Décidabilité de l'uniformisation MSO sur des arbres finis

Thomas Colcombet & Yago Iglesias Vázquez

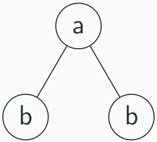
Université Paris Cité

6 novembre 2025

Arbres binaires finis non ordonnés

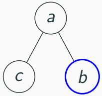
- On travaille avec des **arbres binaires finis non ordonnés** :
  - Chaque nœud a deux fils.
  - On **ne distingue pas** entre fils gauche et droit.

- Question centrale :
  Si les deux sous-arbres sont identiques, comment choisir en choisir un ?



Logique MSO — Aperçu rapide

- Permet de décrire des propriétés sur les arbres, **sans distinguer gauche/droite**.
- Variables :
  - **1er ordre** : nœuds $(x, y, \dots)$
  - **2nd ordre** : ensembles de nœuds $(X, Y, \dots)$
- Quantification possible sur les deux types : $\forall x$, $\exists X$, etc.
- Exemple : $\varphi(x) =$ "x est une feuille"



$$\models \varphi\left(\text{b}\right)$$

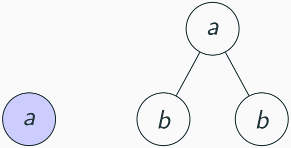
Définissabilité

Définition
Un ensemble de nœuds X d'un arbre t est ***définissable*** *s'il existe une formule $\psi(x)$ telle que :*

$$X = \{x \mid t \models \psi(x)\}.$$

Exemples de définissabilité

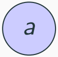
$\varphi_1(X) =$ "X **singleton avec une feuille**"



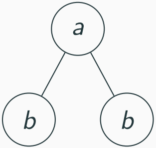
Définissable   Pas définissable

Exemples de définissabilité

$\varphi_1(X) =$ "X **singleton avec une feuille**"

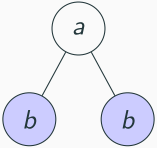


Définissable



Pas définissable

$\varphi_2(X) =$ "X **contient au moins une feuille**"



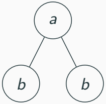
Définissable

Uniformisation — Définition

- $\varphi(X)$ est **uniformisable** s'il existe une formule $\psi(x)$ telle que pour tout arbre t :
  Si $t \models \varphi(X)$, alors $X_\psi := \{x \mid t \models \psi(x)\}$ vérifie $t \models \varphi(X_\psi)$.

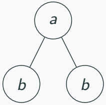
Uniformisation — Exemples

- $\varphi_1(X) =$ "X singleton avec une feuille"
  - Existence d'un arbre sans solution définissable :



  - Pas uniformisable

- $\varphi_1(X) =$ "X singleton avec une feuille"
  - Existence d'un arbre sans solution définissable :



  - Pas uniformisable

- $\varphi_2(X) =$ "X contient au moins une feuille"
  - $\psi(x) =$ "x est une feuille".
  - Uniformisable

Uniformisation — Problème

- **Problème :** Étant donné une formule $\varphi(X)$, décider si elle est uniformisable.

Algorithme d'uniformisation — Idée générale

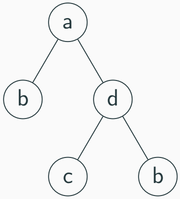
1. Entrée : une formule $\varphi(X)$.
2. Construire l'automate uniformiseur U associé à $\varphi(X)$.
3. Tester si U est universel.
4. Retourner `Oui` si U est universel, `Non` sinon.

- Résultat clé :

$$U \text{ universel} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(X) \text{ est uniformisable.}$$

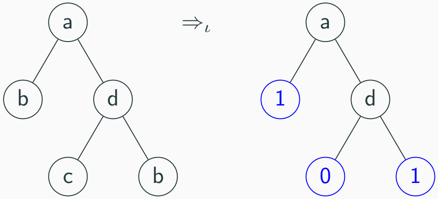
Automates finis bottom-up déterministes (DBUA)

- Un DBUA est un 5-uplet $A = (\Sigma, Q, \iota, \delta, F)$
- On impose $\delta_a(p, q) = \delta_a(q, p)$



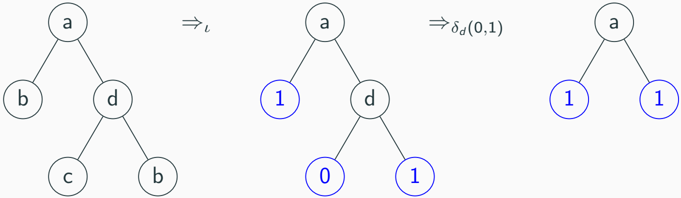
Automates finis bottom-up déterministes (DBUA)

- Un DBUA est un 5-uplet $A = (\Sigma, Q, \iota, \delta, F)$
- On impose $\delta_a(p, q) = \delta_a(q, p)$



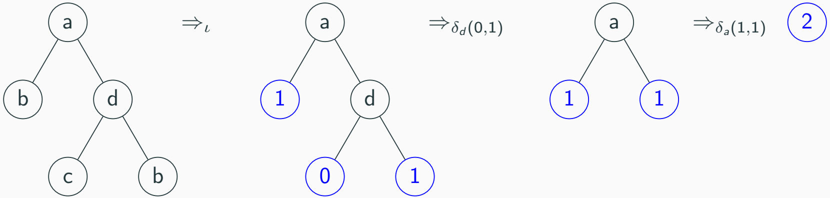
Automates finis bottom-up déterministes (DBUA)

- Un DBUA est un 5-uplet $A = (\Sigma, Q, \iota, \delta, F)$
- On impose $\delta_a(p, q) = \delta_a(q, p)$



Automates finis bottom-up déterministes (DBUA)

- Un DBUA est un 5-uplet $A = (\Sigma, Q, \iota, \delta, F)$
- On impose $\delta_a(p, q) = \delta_a(q, p)$



MSO et automates : équivalence

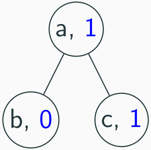
Théorème
Pour tout langage L d'arbres, il existe un DBUA ordre-insensible A qui reconnaît L ssi il existe $\varphi(X)$ une formule MSO telle que,
$L = \{t \mid t \models \varphi(X)\}$.

Arbres annotés

- Pour $\varphi(X)$, il existe un DBUA A sur $\Sigma \times \{0,1\}$ tel que :

$$t \models \varphi(X) \text{ ssi } (t, X) \text{ est accepté par } A.$$

- Arbre annoté (t, X) : chaque nœud de t est étiqueté par (σ, b) avec $b = 1$ si le nœud appartient à X, sinon $b = 0$.



Powerset — Construction de l'automate

Automate	**Définition**
A	$A : \mathsf{Tree}_{\Sigma\times\{0,1\}} \to Q$ $A(t, X) \in F$ ssi $t \models \varphi(X)$
PA (powerset)	$PA : \mathsf{Tree}_{\Sigma} \to \mathcal{P}(Q)$ $PA(t) = \{A(t, X) \mid X \subseteq \mathrm{Nodes}(t)\}$
	$PA(t) \cap F \neq \emptyset$ ssi $t \models \exists X.\varphi(X)$

- PA simule A sur toutes les assignations possibles de X.

Automate uniformiseur — Idée générale

- Cherche à construire une solution de $\varphi(X)$ **et** une solution **définissable**.
- L'automate accepte les arbres vérifiant :

$$''\exists X.\, \varphi(X) \implies \exists X.\, \varphi(X) \text{ avec } X \text{ définissable}''$$

- U universel ssi pour tout arbre t, si $t \models \exists X.\, \varphi(X)$, alors il existe une solution **définissable**.

Automate uniformiseur — Construction

$A : \mathsf{Tree}_{\Sigma \times \{0,1\}} \to Q$	$A(t, X) \in F$ ssi $t \models \varphi(X)$.
$PA : \mathsf{Tree}_{\Sigma} \to \mathcal{P}(Q)$	$PA(t) = \{A(t, X) \mid X \subseteq \mathsf{Nodes}(t)\}$ $PA(t) \cap F \neq \emptyset$ ssi $t \models \exists X.\varphi(X)$
$U : \mathsf{Tree}_{\Sigma} \to \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q)$	$U(t) = (P, P')$ $P \cap F \neq \emptyset \implies P' \cap F \neq \emptyset$ ssi $t \models \exists X.\varphi(X)$ implique qu'il existe une solution définissable

- P correspond à l'exécution de PA.
- P' correspond à une exécution contrainte de PA qui garantit l'existence d'une solution définissable.

Conclusion et Perspectives

- Introduction pédagogique aux automates sur arbres et à la logique MSO.
- **Le résultat principal :** l'uniformisation de la logique MSO sur les arbres binaires finis non ordonnés est décidable.
- Perspectives futures :
  - Étendre ces techniques aux arbres *unranked*.

Références

J. Richard Büchi.
Weak second-order arithmetic and finite automata.
Mathematical Logic Quarterly, 6(1-6) :66–92, 1960.

Arnaud Carayol and Christof Löding.
Uniformization in Automata Theory.
01 2015.

Christian Choffrut and Serge Grigorieff.
Uniformization of Rational Relations, pages 59–71.
Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1999.

Hubert Comon, Max Dauchet, Rémi Gilleron, Florent Jacquemard, Denis Lugiez, Christof Löding, Sophie Tison, and Marc Tommasi.
Tree Automata Techniques and Applications.
2008.

John Doner.
Tree acceptors and some of their applications.
Journal of Computer and System Sciences, 4(5) :406–451, 1970.

Yuri Gurevich and Saharon Shelah.
Rabin's uniformization problem.
Journal of Symbolic Logic, 48, 12 1983.

Jean-Éric Pin, editor.
Handbook of Automata Theory, chapter 7.
European Mathematical Society Publishing House, Zürich, Switzerland, 2021.

Alexander Moshe Rabinovich.
On decidability of monadic logic of order over the naturals extended by monadic predicates.
Inf. Comput., 205 :870–889, 2007.

Dirk Siefkes.
J. w. thatcher and j. b. wright. generalized finite automata theory with an application to a decision problem of second-order logic. mathematical systems theory, vol. 2 (1968), pp. 57–81.
Journal of Symbolic Logic, 37(3) :619–620, 1968.

Dirk Siefkes.
The recursive sets in certain monadic second order fragments of arithmetic.
Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, 17(1) :71–80, Mar 1975.

Wolfgang Thomas.
Languages, Automata, and Logic, pages 389–455.
Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1997.