B$ on a $\{A\} \neq \{A, B\}$, donc $\{\{A\}, \{A, B\}\}$ n'est pas in singleton. De même pour $\{\{C\}, \{C, D\}\}$.
  Il y a deux (ou moins) éléments dans $\{\{C\}, \{C, D\}\}$, donc $\{C\}$ et $\{C, D\}$ sont différents.
  Et donc $C \neq D$.
  Il y a un seul singleton dans $\{\{A\}, \{A, B\}\}$, donc $\{A\} = \{C\}$, donc $A = C$.
  On a aussi
  $$\{A, B\} = \{C, D\}$$
  , donc $\{A, B\} \setminus \{A\} = \{C, D\} \setminus \{C\}$ donc $B = D$.
— Le reste est laissé en exercice pour le lecteur.

□

On note
$$\Pi A = \left\{ f : A \to \bigcup A \mid \forall x \in A \; (f(x) \in x) \right\}$$

Proposition 4.2.
$$\left\{ B \in \mathcal{P}(A) \mid \emptyset \in B \wedge \forall x (x \in B \implies x^+ \in B) \right\} = \mathbb{N}$$

Démonstration. Soit A_1, A_2 tel que $\emptyset \in A_i$ et $\forall x (x \in A_i \implies x^+ \in A_i)(*)$ On veut montrer que
$$\bigcap_{A \subseteq A_1,\, A(*)} = \bigcap_{A \subseteq A_2,\, A(*)}$$
Sans perte de généralité on suppose $A_1 \subseteq A_2$ (On peut le supposer car $A_1 \cap A_2$ satisfait (*))
Maintenant on a
$$\bigcap_{A \subseteq A_1,\, A(*)} \supseteq \bigcap_{A \subseteq A_2,\, A(*)}$$
Mais A_1 est un sous-ensemble de A_2 qui satisfait (*), donc
$$A_1 \supset \bigcap_{A \subseteq A_2,\, A(*)}$$
et alors
$$\bigcap_{A \subseteq A_1,\, A(*)} = \bigcap_{A \subseteq A_2,\, A(*)}$$

□

Définition 4.1. $\forall x, y$ on note
$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$
et
$$(x, x) = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$$
et
$$(x, y) = (u, v) \iff x = u \wedge y = v$$

Définition 4.2. $A \times B = \{(x,y) \in \mathscr{P}\mathscr{P}(A \times B) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

Définition 4.3. Un graphe fonctionnel est G tel que $\exists A \exists B$ qui vérifient :

$$\phi(G,A,B) = (G \subseteq A \times B \wedge \forall x\,(x \in A \to \exists! y,\ (x,y) \in G))$$

Définition 4.4. Soit A, B :

$$B^A = \{G \in \mathscr{P}(A \times B) \mid \phi(G,A,B)\}$$

Axiome 4.7 (Choix)**.** Soit A un ensemble, il existe une fonction $f : \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ telle que

$$\forall B \in \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\},\ f(B) \in B$$

Ce qui est équivalent a :

$$\forall A \exists f \in A^{\mathscr{P}(A)\setminus\{\emptyset\}} \forall B \in \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\},\ f(B) \in B$$

5 Comparaison des ensembles infinis

5.1 Axiome du choix

On n'arrive pas à démontrer que tout ensemble infini contient un sous-ensemble dénombrable si on ne suppose pas AC.

Définition 5.1 (Famille)**.**

$$\{(i, A_i) \mid i \in I\}$$

Axiome 5.1 (Formulation équiavalente de l'axiome du choix I)**.** Pour toute famille non vide $(A_i)_{i\in I}$ il existe une fonction $f : I \to \bigcup i \in IA_i$ qui vérifie $F(i) \in A_i,\ \forall i$

Axiome 5.2 (Formulation équiavalente de l'axiome du choix II)**.** Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille non vide d'ensembles non vides,

$$\emptyset \neq \prod_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \right\}$$

Théorème 5.1. *Tout ensemble infini possède un sous ensemble dénombrable.*

Démonstration. Soit E un ensemble infini ($\nexists n \in \mathbb{N} \mid E \cong N_{\leq n}$). Il suffit de trouver une fonction injective $\phi : \mathbb{N} \to E$. Soit $f : \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \to E$ du choix.
On définit :

$$\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(E)$$

Donc $\Phi(0) = E$.

□

Proposition 5.1. *Un ensemble est infini si et seulement si il est équipotent une partie propre.*

Démonstration. □