Předmluva

Autoři předkládají přepracovaný text přednášek z **Matematické analýzy I**, jednoho ze základních předmětů v 1. semestru. Jde o pomocný studijní materiál, kde jsou zavedeny nejdůležitější pojmy, formulovány věty a naznačeny jejich důkazy. Text je koncipován tak, aby byl vhodným základem pro studenty všech oborů FAV - včetně oboru učitelského a současně jej mohli používat studenti matematicky náročnějších technických oborů, především na FEL.

K plnému pochopení látky jsou však nezbytné slovní komentáře na přednášce nebo studium podrobnějších učebnic uvedených v seznamu doporučené literatury. Stejně tak upozorňujeme studenty na to, že pro nedostatek místa nebylo možno uvést dostatečný počet příkladů a cvičení. K získání zkoušky je nutnou podmínkou (nikoli však postačující) vypracování písemné práce a k jejímu úspěšnému absolvování je potřebné získat odpovídající početní praxi. K tomu je nutné vypočítat dostatečné množství příkladů, a proto by se nezbytným doplňkem ve vaší knihovně měla stát některá ze sbírek (upozorňujeme zejména na položku [1] v seznamu doporučené literatury).

Závěrem děkujeme Martinu Míkovi za pečlivé přepsání rukopisu v LaTeXu, RNDr. Martě Míkové za dodání cvičení a pečlivou recenzi textu. Předem děkujeme za všechny kritické připomínky.

Pavel Drábek Stanislav Míka

Plzeň, září 1995

Předmluva k druhému vydání

Po roce předkládáme druhé vydání textu přednášek z **Matematické analýzy I,** ve kterém jsou opraveny některé tiskové chyby. Na opravách se výrazně podíleli studenti 1. ročníku Marie Větrovcová a Ondřej E. Cibulka. Jim patří náš dík. Jsme však stále vděčni za jakékoli další kritické připomínky k našemu textu.

Pavel Drábek Stanislav Míka

Plzeň, září 1996

Předmluva k třetímu vydání

Ve třetím vydání jsou opraveny drobné tiskové chyby. Tentokrát výhradně děkujeme doc. RNDr. Josefu Polákovi a RNDr. Martě Míkové za pomoc při vyhledávání chyb a jejich odstraňování.

Pavel Drábek Stanislav Míka

Plzeň, říjen 1998

Obsah

1 Základní matematické pojmy

První dva odstavce této kapitoly shrnují nejnutnější poznatky o množinách a výrocích. Shrnutí je "telegrafické" a předpokládá, že čtenář má možnost prohloubit si tyto poznatky v doporučené literatuře.

1.1 Množiny a operace s nimi

Množina - intuitivně množinou rozumíme soubor navzájem různých objektů, které mají zpravidla jistou společnou vlastnost.
Množiny značíme velkými písmeny A, B, M, Ω, Γ, jejich prvky pak malými písmeny x, y, a, b:
$x \in A$ (x je prvkem množiny A), $z \notin B$ (z není prvkem množiny B).

Příklady $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ... množina určená výčtem prvků.
$B = \{x \in M : V(x)\}$ ... množina všech prvků z M, které mají vlastnost $V(x)$.
$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\}$ ... množina všech prvků z $\mathbb{R}$, pro které platí $x^2 \leq 1$.

□

Výrok "A je podmnožina B" znamená, že "Každý prvek množiny A je prvkem množiny B". Stručně zapisujeme:
$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$ (inkluze). Znak "$\Leftrightarrow$" znamená ekvivalenci znak "$\Rightarrow$" znamená implikaci (viz odstavec 1.2).
$A \not\subset B$: existuje $x \in A$ takový, že $x \notin B$.

Symbolem $\emptyset$ označujeme množinu, která neobsahuje žádný prvek, tj. vždy platí: $\emptyset \subset A$ pro libovolnou množinu A. Takové množině říkáme *prázdná množina.* Například: $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$.

Číselné množiny označujeme
$\mathbb{R}$ ... obor reálných čísel ($\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$), často také označujeme $\mathbb{R}^1$,
$\mathbb{Q}$ ... obor racionálních čísel,
$\mathbb{N}$ ... obor přirozených čísel,
$\mathbb{Z}$ ... obor celých čísel,
$\mathbb{C}$ ... obor komplexních čísel.

Rovnost množin:
Množiny A, B jsou si rovny, jestliže se skládají z týchž prvků; zapisujeme $A = B$.
Platí $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ a $B \subset A$.

Operace s množinami:
Sjednocení množin: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ ("x patří do A nebo x patří do B") znak

"$\vee$" znamená disjunkci (viz odstavec 1.2);
Průnik množin: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ ("x patří do A a zároveň x patří do B")
znak "$\wedge$" znamená konjunkci (viz odstavec 1.2);
Množiny X a Y jsou *disjunktní*, je-li $X \cap Y = \emptyset$.
Rozdíl množin: $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ ("x patří do A a nepatří do B");
Doplněk množiny $A \subset E$ do množiny E definujeme rovností $A_E = E - A$;
jinak řečeno: $x \in A_E \Leftrightarrow x \in E \wedge x \notin A$.

Vlastnosti sjednocení a průniku: $A \cup B = B \cup A$, $\quad A \cap B = B \cap A$ (komutativnost),
$A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
Další označení:
$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ ... sjednocení konečného souboru (systému množin),
$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k$ ... sjednocení nekonečného souboru (systému množin),
$x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k \Leftrightarrow \exists$ (alespoň jedno) $k \in \mathbb{N} : x \in S_k$,
$\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$ ... průnik konečného počtu množin,
$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} P_k = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \cdots$ ... průnik nekonečného počtu množin,
$x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} P_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : x \in P_k$.

Kartézský součin množin A, B definujeme jako množinu uspořádaných dvojic prvků $a \in A$, $b \in B$ a zapisujeme $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.
Speciálně: $A \times A = A^2$; $A \times A \times A = A^3$, atd., $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Kartézský součin není komutativní: $A \times B \neq B \times A$, pokud $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ a $A \neq B$.

1.2 Logické symboly, výroky

Výrok V je sdělení, u něhož má smysl hovořit o pravdivosti či nepravdivosti, přičemž platí právě jedna možnost.
Negaci výroku V označujeme V', $\overline{V}$, $nonV$, $\neg V$:
Výrok V je pravdivý právě tehdy, když $\overline{V}$ je nepravdivý.

Příklad $V : x \in A$; $\quad \overline{V} : x \notin A$.

$\square$

Složené výroky:
Konjunkce $V_1 \wedge V_2$ je pravdivá právě tehdy, když jsou pravdivé oba výroky; v ostatních případech je konjunkce nepravdivá.

Disjunkce $V_1 \vee V_2$ je pravdivá, je-li pravdivý alespoň jeden výrok.

Implikace $V_1 \Rightarrow V_2$ je nepravdivá, je-li V_1 pravdivý a V_2 nepravdivý; v ostatních případech je implikace pravdivá.
Slovní vyjádření: z V_1 plyne V_2,
V_1 je postačující pro V_2,
V_2 je nutné pro V_1.

Ekvivalence $V_1 \Leftrightarrow V_2 = (V_1 \Rightarrow V_2) \wedge (V_2 \Rightarrow V_1)$ je pravdivá, jsou-li oba výroky pravdivé nebo oba nepravdivé.
Slovní vyjádření: V_1 právě tehdy, když V_2,
V_1 je nutné a stačí pro V_2,
V_2 je nutné a stačí pro V_1.

Příklad Vytvořte nové (složené) výroky pomocí logických operací a posuďte jejich pravdivost:
V_1 : Daný trojúhelník je pravoúhlý.
V_2 : V daném trojúhelníku platí Pythagorova věta.

□

Kvantifikované výroky

1. Výrok $\forall x \in M : V(x)$ znamená, že
   pro každý prvek $x \in M$ platí $V(x)$ (každý prvek $x \in M$ má vlastnost $V(x)$).

   Příklad
   $\forall x \in \mathbb{N} : x > 0 \ldots$ "každé přirozené číslo x je kladné" – pravdivý výrok,
   $\forall x \in \mathbb{Q} : x < 5 \ldots$ "každé racionální číslo je menší než 5" – nepravdivý výrok.

   □

2. Výrok $\exists x \in M : V(x)$ znamená, že
   existuje prvek $x \in M$ s vlastností $V(x)$.

   Příklad
   $\exists x \in \mathbb{N} : x > 0 \ldots$ "existuje přirozené číslo, které je kladné" – pravdivý výrok;
   $\exists x \in \mathbb{Q} : x < 5 \ldots$ "existuje racionální číslo menší než 5" – pravdivý výrok;
   $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0 \ldots$ "existuje reálné číslo x takové, že $x^2 + 1 = 0$" – nepravdivý výrok.

   □

3. Výrok $\exists! x \in M : V(x)$ znamená, že
   existuje právě jeden prvek $x \in M$ s vlastností $V(x)$.

Negace kvantifikovaných výroků:
$\overline{\forall x \in M : V(x)} = \exists x \in M : \overline{V(x)}$;
$\overline{\exists x \in M : V(x)} = \forall x \in M : \overline{V(x)}$.

Složené kvantifikované výroky: $\forall x \in M \ \exists y \in N : V(x,y)$.

Příklad $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{N} : \ x < y$ (tzv. Archimédův princip).

$\square$

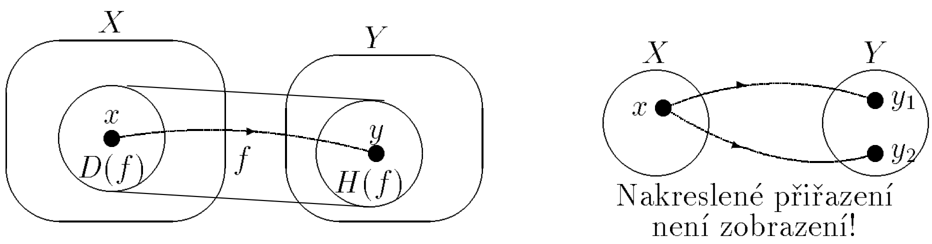
1.3 Zobrazení množin

Definice 1.1 Mějme dány neprázdné množiny X, Y a množinu $D \subset X$. Jestliže **každému** $x \in D$ je přiřazen **právě jeden** prvek $y \in Y$ předpisem (pravidlem) f, říkáme tomuto přiřazení *zobrazení* množiny D do množiny Y, nebo zobrazení z množiny X do množiny Y, a značíme jedním z následujících způsobů:

$$f : X \to Y,$$
$$f : D \to Y, \ D \subset X;$$
$$f : x \mapsto y, \ x \in D;$$
$$y = f(x), \ x \in D;$$
$$(x, y) \in f, \ x \in D, \ y \in Y;$$

Prvek $x \in D$ nazýváme: *vzor, argument, originál, (nezávisle) proměnná.*
Prvek $y \in Y$ nazýváme: *obraz, hodnota, závisle proměnná* a značíme $f(x)$: hodnota zobrazení v argumentu x.

Definiční obor zobrazení f: $D \equiv D(f)$ je množina všech vzorů.
Obor hodnot zobrazení f: $H(f) \equiv f(D)$ je množina všech obrazů ($H(f) \subset Y$).



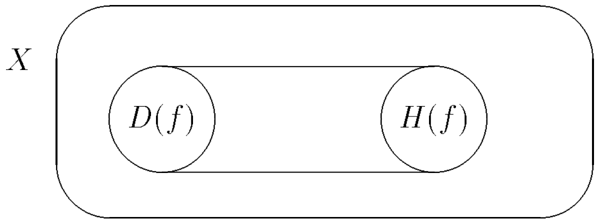
Obr. 1.1

Obsah definice 1.1 lze stručně vystihnout implikací:

$$\forall y_1, y_2 \in H(f), y_1 \neq y_2, \ \exists x_1, x_2 \in D(f), \ y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2.$$

Poznámka V různých situacích používáme pro zobrazení různých názvů: funkce, posloupnost, operátor, funkcionál, transformace, korespondence.

Poznámka Zobrazení $f : X \to Y$, v němž $Y \subset X$, tj. $f(D) \subset X$, a které zobrazuje $D \subset X$ na $f(D)$, se nazývá *transformací množiny* D v množině X.



Obr. 1.2

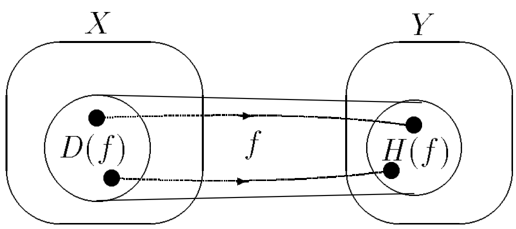
Definice 1.2 Zobrazení f se nazývá *surjektivní* (surjekce), je-li $H(f) = Y$ (zobrazení "na").

Stručně: $\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$.

Zobrazení f se nazývá *injektivní* (injekce, prosté), jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

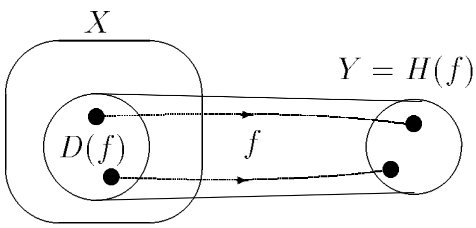
Jinak řečeno: $f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$.



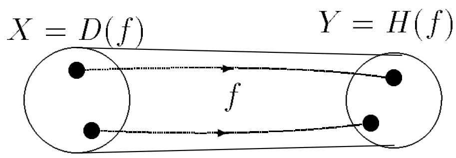
Obr. 1.3

Definice 1.3 Zobrazení $f^{-1} : H(f) \to D(f)$, které každému $y \in H(f)$ přiřazuje právě to $x \in D(f)$, pro něž $y = f(x)$, se nazývá *inverzním zobrazením* k zobrazení f.

Věta 1.1 Je-li zobrazení $f : X \to Y$ **prosté na** $H(f)$, potom na množině $H(f)$ existuje zobrazení $f^{-1} : H(f) \to D(f)$.



Obr. 1.4



Obr. 1.5

Příklad
Je-li f prosté **do** Y, tj. prosté z $X \to Y$, potom obecně na celé množině Y definovat inverzní zobrazení nelze! Pouze když f je prosté **na** Y!

□

Příklad
Funkce $y = \sin x$; $D = \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ je prosté zobrazení do $\langle 0, +\infty)$. Inverzní zobrazení na celém $\langle 0, +\infty)$ definovat nelze!

□

Definice 1.4 Zobrazení f se nazývá *bijektivní (vzájemně jednoznačné)*, je-li **prostým** zobrazením množiny **na** množinu:

$$\textbf{surjekce} \wedge \textbf{injekce} = \textbf{bijekce}$$

Bijektivní zobrazení je tedy charakterizováno těmito dvěma vlastnostmi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) - \text{injekce} \\ \forall y \in Y \ \ \exists x \in X : f(x) = y - \text{surjekce} \end{array}\right\} \text{bijekce}$$

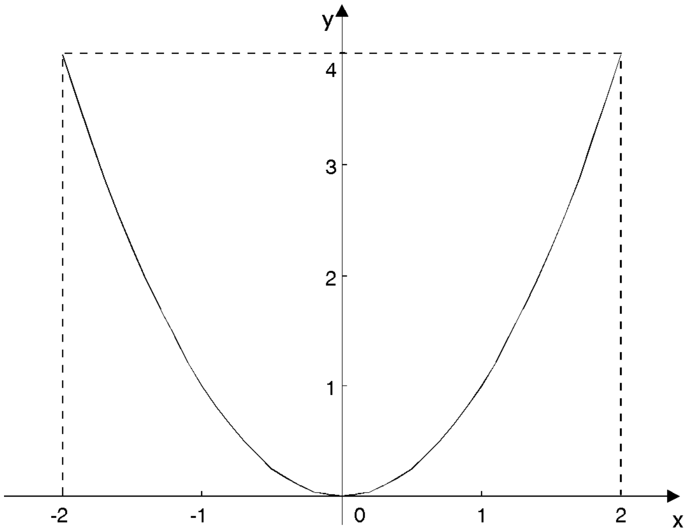
Příklad Zobrazení (viz obr. 1.6)

$$f : x \mapsto x^2, \text{ resp. } y = x^2$$

je pro $D(f) = \langle 1, 2\rangle$: injekce $\langle 1, 2\rangle$ do $\langle 0, +\infty)$, surjekce $\langle 1, 2\rangle$ na $\langle 1, 4\rangle$;
pro $D(f) = \langle -1, 1\rangle$: surjekce $\langle -1, 1\rangle$ na $\langle 0, 1\rangle$, není injektivní.

Zobrazení $f : y = x^2$, např. pro $D(f) = \langle 1, 2\rangle$, $H(f) = \langle 1, 4\rangle$, je **bijektivní**, tj. je prosté a je zobrazením "na".

□



Obr. 1.6

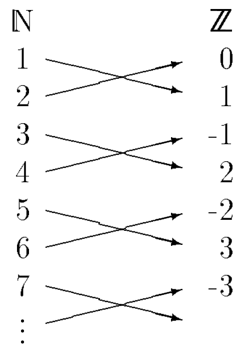
1.4 Spočetné a nespočetné množiny

Definice 1.5 Množiny $A,\ B$ se nazývají *ekvivalentní* (značíme $A \sim B$), jestliže existuje bijektivní (vzájemně jednoznačné) zobrazení $f: A \to B$, takové, že $A = D(f),\ B = H(f)$. Říkáme také, že množiny $A,\ B$ mají *stejnou mohutnost* a píšeme

$$m(A) = m(B) \quad \text{nebo} \quad |A| = |B|.$$

Příklad

Mějme množinu přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ a množinu celých čísel $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$. Existuje (lze je sestrojit) zobrazení f, které lichým číslům z $\mathbb{N}$ přiřadí kladná celá čísla a sudým číslům z $\mathbb{N}$ přiřadí záporná čísla a nulu podle znázornění:



$$f: n \mapsto f(n):$$

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & ,\ n \text{ liché;} \\ \dfrac{2-n}{2} & ,\ n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Obr. 1.7

Toto zobrazení je bijektivní (vzájemně jednoznačně zobrazuje množinu $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{Z} \Rightarrow m(\mathbb{N}) = m(\mathbb{Z})$, tj. množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ mají stejnou mohutnost).

$\square$

Příklad
Množiny $\langle 0,1\rangle \subset \mathbb{R}$, $\langle 0,2\rangle \subset \mathbb{R}$ mají stejnou mohutnost, tj. jsou ekvivalentní, neboť např. zobrazení $f: y = 2x,\ x \in \langle 0,1\rangle,\ y \in \langle 0,2\rangle$ zobrazuje tyto intervaly vzájemně jednoznačně na sebe.

$\square$

Definice 1.6 Označíme $\mathbb{N}_n = \{1,2,\dots,n-1,n\}$; $m(\mathbb{N}_n) = n$.
Množina A se nazývá *konečná*, je-li $A \sim \mathbb{N}_n$ pro nějaké n, tj. $m(A) = n$. Říkáme, že A má n prvků; pro $A = \emptyset$ klademe $m(A) = 0$.
Množina B se nazývá *spočetná*, je-li $B \sim \mathbb{N}$.
Množina C se nazývá *nespočetná*, není-li ani konečná ani spočetná, tj. $C \not\sim \mathbb{N}_n$, $C \not\sim \mathbb{N}$, tj. je nekonečná a není spočetná.

Poznámka
Konečná množina má tu vlastnost, že její **vlastní** podmnožina (tj. taková, která se nerovná původní množině) nemá stejnou mohutnost.
Nekonečné množiny tuto vlastnost nemají. Vlastní podmnožina nekonečné množiny **může** mít stejnou mohutnost.

Definice 1.7 Zobrazení $f: \mathbb{N} \to B$, $\mathbb{N} \equiv D(f)$, (B je množina nějakých prvků - např. čísel, bodů, vektorů, atd.) se nazývá *posloupností (prvků z B)*.

Příklady zápisu posloupností:

1. výpisem přiřazených prvků = množina obrazů
   $\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots\} \equiv H(f)$;
2. $\{b_n\}$ nebo $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – zkrácený zápis množiny obrazů;
3. $f: n \mapsto b_n$ nebo $b_n = f(n)$, např. $b_n = \dfrac{n+1}{n}$;
4. obraz b_n se vyjádří pomocí předcházejících obrazů: *rekurentně.*

Obraz b_n přirozeného čísla n se nazývá *n-tý člen posloupnosti.*

Věta 1.2 Každá **nekonečná** podmnožina E **spočetné** množiny B je spočetná množina, tj. platí implikace

$$\left.\begin{array}{l} B \sim \mathbb{N}, \\ E \subset B, \\ E \not\sim \mathbb{N}_n \text{ pro žádné } n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow E \sim \mathbb{N}$$

Důkaz Podle předpokladu je B spočetná množina, tj. $B \sim \mathbb{N}$. Existuje proto bijekce (vzájemně jednoznačné zobrazení) $f : \mathbb{N} \to B$, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřadí právě jedno $b_n \in B$:

$$B = \{b_1, b_2, \underline{b_3}, b_4, \underline{b_5}, b_6, b_7, \underline{b_8}, \ldots\},$$

E je nekonečná podmnožina B (např. ozn. podtržením). Nechť n_1 je nejmenší přirozené číslo takové, že $b_{n_1} \in E$.

Nechť $n_2 > n_1$ je nejmenší přirozené číslo takové, že $b_{n_2} \in E, \ldots$ atd. Takže $E = \{b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots\} = \{b_{n_k}\}$. Zobrazení $g : k \to b_{n_k},\ k \in \mathbb{N}$ je bijektivní (vzájemně jednoznačné) $\Rightarrow E \mapsto \mathbb{N}$ (tj. E je spočetná množina).

Věta 1.3 Nechť $\{A_k\}$ je spočetný systém (posloupnost) spočetných množin. Potom množina $S = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ je spočetná. Jinými slovy:

$$\text{Je-li } A_k \sim \mathbb{N} \text{ pro každé } k \in \mathbb{N}, \text{ pak } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sim \mathbb{N}.$$

Důkaz Nechť prvky spočetných množin A_k jsou "očíslovány" takto:

$$\left.\begin{array}{cccccccccc}
A_1: & a_1^1 & & a_2^1 & & a_3^1 & & a_4^1 & a_5^1 & \ldots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
A_2: & a_1^2 & & a_2^2 & & a_3^2 & & a_4^2 & a_5^2 & \ldots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
A_3: & a_1^3 & & a_2^3 & & a_3^3 & & a_4^3 & a_5^3 & \ldots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
A_4: & a_1^4 & & a_2^4 & & a_3^4 & & a_4^4 & a_5^4 & \ldots \\
 & & \nearrow & & & & & & &
\end{array}\right\}$$

S je sjednocení všech zde uvedených prvků, obecně $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

Definujeme bijekci $f : \mathbb{N} \to S$ (očíslování prvků množiny S) pomocí šipek. Sestavíme posloupnost podle šipek

$$\{a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_1^3, a_2^2, a_3^1, a_1^4, \ldots\};$$

přitom vynecháváme ty prvky, které se případně vyskytly už dříve (S je sjednocení). Proto S je (nekonečná) podmnožina spočetné množiny (prvky jsou očíslovány, ale některé mohou být vynechány). Podle věty 1.2 je S spočetná množina.

Důsledek 1 Sjednocení konečného systému spočetných množin je spočetná množina.

Důsledek 2 Sjednocení spočetného systému konečných množin je spočetná množina nebo konečná množina.

Důsledek 3 Množina uspořádaných dvojic (resp. n-tic) přirozených čísel, tj. množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (resp. $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}_{\text{n-krát}}$), je spočetná množina (plyne z důsledku 1).

Důsledek 4 Množina racionálních čísel je spočetná: $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ (plyne z důsledku 3, neboť $r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow r = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$).

Definice 1.8 *Nekonečným desetinným rozvojem* nazýváme výraz

$$a = a_0, a_1\ a_2\ a_3\ \ldots,$$

kde a_0 je libovolné celé číslo a každé a_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ je jedna z číslic $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$. Jestliže od určitého místa počínaje, jsou v desetinném rozvoji samé nuly, potom hovoříme o *konečném desetinném rozvoji*

$$a_0, a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_k\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots \qquad \text{nebo} \qquad a_0, a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_k.$$

Věta 1.4 Množina všech nekonečných desetinných je *nespočetná* (tj. není ani konečná ani spočetná).

Důkaz sporem. Předpokládejme, že množina všech nekonečných desetinných rozvojů je spočetná a označme ji

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}.$$

Takže:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0^{(1)}, a_1^{(1)}\ a_2^{(1)}\ a_3^{(1)}\ \ldots, \\ x_2 &= a_0^{(2)}, a_1^{(2)}\ a_2^{(2)}\ a_3^{(2)}\ \ldots, \\ x_3 &= a_0^{(3)}, a_1^{(3)}\ a_2^{(3)}\ a_3^{(3)}\ \ldots, \\ &\vdots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Vybereme desetinný rozvoj $x = b_0, b_1\ b_2\ b_3\ \ldots$ takto:

$$b_0 \ \text{ libovolné}, \ b_1 \neq a_1^{(1)},\ b_2 \neq a_2^{(2)},\ b_3 \neq a_3^{(3)},\ \ldots\ \text{atd.}$$

Odtud plyne, že x nepatří do posloupnosti $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, tj. předpoklad, že všechny desetinné rozvoje lze seřadit do posloupnosti, je **nepravdivý**, což je spor s naším předpokladem.

1.5 Reálná čísla

Definice 1.9 Říkáme, že každý nekonečný desetinný rozvoj reprezentuje *reálné číslo*. Jestliže se ve vyjádření $x = a_0, a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n\ a_{n+1}\ a_{n+2}\ \ldots$ od nějakého indexu členy nebo skupiny členů opakují, říkáme, že x je *periodický desetinný rozvoj*.

Definice 1.10 Konečný nebo periodický desetinný rozvoj určuje *racionální číslo*. Nekonečný neperiodický desetinný rozvoj určuje *iracionální číslo*.

Příklad
$x = \pi = 3,1415926\ldots;$
$\underline{x_4} = 3,1415$, čtyřmístná *desetinná aproximace - dolní*
$\overline{x_4} = 3,1416 = 3,1415 + 10^{-4}$, čtyřmístná *desetinná aproximace - horní*

$\square$

Definice 1.11 Reálné číslo $x = a_0, a_1\, a_2\, a_3\, \ldots$ *je větší* než reálné číslo $y = b_0, b_1\, b_2\, b_3\, \ldots$, značíme

$$x > y,$$

jestliže existuje index n takový, že $\underline{x_n} > \overline{y_n}$.

Příklad

$$x = 2,3636\overline{36}\ldots\ , \quad y = 2,3636\overline{35}\ldots\ .$$

Existuje $n = 6$:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x_6} &= 2,363636 \\ \overline{y_6} &= 2,363635 \end{aligned}\right\} \underline{x_6} > \overline{y_6}.$$

Tj. $x > y$.

$\square$

Příklad

$$\begin{array}{ll} x = 2,363999\ldots & ,\ y = 2,364000\ldots\ . \\ \left.\begin{array}{ll} \underline{x_1} = 2,3 & ,\ \overline{y_1} = 2,4, \\ \underline{x_2} = 2,36 & ,\ \overline{y_2} = 2,37, \\ \underline{x_3} = 2,363 & ,\ \overline{y_3} = 2,364, \\ \underline{x_4} = 2,3639 & ,\ \overline{y_4} = 2,3640, \\ \underline{x_5} = 2,36399 & ,\ \overline{y_5} = 2,36400, \end{array}\right\} & \text{vždy } \underline{x_n} < \overline{y_n}\ \ \forall n. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \left.\begin{array}{ll} \overline{x_1} = 2,4 & ,\ \underline{y_1} = 2,3, \\ \overline{x_2} = 2,37 & ,\ \underline{y_2} = 2,36, \\ \overline{x_3} = 2,364 & ,\ \underline{y_3} = 2,364, \\ \overline{x_4} = 2,364 & ,\ \underline{y_4} = 2,3640, \end{array}\right\} & \text{vždy } \overline{x_n} \geq \underline{y_n}\ \ \forall n. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Neexistuje n takové, pro které by platilo $\underline{x_n} > \overline{y_n}$ (nebo $\underline{y_n} > \overline{x_n}$), tj. $x = y$.

$\square$

Uvedenou definicí 1.11 je v množině desetinných rozvojů, tj. v oboru reálných čísel, zaveden vztah *nerovnosti*. Říkáme potom, že $\mathbb{R}$ je *uspořádaná množina*.

Důsledek Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\underline{a_n} \leq a \leq \overline{a_n}$;
Pro dvě reálná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platí $x = y$, jestliže neplatí ani jeden ze vztahů $x > y$, $x < y$.

Věta 1.5 Množina reálných čísel je nespočetná. Množina iracionálních čísel je nespočetná.

Důkaz vyplývá z věty 1.4.

Věta 1.6 Existuje vzájemně jednoznačné (bijektivní) zobrazení oboru reálných čísel a bodů přímky.

Poznámka Přímka, na níž je toto zobrazení definováno, se nazývá *reálná osa.* (Proto termíny "číslo x", "bod x na reálné ose" mají stejný význam).

Důsledek věty 1.6 je tvrzení, že pro libovolná dvě reálná čísla x, y, $x < y$, existuje (racionální) číslo $z \in \mathbb{R}$ ($z \in \mathbb{Q}$) takové, že $x < z < y$.

Poznámka **Algebraické operace** s reálnými čísly lze zavést pomocí operací s racionálními, resp. přirozenými čísly.

Definice 1.12 Je-li v nějaké množině M definována soustava **operací a vztahů**, říkáme, že v M je definována *algebraická struktura.*

Struktura množiny $\mathbb{R}$
Není účelné odvozovat všechny vlastnosti reálných čísel z definice 1.9 a z vlastností racionálních čísel. Proto tyto vlastnosti **vyslovíme** a díváme se potom na tyto výroky jako na **axiómy** množiny $\mathbb{R}$.

Operace v $\mathbb{R}$:
V množině $\mathbb{R}$ jsou definovány binární operace "+", ".":
Každým dvěma číslům $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ je přiřazeno jediné číslo označené $x + y \in \mathbb{R}$ nazývané *součtem* čísel x, y a jediné číslo označené $x.y \in \mathbb{R}$ nazývané *součinem* čísel x, y a platí:

A1: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \left.\begin{array}{c}(x+y)+z = x+(y+z)\\(x.y).z = x.(y.z)\end{array}\right\} asociativnost$

A2: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \left.\begin{array}{c}x+y = y+x\\x.y = y.x\end{array}\right\} komutativnost$

A3: Existuje právě jedno číslo $0 \in \mathbb{R}$ takové, že $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (existence neutrálního prvku ke sčítání).

A4: Existuje právě jedno číslo $1 \in \mathbb{R}$ takové, že $x.1 = x$ (existence neutrálního prvku k násobení).

A5: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno číslo označené $-x \in \mathbb{R}$ (opačné číslo) takové, že $x + (-x) = 0$.

A6: Pro každé $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$ existuje právě jedno číslo $y \in \mathbb{R}$ takové (tzv. převrácené číslo), že $x.y = 1$; značíme $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

A7: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ - *distributivnost*

Skutečnost, že reálná čísla mají výše uvedené vlastnosti, vystihujeme rčením, že množina $\mathbb{R}$ je vybavena *algebraickou strukturou* uvedeného typu. Připomínáme, že místo zápisu $x \cdot y$ většinou píšeme xy.

Uspořádání v $\mathbb{R}$
Můžeme-li prvky nějaké množiny "porovnávat", říkáme, že množina je *uspořádaná*, tj. že na množině je dána *relace uspořádání*.

U1: Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí právě jeden ze vztahů (*trichotomie*)

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

U2: Je-li $x < y \wedge y < z$, potom $x < z$ (*tranzitivnost*).

U3: Je-li $x < y$, potom $x + z < y + z$, (*monotonie sčítání*).

U4: Je-li $x > 0 \wedge y > 0$, potom $x.y > 0$ (*monotonie násobení*).

Poznámka Místo $x < y$ píšeme také $y > x$; výrok $x < y \vee x = y$ zapisujeme $x \leq y$.

Poznámka $0 < x < y$ je zápis konjunkce výroků $0 < x,\ 0 < y,\ x < y$!

1.6 Podmnožiny $\mathbb{R}$

Nechť $A \subset \mathbb{R},\ B \subset \mathbb{R}$.

Definice 1.13 1. Když $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in A : x \leq c$, říkáme, že množina A je *shora omezená*.

2. Když $\exists d \in \mathbb{R},\ \forall y \in B : d \leq y$, říkáme, že množina B je *zdola omezená*.

3. Množina C je *omezená*, je-li omezená zdola i shora.

4. Množina, která není omezená, se nazývá *neomezená.*

Příkladem omezené množiny je posloupnost

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\},$$

neboť platí $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Další příklady omezených množin:

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} - \textit{uzavřený interval},\\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} - \textit{otevřený interval},\\
\langle a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} - \textit{polouzavřený interval},\\
(a, b\rangle &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} - \textit{polootevřený interval}.
\end{aligned}$$

Vnitřkem těchto intervalů je vždy interval (a, b) (viz 1.8).

Příklad neomezených množin

$$\begin{aligned}
\langle a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},\\
(a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\},\\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\},\\
(-\infty, b\rangle &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\},\\
(-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

□

Definice 1.14 Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Číslo $a \in A$ se nazývá *minimum* množiny A, platí-li $a \leq x$, $\forall x \in A$. Číslo $b \in A$ se nazývá *maximum* množiny A, platí-li $x \leq b$, $\forall x \in A$. Značíme: $a = \min A,\ b = \max A$.

Příklad

$$\max\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} = 1, \qquad \min\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \quad \text{neexistuje.}$$

□

Definice 1.15 *Absolutní hodnotou* reálného čísla $x \in \mathbb{R}$ je větší z čísel x a $-x$, tj.

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Důsledek 1 Pro

$$x > 0 \text{ je } |x| = x,$$
$$x = 0 \text{ je } |x| = 0,$$
$$x < 0 \text{ je } |x| = -x.$$

Důsledek 2 Množina $C \subset \mathbb{R}$ je omezená právě tehdy, když existuje číslo $c > 0$ takové, že

$$|x| \leq c \quad \forall x \in C.$$

Příklad

$$(-5, 5) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 5\} = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 5\},$$
$$\langle -a, a \rangle = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} : -a \leq x \leq a\},$$
$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : -\varepsilon < x - a < \varepsilon\},$$
$$\{x \in \mathbb{R} : |x| > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty),$$
$$\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq a\} = (-\infty, -a\rangle \cup \langle a, +\infty).$$

□

Vlastnosti absolutní hodnoty:

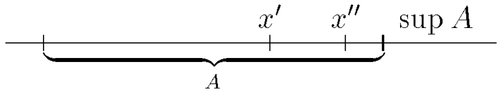
1. $\forall a \in \mathbb{R} : |a| \geq a$,
2. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|$ *(trojúhelníková nerovnost)*,
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : \Big||a| - |b|\Big| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$, číslo $|a - b|$ nazýváme *vzdáleností* bodů a, b na reálné ose,
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |ab| = |a|.|b|$,
5. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0 : \left|\frac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$,
6. $\forall a \in \mathbb{R} : |a|^2 = a^2$,
7. $\forall a \in \mathbb{R} : \sqrt{a^2} = |a|$.

1.7 Supremum a infimum číselné množiny

Definice 1.16 Nechť A je neprázdná podmnožina množiny $\mathbb{R}$.

a) *Supremem množiny* A je číslo $\sup A$, které má tyto vlastnosti:

   1. $\forall x \in A : x \leq \sup A$ (všechna čísla množiny A jsou menší nebo rovna $\sup A$).



Obr. 1.8

2. $\forall x' \in \mathbb{R} : x' < \sup A \;\; \exists x'' \in A : x'' > x'$ (pro každé číslo x' menší než $\sup A$ existuje v množině A číslo x'', které je větší než x').
   Jinak řečeno: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x'' \in A : \sup A - \varepsilon < x''$.

b) *Infimem množiny* A je číslo $\inf A$, které má tyto vlastnosti:

1. $\forall x \in A : x \geq \inf A$ (všechna čísla množiny A jsou větší nebo rovna $\inf A$).
2. $\forall x' \in \mathbb{R} : x' > \inf A \;\; \exists x'' \in A : x'' < x'$ (pro každé číslo x' větší než $\inf A$ existuje v množině A číslo x'', které je menší než x').
   Jinak řečeno: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x'' \in A : x'' < \inf A + \varepsilon$.

Příklad

$$\sup(a,b) = b, \quad \sup\langle a,b\rangle = b = \max\langle a,b\rangle.$$

"Maximum je supremum, které je prvkem dané množiny."

□

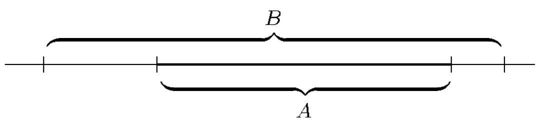
Věta 1.7 Nechť v množině $B \subset \mathbb{R}$ existuje $\max B$ (resp. $\min B$). Potom $\max B = \sup B$ (resp. $\min B = \inf B$).

Důkaz plyne přímo z definice suprema.

Věta 1.8

a) $B \neq \emptyset \Rightarrow \sup B \geq \inf B$.

b) $A \subset B \Rightarrow \begin{cases} \sup A \leq \sup B, \\ \inf A \geq \inf B. \end{cases}$



Obr. 1.8':

c) Konečná množina má vždy maximum a minimum.

Definice 1.17 Množina uzavřených intervalů

$$\Big\{\langle a_n, b_n\rangle,\ n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{R},\ b_n \in \mathbb{R}\Big\}$$

se nazývá *systém do sebe vložených intervalů*, platí-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ inkluze

$$\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle \subset \langle a_n, b_n\rangle.$$

Věta 1.9 (princip vložených intervalů) Libovolný systém do sebe vložených intervalů má neprázdný průnik.

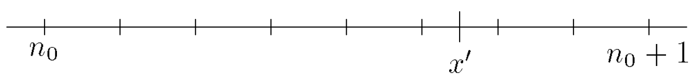
Věta 1.10 (o existenci suprema a infima).

a) Každá neprázdná shora omezená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má právě jedno supremum.

b) Každá neprázdná zdola omezená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má právě jedno infimum.

Důkaz (hlavní myšlenka) Je-li množina A shora omezená, existuje celé číslo n_0 takové, že

1. $\forall x \in A : x < n_0 + 1$;
2. $\exists x' \in A : x' \geq n_0$.



Obr. 1.9

Interval $\langle n_0, n_0+1\rangle$ rozdělíme na deset stejných částí délky 10^{-1}. Existuje číslo n_1 $(0 \leq \leq n_1 \leq 9)$ takové, že

$$\langle n_0, n_1\ ;\ n_0, n_1 + 10^{-1}\rangle \cap A \neq \emptyset$$

a přitom platí

1. $\forall x \in A : x < n_0, n_1 + 10^{-1}$;
2. $\exists x' \in A : x' \geq n_0, n_1$.

Interval $\langle n_0, n_1\ ;\ n_0, n_1 + 10^{-1}\rangle$ opět rozdělíme na 10 dílků délky 10^{-2} a vybereme číslo n_2 $(0 \leq n_2 \leq 9)$ takové, že

$$\langle n_0, n_1 n_2\ ;\ n_0, n_1 n_2 + 10^{-2}\rangle \cap A \neq \emptyset.$$

V tomto procesu pokračujeme a dostaneme nekonečný systém do sebe vložených intervalů. Podle věty 1.9 má tento systém neprázdný průnik. Vzhledem ke konstrukci výše uvedených intervalů je tento průnik jednobodová množina, kterou je reálné číslo

$$n_0,\ n_1\ n_2\ n_3\ \dots\ .$$

O tomto čísle je možné dokázat, že splňuje obě vlastnosti suprema dané definicí 1.16. Existence infima se dokáže analogicky.

Poznámka Množina, která není shora omezená, nemá supremum – potom píšeme $\sup A = +\infty$.
Množina, která není zdola omezená, nemá infimum – píšeme však $\inf A = -\infty$.
Pro prázdnou množinu $\emptyset$ klademe: $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.
Pozor!
Zápis $\sup A = 3$ čteme: "množina A je shora omezená a má suprémum 3;
zápis $\sup A = +\infty$ čteme: "množina A není shora omezená;
zápis $\inf A = +\infty$ čteme: "množina A je prázdná".
Podobně v ostatních případech.

1.8 Topologie číselné osy

Definice 1.18 Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$. *Okolím (r-okolím)* bodu x_0 rozumíme otevřený interval $(x_0 - r, x_0 + r)$ a značíme $U(x_0, r)$ nebo stručněji $U(x_0)$. Tj. r-okolí bodu x_0 je definováno takto:

$$U(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}.$$

Dále:

$U^+(x_0, r) = \langle x_0, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x - x_0 < r\}$	... *pravostranné (pravé) okolí,*
$U^-(x_0, r) = (x_0 - r, x_0\rangle = \{x \in \mathbb{R} : -r < x - x_0 \le 0\}$	... *levostranné (levé) okolí,*
$P(x_0, r) = U(x_0, r) - \{x_0\} = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$	... *prstencové redukované okolí* ("okolí bodu bez daného bodu")
$P^+(x_0, r) = (x_0, x_0 + r)$	... *pravé prstencové okolí*
$P^-(x_0, r) = (x_0 - r, x_0)$	... *levé prstencové okolí*

Definice 1.19 Bod $a \in A \subset \mathbb{R}$ se nazývá *vnitřním bodem množiny A*, existuje-li okolí $U(a)$, pro které je $U(a) \subset A$.
Množina vnitřních bodů množiny A se nazývá její *vnitřek* a značí se $\operatorname{int} A$.
Bod $b \in \mathbb{R}$ se nazývá *hraničním bodem množiny A*, jestliže každé okolí $U(b)$ obsahuje jak body, které do A patří, tak body, které do A nepatří.

Množina hraničních bodů monžiny A se nazývá *hranicí množiny* A a značí se ∂A.

Množina $\overline{A} = A \cup \partial A$ se nazývá *uzávěr množiny* A. Množina A se nazývá *uzavřená*, je-li $A = \overline{A}$.

Bod x se nazývá *hromadným bodem množiny* A, jestliže v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny A. Bod $x \in A$, který není hromadným bodem množiny A, se nazývá *izolovaným bodem množiny* A.

Množina, jejíž všechny body jsou izolované, se nazývá *diskrétní množina.*

Množina A je *otevřená*, má-li tuto vlastnost: $\forall x \in A \ \ \exists \varepsilon > 0 : U(x, \varepsilon) \subset A$.

Poznámka Systém okolí zavedených v definici 1.18 tvoří tzv. *topologii reálné osy.*

Souvislost $\mathbb{R}$

Souvislost množiny $\mathbb{R}$ je vystižena větou 1.6; znamená to, že množina $\mathbb{R}$ nemá "mezery". Souvislost množiny $\mathbb{R}$ můžeme vyjádřit slovy takto:

"Neexistují dvě *otevřené* podmnožiny $\mathbb{R}$ takové, že:

$$(A \cup B = \mathbb{R}) \wedge (A \cap B = \emptyset)."$$

1.9 Cvičení

1.9.1

Buďte X_λ, Y $(\lambda \in \Lambda)$ množiny. Ukažte, že platí

$$Y - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda);$$

$$Y - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda).$$

(De Morganova pravidla).

Důkaz 1. Nechť $x \in Y - \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Potom je $x \in Y, x \notin \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, tedy $x \notin X_\lambda$, pro $\forall \lambda$. Odtud plyne, že $x \in Y - X_\lambda$ pro $\forall \lambda$, tedy $x \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} \Big(Y - X_\lambda\Big)$. Tím jsme ukázali, že $Y - \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \subset \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} \Big(Y - X_\lambda\Big)$.

2. Obráceně, buď $x \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda)$. Potom je $x \in Y - X_\lambda$ pro $\forall \lambda$, tedy $x \notin X_\lambda$ pro $\forall \lambda$ a také $x \notin \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Neboli $x \in Y - \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ a platí, že $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda) \subset Y - \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.
V důkazu bylo využito vlastnosti:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

Poznámka Druhé tvrzení se dokáže analogicky. Množina Λ může být libovolná množina, např. interval (0,1), většinou však bude $\Lambda = \mathbb{N}$ nebo bude Λ podmnožinou $\mathbb{N}$.

1.9.2

Určete vzájemný vztah množin X a Y (tj. $X = Y, X \subset Y, Y \subset X$), jestliže

1. $X = A \cup (B - C), Y = (A \cup B) - (A \cup C)$
2. $X = (A \cap B) - C, Y = (A - C) \cap (B - C)$
3. $X = A - (B \cup C), Y = (A - B) \cup (A - C)$

Řešení

1. $X \supset Y$; 2. $X = Y$; 3. $X \subset Y$.

1.9.3

K daným větám vyslovte věty obrácené:

1. Úhlopříčky kosočtverce půlí jeho úhly.
2. Je-li číslo dělitelné devíti, je jeho ciferný součet dělitelný devíti.

Řešení

1. Čtyřúhelník, jehož úhlopříčky půlí úhly čtyřúhelníka, je kosočtverec.
2. Je-li ciferný součet čísla dělitelný devíti, je číslo dělitelné devíti.

1.9.4

Vyslovte ve tvaru nutné a postačující podmínky věty:

1. Rovnostranný trojúhelník má vnitřní úhly stejné.
2. Jeden z kořenů kvadratické rovnice $ax^2 + bx = 0, a \neq 0$, je nulový.
3. V rovnoběžníku se úhlopříčky navzájem půlí.

Řešení

1. Trojúhelník je rovnostranný právě tehdy, má-li vnitřní úhly stejné. Nebo: Rovnost stran trojúhelníka je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby jeho vnitřní úhly byly stejné.
2. Rovnice $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, má alespoň jeden kořen nulový právě tehdy, je-li $c = 0$.
3. Ve čtyřúhelníku se úhlopříčky půlí právě tehdy, jde-li o rovnoběžník.

1.9.5

V následujících větách doplňte vynechaný text slovy: "je nutné", "stačí","je nutné a stačí"tak, aby byly pravdivé:

1. Aby součet dvou přirozených čísel byl dělitelný dvěma,..., aby každý sčítanec byl dělitelný dvěma.
2. Aby mnohočlen $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, byl dělitelný dvojčlenem $(x - a), \ldots$, aby číslo a bylo nulovým bodem tohoto mnohočlenu.
3. Aby celé číslo bylo dělitelné stem,..., aby bylo dělitelné deseti.
4. Aby celé číslo bylo dělitelné stem,..., aby bylo dělitelné tisícem.

Řešení

1. stačí; 2. je nutné a stačí; 3. je nutné; 4. stačí.

1.9.6

Buďte X, Y, Z množiny, $f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to X$ zobrazení. Jsou-li mezi zobrazeními $h \circ g \circ f, g \circ f \circ h, f \circ h \circ g$ dvě zobrazení *na* a třetí prosté nebo dvě prostá a třetí *na*, pak jsou všechna tři zobrazení f, g, h prostá zobrazení *na*. Dokažte.

Důkaz Označme $F = h \circ g \circ f, G = f \circ h \circ g, H = g \circ f \circ h$. Zřejmě platí následující implikace
1) Je-li F prosté, je f prosté.
2) Je-li F *na*, je h *na*.
3) Je-li F *na* a H bijekce, je $h^{-1} \circ F$ *na*.
4) Je-li H prosté a h bijekce, pak $H \circ h^{-1}$ je prosté.

1. Nechť např. F a G jsou zobrazení *na* a H je prosté. Poněvadž F je *na*, je podle vlastnosti 2) h *na*, H je prosté, je podle vlastnosti 1) h také prosté. Odtud plyne, že h a tedy i h^{-1} jsou bijekce.
   Dále je F *na*, je tedy *na* také $h^{-1} \circ F = g \circ f$. H je prosté, je tedy podle vlastnosti 4) prosté i $H \circ h^{-1} = g \circ f$. Tedy $g \circ f$ je bijekce.
   Nyní je G *na* a podle 2) je f *na*, $g \circ f$ je prosté, je tedy podle první vlastnosti prosté i f a f je tedy bijekce.
   Konečně $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ je bijekce (složení dvou bijekcí).
2. Nechť F je zobrazení *na*, G a H jsou prostá. Podle bodu a) je h bijekce a stejně tak $g \circ f$. Poněvadž je však G prosté, je g také prosté a z toho, že $g \circ f$ je zobrazení *na* plyne, že g je také zobrazení *na*. Neboli g je bijekce a $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ je bijekce.

1.9.7

Ukažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $f : X \to Y$ je prosté zobrazení;
2. $f^{-1}(f(A)) = A$ pro $\forall A \subset X$;
3. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pro $\forall A, B \subset X$;
4. Je-li $A \cap B = \emptyset$, potom $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ pro $\forall A, B \subset X$;
5. Pro libovolnou dvojici $B \subset A \subset X$ je $f(A - B) = f(A) - f(B)$.

Návod: Dokažte řadu implikací (1.) $\Rightarrow$ (2.) $\Rightarrow$ (3.) $\Rightarrow$ (4.) $\Rightarrow$ (5.) $\Rightarrow$ (6.)

1.9.8

Ukažte, že následující množiny X a Y jsou ekvivalentní.

1. $X = \mathbb{N}, Y$ je množina všech sudých kladných čísel;
2. $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{Z}$;
3. $X = (0, 1), Y = (a, b), (a < b)$;
4. $X = (0, 1), Y = \mathbb{R}$;
5. $X = \mathbb{R}, Y = (0, +\infty)$;
6. $X = (0, +\infty), Y = (a, +\infty), a \in \mathbb{R}$.

1.9.9

Buď $\Omega = \{a; a : \mathbb{N} \to \{0; 1\}\}$ množina všech posloupností nul a jedniček. Pak Ω je nespočetná.

Důkaz Důkaz provedeme sporem.
Uspořádejme Ω do posloupnosti:

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots\} \\ a^{(2)} &= \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \ldots\} \\ a^{(3)} &= \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \ldots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Buď $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ definována vztahem $b_n = 1 - a_n^{(n)}, n \in \mathbb{N}$. Pak $b \in \Omega, b \neq a^{(n)}, n \in \mathbb{N}$. To je spor.

Poznámka Metoda důkazu se nazývá *Cantorova diagonalizační metoda.* Dokázali jsme tedy, že $2^{\mathbb{N}} = exp(\mathbb{N})$ je nespočetná. Obecně mohutnost $exp(A)$ je větší než mohutnost A pro každou množinu A.

1.9.10

Buďte $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Ukažte, že $\sup A \leq \sup B, \inf A \geq \inf B$.

Návod: Užijte definici suprema a infima.

1.9.11

Ukažte, že platí

1. $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ pro $\forall a, b \in \mathbb{R}$;
2. $|x + \sum_{k=1}^{n} x_k| \geq |x| - \sum_{k=1}^{n} |x_k|,\ x, x_k \in \mathbb{R}$;
3. $\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k,\ x_k \geq 0, k = 1, 2, \ldots, n.$

Návod:

1. K důkazu 2. nerovnosti využijte vztahu $a \leq |a|, -a \leq |a|$. Pro důkaz prvé nerovnosti využijte 2. nerovnost na výraz $|a| = |a + b - b|$.
2. Použijte předchozí příklad a tvrzení $|\sum_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.
3. Rozepište daný součin.

1.9.12

Najděte systém vložených intervalů tak, že

1. jejich průnik je prázdný;
2. jejich průnik obsahuje právě jeden bod;
3. jejich průnik obsahuje interval.

Návod: Volte pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ např.

1. $(a_n, b_n) = (0, \frac{1}{n})$,
2. $< a_n, b_n) =< 0, \frac{1}{n})$,
3. $< a_n, b_n >=< -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} >$.

2 Posloupnosti reálných čísel

2.1 Posloupnosti a operace s nimi

Jistě vás napadlo, jakým způsobem lze "sečíst" nekonečně mnoho čísel: Např.:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{1{,}570796327} - \frac{\pi^3}{2^3 3!}}_{0{,}924832229} + \frac{\pi^5}{2^5 5!}}_{1{,}004524855} - \frac{\pi^7}{2^7 7!}}_{0{,}9998431} + \frac{\pi^9}{2^9 9!}}_{1{,}000003541} - \dots = ? \qquad (= 1)$$

Je tím součtem číslo 1? Pokud ano, pak bychom to měli nějak exaktně prověřit. Např. tím, že můžeme vzít tolik sčítanců, aby jejich součet byl k 1 blíže, než je předem zvolená tolerance.

Definice 2.1 *Posloupnost reálných čísel (= reálná posloupnost)* je zobrazení, jehož definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ a oborem hodnot je nějaká podmnožina H množiny všech reálných čísel $\mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}$):

$$\mathbb{N} \to H : \quad n \mapsto x_n.$$

Budeme zapisovat: $\{x_n\}$; $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. V české literatuře se pro označení posloupností v poslední době častěji používá symbolů (x_n); $(x_n)_{n=1}^{\infty}$; $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Číslo x_n se nazývá *n-tý člen posloupnosti.* Posloupnost je dána, je-li dáno pravidlo, které umožní stanovit libovolný člen posloupnosti.

Příklad
$x_n = n^n$; $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; $x_n = (-1)^n$; ... atd.
$x_n = 3x_{n-1}$, $x_1 = 5$; $\quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$; ... atd.

$\square$

Poslední dvě rovnosti se nazývají *rekurentní vztahy.* Nalézt členy posloupnosti, která je dána rekurentním vztahem znamená řešit tzv. *diferenční rovnici.* V prvním případě diferenční rovnici prvního řádu, ve druhém případě diferenční rovnici druhého řádu.

Definice 2.2 (Operace s posloupnostmi) Nechť jsou dány posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. *Součtem, rozdílem, součinem, podílem* daných *posloupností* nazýváme posloupnosti $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ (zde $b_n \neq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$). *Číselný násobek:* $\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$; *nulová posloupnost:* $\{0, 0, 0, \ldots\}$.

2.2 Omezené a monotónní posloupnosti

Definice 2.3 Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *omezená*, existuje-li číslo $K > 0$ takové, že platí

$$|a_n| \leq K \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost $\{b_n\}$ se nazývá *shora (zdola) omezená*, existuje-li číslo M (m) takové, že

$$b_n \leq M \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (b_n \geq m \ \ \forall n \in \mathbb{N}).$$

Příklad
Posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ je omezená, neboť nerovnost $\left|\frac{n}{n+1}\right| \leq K$, tj. $\frac{n}{n+1} \leq K$ je splněna pro $n \geq -\frac{K}{K-1}$, když $K > 1$. Stačí volit např. $K = 2$ a uvedená nerovnost platí pro všechna n.

$\square$

Příklad
Posloupnost $\{2^n\}$ je neomezená, neboť nerovnost $2^n \leq K$ lze splnit pouze pro $n \leq \frac{\ln K}{\ln 2}$; tedy pro kladné K tato nerovnost platí pouze pro konečný počet indexů n. Neexistuje tedy kladné číslo K takové, aby uvedená nerovnost platila pro všechna n.

$\square$

Definice 2.4 Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

neklesající,	platí-li	$a_{n+1} \geq a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
nerostoucí,	platí-li	$a_{n+1} \leq a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
rostoucí,	platí-li	$a_{n+1} > a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
klesající,	platí-li	$a_{n+1} < a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Posloupnosti, pro jejichž členy platí **neostrá** nerovnost, se nazývají *monotónní*, v případě **ostré** nerovnosti hovoříme o *ostře (ryze) monotónní posloupnosti.*

Poznámka Definice 2.4 je příkladem "houževnatosti života" nevhodných termínů, které však jsme nuceni brát na vědomí. Na středních školách, a zdá se, že stále ještě i na vysokých školách, se užívají termíny neklesající, nerostoucí, rostoucí, klesající ve smyslu definice 2.4. Jsme však přesvědčeni, že by se mělo prosadit (nebo alespoň prosazovat) užívání termínů:

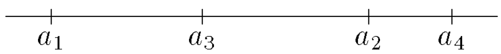
rostoucí	v případě, že	$a_{n+1} \geq a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
ostře rostoucí	v případě, že	$a_{n+1} > a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
klesající	v případě, že	$a_{n+1} \leq a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
ostře klesající	v případě, že	$a_{n+1} < a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Odtud pak je zřetelný význam termínu monotónní (tj. rostoucí, klesající), ostře monotónní (tj. ostře rostoucí, ostře klesající).

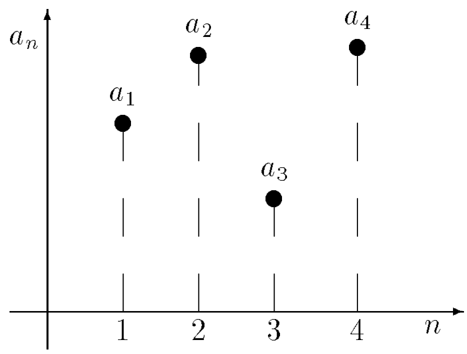
Termíny ve smyslu této poznámky více odpovídají "životní praxi". Např. růst životní úrovně znamená, že úroveň může v určitém období i stagnovat.

Geometrické znázornění posloupností

1. způsob: na reálné ose



2. způsob: v souřadnicové soustavě v rovině



Obr. 2.1 Znázorňování posloupností reálných čísel

Definice 2.5 Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a nechť $\{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$. Potom posloupnost $\{a_{k_n}\}$ se nazývá *posloupnost vybraná* z posloupnosti $\{a_n\}$ nebo také *podposloupnost* posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklad

$\{a_n\} = \{1, 3, 0, 5, -1, 7, -2, 9, \ldots\}$

$$\left.\begin{aligned} &\{a_{k_n}\} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \\ &\{b_{k_n}\} = \{1, 0, -1, -2, \ldots\} \\ &\{c_{k_n}\} = \{0, 5, -2, 9, \ldots\} \end{aligned}\right\} \text{vybrané podposloupnosti}$$

□

Definice 2.6 *Supremem* (resp. *infimem*) *posloupnosti* $\{x_n\}$ se rozumí supremum (resp. infimum) množiny $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$; značí se $\sup\{x_n\}$ (resp. $\inf\{x_n\}$).
Je-li posloupnost $\{a_n\}$ shora neomezená, píšeme $\sup\{a_n\} = +\infty$.
Je-li posloupnost $\{a_n\}$ zdola neomezená, píšeme $\inf\{a_n\} = -\infty$.

Příklad

$$\{x_n\} = \{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}; \ \sup\{x_n\} = +\infty, \quad \inf\{x_n\} = 1.$$

□

Věta 2.1 Z každé posloupnosti v $\mathbb{R}$ lze vybrat monotónní podposloupnost (tj. buď rostoucí nebo klesající).

2.3 Konvergentní posloupnosti

Definice 2.7 Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *konvergentní v* $\mathbb{R}$, má-li tuto vlastnost:

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ (n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon).$$

Čteme: existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takový, že pro všechna $n > n_0$ (tj. pro "skoro všechna n") platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ (tj. $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$).

Číslo a se nazývá *limita* dané posloupnosti. Píšeme

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a; \qquad \text{stručně: } a_n \to a,$$

a říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k číslu a.

Poznámka Je-li číslo a limitou, potom skoro všechny členy posloupnosti leží v ε-okolí $U(a, \varepsilon)$ čísla a, tj. $\forall n > n_0(\varepsilon)$ je $a_n \in U(a, \varepsilon)$.

Příklad
Konverguje-li $\{a_n\}$ k číslu a, potom každá vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}$ konverguje také k číslu a. Dokažte!

□

Příklad
Posloupnost

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{100}{101}, \dots, \frac{1000}{1001}, \dots\right\}$$

se **zdá být** konvergentní k číslu 1, neboť skoro všechny členy jsou blízko čísla 1.

Prověříme, zda nerovnost $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ je splněna. Úprava:

$$\left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Označíme-li $n_0(\varepsilon)$ celou část čísla $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ ($\varepsilon = 0,1;\ 1;\ 100;\ 1000$), potom skutečně pro každé $n > n_0$ je $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$, ε je libovolné kladné číslo.

□

Příklad
Dokažme, že $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, tj. že posloupnost $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ konverguje k nule. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Jistě platí

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Označíme n_0 celou část čísla $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

Závěr: Pro každé $\varepsilon > 0$ tedy existuje $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$ tak, že pro $n > n_0$ je také $n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

□

Příklad
Geometrická posloupnost $\{q^n\}$, $q \in \mathbb{R}$ je konvergentní právě tehdy, když $|q| < 1$ nebo když $q = 1$. Platí:

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ \text{neexistuje}, & \text{když } q = -1 \text{ nebo } |q| > 1. \end{cases}$$

Dokažte!

□

Příklad
Posloupnosti $\{2^n\}, \{(-2)^n\}$ nejsou konvergentní. Kdyby např. existovalo číslo $a > 0$ jako limita posloupnosti $\{2^n\}$, musely by platit nerovnosti

$$-\varepsilon < 2^n - a < \varepsilon,$$

pro libovolné $\varepsilon > 0$ a pro skoro všechna n. Musely by tedy platit důsledky uvedených nerovností pro všechna n:

$$\begin{aligned} 2^n &< \varepsilon + a, \\ n \ln 2 &< \ln(\varepsilon + a), \\ n &< \frac{\ln(\varepsilon + a)}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Je však vidět, že poslední nerovnost platí pouze pro konečný počet členů posloupnosti a nikoliv pro skoro všechna n.

□

Příklad
Určete posloupnosti, které mají následující vlastnosti:

1. $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}: \ \ (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$;
2. $\exists a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}: \ \ (n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$;
3. $\forall a_n \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \ \ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \ \exists n \in \mathbb{N}: \ \ (n > n_0 \quad \wedge \quad |a_n - a| \geq \varepsilon)$.

2.4 Vlastnosti konvergentních posloupností

Věta 2.2 (jednoznačnost limity) Každá konvergentní posloupnost má právě jednu limitu. (Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu; tj. jednu nebo žádnou).

Důkaz (sporem) Existence limity je zaručena předpokladem konvergence. Dokážeme tedy pouze jednoznačnost. Předpokládáme, že existují aspoň dvě různé limity a, b:

$$\lim a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon,\ n > n_1;$$

$$\lim a_n = b \neq a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon,\ n > n_2;$$

Vezmeme $n > \max(n_1, n_2) = n_0$ a $\varepsilon = \frac{1}{2}|b - a|$. Platí

$$|b - a| = |b - a_n + a_n - a| \leq |a_n - b| + |a_n - a| < \frac{1}{2}|b - a| + \frac{1}{2}|b - a|,$$

tj.

$$|b - a| < |b - a|\ ,$$

což je spor.

Věta 2.3 (konvergence a omezenost)

a) Každá konvergentní posloupnost je omezená.

b) (Bolzano-Weierstrass): Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost (odst. 2.2, definice 2.5).

Důkaz

a) Z předpokladu plyne

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \text{ pro } n > n_0.$$

Vezmeme-li

$$K = \max\left\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |a| + \varepsilon\right\},$$

potom platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnosti

$$-K \leq a_n \leq K.$$

b) Je-li posloupnost $\{a_n\}$ omezená, potom existuje uzavřený interval $I_1 = \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ takový, že $a_n \in I_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Rozdělíme I_1 na polovinu. Označíme I_2 tu **(uzavřenou) část** I_1, která obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$ (aspoň jedna část tuto vlastnost má). V tomto procesu pokračujeme a dostaneme systém $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ **do sebe vložených intervalů** délky $\beta_k - \alpha_k = \dfrac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{k-1}}$. V každém intervalu I_k vybereme jeden člen posloupnosti $\{a_n\}$ a označíme jej a_{n_k}, $n_{k+1} > n_k$, tj. $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$. Společný bod všech do sebe vložených intervalů označíme a. Potom $|a_{n_k} - a| \leq |\beta_k - \alpha_k| = \dfrac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{k-1}} \to 0$, $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = a$.

Věta 2.4 (o nerovnosti) Předpokládejme:

1. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti;
2. platí nerovnost $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna n. Potom

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

(Pozor! Z ostré nerovnosti $a_n < b_n$ obecně nevyplývá ostrá nerovnost mezi limitami).

Důkaz (sporem - hlavní myšlenka) Nechť $a > b$; $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Z předpokladů plyne platnost nerovností

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \quad b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon, \quad a_n \leq b_n.$$

Tj. nerovnosti

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon$$

musí platit pro každé $\varepsilon > 0$, a tedy i pro $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Potom $a - \frac{a-b}{2} < a_n \leq b_n < b + \frac{a-b}{2}$, a tedy $\frac{a+b}{2} < \frac{a+b}{2}$, což je spor.

Věta 2.5 (o sevření) Mějme posloupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ a předpokládejme:

1. $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro skoro všechna n, tj. pro $n > n_0$,
2. $\{a_n\}, \{c_n\}$ konvergují ke stejné limitě a.

Potom "sevřená" posloupnost $\{b_n\}$ také konverguje a je

$$\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n = a.$$

Důkaz Nechť a je limita posloupností $\{a_n\}, \{c_n\}$, tj. $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ a pro $n > n_1$; $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ a pro $n > n_2$. Tedy $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$ pro $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$, $-\varepsilon < b_n - a < \varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ a pro $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Je tedy $\lim b_n = a$.

Poznámka Z věty 2.5 (nazývané též "větou o dvou policajtech") speciálně plyne následující tvrzení: Je-li $|b_n| \leq |c_n|$ $\forall n > n_0$ a $\lim c_n = 0$, potom také $\lim b_n = 0$.

Příklad
Dokážeme, že

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Zřejmou rovnost $(1 + \sqrt[n]{n} - 1)^n = n$ upravíme pomocí binomické formule $(n > 1)$:

$$n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \ldots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n.$$

Protože

$$\sqrt[n]{n} > 1,$$

plyne z předchozí rovnosti nerovnost

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2,$$

tj.

$$0 < |\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n}}\,.$$

Protože $\lim \sqrt{\frac{2}{n}} = 0$, plyne z věty o sevření, že

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

$\square$

Příklad
Dokažme, že

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0\,, \quad a > 0\,.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a}{n_0} \leq \frac{1}{2}$. Potom pro $n > n_0$ platí

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0} a^{n-n_0}}{n_0!(n_0+1)\dots n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}\,.$$

Geometrická posloupnost s kvocientem $\frac{1}{2}$ konverguje k nule a z věty o sevření plyne naše tvrzení.

$\square$

Věta 2.6 (algebra limit) Nechť **reálné** posloupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou konvergentní a označme $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Potom i posloupnosti $\{a_n + b_n\}; \{a_n - b_n\}; \{a_n b_n\}; \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, $b_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, jsou konvergentní a platí:

1. $\lim \alpha a_n = \alpha a, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$.
3. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0!$ (když $b = 0$, nelze o konvergenci posloupnosti $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ tímto způsobem rozhodnout).
4. $\lim a_n b_n = ab$.

Důkaz Dokážeme 4. Ostatní důkazy si proveďte jako cvičení. Z konvergence $a_n \to a$, $b_n \to b$ vyplývá omezenost posloupností (věta 2.3 (a)), tj. existuje $K > 0$ takové, že $|a_n| < K$; $|b_n| < K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dále na základě trojúhelníkové nerovnosti platí:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|.$$

Z předpokladu vyplývá, že musí platit nerovnosti $|b_n - b| < \varepsilon$, $|a_n - a| < \varepsilon$ pro skoro všechna n a pro libovolné ε. Proto nerovnost

$$|a_n b_n - ab| < K.\varepsilon + |b|\varepsilon$$

platí pro skoro všechna n.

Poznámka (ilustrace komentáře k tvrzení 3) $\lim \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{1}{n}\right\}$ tedy konvergují. Ale

$$\left\{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right\} = \left\{\frac{n^2}{n}\right\} = \{n\}$$

nekonverguje! Naproti tomu

$$\left\{\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}\right\} = \left\{\frac{n}{n^2}\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$$

konverguje!

Příklad
Dokažte: Konverguje-li $\{a_n\}$ k nule, tj. $\lim a_n = 0$, a $\{b_n\}$ je (pouze) omezená, potom $\{a_n b_n\}$ konverguje k nule: $\lim a_n b_n = 0$. Zdůvodněte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

□

Příklad
Dokažte:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ ,\ a > 0.$$

Užijeme větu o sevření: Pro $a \geq 1$ jistě platí nerovnost

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n} \text{ pro } n > a \text{ (pro skoro všechna } n),$$

a dále víme, že

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1\ .$$

Pro $0 < a < 1$ je $\frac{1}{a} = b > 1$, tj.

$$1 = \lim \sqrt[n]{b} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Z věty 2.6 (3.) plyne, že

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1.$$

□

Věta 2.7 Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim a_n > \lim b_n$. Potom pro skoro všechna n platí $a_n > b_n$.

Důkaz si laskavý čtenář provede bez problémů sám. Je analogický důkazu věty 2.4.

Důsledek Je-li $\lim a_n > 0$, potom $a_n > 0$ pro skoro všechna n.

Definice 2.8 Posloupnost $\{x_n\}$ se nazývá *cauchyovská v* $\mathbb{R}$, má-li tuto vlastnost:

$$\{x_n\} \subset \mathbb{R}: \quad \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \forall n, m \in \mathbb{N} \ : \ n > n_0, \ m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Věta 2.8 Je-li posloupnost $\{x_n\}$ cauchyovská v $\mathbb{R}$, potom je omezená.

Důkaz je analogický důkazu věty 2.3 a). Proveďte jako cvičení.

2.5 Kritéria konvergence

Věta 2.9 (Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence).

1. **formulace:** Posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel je konvergentní v $\mathbb{R}$ právě tehdy, když je cauchyovská v $\mathbb{R}$.

2. **formulace:** Posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel je konvergentní v $\mathbb{R}$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n, m \in \mathbb{N} \ : \ n > n_0, \ m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Důkaz (z definice 2.8 je patrné, že obě formulace jsou ekvivalentní)

a) Když $\{a_n\}$ konverguje k číslu a, pak platí

$$\left.\begin{array}{l} |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \ n > n_0(\varepsilon) \\ |a_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \ m > n_0(\varepsilon) \end{array}\right\} \text{tj. } \forall m, n > n_0, \quad \text{platí}$$

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon,$$

a tedy posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská.

b) Je-li naopak $\{a_n\}$ cauchyovská, potom podle věty 2.8 je omezená a lze z ní vybrat konvergentní podposloupnost $\{a_{n_k}\}$, a označíme $\lim a_{n_k} = a$ (věta 2.3 b)). Pro každé $\varepsilon > 0$ a pro $n_k > n_0$ platí nerovnosti

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud máme

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Poznámka (ekvivalentní formulace definice 2.8)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \forall n > n_0 \ \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Stačí položit $m = n + p$, neboť p je libovolné přirozené číslo.

Věta 2.10 (konvergence monotónní posloupnosti; postačující podmínka konvergence) Je-li posloupnost $\{a_n\}$ omezená a monotónní, potom je konvergentní a konverguje k číslu

$$\lim a_n = \begin{cases} \sup\{a_n\}, & \text{pro neklesající posloupnost,} \\ \inf\{a_n\}, & \text{pro nerostoucí posloupnost.} \end{cases}$$

Říkáme, že omezenost a monotónie stačí ke konvergenci.

Důkaz Pro omezenou posloupnost existuje její supremum, tj. $\forall \varepsilon > 0$, existuje člen a_{n_0} takový, že

$$\sup\{a_n\} - \varepsilon < a_{n_0} \leq \sup\{a_n\}.$$

Je-li posloupnost neklesající, potom

$$\sup\{a_n\} - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \quad \text{pro } n > n_0.$$

Tedy

$$\sup\{a_n\} - \varepsilon < a_n,$$

neboli

$$|\sup\{a_n\} - a_n| < \varepsilon.$$

Analogicky se důkaz provede pro nerostoucí posloupnost.
Obrácené tvrzení neplatí. Konvergentní posloupnost je omezená (věta 2.3a), ale nemusí být monotónní.

Důsledek (vět 2.10 a 2.3a) Monotónní posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je omezená.

Definice 2.9 Pro omezenou posloupnost $\{a_n\}$ sestrojíme dvě monotónní posloupnosti $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ předpisem

$$\alpha_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \qquad \beta_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}\ .$$

Snadno ověříme, že $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$, $\beta_n \geq \beta_{n+1}$. Posloupnosti $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ jsou tedy omezené a monotónní a podle věty 2.10 jsou konvergentní. Jejich limity existují a označují se

$\lim \alpha_n = \underline{\lim}\, a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf a_n = \underline{a}$, tzv. *dolní limita* (*limes inferior*) posloupnosti $\{a_n\}$,

$\lim \beta_n = \overline{\lim}\, a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup a_n = \overline{a}$, tzv. *horní limita* (*limes superior*) posloupnosti $\{a_n\}$, Pro každou omezenou posloupnost $\{a_n\}$ zřejmě platí

$$\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n \, .$$

Odtud pak vyplývá, že

$$\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n \, ,$$

resp.

$$\underline{a} \leq \overline{a} \, .$$

Příklad
Určíme dolní a horní limitu posloupnosti

$$\{a_n\} = \left\{2, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{k+1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots\right\},$$

$$\{\alpha_n\}: \ \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \ldots \ \Rightarrow \ \underline{\lim}\, a_n = 0,$$

$$\{\beta_n\}: \ \beta_1 = 2, \beta_2 = \frac{3}{2}, \beta_3 = \frac{3}{2}, \beta_4 = \frac{4}{3}, \ldots \ \Rightarrow \ \overline{\lim}\, a_n = 1.$$

$$\sup a_n = 2; \quad \inf a_n = 0.$$

□

Příklad
Určíme dolní a horní limitu posloupnosti

$$\{b_n\} = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, -1, 0, \frac{2}{3}, -1, 0, \frac{3}{4}, -1, 0, \frac{4}{5}, \ldots\right\},$$

$$\{\alpha_n\}: \ \alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -1, \ldots \ \Rightarrow \ \underline{\lim}\, b_n = -1,$$

$$\{\beta_n\}: \ \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \ldots \ \Rightarrow \ \overline{\lim}\, b_n = 1.$$

□

Pamatuj:
Pro shora omezenou posloupnost $\{a_n\}$ existuje $\overline{\lim}\, a_n$.
Pro zdola omezenou posloupnost $\{a_n\}$ existuje $\underline{\lim}\, a_n$.

Věta 2.11 Omezená posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k a právě tehdy, když horní limita je rovna dolní limitě, tj. když $\underline{a} = \overline{a} = a$.

Důkaz si čtenář provede sám. Jako návod uveďme dva možné způsoby důkazu.

a) Připustíme-li, že $\underline{a} < a < \overline{a}$, dostaneme se do sporu s konvergencí.

b) Podle věty o sevření.

V odst. 2.3 jsme v rámci příkladu prověřovali pravdivost tvrzení o konvergenci vybrané podposloupnosti. Na základě předchozích výsledků můžeme dokázat i více:
Posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k číslu a právě tehdy, když k tomuto číslu konverguje **každá** z ní vybraná podposloupnost.

Pokud posloupnost $\{a_n\}$ není konvergentní, nemusí vybraná posloupnost konvergovat. Limita konvergentní vybrané posloupnosti se nazývá *částečná limita*. Označíme-li $\mathcal{A}$ množinu částečných limit omezené posloupnosti $\{a_n\}$, pak lze dokázat, že

$$\inf \mathcal{A} = \underline{a} \in \mathcal{A}\,,$$
$$\sup \mathcal{A} = \overline{a} \in \mathcal{A}\,,$$

tj. horní limita je největší částečná limita ($\max \mathcal{A} = \overline{a}$). Důkaz není triviální.

Příklad (důležitý)
Posloupnost $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je konvergentní v $\mathbb{R}$ a její limitou je iracionální číslo (základ přirozených logaritmů)

$$e \approx 2,718281828459045\ldots.$$

K důkazu se užije věta 2.10. Dokáže se, že daná posloupnost je omezená a rostoucí. Připomeňme, že uvedená posloupnost racionálních čísel není v množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ konvergentní, ale je pouze cauchyovská v $\mathbb{Q}$.
Omezenost:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{n!}\frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Členy v závorkách jsou menší než 1 a kladné, tj.

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}\,.$$

Protože pro $k > 1$ je $k! \geq 2^{k-1}$, dostaneme (zesílenou) nerovnost

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 3 \quad \text{(omezenost shora).}$$

Monotonie:

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{9}{4},\ x_3 = \frac{64}{27},\ \ldots;$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{[(n+2)n]^{n+1}\frac{1}{n}}{[(n+1)^{n+1}]^2\frac{1}{n+1}} = \frac{(\overbrace{n^2+2n}^{(n+1)^2-1})^{n+1}}{[(n+1)^2]^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} .$$

Podle Bernoulliovy nerovnosti $(1+x)^k > 1 + kx$ máme

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - (n+1)\frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{n+1} ,$$

tj.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \left[1 - \frac{1}{(n+1)}\right] \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1-1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1.$$

□

Příklad

Ukažme, že posloupnost určená rekurentním vztahem

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) , \quad a > 0,\ x_1 > 0 \text{ (libovolné)}$$

konverguje a že $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Protože $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \geq \sqrt{a}$ pro libovolné $x > 0$, potom $x_n \geq \sqrt{a}$ pro $n = 2, 3, 4 \ldots$. Proto nerovnost $x_{n+1} \leq x_n$ je ekvivalentní nerovnosti $x_n \geq \sqrt{a}$. Posloupnost je tedy nerostoucí a omezená zdola. Existuje tedy

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \overline{x} = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n}\right) .$$

Proto musí platit

$$\overline{x} = \frac{1}{2}\left(\overline{x} + \frac{a}{\overline{x}}\right) .$$

Odtud dostaneme, že $\overline{x} = \sqrt{a}$.

Vyšetřete uvedenou posloupnost pro případ $a < 0$ nebo $x_1 < 0$!

□

2.6 Divergentní posloupnosti

Definice 2.10 a) Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *divergentní*, jestliže není konvergentní.

Mezi divergentními posloupnostmi budou hrát významnou roli následující dva typy.

b) Posloupnost $\{a_n\}$ *diverguje k* $+\infty$, když

$$\forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n > E.$$

Označujeme

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \text{nebo} \quad a_n \to +\infty\,.$$

c) Posloupnost $\{a_n\}$ *diverguje k* $-\infty$, když

$$\forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n < -E.$$

Označujeme

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad \text{nebo} \quad a_n \to -\infty\,.$$

Poznámka Příkladem divergentní posloupnosti je posloupnost neomezená. Ovšem i omezené posloupnosti mohou být divergentní, např. $\{\sin n\}$, $\{(-1)^n\}$ atd.

Věta 2.12

a) Když posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k nule, potom posloupnost $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ diverguje k $\begin{cases} +\infty, & \text{pokud } a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}; \\ -\infty, & \text{pokud } a_n < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$ (obecněji: $a_n \to 0,\ a_n \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| \to +\infty$).

b) Když posloupnost $\{b_n\}$ diverguje k $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$, potom posloupnost $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ konverguje k 0 (pokud $b_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$) (obecněji: $|b_n| \to +\infty,\ b_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \to 0$).

Důkaz v případě a) vyplývá z platnosti implikace

$$|a_n| < \varepsilon,\ n > n_0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

V případě b) se zdůvodnění opírá o implikaci

$$|b_n| > E \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{E}\,.$$

Věta 2.13 (algebra divergentních posloupností) Stenograficky zapíšeme pouze základní výsledky:

a) $a_n \to +\infty,\ b_n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} a_n + b_n \to +\infty, \\ a_n b_n \to +\infty, \end{cases}$ O posloupnostech $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}, \{a_n - b_n\}$ nelze v tomto případě nic tvrdit.

b) $a_n \to +\infty,\ b_n \to -\infty \Rightarrow \begin{cases} a_n - b_n \to +\infty, \\ a_n b_n \to -\infty, \end{cases}$ O posloupnostech $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}, \{a_n + b_n\}$ nelze v tomto případě nic tvrdit.

c) $a_n \to +\infty,\ b_n \to b \Rightarrow \begin{cases} a_n + b_n \to +\infty, & \\ a_n b_n \to +\infty, & \text{pokud } b > 0, \\ a_n b_n \to -\infty, & \text{pokud } b < 0. \end{cases}$

d) $a_n \to a,\ b_n \to \pm\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0;$

$a_n \to a \neq 0,\ b_n \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \begin{cases} +\infty, & \text{pokud } \frac{a_n}{b_n} > 0, \\ -\infty & \text{pokud } \frac{a_n}{b_n} < 0. \end{cases}$

e) $a_n \to +\infty,\ \{b_n\}$ je omezená $\Rightarrow \begin{cases} a_n + b_n \to +\infty, \\ a_n b_n \to \begin{cases} +\infty, & b_n \geq c > 0, \\ -\infty, & b_n \leq -c < 0. \end{cases} \end{cases}$

Důkaz uvedených tvrzení dostaneme přímým užitím definice (a jsou to oblíbené náměty ke zkoušce z MA I).

Neurčité výrazy: Výrazem

"$\frac{0}{0}$"	nazveme posloupnost $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$,	pokud $a_n \to 0,\ b_n \to 0$;
"$\frac{\infty}{\infty}$"	nazveme posloupnost $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$,	pokud $a_n \to \pm\infty,\ b_n \to \pm\infty$;
"0^0"	nazveme posloupnost $\{a_n^{b_n}\}$,	pokud $a_n \to 0,\ b_n \to 0$;
"1^∞"	nazveme posloupnost $\{a_n^{b_n}\}$,	pokud $a_n \to 1,\ b_n \to +\infty$;
"$0 \cdot \infty$"	nazveme posloupnost $\{a_n b_n\}$,	pokud $a_n \to 0,\ b_n \to \pm\infty$.

Ve všech těchto případech nelze o konvergenci či divergenci rozhodnout přímým užitím vět 2.6, 2.12, 2.13. Například $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ je neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$, ale po úpravě $\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ lze užít větu 2.6. Ve složitějších případech se nemusíme "stydět" vypočítat n-tý člen pro dostatečně velké n. Např. $n = 10^6$ je $\frac{n}{n+1} = \frac{1\ 000\ 000}{1\ 000\ 001} \doteq 0,999\ 999$. Odtud získáme "podezření", že posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ konverguje k číslu 1. Úkolem dalších matematických úprav a úvah je toto podezření potvrdit nebo vyvrátit.

2.7 Cvičení

2.7.1

Ukažte omezenost následujících posloupností

1. $\left\{\dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}\right\}$;
2. $\left\{\dfrac{2n^2-1}{2+n^2}\right\}$;
3. $\left\{\dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$;
4. $\{\sqrt{n^2+1}-n\}$;
5. $\left\{\dfrac{2^n+1}{3^n-2}\right\}$.

Výsledky

1. $0 < a_n < \frac{4}{3}$; užijte rozkladu

$$\frac{4n^2+1}{3n^2+2} = \frac{4}{3} - \frac{5}{3(3n^2+2)};$$

2. $0 \le a_n \le 2$; proveďte analogicky jako v předchozím příkladu;
3. $-1 \le a_n \le 0$; užijte odhadu $\sqrt{n^2+1} \ge n$;
4. $0 \le a_n \le \frac{1}{2}$; využijte postupu z příkladu 2.7.1.2;
5. $0 \le a_n \le 4$; využijte odhadů $2^n+1 \le 2^{n+1}, 3^n-2 \ge 3^{n-1}$.

Výsledky lze zpřesnit:

(1.) $1 \le a_n < \frac{4}{3}$; (2.) $\frac{1}{3} \le a_n < 2$; (3.) $-1 < a_n \le 0$; (4.) $0 < a_n \le \sqrt{2}-1$;

(5.) $0 < a_n \le 3$.

K tomu je ale třeba použít monotonie daných posloupností.

2.7.2

Ukažte, že následující posloupnosti jsou monotonní, počínaje jistým indexem n_0.

1. $\left\{\dfrac{n+1}{2n+1}\right\}$;
2. $\left\{\dfrac{1-n}{\sqrt{n}}\right\}$;
3. $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$;
4. $\left\{\dfrac{2^n}{n}\right\}$;
5. $\{2^n-100n\}$;
6. $\{n^3-6n^2\}$;
7. $\left\{\dfrac{n^3}{n^2-3}\right\}$;
8. $\left\{\dfrac{n^2}{n^3+32}\right\}$.

Výsledky

1. klesající, $n_0 = 1$; 2. klesající, $n_0 = 1$;

3. klesající, $n_0 = 1$; upravte $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$;

4. rostoucí, $n_0 = 2$; 5. rostoucí, $n_0 = 7$;

6. rostoucí, $n_0 = 7$; pro $n \geq 7$ je $n^3 - 6n^2 = n^2(n-6)$ součinem dvou rostoucích posloupností kladných čísel. Je možno volit $n_0 = 4$, ale ověření je delší.

7. rostoucí, $n_0 = 3$; pro $n \geq 2$ je
$$\frac{n^3}{n^2-2} < \frac{(n+1)^3}{(n+1)^2-2} \quad \text{právě když} \quad n^4 + 2n^3 - 8n^2 - 9n - 3 > 0.$$
Ale
$$n^4 + 2n^3 - 8n^2 - 9n - 3 = (n-3)(n^3 + 5n^2 + 7n + 12) + 33.$$

8. klesající, $n_0 = 4$; proveďte jako v předchozím příkladu.

2.7.3

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

1. $a_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4}$;
2. $a_n = \dfrac{n-3}{n^2 - n}$;
3. $a_n = \dfrac{n^3 + n}{n^2 + 3n - 2}$;
4. $a_n = \dfrac{3^{n+1} + 4^{n+1}}{3^n + 4^n}$;
5. $a_n = \dfrac{(-1)^n 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} 6^{n+1}}$;
6. $a_n = \dfrac{n(n+3)! + (n+2)!}{(n+4)!}$;
7. $a_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$;
8. $a_n = \sqrt{2}.\sqrt[4]{2}\ldots \sqrt[2^n]{2}$;
9. $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{4} - 1}$;
10. $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^3 + n} - \sqrt{n}}{n + 2 + \sqrt{n+1}}$;
11. $a_n = \log_4(\sqrt{n^2+1} + n)^2 - \log_4 \sqrt[3]{n^6 + 1}$;
12. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{5n+1}{n+5}}$;
13. $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n}$.

Výsledky

1. $\frac{1}{3}$; 2. 0 ; 3. $+\infty$; 4. 4 ; 5. $\frac{1}{6}$; 6. 1 ;

7. $-\frac{1}{2}$, sečtěte $1 + 2 + \cdots + n$;

8. 2 , vynásobte příslušné mocniny o stejném základu;

9. $\frac{1}{2}$; užijte vzorce $a^2 - b^2$; 10. 0; 11. 1, využijte vlastností logaritmů;

12. 1, užijte odhadu $1 \leq \dfrac{5n+1}{n+5} \leq 5$; 13. e^{-2}.

3 Číselné řady

3.1 Konvergentní řady

Definice 3.1 Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ reálných čísel. Symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

se nazývá *nekonečná řada*, čísla a_n se nazývají *členy řady* a posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ definovaná předpisem

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

se nazývá *posloupnost částečných součtů* řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Definice 3.2 Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ se nazývá *konvergentní*, je-li příslušná posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konvergentní. V opačném případě se řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ nazývá *divergentní*. Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní, potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ a nazývá se *součet* (konvergentní) *řady*. (Píšeme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = s$.) Divergentní řada nemá součet!

Jinak řečeno, posloupnost částečných součtů divergentní řady není konvergentní (nemá limitu).

Příklad
Mějme řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Zde $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$. Protože $\frac{1}{n(n+1)} =$
$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (rozklad na částečné zlomky), potom

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Odtud $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.
Závěr: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní a její součet je 1.

□

Poznámka Říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$ ($-\infty$), když posloupnost $\{s_n\}$ jejích částečných součtů diverguje k $+\infty$ ($-\infty$).

Příklad
Mějme řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.

Zde $\left.\begin{aligned} s_1 &= 1,\\ s_2 &= 0\\ s_3 &= 1,\\ s_4 &= 0,\\ &\vdots\\ s_n &= \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}, \end{aligned}\right\}$ $\{s_n\}$ diverguje, neboť vybrané posloupnosti sudých a lichých členů konvergují každá k jiné limitě. Opíráme se o tvrzení, že každá vybraná podposloupnost z konvergentní posloupnosti musí konvergovat k téže limitě.

$\square$

Příklad
Důležitá je (nekonečná) *geometrická řada*:

$$1 + q + q^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}.$$

Zde $s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{pro } q \neq 1,\\ n & \text{pro } q = 1. \end{cases}$

Když $|q| < 1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$;
když $|q| \geq 1$, řada diverguje; když $q \geq 1$, řada diverguje k $+\infty$.

$\square$

Poznámka S "roztomilou" ignorancí se ve společenskovědních a ekonomických oborech zaměňují pojmy "posloupnost" a "nekonečná řada" právě v souvislosti s geometrickou posloupností a geometrickou řadou. Například termín "růst podle geometrické řady" je třeba "přeložit" jako růst ve smyslu rostoucí geometrické posloupnosti (tj. když $q < 1$). Jde pak o tzv. *exponenciální* růst.

Věta 3.1 Jsou-li řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergentní a jejich součty jsou s_a, s_b, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, je také konvergentní a její součet je $\alpha s_a + \beta s_b$.

Důkaz plyne z tvrzení, že posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ je lineární kombinací posloupností částečných součtů řad $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ (věta 2.6).

Poznámka Pro $\alpha = 1, \beta = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Uvědomte si: Součet konečného počtu sčítanců se (obvykle) stanoví sčítáním. Jinak řečeno, sčítání je metoda výpočtu součtu konečného počtu sčítanců. Metodou výpočtu součtu nekonečného počtu sčítanců je "limitování" (sčítáním to nejde!).

Poznámka Posloupnost $\hat{s}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$ se nazývá *zbytek řady* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ po n-tému členu. Pro konvergentní řady je $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k = s - s_n$.

3.2 Kritéria konvergence nekonečných řad

Věta 3.2 (**Bolzanovo–Cauchyovo kritérium**). Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall p, n \in \mathbb{N} : \quad n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon \ .$$

Důkaz (**hlavní myšlenka**) Posloupnost $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ je konvergentní právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové n_0, že nerovnost $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ je splněna pro libovolné $p \in \mathbb{N}$ a pro všechna $n \geq n_0$ (věta 2.9). Zároveň je

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \ .$$

Důsledek věty 3.2 (**nutná podmínka konvergence**). Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní, potom (nutně) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ (stručně: $a_n \to 0$ je nutná podmínka konvergence řady).

Důkaz B.C.-kritérium (věta 3.2) implikuje (pro $p = 1$) platnost nerovnosti:

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \quad \text{pro} \quad n > n_0.$$

Příklad
Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ (tzv. *harmonická řada*) splňuje nutnou podmínku konvergence, ale je *divergentní*. Kdyby konvergovala, musela by splňovat B.-C. kritérium i pro $\varepsilon = \frac{1}{2}, p = n_0$: platí-li

$$\left| \frac{1}{n_0 + 1} + \frac{1}{n_0 + 2} + \cdots + \frac{1}{2n_0} \right| < \frac{1}{2} \ ,$$

potom vzhledem k tomu, že

$$\frac{1}{n_0 + 1} \geq \frac{1}{2n_0}, \quad \frac{1}{n_0 + 2} \geq \frac{1}{2n_0}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2n_0} \geq \frac{1}{2n_0} \ ,$$

musí platit nerovnost

$$\left|\frac{1}{2n_0}+\frac{1}{2n_0}+\cdots+\frac{1}{2n_0}\right|<\frac{1}{2}\,,\quad \text{tj.}\ \ \frac{n_0}{2n_0}<\frac{1}{2}$$

a to je spor.

□

3.3 Kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy

Máme na mysli řady, u nichž skoro všechny členy jsou nezáporné, tj. pro $n > n_0$ je $a_n \geq 0$.

Věta 3.3 Je-li posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ s nezápornými členy shora omezená, potom je řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní.

Důkaz Protože $s_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$, $s_{n+1} = a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}$, potom $s_{n+1} \geq s_n$, a tedy shora omezená posloupnost $\{s_n\}$ je neklesající. Podle věty 2.10 je proto $\{s_n\}$ konvergentní.

Věta 3.4 (**srovnávací kritérium**). Nechť $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a pro skoro všechna n platí nerovnost

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Potom: a) když konverguje $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, konverguje také $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$;

b) když diverguje $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, diverguje také $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Důkaz

a) Částečné součty s_n řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ jsou omezeny součtem $b = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Podle věty 3.3 pak odtud plyne tvrzení.

b) Kdyby $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergovala, musela by podle a) konvergovat také $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Definice 3.3 Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ se nazývá *majorantou* řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ se nazývá *minorantou* řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Příklad
Mějme řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Zřejmě platí $n^2 > n(n-1)\ \forall n \in \mathbb{N}$, tj. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, $n > 1$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$ (majoranta) konverguje (viz příklad z odst. 3.1), proto podle srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

□

Příklad
Mějme řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Protože $n > \sqrt[3]{n}$, $n > 1$, platí $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, a řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (minoranta) diverguje (harmonická řada). Diverguje proto i řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

□

Věta 3.5 (**d'Alembertovo kritérium, podílové kritérium**).
Obecné:

1. Existuje-li číslo $q:\ 0 < q < 1$ takové, že od určitého členu počínaje (tj. existuje n_0 tak, že pro $n \geq n_0$) platí nerovnost
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \quad \text{resp. } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1\ , \quad \text{potom řada } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

2. Jestliže od určitého členu počínaje (tj. pro $n \geq n_0$) platí
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \quad \text{resp. } \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\ , \quad \text{potom řada } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

Limitní: Jestliže $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ konverguje nebo diverguje k $+\infty$ a

1. když $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje;

2. když $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje;

3. když $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, nelze o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ rozhodnout.

Důkaz

1. Platí-li $a_{n+1} \leq qa_n < a_n$ pro $n \geq n_0$, sestrojíme řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, $b_1 = a_{n_0}, b_2 = a_{n_0+1} \leq$ $\leq b_1 q, \ldots, b_n = a_{n_0+n-1} \leq b_1 q^{n-1}$. Protože $0 < q < 1$, je řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_1 q^{n-1}$ konvergentní majorantou řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Proto i řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní, neboť konečný počet členů a_n, pro které uvedená nerovnost neplatí, neovlivní konvergenci této řady.

2. Platí-li $a_{n+1} \geq a_n$ pro $n > n_0$, pak členy řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ rostou od určitého členu počínaje; nemůže proto být splněna nutná podmínka konvergence: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ v tomto případě diverguje.

Limitní kritérium je jednoduchým důsledkem obecného kritéria a věty 2.7, neboť je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom existuje n_0 takové, že pro $n > n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, existuje n_0 takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ pro $n \geq n_0$.

Příklad

Rozhodneme o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$. Zde máme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1};$$

nerovnost $\frac{a}{n+1} < \frac{1}{2} < 1$ je splněna pro $n > 2a$. Proto podle obecného d'Alembertova kritéria řada konverguje.

Limitním kritériem rozhodneme také, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0$.

□

Věta 3.6 (**Cauchyovo kritérium, odmocninové kritérium**).
Obecné:

1. Existuje-li číslo $q: \quad 0 < q < 1$ takové, že od určitého členu počínaje (tj. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$) platí nerovnost
$$\sqrt[n]{a_n} \le q < 1, \quad \text{resp. } \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \ , \quad \text{potom řada } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konverguje.}$$
2. Jestliže od určitého členu počínaje (tj pro $n \ge n_0$) platí
$$\sqrt[n]{a_n} \ge 1, \quad \text{potom řada } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

Limitní: Jestliže $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ konverguje nebo diverguje k $+\infty$ a

1. když $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje;
2. když $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje;
3. když $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, potom nelze o konvergenci řady rozhodnout.

Důkaz Z předpokladu plyne nerovnost $a_n \le q^n < 1$ a srovnávací kritérium (věta 3.4) zaručuje konvergenci. Na druhé straně nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, tj. $a_n \ge 1$ vylučuje konvergenci, neboť není splněna nutná podmínka konvergence.

Příklad
Rozhodněme o konvergenci řady
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots \ .$$

d'Alembertovo kritérium:
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} \dfrac{a_{\text{liché}+1}}{a_{\text{liché}}} = \dfrac{\frac{1}{3^{2n}}}{\frac{1}{2^{2n-1}}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot \dfrac{1}{3} < 1 & \text{pro } k = 2n+1, \\[2ex] \dfrac{a_{\text{sudé}+1}}{a_{\text{sudé}}} = \dfrac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{\frac{1}{3^{2n}}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2n} \cdot \dfrac{1}{2} > 1 & \text{pro } k = 2n. \end{cases}$$

Tedy obecné d'Alembertovo kritérium nelze užít, neboť není splněna ani jedna nerovnost pro skoro všechna n. Limitní tím spíše ne, protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje.
Cauchyovo kritérium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ \frac{1}{2} & \text{pro } n \text{ liché,} \end{array} \right\} \quad \text{tj. určitě platí } \sqrt[n]{a_n} \le \frac{1}{2} < 1, \text{ pro všechna } n.$$

□

Poznámka Početně je d'Alembertovo kritérium jednodušší, ale Cauchyovo je obecnější v tom smyslu, že jím lze rozhodnout o konvergenci ve všech případech rozhodnutelných d'Alembertovým kritériem a navíc i v případech, které d'Alembertovým kritériem rozhodnutelné nejsou.

Jiné vyjádření čísla e (základ přirozených logaritmů).

Mějme řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$. Pro $n \ge 1$ je $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ konverguje (geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{2}$); podle srovnávacího kritéria konverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ a její součet označme e. Když $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e$ a s_n je rostoucí posloupnost ($s_0 = 1$; $s_1 = 2$; $s_2 = 2,5$; $s_3 = 2,66\overline{6}$; $\ldots$).

Platí $0 < e - s_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Zbytek řady odhadneme následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right] \le \\ &\le \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots\right] = \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Dokážeme, že číslo e je iracionální. Předpokládejme sporem, že $e = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná, celá čísla, $q > 1$. Potom $0 < \frac{p}{q} - s_q < \frac{1}{q!q}$, tj. $0 < p(q-1)! - s_q \cdot q! < \frac{1}{q}$.

Tato nerovnost však nemůže platit, neboť čísla $p(q-1)!, s_q \cdot q!$ jsou celá čísla a jejich rozdíl je také celé číslo, ale $\frac{1}{q} < 1$. Lze dále vypočítat, že $e \approx 2,718281828459045\ldots$.

3.4 Absolutně konvergentní řady.

V předcházejícím odstavci jsme formulovali základní kritéria konvergence řad s kladnými, resp. nezápornými členy. U řad, jejichž členy mají různá znaménka, je situace mnohem rozmanitější a složitější (s výjimkou řad, u nichž se znaménka členů střídají pravidelně – "oscilují").

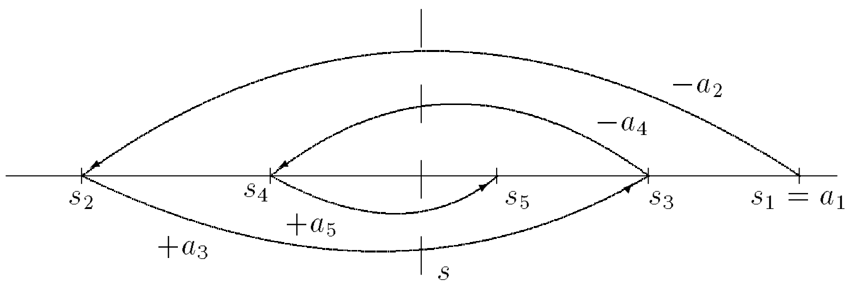
Definice 3.4 Řada $a_1 - a_2 + a_3 - \cdots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n > 0$, se nazývá *alternující řada.*

Věta 3.7 (**Leibnizovo kritérium**). Nechť platí $a_n \geq a_{n+1} > 0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Potom alternující řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ (resp. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} a_n$) konverguje.

Důkaz Označíme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů alternující řady a vyšetříme dvě podposloupnosti: $\{s_{2n}\}, \{s_{2n+1}\}$:

$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}$ (součet sudého počtu členů),

$s_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$ (součet lichého počtu členů řady).



Obr. 3.1 Posloupnost $\{s_n\}$ pro alternující řadu

Každý sudý člen s_{2n} je omezen shora libovolným lichým členem s_{2k-1}, tj. $\{s_{2n}\}$ je neklesající a omezená shora. Je tedy konvergentní a platí $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$.

Každý lichý člen s_{2n-1} je omezen zdola libovolným sudým členem s_{2k}, tj. $\{s_{2n-1}\}$ je nerostoucí a omezená zdola. Je tedy konvergentní a $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1} = s'$.

Protože $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí $s' = s + 0$, tj. $s' = s$.

Poznámka (odhad součtu alternující řady). Z obr. 3.1 je patrné, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1}$$

a také, že

$$|s_n - s| \leq a_{n+1}.$$

Součet s každé konvergentní řady můžeme aproximovat číslem s_n. Pouze u alternující řady můžeme chybu aproximace, tj. číslo $|s_n - s|$ jednoduše odhadnout členem a_{n+1}.

Definice 3.5 Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ s libovolnými členy se nazývá *absolutně konvergentní*, konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Termínem "libovolný člen" máme na mysli, že a_n je libovolné reálné číslo.

Příklad
Prověřte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots$ je konvergentní řada, ale není absolutně konvergentní řadou. O konvergenci rozhodněte podle Leibnizova kritéria. Řada absolutních hodnot $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ je divergentní.

□

Věta 3.8 Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, konverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Důkaz Po označení

$$S_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|; \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n = S;$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

je $|s_n| \le S_n$. Podle Bolzanova-Cauchyova kritéria platí: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon, n > n_0$, tj.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|\right| < \varepsilon.$$

Tedy

$$|s_{n+p} - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| = S_{n+p} - S_n = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon, \quad n > n_0$$

a $\{s_n\}$ splňuje také Bolzanovo – Cauchyovo kritérium konvergence. Existuje proto $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ proto také konverguje.

Příklad
Mějme alternující řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = s.$$

Tato řada konverguje (podle Leibnizova kritéria) a její součet je s. Zřejmě platí $\frac{1}{2} \le s \le 1$.
Pak

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \ .$$

Jestliže tuto řadu formálně přičteme k původní řadě a vhodně přerovnáme členy (použijeme asociativní zákon pro sčítání), dostáváme

$$s + \frac{s}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots =$$
$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = s.$$

Tedy $\frac{3}{2}s = s$, odtud $s = 0$. To je však ve sporu s nerovností $s \geq \frac{1}{2}$.

Uvedený příklad ukazuje, že s nekonečnými součty (řadami) nemůžeme zacházet stejně jako s konečnými součty. Např. ne vždy můžeme užít analogie k asociativnímu zákonu. U nekonečných součtů může "výsledek" záviset na pořadí sčítanců.

$\square$

Shrnutí:

1. Je-li splněno d'Alembertovo nebo Cauchyovo kritérium pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně.
2. Pro alternující řady máme speciální (Leibnizovo) kritérium.
3. Lze dokázat následující tvrzení:
   (a) Když řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverguje, potom lze tak přerovnat členy a_n v řadě $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, že nová řada konverguje k libovolnému předem zvolenému číslu.
   (b) Když řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konverguje, potom řada určená libovolným přerovnáním členů řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje absolutně k témuž součtu.

3.5 Cvičení

3.5.1

Ukažte, že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3n+4}{5n+1}}$; diverguje.

3.5.2

Rozhodněte o konvergenci řady

1. $a_n = \frac{n!}{5^n}$; (div.)
2. $a_n = \dfrac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{(2n-1)!!}, \quad a > 0$; (konv.)
3. $a_n = \dfrac{4.7.\dots.(3n+1)}{2.6.\dots.(4n-2)}$; (konv.)
4. $a_n = \left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n$; (div.)
5. $a_n = n^2 e^{-n}$; (konv.)
6. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}$; (konv. abs.)

4 Reálné funkce jedné reálné proměnné

4.1 Základní pojmy

Definice 4.1 Nechť $D \subset \mathbb{R}$. Zobrazení $f : D \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálnou funkcí jedné reálné proměnné* (každému prvku množiny D je přiřazeno právě jedno číslo z množiny $\mathbb{R}$). Prvkům množiny D říkáme: *vzory, argumenty, nezávisle proměnné* a značíme je $x,\ t,\ s,\ \ldots \in D$; jejich *obrazy* značíme $f(x), f(t), f(s) \in \mathbb{R}$ a nazýváme *funkční hodnoty.* Množina D se nazývá *definiční obor funkce* a také se značí $D = D(f)$; množina obrazů se nazývá *obor hodnot* a značí se $H = H(f)$. Nejčastěji píšeme

$$y = f(x), x \in D \text{ nebo } f : x \mapsto f(x), x \in D\,.$$

Graf funkce f je množina G dvojic $[x, f(x)], x \in D$, tj. $G_f = D \times H \subset \mathbb{R}^2$. Říkáme, že funkce je **dána (zadána)**, je-li dáno přiřazení (pravidlo) f a definiční obor $D(f)$.

Nejběžnější způsoby zadání funkce:

a) **analyticky** $\equiv$ matematickým výrazem $\begin{cases} \textbf{explicitně} \text{ (formulí typu } y = f(x)); \\ \textbf{implicitně} \text{ (rovnicí);} \end{cases}$

b) **graficky** - tj. grafem (diagram, "charakteristika", ...);

c) **tabulkou:** jsou dány dvojice $[x_i, f(x_i)]$ pro jistý výběr bodů $x_i \in D(f)$.

Poznámka Někdy (výjimečně!) nevypisujeme definiční obor, ale pouze udáme přiřazení formulí. Potom definičním oborem rozumíme množinu všech čísel z $\mathbb{R}$, pro která má daný výraz smysl.

Příklad

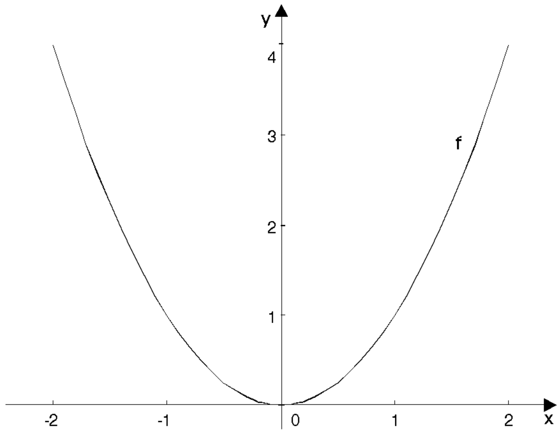
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+1} \quad &\Rightarrow \quad D(f) = \langle -1, +\infty), \\ g(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad &\Rightarrow \quad D(g) = (-1, +\infty). \end{aligned}$$

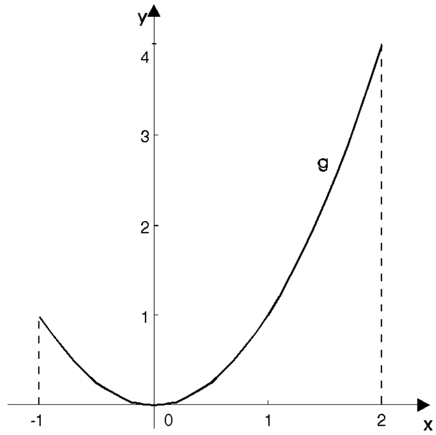
□

Restrikce (zúžení) funkce f na podmnožinu: Je-li $f : D \to \mathbb{R}$, potom funkci $g : D_1 \to \mathbb{R}$, kde

1. $D_1 \subset D$,
2. $g(x) = f(x),\ x \in D_1$,

nazýváme *restrikcí* funkce f na podmnožinu D_1.





Obr. 4.1

Příklad
Funkce $y = x^2,\ x \in \langle -1, 2\rangle$ je restrikcí funkce $f: \quad y = x^2, x \in \mathbb{R}$ na interval $\langle -1; 2\rangle$.
$\square$

Příklady funkcí

1. **Mocninná funkce:** $f : x \mapsto x^n, x \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$ pevné. Mocninnou funkci často zapisujeme formulí $y = x^n$, nebo $f(x) = x^n$. Pro obor hodnot máme

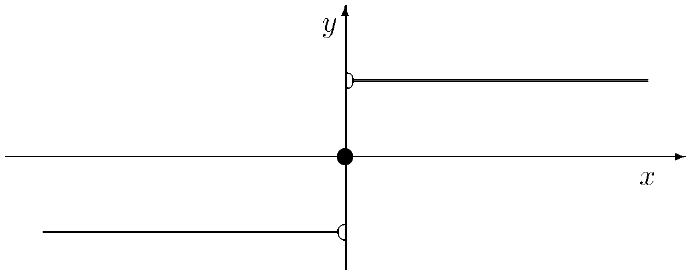
$$H(f) = \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \text{pro } n \text{ sudé;} \\ (-\infty, +\infty) & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

2. **Znaménková funkce:** (obr. 4.2)

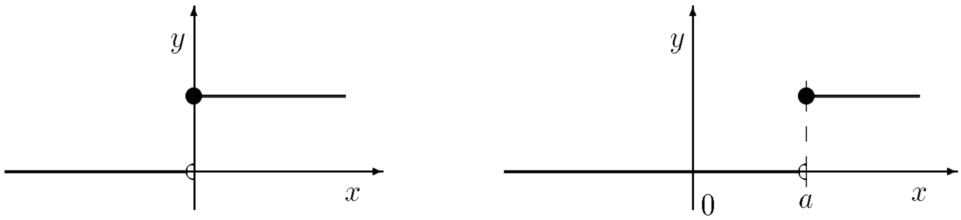
$$f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in \mathbb{R},$$
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{pro } x > 0; \\ 0, & \text{pro } x = 0; \\ -1, & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

3. **Funkce jednotkového skoku (Heavisideova funkce)**
s posunutým argumentem: (obr. 4.3)

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \geq 0, \\ 0, & \text{pro } x < 0, \end{cases} \quad D = \mathbb{R}; \qquad \eta(x-a) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \geq a; \\ 0, & \text{pro } x < a. \end{cases}$$



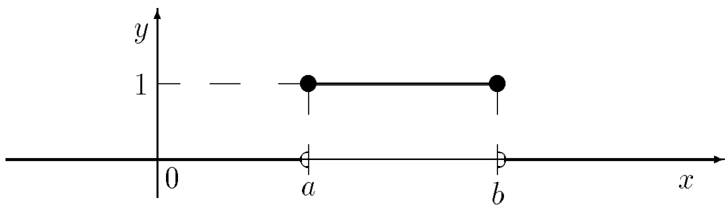
Obr. 4.2



Obr. 4.3

4. **Funkce intervalového impulsu (impulsní funkce)**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x < a; \\ 1, & \text{pro } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{pro } x > b. \end{cases} \qquad (f(x) = \eta(x-a) - \eta(x-b)).$$

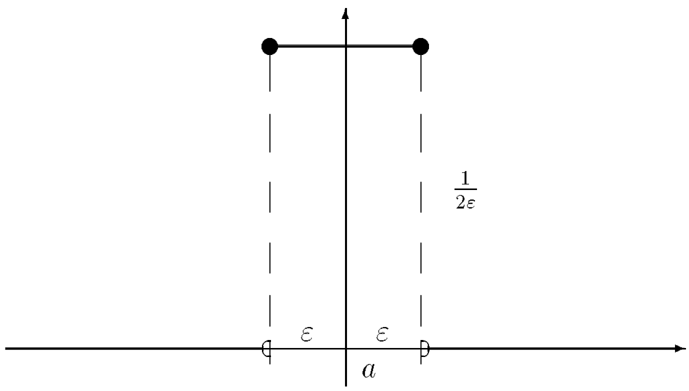


Obr. 4.4

5. **Funkce "bodového" impulsu** (bodové síly, bodového náboje)
Pro dané $a \in \mathbb{R}$ a zvolené $\varepsilon > 0$:

$$\delta_\varepsilon(x-a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & x \in \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle; \\ 0, & x \notin \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle. \end{cases}$$

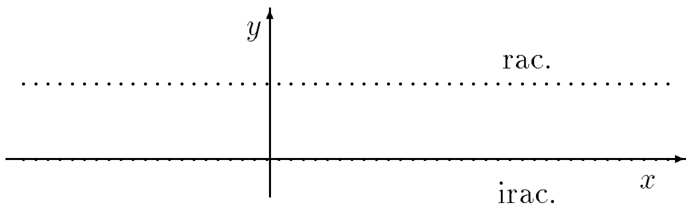
Posloupnosti funkcí $\{\delta_{\varepsilon_n}(x-a)\}$, pro libovolnou volbu $\{\varepsilon_n\}, \varepsilon_n \to 0$ (např. $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$) se užívají k popisu bodových sil, hmotných bodů, atd.



Obr. 4.5

6. **Dirichletova funkce:** Pro $x \in \mathbb{R}$ Dirichletovu funkci definujeme předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \text{ iracionální;} \\ 1, & \text{pro } x \text{ racionální.} \end{cases}$$



Obr. 4.6

V dalším textu předpokládáme, že čtenář je dobře obeznámen s elementárními funkcemi. Soupis tříd elementárních funkcí je uveden v odstavci 4.2.

Definice 4.2 (rovnost funkcí) Funkce f a g jsou si *rovny* (píšeme $f = g$), když

1. $D(f) = D(g)$,
2. $f(x) = g(x)\ \forall x \in D$.

Příklad Z následujících funkcí

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ f_2(z) &= z^2, \quad z \in (0, +\infty), \\ f_3(y) &= y^2, \quad y \in \langle 0, +\infty), \\ f_4(t) &= t^2, \quad t \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

pouze $f_2 = f_4$.

□

Definice 4.3 (některé třídy funkcí).
Nechť je dána funkce $f : D \to \mathbb{R}$, kde D obsahuje alespoň dva body. Funkce f se nazývá:

1. *rostoucí na* D, když: $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (ostře rostoucí);
2. *klesající na* D, když: $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (ostře klesající);
3. *nerostoucí na* D, když: $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
4. *neklesající na* D, když: $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
5. *ostře monotónní na* D, když je buď rostoucí nebo klesající na D;
   monotónní na D, když je buď neklesající nebo nerostoucí na D;
6. *konvexní na intervalu* D, když:

   $$\forall x_1, x_2 \in D : f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2),\ \alpha \in \langle 0, 1\rangle;$$

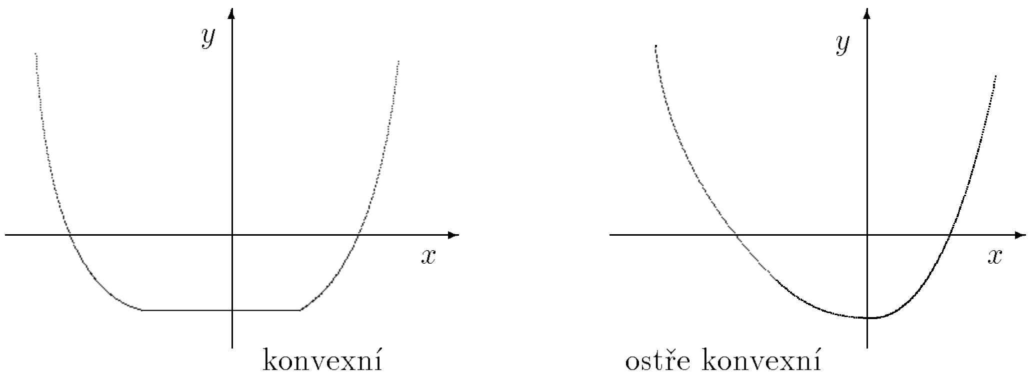
   ostře konvexní na intervalu D, když:

   $$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2,\ \alpha \in (0,1) : f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2);$$

   poznamenejme, že pojem konvexnosti lze definovat pouze na intervalu.
7. *konkávní (ostře konkávní) na intervalu* D: … v nerovnostech z bodu 6. jsou obrácená znamení;
8. *sudá* na *symetrické* množině D (D je symetrická, platí-li implikace $x \in D \Rightarrow -x \in$ $\in D$), když $f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in D$;
9. *lichá* na symetrické množině D, když $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in D$;
10. *periodická* na D, existuje-li takové číslo $T > 0$, že:

    a) $\forall x \in D \Rightarrow x + T \in D,\ x - T \in D$,

    b) $f(x+T) = f(x),\ \forall x \in D$;



Obr. 4.7

nejmenší číslo T s těmito vlastnostmi se nazývá *základní perioda*;

11. *omezená* v D, existuje-li číslo $K > 0$ takové, že $|f(x)| \leq K$, $\forall x \in D$ (shora omezená, když platí $f(x) \leq K$; zdola omezená, když platí $f(x) \geq -K$);

12. *prostá* (injektivní) v D, když $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (viz také definici 1.2).

Věta 4.1 Je-li funkce $f : D \to \mathbb{R}$ ostře monotónní v D, potom je prostá.

Důkaz Z předpokladu $x_1 < x_2$ plyne buď $f(x_1) < f(x_2)$ nebo $f(x_1) > f(x_2)$. V obou případech je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Poznámka Obrácené tvrzení k větě 4.1 neplatí: prostá funkce nemusí být na D ostře monotónní (viz obr. 4.8).

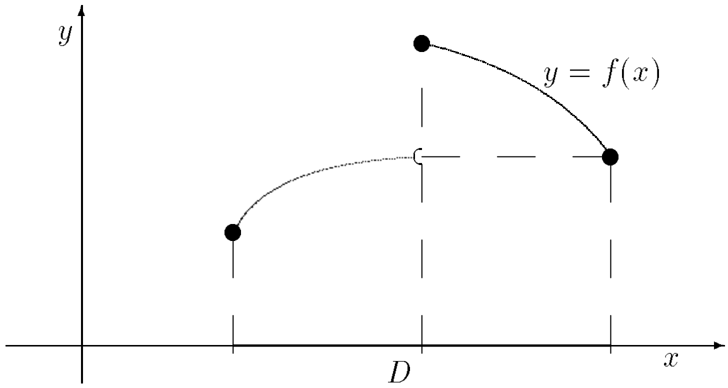
Definice 4.4 Je dána funkce $f : D \to \mathbb{R}$ a číslo $y_0 \in \mathbb{R}$. Úloha najít $x_0 \in D$ takové, že $f(x_0) = y_0$, se nazývá *rovnicí o jedné neznámé* a zapisuje se

$$f(x) = y_0.$$

Číslu x_0 říkáme *řešení* nebo také *kořen* rovnice.

Poznámka Je-li f elementární funkce nebo je určena elementárními funkcemi (viz odst. 4.2), dělíme rovnice na:

- lineární, kvadratické, kubické (tzv. *algebraické*),
- exponenciální, logaritmické, goniometrické, atd. (tzv. *transcendentní*)



$y = f(x)$ je prostá funkce, ale není ostře monotónní na D

Obr. 4.8

- Například

$$e^x + x^2 + 1 = \operatorname{tg} x \quad \text{je transcendentní rovnice,}$$
$$x^3 + x - 1 = 0 \quad \text{je algebraická rovnice.}$$

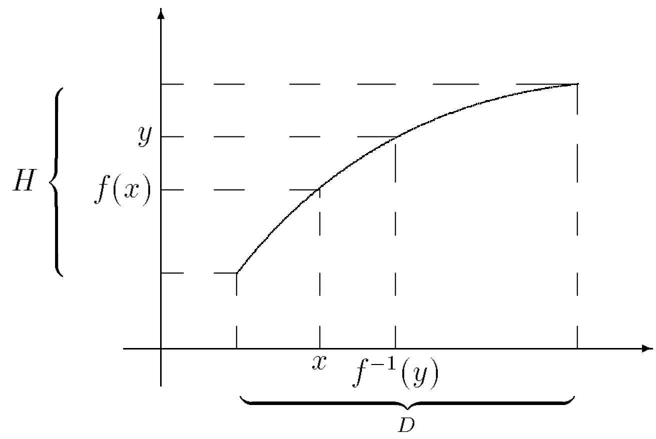
Věta 4.2 (řešitelnost rovnic) Mějme rovnici $f(x) = y_0$ ve smyslu definice 4.4 a nechť $H(f)$ označuje obor hodnot funkce $f : D \to \mathbb{R}$.

1. Když $y_0 \in H(f)$, potom rovnice $f(x) = y_0$ má aspoň jedno řešení (kořen).
2. Když f je ostře monotónní na D, potom rovnice $f(x) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ má nejvýše jedno řešení (kořen).
3. Když f je ostře monotónní na D a $y_0 \in H(f)$, potom rovnice $f(x) = y_0$ má právě jedno řešení (kořen).

Důkaz Tvrzení 1 je zřejmé.
Tvrzení 2, 3: Nechť existují dvě řešení x_1, x_2 a $x_1 \neq x_2$. Potom $f(x_1) = y_0$, $f(x_2) = y_0$. Pak ovšem $f(x_1) = f(x_2)$, což odporuje předpokladu ostré monotónie.

Definice 4.5 Mějme prostou funkci $f : D \to H$. Funkce φ definovaná na H, která každému $y \in H$ přiřazuje to jediné $x \in D$, které je řešením rovnice $f(x) = y$, se nazývá *inverzní funkcí* k funkci f a značí se $f^{-1} : H \to D$.
Píšeme také: $y = f(x),\ x \in D \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),\ y \in H$.

Věta 4.3 (existence inverzní funkce) Je-li funkce $f : D \to H$ ostře monotónní, potom na H existuje inverzní funkce f^{-1}, která je také ostře monotónní.



Obr. 4.9

Důkaz Podle věty 4.2 pro každé $y \in H$ existuje právě jedno řešení rovnice $f(x) = y$, tj. existuje funkce $f^{-1} : y \to x$. Když pro $x_1 < x_2$ je $f(x_1) < f(x_2)$, potom pro $y_1 < y_2$ existuje $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ a je $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Kdyby bylo $x_1 \geq x_2$, pak by muselo být $f(x_1) \geq f(x_2)$, a to je spor.

Definice 4.6 Mějme dvě funkce:

$$\left.\begin{aligned} f &: D \to H, \\ g &: \mathcal{H} \to M, \ H \subset \mathcal{H}, \end{aligned}\right\} D, H, \mathcal{H}, M \subset \mathbb{R} .$$

Funkce h definovaná v D (s oborem hodnot v M) předpisem

$$h(x) = g(f(x))$$

se nazývá *superpozice* funkcí g a f a značí se $h = g \circ f$. Užívá se také termín *složená funkce* (viz obr. 4.10).

Poznámka Mnemotechnická pomůcka:

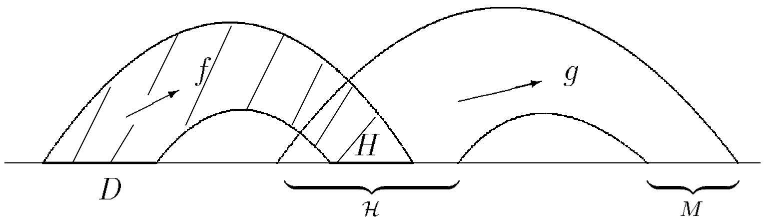
$$\left.\begin{aligned} y = f(x);\ x \in D,\ y \in H \\ z = g(y);\ y \in \mathcal{H},\ z \in M \end{aligned}\right\} z = g(f(x)).$$

Za argument funkce g bereme pouze ta $y \in H$, která jsou obrazy (funkční hodnoty) čísel $x \in D$ zobrazených funkcí f.

Příklad

$$z = \sin\sqrt{x+1} \ : \ z = \sin y \ , \ \ \mathcal{H} = (-\infty, +\infty) \ ; \ M = \langle -1, 1 \rangle \ ;$$
$$y = \sqrt{x+1} \ ; \ \ D = \langle -1, +\infty); \ H = \langle 0, +\infty).$$

□



Obr. 4.10

Poznámka Operace superpozice není obecně komutativní:
Pro $g(t) = \sin t,\ f(\tau) = \sqrt{\tau}$:

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

$$z = \sin \sqrt{x}, \quad \text{tj.} \quad z = g(f(x));$$

$$y = \sqrt{\sin x}, \quad \text{tj.} \quad y = f(g(x)).$$

Poznámka Analogicky zavádíme i vícenásobně superponované funkce:

$$z = \sin \sqrt{x+1}\ :\ z = \sin y,\ \ y = \sqrt{v},\ v = x + 1.$$

Poznámka Jsou-li f a f^{-1} navzájem inverzní funkce, tj.

$$y = f(x),\ x \in D,\ y \in H,$$
$$x = f^{-1}(y),\ y \in H,\ x \in D,$$

potom

$$\left.\begin{aligned} y &= f(f^{-1}(y)) \\ x &= f^{-1}(f(x)) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &f \circ f^{-1} \text{ je } \textit{identická funkce na } H, \text{ (identické zobrazení)} \\ &f^{-1} \circ f \text{ je } \textit{identická funkce na } D; \end{aligned}$$

tj.

$$f \circ f^{-1} : H \to H; \quad f^{-1} \circ f : D \to D.$$

Na cvičení věnujte pozornost této problematice:

1. definiční obory funkcí;
2. oblasti monotonie, sudost, lichost, periodičnost, omezenost;

3. inverzní funkce, kompozice funkcí.

Příklad
Definujme na $\mathbb{R}$ funkci F předpisem: "Pro x ve tvaru nekonečného desetinného rozvoje $F(x)$ bude označovat počet výskytů číslice 5 na prvních deseti místech tohoto rozvoje za desetinnou čárkou".

Takže např. $F(0) = 0$; $F(1) = 0$; $F(\pi) = 2$, neboť $\pi = 3,1415926536$; $F\left(\frac{1}{8}\right) = 1$, neboť $\frac{1}{8} = 0,1250000000$. Prověřte, že funkce F je

$$\begin{array}{ll} \textit{periodická} & \text{s periodou } 1 : F(x+1) = F(x), \\ \textit{sudá}, & \text{neboť} : F(-x) = F(x), \\ \textit{omezená} : & 0 \leq F(x) \leq 10. \end{array}$$

□

Příklad
Dokažte

1. Sudá funkce nemůže být ostře monotónní.
2. Sudá monotónní funkce je konstantní.
3. Funkce, která je současně sudá a lichá je nulová.
4. Periodická funkce nemůže být ostře monotónní.
5. Periodická monotónní funkce je konstantní.

□

Definice 4.7 (algebraické operace s funkcemi) Nechť funkce f a g mají týž definiční obor D. Potom definujeme:

1. *Součet*: $f + g : x \in D \mapsto y = f(x) + g(x)$,
2. *Rozdíl*: $f - g : x \in D \mapsto y = f(x) - g(x)$,
3. *Součin*: $f.g : x \in D \mapsto y = f(x)g(x)$,
4. *Podíl*: $\dfrac{f}{g} : x \in D \mapsto y = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$,
5. *Násobek číslem:* $\alpha f : x \mapsto y = \alpha . f(x),\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Příklad (prověřit!)

1. Součin liché a sudé funkce je lichá funkce.
2. Součin dvou lichých funkcí je sudá funkce.
3. Součet a součin T-periodických funkcí je T-periodická funkce (například $y = \cos x \sin x$ je 2π-periodická funkce).

$\square$

4.2 Třídy základních elementárních funkcí

algebraické:

racionální $\begin{cases} \text{celistvá} \\ \text{lomená} \end{cases}$

iracionální

transcendentní:

goniometrické
cyklometrické
exponenciální
logaritmické
hyperbolické
hyperbolometrické

Další elementární funkce dostaneme algebraickými operacemi ve smyslu definice 4.7.

4.3 Limita funkce

Mějme funkci f definovanou v $D(f) \subset \mathbb{R}$ a nechť x_0 je *hromadný bod* definičního oboru (tj. může být $x_0 \notin D(f)$, ale v každém okolí x_0 leží nekonečně mnoho bodů $D(f)$).

Definice 4.8 (Heine)

a) Když existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \neq x_0$, konvergující k číslu, x_0, posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje k číslu b, říkáme, že *funkce f má v bodě x_0 limitu b* a píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

b) Když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, konvergující k číslu $x_0, x_0 \neq x_n$ posloupnost $\{f(x_n)\}$ diverguje k $+\infty$ (resp. $-\infty$), píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

c) Když existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$ divergující k $+\infty$ (resp. $-\infty$), posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje k číslu b, říkáme, že *funkce f má v $+\infty$ (resp. $-\infty$) limitu* b a píšeme

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

d) Když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, divergující k $+\infty$ (resp. $-\infty$), posloupnost $\{f(x_n)\}$ diverguje k $+\infty$ (resp. $-\infty$), píšeme

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Vlastnost funkce f charakterizovaná uvedenou definicí vystihuje chování funkce f v okolí bodu x_0 (resp. v "okolí" $+\infty$, příp. $-\infty$). Doporučujeme načrtnout si obrázek. V případech b), d) říkáme, že funkce f nemá konečnou limitu. V případě, že funkce f má konečnou limitu, můžeme místo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ psát $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) - b] = 0$.

Příklad
Stanovme $\lim\limits_{x\to2} x^2$. Nechť $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost bodů $x_n \in D(f)$ taková, že $x_n \to 2$, $x_n \neq 2$. Potom $f(x_n) = x_n^2$. Podle věty 2.6 (algebra limit) je $x_n^2 \to 2^2$, tj. $\lim\limits_{x\to2} x^2 = 4$.

□

Příklad
Stanovte $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$.
Nechť $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost bodů $x_n \in D(f)$ taková, že $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$. Potom

$$f(x_n) = \frac{2x_n^2-1}{x_n-1}, \quad 2x_n^2 - 1 \to -1, \quad x_n - 1 \to -1.$$

Opět podle věty 2.6 je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^2-1}{x_n-1} = 1, \text{ tj. } \lim_{x\to0} \frac{2x^2-1}{x-1} = 1.$$

□

Příklad
Stanovte: $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to2} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pro libovolnou posloupnost } \{x_n\} : x_n \to 0,\ x_n > 0 \text{ je } \dfrac{1}{x_n} \to +\infty, \\[2ex] \text{Pro libovolnou posloupnost } \{x_n\} : x_n \to 0,\ x_n < 0 \text{ je } \dfrac{1}{x_n} \to -\infty, \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x_n} \text{ diverguje.}$$

Řekneme, že funkce $\frac{1}{x}$ *"nemá v bodě 0 limitu"*.

Pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} : x_n \to +\infty$ je $\dfrac{1}{x_n} \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$,

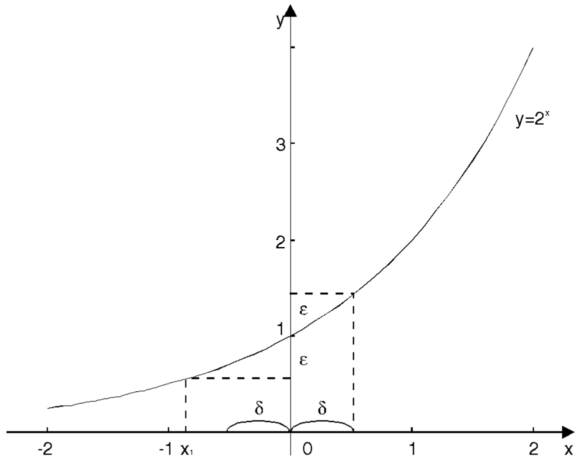
Pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} : x_n \to -\infty$ je $\dfrac{1}{x_n} \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

□

Příklad
Mějme
$$f(x) = \sin\frac{1}{x},\ x \neq 0.$$
Stanovte $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. Zvolme posloupnost $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $\quad x_n \to 0$, pak
$$f(x_n) = \sin n\pi = 0, \quad \text{tj. } \lim f(x_n) = 0.$$
Zvolme jinou posloupnost $y_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$, $\quad y_n \to 0$, pak
$$f(y_n) = \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1,\ \text{tj. } \lim f(y_n) = 1.$$
Tedy posloupnosti $\{f(x_n)\}$, $\{f(y_n)\}$ nekonvergují k téže limitě; říkáme, že *funkce f(x) nemá v bodě $x = 0$ limitu.*

□

Definice 4.9 (Cauchy) Funkce f má v hromadném bodě x_0 limitu $b \in \mathbb{R}$, když
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x:\quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x) - b| < \varepsilon\ ;$$
Jinými slovy: Funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ má v hromadném bodě x_0 definičního oboru $D(f)$ limitu $b \in \mathbb{R}$, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, že pro všechna $x \in D(f)$ splňující podmínku
$$0 < |x - x_0| < \delta$$
platí nerovnost
$$|f(x) - b| < \varepsilon\ .$$
Píšeme
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \qquad \text{nebo} \qquad x \to x_0 \quad\Rightarrow\quad f(x) \to b\ .$$
Příklad
Dokažte podle Cauchyovy definice limity, že
$$\lim_{x\to 0} 2^x = 1.$$
Uvažujme nerovnici
$$|2^x - 1| < \varepsilon,\ \text{tj. } 1 - \varepsilon < 2^x < 1 + \varepsilon,$$
tj. pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ (aby bylo $1 - \varepsilon > 0$) je
$$\underbrace{\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln 2}}_{x_1} < x < \underbrace{\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}}_{x_2}.$$
Označíme $\delta = \min\{|x_1|, |x_2|\}$ (takové minimum jistě existuje pro každé dostatečně malé $\varepsilon > 0$). Když nyní $|x| < \delta$, pak také $x_1 < x < x_2$, a tedy také
$$1 - \varepsilon < 2^x < 1 + \varepsilon,\ \text{neboli } |2^x - 1| < \varepsilon.$$
□



Obr. 4.11

Poznámka

1. Lze dokázat, že funkce f má vlastnost ve smyslu definice 4.8 (a), právě tehdy, když má vlastnost ve smyslu definice 4.9, jinak řečeno Heineova a Cauchyova definice limity jsou ekvivalentní. Pochopení ekvivalence tří definic pojmu limity (viz ještě níže) je klíčové místo matematické analýzy.

2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ nezávisí na volbě posloupnosti $\{x_n\}$ a nezávisí na tom, zda x_0 patří či nepatří do definičního oboru funkce f.

3. *Topologická definice limity* (ekvivalentní dvěma předchozím)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall U(b, \varepsilon)\ \exists P(x_0, \delta) : x \in P(x_0, \delta) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in U(b, \varepsilon).$$

   Pojmy *okolí* a *prstencové okolí* jsou definovány v odst. 1.8.

4. "Limita" je vlastnost funkce f v okolí bodu x_0 - tzv. *lokální vlastnost* - charakterizuje chování (průběh) funkce f v okolí bodu x_0.

5. Cauchyovu nebo topologickou variantu případů (b), (c), (d) definice 4.8 si čtenář jistě zformuluje sám. Tyto varianty jsou v učebnicích uváděny pod hesly: "nevlastní limita ve vlastním bodě", "vlastní limita v nevlastním bodě", "nevlastní limita v nevlastním bodě". Tyto pojmy jsou spíše matoucí a doporučujeme je nepoužívat a výrok "funkce má limitu" chápat v našem smyslu, tj. podle definice 4.8, resp. 4.9.

Věta 4.4 (jednoznačnost limity) Existuje-li $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ ($b \in \mathbb{R}$), potom je jediná.

Důkaz (sporem) Kdyby existovaly dvě limity $b_1 \neq b_2$, musela by existovat posloupnost $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ taková, že $f(x_n) \to b_1$, $f(x_n) \to b_2$, což není možné: konvergentní posloupnost $\{f(x_n)\}$ má právě jednu limitu.

Věta 4.5 (algebra limit) Nechť funkce f a g mají společný definiční obor D a nechť existují limity (včetně případu $x_0 = \pm\infty$)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \in \mathbb{R}, \ \lim_{x\to x_0} g(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Potom existují limity funkcí

$$f \pm g, \ fg, \ \frac{f}{g} \quad (g(x) \neq 0, \ x \in D)$$

a platí:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \pm c,$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x). \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b.c,$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{b}{c}, \ c \neq 0.$

Důkaz proveďte na cvičení. Použijete-li Heineovu definici limity, můžete vycházet z věty 2.6.

Příklad
Protože $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = (\lim\limits_{x\to x_0} x)^n = x_0^n, \ n \in \mathbb{N}$.

□

Příklad
Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy, potom

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \text{ pokud } Q(x_0) \neq 0.$$

Zdůvodnění se opírá o předchozí příklad. Každý "uživatel" matematiky by měl tento výsledek považovat za samozřejmost a mít ho v "operační paměti", každý "pěstitel" matematiky by měl umět tento výsledek zdůvodnit.

□

Věta 4.6 (srovnávací) Nechť funkce $f, \ g, \ h$ mají společný definiční obor D.

1. Když $f(x) \leq g(x), \ x \in D$ a existují limity $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, potom platí

   $$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

   Neostré nerovnosti nelze zaměnit za ostré!

2. Když $f(x) \leq h(x) \leq g(x),\ x \in D$ a existují limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x),\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, a jsou si rovny, potom existuje také $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ a platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

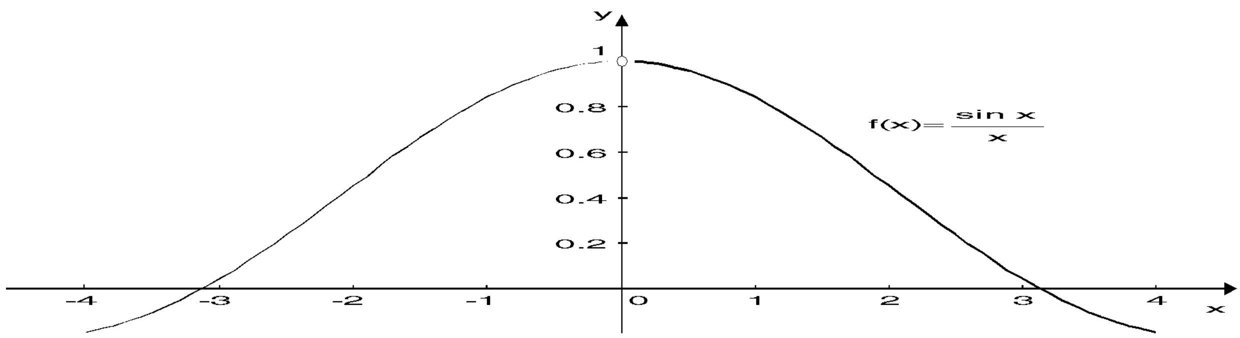
Důkaz (při použití Heineovy definice limity)

1. Důsledek příslušné věty o posloupnostech (věta 2.4).

2. Důsledek věty o sevření (věta 2.5 – "o dvou policajtech").

Příklad
Stanovme, že

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Obr. 4.12

Z obrázků 4.12 a 4.13 plynou následující nerovnosti:

$$0 < |\sin x| < |x| < \left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|$$

pro $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$,

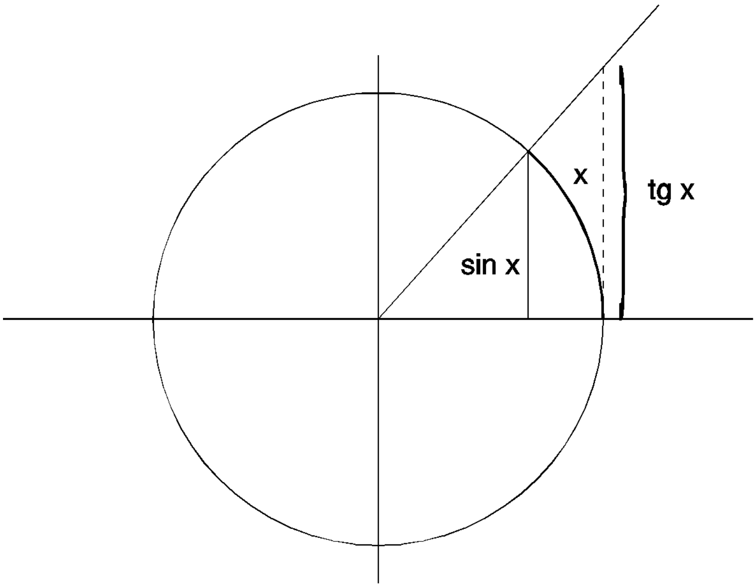
$$0 < 1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \frac{1}{\cos x},$$

resp.

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

a užije se věta o sevření.

□



Obr. 4.13

Příklad
Stanovme, že
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$
Vybereme libovolnou posloupnost $x_n \to +\infty$ takovou, že
$$n < x_n < n+1.$$
Potom
$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{n},$$
$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x_n} < 1+\frac{1}{n},$$
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$
a užije se věta o sevření (věta 2.5).

□

Příklad
Když $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, potom existuje $P(x_0,\delta)$, v němž $f(x) < g(x)$. Dokažte.

□

Věta 4.7 (omezenost a limita) Když existuje konečná $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, potom existuje prstencové okolí $P(x_0,\delta)$, v němž je funkce f omezená.

Důkaz je důsledkem tvrzení, že každá konvergentní posloupnost je omezená.

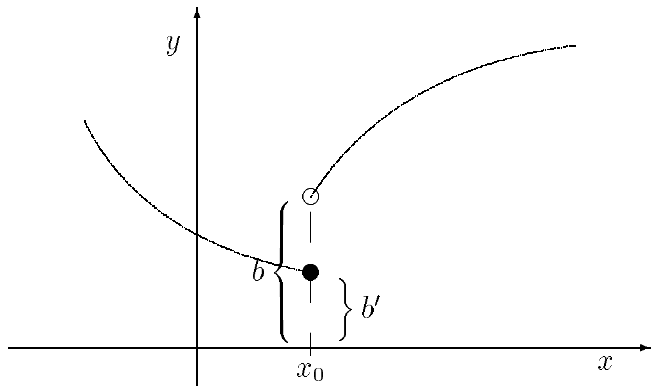
Definice 4.10 Číslo $b \in \mathbb{R}$ se nazývá *pravostrannou limitou (limitou zprava)* funkce f v bodě x_0, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n > x_0$, $x_n \to x_0$ je $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$; píšeme

$$b = \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+).$$

Číslo b' se nazývá *levostrannou limitou (limitou zleva)* funkce f v bodě x_0, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n < x_0$, $x_n \to x_0$ je $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b'$; píšeme

$$b' = \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-).$$

Poznámka Lze vyslovit (proveďte!) ekvivalentní Cauchyovu resp. topologickou definici jednostranné limity a lze formulovat a dokázat "jednostranné" verze vět 4.4, 4.5, 4.6, 4.7.



Obr. 4.14

Věta 4.8 (existence limity) Funkce f definovaná v okolí hromadného bodu x_0 má v tomto bodě limitu **právě tehdy, když** existují obě jednostranné limity a tyto limity jsou si rovny, tj. když platí

$$f(x_0-) = f(x_0+).$$

Tuto větu často nazýváme nutnou a postačující podmínkou pro existenci limity.

Důkaz

1. Když $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$, potom pro **každou** posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$ je $f(x_n) \to b$ nezávisle na tom, zda $x_n > x_0$ nebo $x_n < x_0$, tj. existují $f(x_0-), f(x_0+)$ a jsou si rovny.

2. Nechť existují $f(x_0+)$ a $f(x_0-)$ a platí $f(x_0+) = f(x_0-) = b$. Mějme $\{x_n\} \subset \subset D(f)$, $x_n \to x_0$ $x_n \neq x_0$. Potom buď $x_n < x_0$ pro skoro všechna n, nebo $x_n > x_0$ pro skoro všechna n, nebo $\{x_n\} = \{y_n\} \cup \{z_n\}$, $y_n < x_0$ a $z_n > x_0$. V prvních dvou případech $f(x_n) \to f(x_0-)$, resp. $f(x_n) \to f(x_0+)$, tj. $f(x_n) \to b$. Ve třetím případě $f(y_n) \to f(x_0-)$, $f(z_n) \to f(x_0+)$, tj. $f(x_n) \to b$. Podle Heineovy definice limity tedy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

Věta 4.9 (limita složené funkce) Mějme funkci $h(x) = g(f(x))$, $x \in D$, kde $f : D \to \to \mathbb{R}$; $g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $H(f) \subset \mathcal{H}$ a nechť existují

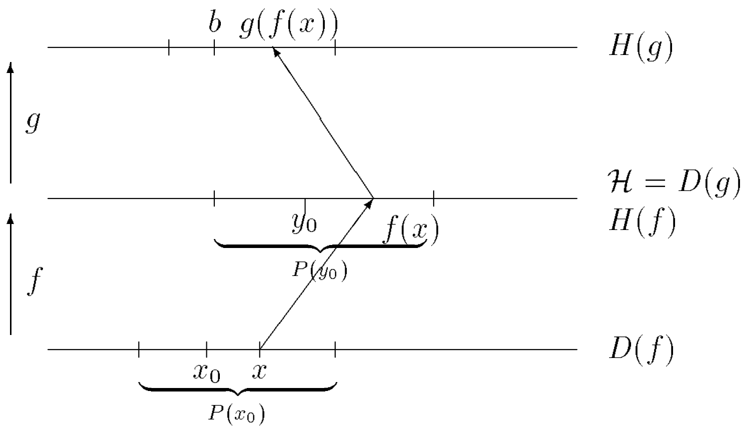
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \ \lim_{y \to y_0} g(y) = b.$$

Je-li splněna alespoň jedna z podmínek:

1. existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že $f(x) \neq y_0$ pro všechna $x \in P(x_0) \cap \cap D(f)$;
2. $b = g(y_0)$,

potom existuje $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x))$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = b$ (viz obr. 4.15).

Poznámka Analogickou větu lze dokázat i pro jednostranné limity a pro limity "nevlastní a v nevlastních bodech".



Obr. 4.15

Příklad
Určíme $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 + 1}$:

$$\left. \begin{aligned} y = f(x) = x^2 + 1, \ x_0 = 2 : \lim_{x \to 2} f(x) = 5 = y_0, \\ g(y) = \sqrt{y}, \ y_0 = 5 : \lim_{x \to 5} g(y) = \sqrt{5} = b, \end{aligned} \right\} \lim_{x \to 2} g(f(x)) = \lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{5}.$$

$\square$

Příklad

Určíme $\lim\limits_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$:

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=0+,\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty \\ g(y)=\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y,\ y_0=+\infty,\ \lim\limits_{x\to +\infty} g(y)=e, \end{array}\right\} \lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$f(x)\neq y_0 \text{ pro } x\neq x_0, \text{ tj. } \frac{1}{x}\neq +\infty \text{ pro } x\neq 0 \Rightarrow \text{podmínka je splněna.}$$

Dále platí:

$$\lim_{y\to -\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=\lim_{t\to +\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to +\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{t}\right)^t}=\frac{1}{e^{-1}}=e,$$

$$t=-y;\ \text{tj. } \lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

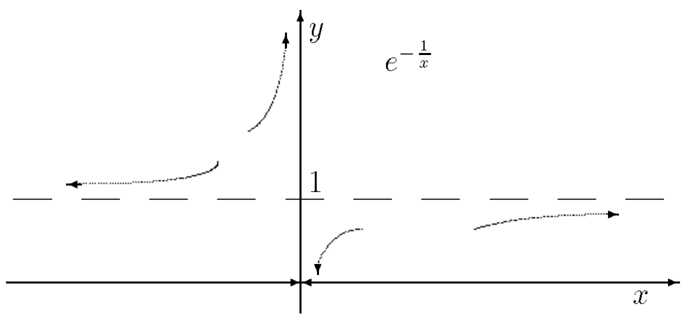
□

Příklad

Určíme $\lim e^{-\frac{1}{x}}$, když $x\to 0+,\ x\to 0-,\ x\to +\infty,\ x\to -\infty$:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=y=-\dfrac{1}{x}, \\ g(y)=z=e^y, \end{array}\right\} \text{ když } \left\{\begin{array}{l} x\to 0+\Rightarrow y\to -\infty \Rightarrow z\to 0+; \\ x\to 0-\Rightarrow y\to +\infty \Rightarrow z\to +\infty; \\ x\to +\infty \Rightarrow y\to 0-\Rightarrow z\to 1+; \\ x\to -\infty \Rightarrow y\to 0+\Rightarrow z\to 1+. \end{array}\right.$$

Na obr. 4.16 je znázorněno chování (průběh) vyšetřované funkce v okolí počátku a pro $x\to +\infty, x\to -\infty$.



Obr. 4.16

□

Poznámka Předpoklady 1. resp. 2. věty 4.9 o limitě složené funkce jsou nezbytné. Jejich nesplněním věta ztrácí platnost. Mějme složenou funkci $g(f(x))$, kde

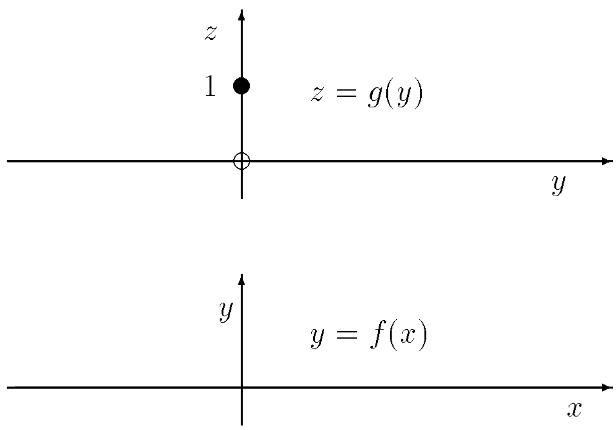
$$y = f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$z = g(y) = \begin{cases} 0, & \text{pro } y \neq 0, \\ 1, & \text{pro } y = 0. \end{cases}$$

Zde existují limity:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = y_0;\ \lim_{y \to 0} g(y) = 0 = b,$$

avšak: $g(0) = 1$; je tedy $g(y_0) \neq b$ (není splněna podmínka 2.) a také $f(x) = y_0$ v okolí $x_0 = 0$ (není splněna podmínka 1.). Na druhé straně $g(f(x)) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, neboť $f(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, a tedy $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x)) = 1$, tj. limita složené funkce není rovna limitě vnější funkce (viz obr. 4.17).



Obr. 4.17

Důsledek věty 4.9

1. $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to -x_0-} f(-x)$, existuje-li některá z těchto limit.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right)$, existuje-li některá z těchto limit.

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h)$.

4.4 Některá další fakta

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1: \quad \frac{1}{x}\ln(1+x)=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\to \ln e=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1: \quad e^x-1=z \ \Rightarrow \ x=\ln(1+z) \ \Rightarrow \ \frac{z}{\ln(1+z)}\to 1,$$

$$\lim_{x\to 0}a^x=1,\ a>0: \quad \text{z definice limity,}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\quad a>0,\ a\neq 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad a>0,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$$

Poznámka Funkce f se nazývá *omezená ve srovnání s funkcí g (g-omezená)* pro $x\to x_0$, když existuje interval I obsahující x_0 a konstanta C taková, že platí

$$|f(x)|\le C|g(x)|,\ x\in I,\ x\neq x_0.$$

Stručně píšeme

$$f(x)=O(g(x)),\quad x\to x_0.$$

Je-li $g(x)=1$, pak zápis $f(x)=O(1)$ znamená normální omezenost.

Existuje-li konečná limita $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, pak $f=O(g)$. Je-li $f=O(g)$ a $g=O(f)$, $x\to x_0$, říkáme, že funkce f a g jsou *stejného řádu* pro $x\to x_0$.

Je-li $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, říkáme, že funkce f a g jsou si *asymptoticky rovny* (v okolí x_0) a píšeme $f\sim g$.

Příklad
Protože $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{100+x}{e^x}=100$, pak e^x a $100+x$ jsou stejného řádu pro $x\to 0$.

□

Příklad
Protože

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

potom

$$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg} x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg} x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\quad \text{pro } x\to 0\ .$$

□

Příklad (metoda asymptotických rozvojů pro výpočet limity funkce)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + 2\operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x) + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+6x+3x^2}{3x+x^2+x} = \frac{8}{4}.$$

Užili jsme vztahy $\ln(1+z) \sim z$, pro $z \to 0$, $xe^x \sim x$ pro $x \to 0$.

$\square$

Definice 4.11 Číslo c se nazývá *částečnou limitou* funkce f pro $x \to x_0$, jestliže **existuje** posloupnost $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq x_0$ taková, že pro $x_n \to x_0$ je $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = c$.

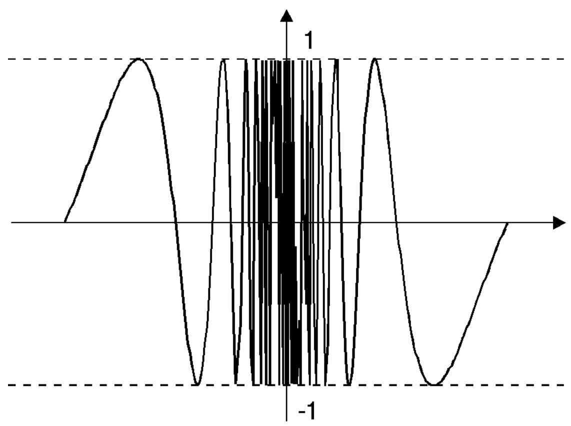
Jednostranné limity jsou příkladem částečných limit.

Příklad

Pro funkci

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \text{ pro } x \to 0:$$

najděte některé částečné limity. Částečné limity jsou např. 1, -1, 0. ..., neboť
pro $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ je $\sin\dfrac{1}{x_n} \to 0$,
pro $x_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ je $\sin\dfrac{1}{x_n} \to 1$,
pro $x_n = \dfrac{2}{(4n-1)\pi}$ je $\sin\dfrac{1}{x_n} \to -1$.



Obr. 4.18

$\square$

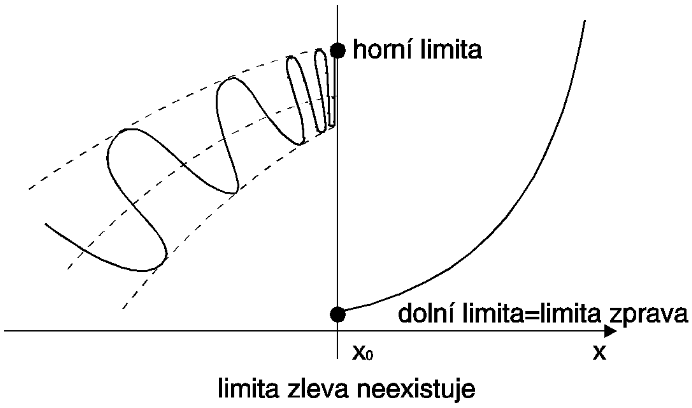
Definice 4.12 Největší (nejmenší) částečná limita funkce f v bodě x_0 se nazývá *horní (dolní) limita* funkce f a značí se

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sup f(x), \quad \text{resp.} \quad \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0} \inf f(x).$$

Příklad

Na obrázku 4.19 je znázorněn graf funkce, která v bodě x_0 má limitu zprava a nemá limitu zleva a existuje horní limita i dolní limita.

$\square$



Obr. 4.19

4.5 Cvičení

4.5.1

Dokažte tvrzení: Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu právě tehdy, když:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x, x' \in \mathcal{D}(f): \ 0 < |x - x_0| < \delta, \ \ 0 < |x' - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon \, .$$

4.5.2

Buďte $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = \sin 2x$. Najděte hodnoty

1. $f\left(g\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$;
2. $g(f(1))$;
3. $g(f(2))$;
4. $f(g(x))$;
5. $f(f(x))$;
6. $f(f(f(1)))$;
7. $g(g(x))$.

Výsledky

1. $-\frac{1}{8}$;
2. 0;
3. $\sin 12$;
4. $-\sin 2x \cos^2 2x$;
5. $x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$;
6. 0;
7. $\sin(2 \sin 2x)$.

4.5.3

Najděte definiční obor funkce

1. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{\ln \cos x}}$; 2. $y = \arccos \dfrac{2}{2 + \sin x}$.

Výsledky

1. $\bigcup\limits_{k \in Z} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi) \cup (2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$; 2. $\bigcup\limits_{k \in Z} < 2k\pi, (2k+1)\pi >$.

4.5.4

Vyšetřete monotónnost funkce $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. (klesající.)

4.5.5

Najděte inverzní funkci k funkci

1. $y = 10^{x+1}, \quad x \in \mathbb{R};$
2. $y = 4 \arcsin \sqrt{1-x^2}, \ x \in < -1, 1 >;$
3. $y = \begin{cases} 2x, & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ x^3 & \text{pro } x \in < 0, 1 >, \\ 3^x - 2 & \text{pro } x \in (1, +\infty). \end{cases}$

Výsledky

1. $y = \log x - 1, \quad x \in (0, +\infty);$
2. inverzní funkce neexistuje pro $x \in < -1, 1 >$, ale

   pro $x \in < -1, 0 >$ je $\quad y = -\cos \frac{x}{4}, \ x \in < 0, 2\pi >,$
   pro $x \in < 0, 1 >$ je $\quad y = \cos \frac{x}{4}, \ x \in < 0, 2\pi >;$
3. $y = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{pro } x \in (-\infty, 0); \\ \sqrt[3]{x}, & \text{pro } x \in < 0, 1 >; \\ \log_3(x+2), & \text{pro } x \in (1, +\infty). \end{cases}$

   načrtněte si graf dané funkce;

4.5.6

Buďte f, g sudé funkce, φ, ψ liché funkce. Ukažte, že $\varphi \pm \psi$, $f.\varphi$, $\dfrac{f}{\varphi}$ jsou liché a $f \pm$ $\pm g$, $f.g$, $\varphi.\psi$, $\dfrac{f}{g}$, $\dfrac{\varphi}{\psi}$ jsou sudé.

Návod: Užijte definice sudé a liché funkce.

4.5.7

Určete, které z následujících funkcí jsou periodické a najděte jejich periody.

1. $y = -\cos \dfrac{x-1}{2}$; 2. $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$; 3. $y = \cos(\sin x)$.

Výsledky

1. 4π; 2. neperiodická; 3. π.

4.5.8

Která z následujících tvrzení jsou ekvivalentní s tvrzením $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$? (Interval znamená otevřený interval.)

1. Je-li J libovolný interval kolem bodu b a I libovolný interval bez bodu a, pak f zobrazuje I do J.
2. Existuje interval J kolem bodu b a interval I kolem bodu a, který funkce f zobrazuje do J.
3. Pro každý interval I bez bodu a existuje interval J kolem bodu b takový, že f zobrazuje I do J.
4. Je-li J libovolný interval kolem bodu b, pak existuje interval I bez bodu a, který f zobrazuje do J.
5. Existuje interval J kolem bodu b takový, že každý interval I bez bodu a zobrazuje f do J.
6. Existuje interval I bez bodu a takový, že f zobrazuje I do každého intervalu J kolem bodu b.

4.5.9

Ukažte, že následující limity neexistují

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$; 2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$.

Návod: Ukažte, že jednostranné limity jsou v daných bodech různé.

4.5.10

Nechť funkce g je definována na intervalu $(0, 1)$ takto:

$$g(x) = x \quad \text{kromě} \quad x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ \ldots,$$
$$g(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ \ldots .$$

Určete $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

Výsledek: 0.

4.5.11

Vypočtěte

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$; $\quad m, n \in \mathbf{N}$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left\{ \dfrac{x^2}{2x+1} + \dfrac{x^3 + 4x^2 - 2}{1 - 2x^2} \right\}$;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(\sqrt{x^4 + x^2\sqrt{x^4+1}} - \sqrt{2x^4})$;
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$;
5. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$.

Výsledky

1. $\frac{m}{n}$; $\quad$ 2. $+\infty$; $\quad$ 3. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$;

4. 4, užijte vzorce pro $\cos\alpha - \cos\beta$; $\quad$ 5. e^{-2}.

4.5.12

Existuje-li vlastní $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ a platí-li $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, potom $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 0$. Dokažte.

5 Spojitost funkcí

5.1 Spojitost v bodě. Body nespojitosti

Definice 5.1 Funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je *spojitá v hromadném bodě* $x_0 \in D(f)$ (spojitost definujeme v bodě definičního oboru), když platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$

je-li x_0 izolovaný bod definičního oboru funkce f, považujeme funkci f v tomto bodě za spojitou.

Podmínku spojitosti píšeme také takto:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0,$$

kde $h = x - x_0$.

Jednostranná spojitost:
Je-li $f(x_0-) = f(x_0)$, říkáme, že f je *spojitá zleva* v bodě x_0,
je-li $f(x_0+) = f(x_0)$, říkáme, že f je *spojitá zprava* v bodě x_0.

Věta 5.1 (**nutné a postačující podmínky spojitosti** $\equiv$ **kritéria spojitosti**).

a) **Cauchy**: Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x \in D(f): \;\; |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

stručně: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \;\; \Rightarrow \;\; f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$

b) **Heine**: Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje k $f(x_0)$;
stručně: $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n \to +\infty} x_n)$, resp. $x_n \to x_0 \;\; \Rightarrow \;\; f(x_n) \to f(x_0)$.

c) **topologické**: Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ právě tehdy, když

$$\forall U(f(x_0), \varepsilon) \;\; \exists U(x_0, \delta) \;\; (x \in U(x_0, \delta) \cap D(f)) \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon).$$

d) Funkce je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ právě tehdy, když existují konečné limity $f(x_0-), f(x_0+)$ a platí $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$.

Místo **důkazu** si důkladně promyslete souvislost pojmu spojitosti s pojmem limity.

Definice 5.2 (**body nespojitosti**). Nechť f je definována v prstencovém okolí $P(x_0)$ *hromadného bodu* x_0 definičního oboru (připouštíme $x_0 \notin D(f)$, avšak $P(x_0) \subset D(f)$). Bod x_0 je *bod nespojitosti* funkce f, jestliže buď f není v x_0 definována, nebo je v něm definována, ale není v něm spojitá.

Když

1. $f(x_0+) = f(x_0-) \neq f(x_0):$ x_0 je *bod odstranitelné nespojitosti*;

2. $f(x_0+) \neq f(x_0-):$ x_0 je *bod nespojitosti 1. druhu*; číslo $f(x_0+) - f(x_0-)$ se nazývá *skok funkce* f;

3. aspoň jedna z limit $f(x_0+), f(x_0-)$ neexistuje (včetně případu $f(x_0\pm) = \pm\infty$) : x_0 je *bod nespojitosti 2. druhu.*

Poznámka Je-li x_0 bod odstranitelné nespojitosti funkce f, potom funkce

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D,\ x \neq x_0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & \text{pro } x = x_0 \end{cases}$$

je spojitá (v bodě x_0). Konstrukce funkce g je "odstraňováním" nespojitosti funkce f.

Příklad
Ukážeme, že funkce $f(x) = x^2$ je spojitá v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) = x_0^2$.
Podle Heineho: Pro $x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0 \ \Rightarrow\ x_n \cdot x_n \to x_0^2$, tj. $f(x_n) \to f(x_0)$.

□

Příklad
Ukážeme, že funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je v bodě $x_0 > 0$ spojitá. Zde je vhodnější opírat se o Cauchyovu definici. Pro $x_0 > 0$ platí

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}},$$

neboť $\sqrt{x} + \sqrt{x_0} \geq \sqrt{x_0}$. Tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \sqrt{x_0}\varepsilon > 0$, že když $|x - x_0| < \delta$, tj. $|x - x_0| < \sqrt{x_0}\varepsilon$, potom $\dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$, a tedy $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$. V bodě $x_0 = 0 :$ $\sqrt{x} < \varepsilon$ pro $|x| < \delta$, tj. volíme $\delta = \varepsilon^2$.

□

Příklad
Dokažte spojitost funkce $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$, pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$. Potřebujeme dokázat, že $\lim\limits_{x\to x_0} |\sin x - \sin x_0| = 0$.
Použijeme vzorec: $\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}$. Využijeme také toho, že pro $|z|$ platí $|\sin z| \leq |z|$ a že $|\cos z| \leq 1$. Takže

$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leq 2 \sin \left|\frac{x - x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|.$$

Další postup už je standardní:
Pro $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \varepsilon$, že $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$.

□

Poznámka Platí-li $|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|$, $x, x_0 \in <a, b>$, pak říkáme, že je *lipschitzovská* v intervalu $\langle a, b\rangle$ s konstantou L. Odtud plyne, že lipschitzovská funkce je spojitá pro každé $x_0 \in <a, b>$.

Příklad

Ukažte, že pro funkci $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{pro } x > 0, \\ 0, & \text{pro } x \leq 0, \end{cases}$ neexistuje $f(0+)$, kdežto $f(0-) = 0$. Funkce je spojitá zleva v bodě 0 a má v tomto bodě nespojitost druhého druhu.

□

Věta 5.2 (**algebraické vlastnosti spojitých funkcí**). Nechť funkce f, g mají stejný definiční obor D a jsou spojité v bodě $x_0 \in D$. Potom jsou v bodě x_0 spojité funkce:

$$f + g, \ \ f - g, \ \ fg, \ \ cf, \ \ |f|, \ \ \frac{f}{g}, \text{ když } g(x) \neq 0.$$

Důkaz plyne z příslušné věty o limitách (věta 4.5) a z definice 5.1.

Věta 5.3 (**spojitost složené funkce**). Nechť f je spojitá v bodě x_0 a nechť g je spojitá v bodě $y_0 = f(x_0)$. Potom superpozice $g \circ f = g(f(x))$ je spojitá v bodě x_0.-

Důkaz je důsledek obdobné věty u limit (věta 4.9).
Návod: Zdůvodněte, že z implikací:

$$\forall \eta > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 \ \ \Rightarrow \ \ |f(x) - f(x_0)| < \eta, \ \ y = f(x), \ y_0 = f(x_0);$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 : |y - y_0| < \delta_2 \ \ \Rightarrow \ \ |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon,$$

plyne implikace: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 \ \ \Rightarrow \ \ |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$.

Věta 5.4 (**lokální omezenost spojité funkce**). Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, potom existuje okolí $U(x_0, \delta)$ bodu x_0, v němž je funkce f omezená.

Důkaz plyne z nerovnosti $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ platné pro zvolené $\varepsilon > 0$ a pro $x \in U(x_0, \delta)$ jako důsledek spojitosti.

Věta 5.5 (**o zachování znaménka**). Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ a je $f(x_0) \neq 0$. Potom existuje okolí bodu x_0 takové, že $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$ pro všechna x z tohoto okolí.

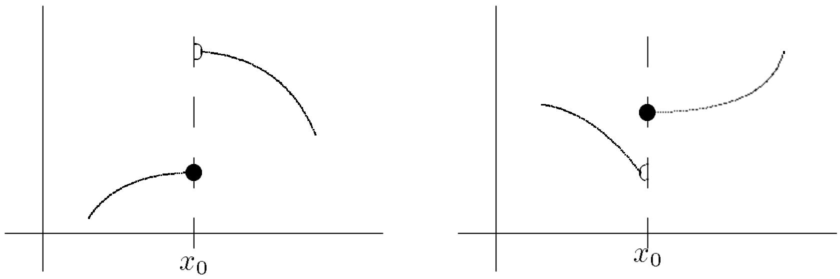
Důkaz Nechť $f(x_0) > 0$. Protože $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ a $\forall x : \ |x - x_0| < \delta$ platí $-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$, tedy platí tato nerovnost i pro $\varepsilon = f(x_0)$, tj. $0 < f(x) < 2\varepsilon$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Nechť $f(x_0) < 0$. Stačí volit $\varepsilon = -f(x_0)$.

Poznámka Funkce f se nazývá *po částech spojitá* na intervalu I, má-li v I konečný počet bodů nespojitosti vesměs 1. druhu.

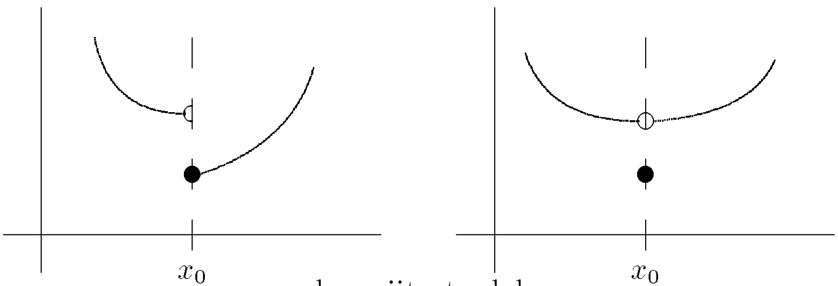
Poznámka Různé typy spojitosti jsou charakterizovatelné následujícími implikacemi:

1. $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, spojitost;
2. $x_0 - \delta < x \leq x_0 \;\Rightarrow\; f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, spojitost zleva;
3. $x_0 \leq x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, spojitost zprava;
4. $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; f(x_0) - \varepsilon < f(x)$, polospojitost zdola; jiný zápis: $f(x_0) \leq \underline{\lim} f(x)$;
5. $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, polospojitost shora; jiný zápis: $f(x_0) \geq \overline{\lim} f(x)$.

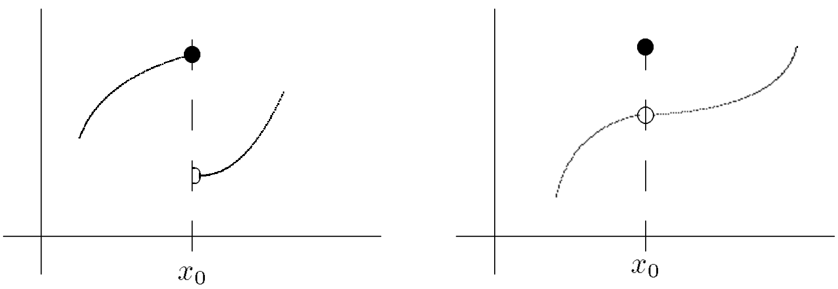
Ilustrativní příklady:



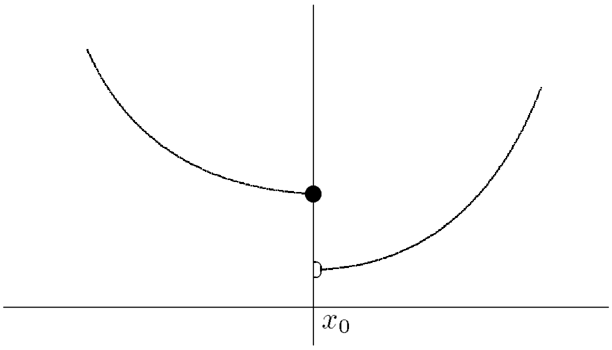
spojitost zleva — spojitost zprava



polospojitost zdola



polospojitost shora



není polospojitá zdola – neboť dolní limita je menší než $f(x_0)$ (je polospojitá shora)

Obr. 5.1

5.2 Spojitost v uzavřeném intervalu

Definice 5.3 Funkce f je *spojitá v uzavřeném intervalu* $< a, b >$, je-li spojitá v každém vnitřním bodě a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Věta 5.6 (**o nulové hodnotě**). Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $< a, b >$ a platí $f(a)f(b) < 0$ ($f(a), f(b)$ mají opačná znaménka). Potom existuje takové $\xi \in (a, b)$, že $f(\xi) = 0$.

Důkaz Sestrojíme posloupnosti do sebe vložených intervalů $< a_k, b_k >$ postupným půlením, tj.

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}, \quad \dots, \quad b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

takových, že $f(a_k)f(b_k) < 0$. (Jestliže pro některé $< a_n, b_n >$ nastane $f(a_n) = 0$, resp. $f(b_n) = 0$, bod ξ je tím nalezen). Pro posloupnost délek je $\frac{b-a}{2^k} \to 0$. Posloupnosti koncových bodů jsou monotónní a omezené, a tedy (věta 2.10) konvergentní. Jejich společná limita je číslo $\xi \in (a, b)$. Kdyby bylo $f(\xi) > 0$, pak by existovalo okolí bodu ξ, v němž je $f(x) > 0$ (věta 5.5). Obě posloupnosti funkčních hodnot v koncových bodech by měly tedy všechny členy kladné, což je spor. Podobně vyloučíme případ $f(\xi) < 0$.

Důsledek (**existence kořene rovnice** $f(x) = y_0$). Je-li f spojitá v $< a, b >$ a $f(a) \neq \neq f(b)$, potom pro každé číslo y_0 mezi $f(a), f(b)$ **existuje** $x_0 \in (a, b)$ takové, že platí $f(x_0) = y_0$.

Jinak řečeno: Spojitá funkce nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

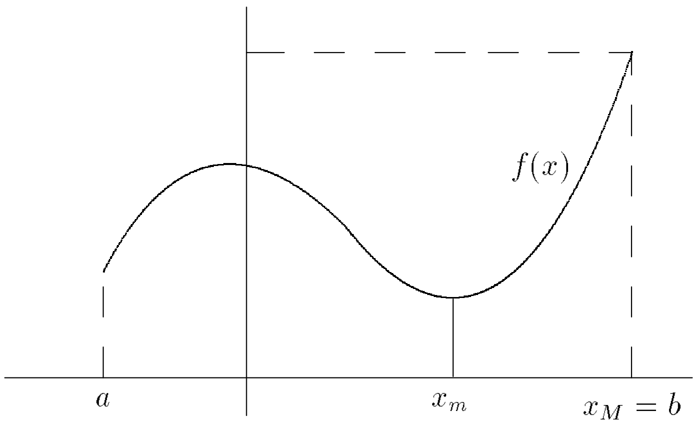
Věta 5.7 (**Weierstrassova věta o nabývání maxima a minima**). Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $< a, b >$. Potom

1. funkce f je v $< a, b >$ omezená,

2. existují takové body $x_m, x_M \in < a, b >$, že

$$f(x_m) = \inf_{x \in <a,b>} f(x); \quad f(x_M) = \sup_{x \in <a,b>} f(x).$$

Stručně řečeno: Spojitá funkce f v $< a, b >$ nabývá (na $< a, b >$) své největší a nejmenší hodnoty.



Obr. 5.2

Důkaz 1. Sporem: Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje bod $x_n \in < a, b >$, že $|f(x_n)| > n$ (tj. f není omezená). Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená koncovými body a, b intervalu $< a, b >$. Potom z ní lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ (věta 2.3).

Její limita x_0 musí ležet v $< a, b >$. Z předpokladu spojitosti pak plyne $f(x_{n_k}) \to$ $\to f(x_0)$, což je ve sporu s předpokladem $|f(x_n)| > n$.

2. Označme $M = \sup\limits_{x \in <a,b>} f(x)$. Máme dokázat, že existuje $x_M \in < a, b >$ takové, že $f(x_M) = M$.

Sporem: Nechť pro každé $x \in < a, b >$ je $f(x) \neq M$. Potom také funkce $g(x) =$ $= \dfrac{1}{M - f(x)}$ je spojitá (a kladná) v $< a, b >$, a tedy omezená, tj.

$$\exists M_1 > 0 : \quad 0 < \frac{1}{M - f(x)} < M_1,$$

tedy

$$\frac{1}{M_1} < M - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < M - \frac{1}{M_1}, \quad \forall x \in < a, b > .$$

To je však spor, neboť M je podle předpokladu nejmenší horní hranice. (Našli jsme horní hranici, která je menší než nejmenší horní hranice, což je spor).

Poznámka Pro platnost věty je nezbytný předpoklad spojitosti na **uzavřeném** intervalu, případně (obecnější verze věty) spojitost na uzavřené omezené ("kompaktní") množině v $\mathbb{R}$. Funkce spojitá pouze na otevřeném intervalu obecně nemusí nabývat maxima a minima v tomto intervalu (příkladem je funkce tg x v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$).

Věta 5.8

1. Je-li funkce f ostře monotónní v intervalu I a je-li $f(I)$ (obraz intervalu I) interval, potom f je spojitá. (Postačující podmínka spojitosti.)

2. Je-li f spojitá v intervalu I (nemusí být uzavřený), potom množina $f(I)$ je jednobodová nebo interval.

3. Je-li f spojitá a prostá v **uzavřeném** intervalu I, potom inverzní funkce f^{-1} je (také) spojitá v $f(I)$.

4. Monotónní funkce má v **otevřeném** intervalu I nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti a jsou to body nespojitosti 1. druhu. (Monotónní funkce nemůže mít body nespojitosti 2. druhu.)

Důkazy uvedených tvrzení lze nalézt v podrobnějších učebnicích matematické analýzy.

5.3 Stejnoměrná spojitost

Abychom pochopili pojem stejnoměrné spojitosti funkce f, je třeba si promyslet pojem **"spojitost na množině"**.

Definice 5.4 Funkce $f:\ I \to \mathbb{R}$ je *spojitá na množině* $I \subset \mathbb{R}$, je-li spojitá v každém bodě $x \in I$ (v případných hraničních bodech jednostranně). Jinak řečeno:

$$\forall x \in I\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(x,\varepsilon)\quad (\forall x' \in I:\ |x'-x| < \delta(x,\varepsilon))\ \Rightarrow\ |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Definice 5.5 Funkce $f:\ I \to \mathbb{R},\ I \subset \mathbb{R}$ je *stejnoměrně spojitá na množině* I, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)\ (\forall x', x \in I:\ |x'-x| < \delta(\varepsilon))\ \Rightarrow\ |f(x') - f(x)| < \varepsilon,$$

resp.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)\ (\forall x_n \in I \wedge \forall x'_n \in I:\ |x'_n - x_n| < \delta(\varepsilon))\ \Rightarrow\ |f(x'_n) - f(x_n)| < \varepsilon.$$

Poznámka Funkce f **není** na množině I stejnoměrně spojitá, když existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro všechna $\delta > 0$ existují posloupnosti $\{x_n\}, \{x'_n\}$ takové, že $|x'_n - x_n| < \delta$, pro které však $|f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$.

Příklad
Ukažme, že funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá v každém bodě $x \in (0, +\infty)$, tj. na intervalu $(0, +\infty)$, ale není na tomto intervalu stejnoměrně spojitá:
První část tvrzení je zřejmá. Zvolíme posloupnosti $x_n = \frac{1}{n}, x'_n = \frac{1}{2n}$; je evidentně

$$|x'_n - x_n| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{2n} \to 0,$$

avšak

$$|f(x'_n) - f(x_n)| = |2n - n| = n \to +\infty.$$

□

Příklad
Ukažme, že funkce $f(x) = \ln x$ není na intervalu $(0, 1)$ stejnoměrně spojitá.
Volíme $x_n = e^{-n}, x'_n = e^{-2n}$. Pak sice

$$|x'_n - x_n| = |e^{-2n} - e^{-n}| \to 0,$$

avšak

$$|f(x'_n) - f(x_n)| = |-2n + n| = n \to +\infty.$$

□

Věta 5.9 (Cantorova). Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I, potom je stejnoměrně spojitá na tomto intervalu.

Důkaz lze nalézt v podrobnějších učebnicích matematické analýzy.

Poznámka Věty 5.7, 5.9 zůstávají v platnosti, je-li f spojitá na libovolné uzavřené a omezené množině $I \subset \mathbb{R}$.

5.4 Cvičení

5.4.1

Najděte body nespojitosti funkce f a určete jejich charakter, je-li

1. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$;
2. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$;
3. $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$;
4. $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}\,]$.

Výsledky

1. $x = 1$, 1.druhu, skok $-\pi$;
2. $x = 0$, 2. druhu;
3. $x_n = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, 1. druhu, skok $2(-1)^n$;
4. $x_n = n^2$ $(n \in \mathbb{N})$, 1. druhu, skok -1.

5.4.2

Nechť f a g jsou spojité funkce na $< 0, 1 >$ takové, že

$$f(0) = 1, \quad g(0) = 0 \quad \text{a} \quad f(1) = g(1)\ .$$

Nechť je dáno číslo k mezi 0 a 1. Dokažte, že existuje bod x, pro který se délka vertikální úsečky mezi grafy v bodě x rovná k.

5.4.3

Najděte spojitou funkci na intervalu $< 3, 6 >$, která nabývá maximální hodnoty 5 v bodě $x = 4$ a minimální hodnoty 4 v bodě $x = 5$.

1. Jaký je obor hodnot této funkce?
2. Má tato funkce inverzní funkci?

5.4.4

Rozhodněte o stejnoměrné spojitosti funkce f, je-li

1. $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in< a, +\infty),\ (a > 0);$
2. $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in (0, a >,\ (a > 0);$
3. $f(x) = x + \sin x,\ x \in \mathbb{R}.$

Výsledky

1. stejnoměrně spojitá;
2. není stejnoměrně spojitá;
3. stejnoměrně spojitá, využijte odhadu $|\sin t| \leq |t|$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$.

6 Základní pojmy diferenciálního a integrálního počtu

6.1 Diference, derivace, diferenciál

Mějme funkci $f : D \to \mathbb{R}$ a vnitřní bod $x_0 \in D$. Libovolný bod $x \in U(x_0) \subset D$ označíme

$$x = x_0 + h.$$

Proměnnou $h = x - x_0$ nazýváme *diference argumentu* v bodě x_0 a značíme také Δx.

Funkci proměnné h definovanou vztahem

$$\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$$

nazýváme *diference funkce f v bodě x_0* a značíme také Δf nebo Δy (když $y = f(x)$).

Příklad
Stanovme diference funkce f v bodě x_0:

1. Pro funkci $f(x) = x^2$ je $\Delta f(x_0, h) = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = 2x_0 h + h^2$;
2. Pro funkci $f(x) = \sin x$ je $\Delta f(x_0, h) = \sin(x_0 + h) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$.

$\square$

Funkci proměnné h (resp. proměnné x) definovanou poměrem

$$\frac{\Delta f(x_0, h)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazýváme *poměrná* (relativní) *diference*. Poměrná diference představuje jakousi "průměrnou", resp. střední změnu funkce na úseku $< x_0, x_0 + h >$ délky $h \equiv \Delta x$ (např.: průměrná rychlost, průměrný růst, atd.).

Definice 6.1

1. Řekneme, že funkce f definovaná na okolí $U(x_0)$ *má v bodě x_0 derivaci* (je derivovatelná), existuje-li konečná limita ($x_0 + h \in U(x_0)$)

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = f'|_{x=x_0}.$$

   Této limitě říkáme *derivace funkce f v bodě x_0*.

   Není-li tato limita konečná nebo neexistuje-li, říkáme, že funkce f *nemá v bodě x_0 derivaci*. V případě jednostranné limity hovoříme o jednostranné derivaci.

2. Řekneme, že funkce f *má v bodě* x_0 *diferenciál* (je *diferencovatelná*), existuje-li číslo A a funkce $\omega(h) \equiv \omega(x - x_0)$ taková, že platí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A.h + \omega(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

Číslo A je (první) *derivace* funkce f v bodě x_0 a lineární funkci Ah proměnné h říkáme (první) *diferenciál funkce* f *v bodě* x_0 a píšeme

$$df(x_0, h) = Ah = f'(x_0)h \ .$$

Příklad

Pro $f(x) = x^3$ stanovme diferenci, derivaci a diferenciál v bodě x_0:

$$\Delta f(x_0, h) = f(x) - f(x_0) = (x_0 + h)^3 - x_0^3 = \underbrace{3x_0^2 h}_{Ah} + \underbrace{3x_0 h^2 + h^3}_{\omega(h)} \ ,$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3}{h} = 3x_0^2 \ ,$$

$$df(x_0, h) = f'(x_0)h = 3x_0^2 h \ .$$

□

Věta 6.1 (derivovatelnost a diferencovatelnost) Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci (je derivovatelná) právě tehdy, když má v tomto bodě diferenciál (je diferencovatelná).

Důkaz

a) Nechť f je diferencovatelná. Potom existují lineární funkce Ah (tj. existuje číslo A) a funkce $\omega(h)$ s vlastností $\frac{\omega(h)}{h} \to 0$ takové, že platí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \omega(h).$$

Potom

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \frac{\omega(h)}{h}.$$

Protože existuje limita pravé strany, musí existovat i limita levé strany a platí

$$f'(x_0) = A,$$

tedy existuje derivace funkce f v bodě x_0.

b) Nechť obráceně funkce f má derivaci v x_0, tj. existuje konečná limita

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

tj. platí

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h}\right| = 0.$$

Existuje tedy funkce

$$\omega(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h$$

taková, že

$$\lim_{h\to 0}\frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

Tedy obě podmínky diferencovatelnosti jsou splněny.

Poznámky (důležité!)

1. Diferenciál funkce f představuje *hlavní (lineární) část* diference funkce f a rovnost

   $$\Delta f(x_0,h) \equiv f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \omega(h)$$

   užíváme k přibližnému určení diference funkce:

   $$\Delta f \approx df$$

   v bodě x_0, když $h = dx$ je malé! Přírůstek (úbytek) funkce f lze tedy přibližně stanovit pomocí diferenciálu (v dostatečně malém okolí bodu x_0).

2. Pro funkci $f(x) = x$ je rovnost $x_0 + h - x_0 = Ah + \omega(h)$ splněna pro

   $$\omega(h) \equiv 0,\ A = 1,$$

   tj.

   $$df = dx = h\ .$$

   Říkáme proto, že proměnná h je *diferenciálem argumentu.*

3. Protože

   $$df(x_0,h) = f'(x_0)dx$$

   zapisujeme derivaci jako podíl diferenciálů, tj.

   $$f'(x_0) = \frac{df(x_0,h)}{dx} = \frac{df}{dx}\ .$$

Příklad Snadno prověříme následující výsledky. Předpokládáme, že dané funkce jsou diferencovatelné v bodě x_0.

1. $f(x) = c:\quad \Delta f = 0 = 0\ .\ h \Rightarrow (c') = 0,\ df = 0.$
   Derivace a diferenciál konstantní funkce jsou nulové.

2. $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta f = (x_0 + h)^n - x_0^n = x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \cdots + h^n - x_0^n =$$

$$= n x_0^{n-1} h + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \cdots + h^n \ ;$$

$$\frac{\Delta f}{h} = n x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h + \cdots + h^{n-1} \to n x_0^{n-1}, \quad \text{pro } \ h \to 0 \ ;$$

$$df(x_0, h) = n x_0^{n-1} h \ ; \quad f'(x_0) = n x_0^{n-1} \ .$$

Píšeme: $d(x^n)_{x_0} = n x_0^{n-1} h \ ; \ (x^n)'_{x_0} = n x_0^{n-1}$.

3. $f(x) = \sin x$:

$$\Delta f = 2 \cos \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}; \ \frac{\Delta f}{h} \to \cos x_0 \quad \text{pro } \ h \to 0 \ ;$$

$$df(x_0, h) = (\cos x_0) h \ ; \quad f'(x_0) = \cos x_0 \ .$$

Píšeme: $d(\sin x)_{x_0} = (\cos x_0) h \ ; \quad (\sin x)'_{x_0} = \cos x_0$.

4. $f(x) = e^x$:

$$\Delta f = e^{x_0 + h} - e^{x_0} = (e^h - 1).e^{x_0},$$

$$\frac{\Delta f}{h} \to f'(x_0) = e^{x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h},$$

$$df(x_0, h) = d(e^x)_{x_0} = e^{x_0}.h = e^{x_0} dx \ .$$

5. $f(x) = a^x,\ a > 0$:

$$\Delta f = a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1),$$

$$\frac{\Delta f}{h} \to f'(x_0) = a^{x_0}. \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^{x_0}. \ln a, \quad (a^h = e^{h \ln a}) \ ,$$

$$df(x_0, h) = d(a^x)_{x_0} = a^{x_0} (\ln a).h = a^{x_0}. \ln a \ dx.$$

□

Věta 6.2 Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x_0, je v tomto bodě spojitá.

Důkaz Podle předpokladu existuje číslo A a funkce $\omega(h)$ taková, že

$$\frac{\omega(h)}{h} \to 0$$

a platí
$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+\omega(h).$$
Protože limita pravé strany je 0, pak
$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)]=0.$$

Poznámka Ze spojitosti neplyne diferencovatelnost! Např. funkce $f(x)=|x|$ je spojitá v každém bodě $x\in\mathbb{R}$, avšak

$$f'(0+)=\lim_{h\to 0+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=1,$$
$$f'(0-)=\lim_{h\to 0-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h}=-1,$$

tj. $f'(0+)\neq f'(0-)$. Funkce $f(x)=|x|$ nemá v bodě $x_0=0$ derivaci, a tedy není diferencovatelná na žádném intervalu obsahující počátek.

Věta 6.3 (pravidla derivování a diferencování)
(*derivování* = určení derivace, *diferencování* = určení diferenciálu). Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v nějakém bodě x_0 společného definičního oboru D. Potom v tomto bodě jsou diferencovatelné i funkce

$$cf,\quad f\pm g,\quad f.g,\quad \frac{f}{g}(g\neq 0)$$

a platí:

$(cf)'=cf'$, c konst.	$d(cf)=c\ df$,
$(f\pm g)'=f'+g'$,	$d(f\pm g)=df\pm dg$,
$(fg)'=f'g+fg'$,	$d(fg)=f\ dg+g\ df$,
$\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f'g-fg'}{g^2}$, $g\neq 0$	$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\ df-f\ dg}{g^2}$, $g\neq 0$

Důkaz provedeme pro případ součinu. Důkazy zbývajících vzorců si čtenář za cvičení odvodí sám. Podle definice

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0+h)g(x_0)+f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{h}=\\ &=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x_0)\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\\ &=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)\ .\end{aligned}$$

Z diferencovatelnosti (a spojitosti) funkcí f a g plyne existence $(fg)'(x_0)$ a příslušný vzorec. Pro diferenciál odtud plyne vzorec $d(fg) = fdg + gdf$.

Derivaci v bodě x_0 jsme definovali jako jistou limitu, tj. **číslo**.

Jestliže funkce f má derivaci v každém bodě $x \in I$, potom **funkci** $g : I \to \mathbb{R}$, která každému $x \in I$ přiřazuje číslo $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, nazýváme také *derivace* a značí se f'.

Je-li funkce f' spojitá v I, říkáme, že funkce f je *spojitě diferencovatelná v I* (tzv. *hladká funkce*), tj. platí:

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0), \text{ pro každé } x_0 \in I.$$

Příklad

Ukažte, že funkce $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}\,, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$ je diferencovatelná v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, ale pro $x = 0$ není spojitě diferencovatelná. (Návod: je třeba ukázat, že existuje $f'(0)$; $f'(x)$, $x \neq 0$, ale není pravda, že $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$).

□

Věta 6.4 (derivace a diferenciál složené funkce) Mějme složenou funkci $F = g \circ f = g(f(x))$ (definice 4.6) a nechť existují derivace $f'(x_0)$ a $g'(y_0)$, kde $y_0 = f(x_0)$. Potom existuje derivace $F'(x_0) = [g(f(x))]'_{x_0}$ a platí

$$F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0),$$
$$dF(x_0,h) = dg(f(x))_{x_0} = g'(y_0).f'(x_0)h.$$

Důkaz (schematický nástin)

$$\begin{aligned} y = f(x):\quad & \Delta x = x - x_0, \\ & \Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0), \\ z = g(y):\quad & \Delta z = z - z_0 = g(y) - g(y_0). \end{aligned}$$

Předpoklady:

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \omega_1(\Delta x), \quad \frac{\omega_1(\Delta x)}{\Delta x} \to 0\,,$$
$$\Delta z = z - z_0 = g(y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \omega_2(\Delta y), \quad \frac{\omega_2(\Delta y)}{\Delta y} \to 0\,.$$

Potom

$$\begin{aligned} z - z_0 &= g(f(x)) - g(f(x_0)) = \\ &= g'(y_0)[\underbrace{f'(x_0)\Delta x + \omega_1(\Delta x)}_{f(x)-f(x_0)}] + \omega_2(\Delta y) = \\ &= g'(y_0)f'(x_0)\Delta x + \underbrace{g'(x_0)\omega_1(\Delta x) + \omega_2(f'(x_0)\Delta x + \omega_1(\Delta x))}_{\mu(\Delta x)}, \quad \frac{\mu(\Delta x)}{\Delta x} \to 0\,. \end{aligned}$$

Věta 6.5 (derivace inverzní funkce) Nechť diferencovatelná funkce $f: \ I \to H$ je **prostá v** I a je $f'(x) \neq 0, \ x \in I$. Potom inverzní funkce f^{-1} je také diferencovatelná (a prostá) a platí

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{[f(x)]'},$$

kde

$$y = f(x), \ x \in I, \ \ x = f^{-1}(y), \ y \in H \ .$$

Princip důkazu Vezmeme složenou funkci $y = f(f^{-1}(y))$, resp. funkci $x = f^{-1}(f(x))$. Potom podle předcházející věty 6.4 dostáváme

$$1 = [f^{-1}(y)]' f'(x), \ \text{tj.} \ (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Pro detailní důkaz vyjdeme z rovnosti

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} \ .$$

Příklad

$$y = \arcsin x, \ x \in \langle -1, 1 \rangle, \ y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \Rightarrow x = \sin y; \ x_0 = \sin y_0.$$

$$(\arcsin x)'_{x_0} = \frac{1}{(\sin y)'_{y_0}} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}, \ \left(y_0 \neq \pm \frac{\pi}{2} \right).$$

Tedy

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ x \in (-1, 1).$$

□

6.2 Derivace elementárních funkcí (základní vzorce)

1. $(e^x)' = e^x;\ x \in \mathbb{R}.$

2. $(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R};$
   $a^x = e^{x \ln a} \Rightarrow (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}. \ln a$ (derivace složené funkce).

3. $(\ln x)' = \frac{1}{x};\ x \in (0, +\infty).$

   Takže $\dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \dfrac{z-y}{e^z - e^y} = \dfrac{1}{\dfrac{e^z - e^y}{z-y}} \to \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x},$

   $y = \ln x;\ z = \ln(x+h),$
   $x = e^y;\ x + h = e^z,\ h = e^z - e^y,$
   $h \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \to y.$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in (0, +\infty)$; protože $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ plyne odtud uvedený vzorec.

5. $(x^\alpha)' = \alpha . x^{\alpha - 1},\ x \in (0, +\infty),\ \alpha \in \mathbb{R}$, (plyne ze vzorce $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$),
   $(x^n)' = n x^{n-1};\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$

6. $(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R},$

7. $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R},$

8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k celé,

9. $(\operatorname{cotg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x};\ x \neq k\pi$, k celé.

Při odvozování vzorců 6 - 9 se x bere v obloukové míře; odvoďte analogické vzorce pro x ve stupních.

10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1);$
    Při označení
    $$y = \arcsin x;\ x \in \langle -1, 1 \rangle;\ y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$
    máme
    $$x = \sin y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}\ \text{, tj.}$$
    $$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ x \in (-1, 1).$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2};\ x \in \mathbb{R}.$

13. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}.$

14. $(\sinh x)' = \cosh x, \ x \in \mathbb{R}\ ; \quad \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\ .$

15. $(\cosh x)' = \sinh x, \ x \in \mathbb{R}\ ; \quad \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\ .$

16. $(\operatorname{tgh} x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}, \ x \in \mathbb{R}\ ; \quad \operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}\ .$

17. $(\operatorname{cotgh} x)' = \dfrac{1}{\sinh^2 x}, \ x \neq 0\ ; \quad \operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}\ .$

18. $(\operatorname{argsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \ x \in \mathbb{R};$

19. $(\operatorname{argcosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x \in (1, +\infty)$; označíme-li

$$x = \cosh y; \ y \in \mathbb{R}; \ x \in \langle 1, +\infty),$$

potom

$$\frac{dx}{dy} = \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2-1}.$$

20. $(\operatorname{argtgh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \ x \in (-1, 1).$

21. $(\operatorname{argcotgh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$

6.3 Fyzikální a geometrický význam derivace a diferenciálu

Ve fyzikálních aplikacích poměrná diference znamená relativní (průměrnou) změnu zkoumané veličiny vzhledem k jednotkové změně argumentu.

Derivace představuje místní (lokální) či okamžitou změnu.

Když například $s = s(t)$ je dráha závisející na čase, potom poměrná diference $\dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ představuje průměrnou rychlost v časovém úseku $< t_0, t_0 + \Delta t >$ a derivace $s'(t_0)$ je okamžitá rychlost v okamžiku t_0.

Podobně, je-li $q = q(t)$ množství náboje, který protekl řezem vodiče v čase t, potom diference $q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)$ je změna toku náboje za čas Δt a poměrná diference $\dfrac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$ je průměrná změna toku ($\equiv$ změna toku za jednotku času) a derivace $q'(t_0)$ je okamžitá změna toku náboje, tzv. okamžitý tok ($\equiv$ proud $\equiv i(t_0)$).

Zákon rozpadu radioaktivní látky: Změna hmotnosti za jednotku času je přímo úměrná hmotnosti, přičemž hmotnost s časem ubývá: Je-li $m(t)$ hmotnost v okamžiku t a $m(t_0)$ hmotnost v okamžiku t_0, potom uvedený zákon píšeme ve tvaru:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t_0 + \Delta t) - m(t_0)}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} = -km, \ k > 0.$$

Zákon hybnosti: Okamžitá (časová) změna hybnosti je rovna působící síle $F(t)$, resp. síla $F(t)$ způsobuje okamžitou změnu hybnosti tělesa.

Nechť $m(t)$ je hmotnost tělesa v okamžiku t a $v(t)$ je rychlost tělesa. Potom tento zákon píšeme ve tvaru

$$\frac{d(mv)}{dt} = F(t) \; .$$

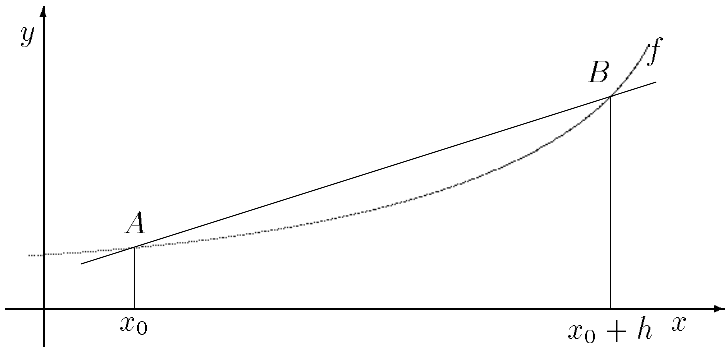
Geometrická interpretace derivace

Rovnice sečny grafu funkce $y = f(x)$ v bodech

$$A = [x_0, f(x_0)],\; B = [x_0 + h, f(x_0 + h)]$$

má tvar

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0).$$



Obr. 6.1

Rovnice tečny grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 má tvar $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Rovnice normály grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Normálou ke grafu funkce rozumíme přímku kolmou k tečně v bodě dotyku.

6.4 Základní věty diferenciálního počtu

Definice 6.2 Funkce f nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ *lokálního minima* (resp. *maxima*), když existuje okolí $U(x_0, \delta)$ bodu x_0 takové, že

$$\left.\begin{array}{rl} & f(x_0) \leq f(x), \\ \text{resp.} & f(x_0) \geq f(x), \end{array}\right\} \forall x \in U(x_0, \delta) \cap D(f).$$

Jestliže platí

$$f(x_0) < f(x), \ \forall x \in U(x_0, \delta) \cap D(f), \ x \neq x_0,$$

potom x_0 je bod *ostrého lokálního minima.* Při obrácené nerovnosti je x_0 bod *ostrého lokálního maxima.*

Věta 6.6 (Fermat) (nutná podmínka existence extrému) Mějme funkci f definovanou v bodě x_0 a jeho okolí. Když f nabývá v bodě x_0 svého lokálního minima (maxima) a existuje $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.

Důkaz Je-li v bodě x_0 minimum, potom platí

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ pro } x > x_0 : x \in (x_0, x_0 + \delta);$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ pro } x < x_0 : x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Podle věty 4.6 (porovnávací) bude také $f'(x_0+) \geq 0, \ f'(x_0-) \leq 0$, a proto musí být $f'(x_0) = 0$.

Poznámka Předpoklad existence oboustranné derivace $f'(x_0)$ je **nezbytný**! Zahrnuje v sobě předpoklad, že x_0 je vnitřní bod. Je-li extrém (minimum, resp. maximum) v krajním bodě intervalu, nemusí v něm být derivace nulová.

Věta 6.7 (věta o střední hodnotě - Rolle) Předpokládáme, že funkce f

1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. je diferencovatelná na otevřeném intervalu (a, b), (tj. existuje derivace v každém vnitřním bodě),
3. platí $f(a) = f(b)$.

Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz Ze spojitosti funkce f na $\langle a, b\rangle$ plyne, že funkce f nabývá hodnot $m = \inf\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$ (Weierstrassova věta - věta 5.7).
Je-li $m = M$, potom je $f(x) = \text{konst.}$ (tj. $f' = 0$) a za ξ lze vzít libovolný bod intervalu (a, b).
Je-li $m \neq M$, potom je splněna aspoň jedna z nerovností:

$$f(a) = f(b) > m; \ f(a) = f(b) < M.$$

Když např. $f(a) = f(b) < M$, potom bod ξ, v němž $f(\xi) = M$, nemůže být krajním bodem intervalu $\langle a, b\rangle$, a podle Fermatovy věty 6.6 musí být $f'(\xi) = 0$.

Když $f(a) = f(b) > m$, potom bod ξ, v němž $f(\xi) = m$, nemůže být krajním bodem intervalu $\langle a, b\rangle$, a podle Fermatovy věty musí být $f'(\xi) = 0$.

Důsledek Je-li funkce f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a diferencovatelná v (a, b), potom mezi dvěma kořeny (v $\langle a, b\rangle$) rovnice $f(x) = c$ (c je konstanta) leží kořen rovnice $f'(x) = 0$.

Věta 6.8 (věta o střední hodnotě - Lagrange) Předpokládáme, že funkce f

1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. je diferencovatelná na otevřeném intervalu (a, b).

Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí

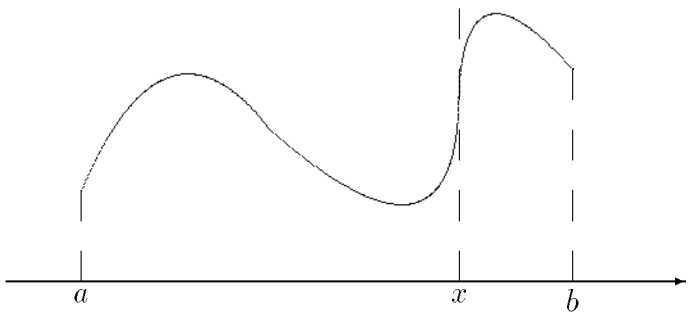
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Důkaz Pro každou funkci f uvedených vlastností sestrojíme funkci

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Funkce g je spojitá na $\langle a, b\rangle$, diferencovatelná na (a, b) a platí $g(a) = g(b)$ $(= 0)$. Potom podle Rolleovy věty 6.7 existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $g'(\xi) = 0$, a odtud plyne tvrzení věty.

Poznámka Tvrzení věty o střední hodnotě (i Rolleovy) platí i tehdy, je-li v nějakém bodě x intervalu (a, b) derivace $f'(x) = \pm\infty$.



Obr. 6.2

Důsledek 1 Funkce f je konstantní na (a, b) **právě tehdy, když** má na tomto intervalu derivaci a platí $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Důkaz

a) $\Rightarrow$: Derivace konstanty je nula.

b) $\Leftarrow$: Zvolme libovolné dva body $x_1 \neq x_2$ z (a,b). Potom

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2).$$

Platí-li $f'(\xi) = 0$, pak $f(x_1) = f(x_2)$ pro libovolné $x_1, x_2 \in (a,b)$.

Důsledek 2 Nechť f je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a diferencovatelná na (a,b). Když pro všechna $x \in (a,b)$ platí $f'(x) \neq 0$ ($f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$), potom funkce f je na intervalu $\langle a,b\rangle$ **prostá** (rostoucí, resp. klesající).

Důkaz Zvolme dva libovolné body $x_1 \neq x_2$ na (a,b) a nechť $f'(x) > 0$ na (a,b), potom

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) < 0,$$

když $x_1 < x_2$, a funkce f je tedy rostoucí. Podobně v případě $f'(x) < 0$ na (a,b) je f klesající.

Věta 6.9 (zobecněná věta o střední hodnotě - Cauchy) Předpokládáme, že funkce f a g jsou

1. spojité na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$,
2. diferencovatelné na otevřeném intervalu (a,b).

Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a,b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ g' \neq 0.$$

Důkaz Pro libovolné funkce f a g uvedených vlastností sestrojíme funkci

$$w(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)\ ,$$

která splňuje podmínky platnosti Rolleovy věty. Odtud pak plyne naše tvrzení.

Důsledek (l'Hospitalovo pravidlo) (stručná formulace). Předpokládáme, že pro funkce f a g platí jeden z předpokladů

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim f(x) = \lim g(x) = 0, \\ 2.\ \lim f(x) = \lim g(x) = +\infty \text{ (resp. } -\infty), \end{array}\right\} \text{kde buď } x \to x_0, \text{ nebo } x \to \pm\infty.$$

Jsou-li funkce f a g diferencovatelné v (prstencovém) okolí bodu x_0 (resp. $\pm\infty$) a existuje-li (i nevlastní)

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

potom existuje $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka L'Hospitalovo pravidlo lze vyslovit (a dokázat) i pro jednostranné limity. Toto pravidlo se používá pro výpočet limit funkcí typu "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", kterým říkáme *neurčité výrazy* (nelze použít větu 4.5). Technika výpočtu limity pomocí l'Hospitalova pravidla je velmi oblíbená (v duchu hesla "snadno a rychle milionářem"), ale jeho cena je více než sporná; snad jako příležitost pro trénování vzorečků pro derivování. V nepřehledných situacích se nemusíme stydět za výpočet funkčních hodnot v okolí vyšetřovaného bodu a použít odtud plynoucí odhad chování vyšetřované funkce.

Příklad
Užitím l'Hospitalova pravidla vypočteme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos x}}=(-1)\frac{1}{4}\cdot 1=-\frac{1}{4}\,.$$

□

Příklad
Užitím l'Hospitalova pravidla vypočteme (neurčitý výraz typu "$0\cdot\infty$"):

$$\lim_{x\to 0_+}x^2\ln x=\lim_{x\to 0_+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0_+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to 0_+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0\,.$$

□

Poznámka l'Hospitalovo pravidlo je tvrzení, které má tvar implikace. Uvědomte si, že v předpokladech tohoto tvrzení je mimo jiné *požadavek existence limity*

$$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bez tohoto předpokladu totiž l'Hospitalovo pravidlo použít nelze (tvrzení neplatí)! Z neexistence této limity nelze odvodit neexistenci původní limity

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Příklad

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[6]{x}.\sin\frac{1}{x}=0.$$

Přitom však

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}+\sqrt{x}(-\frac{1}{x^2})\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\sqrt[6]{x}\sin\frac{1}{x}}_{=0}-\underbrace{3\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}\cos\frac{1}{x}}_{\text{neexistuje}},$$

tj. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje!

□

6.5 Množiny spojitých a diferencovatelných funkcí

Zde uvedeme několik elementárních pojmů a označení.

Symbolem

$$C(a,b),\ \text{resp. } C(\langle a,b\rangle)$$

budeme označovat množinu všech funkcí spojitých na intervalu (a,b), resp. na $\langle a,b\rangle$.

Výrok $f \in C(a,b)$ znamená, že funkce f je spojitá na intervalu (a,b).

Výrok $f \in C(\langle a,b\rangle)$ znamená, že f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Platí: Když $f, g \in C(a,b)$, potom $f+g \in C(a,b)$, $\alpha f \in C(a,b)$ (viz věta 5.2).

Protože nulová funkce $0(x) \equiv 0$ je spojitá, tj. $0 \in C(a,b)$, je množina $C(a,b)$ (stejně jako $C(\langle a,b\rangle)$) *lineární prostor*.

Symbolem

$$C^1(a,b),\ \text{resp. } C^1(\langle a,b\rangle)$$

označujeme množinu všech funkcí spojitě diferencovatelných na intervalu (a,b), resp. na $\langle a,b\rangle$ (tj. funkcí f, jejichž derivace f' je spojitá).

Množina $C^1(a,b)$, resp. $C^1(\langle a,b\rangle)$, je opět *lineární prostor*.

Platí:

$$C^1(a,b) \subset C(a,b).$$

Zobrazení, které každé funkci $f \in C^1(a,b)$ přiřazuje jedinou funkci $g \in C(a,b)$ takovou, že $g(x) = f'(x)$ pro každé $x \in (a,b)$, se nazývá *operátor derivování* a značí se:

$$\frac{d}{dx} : f \to f'.$$

Například

$$\frac{d}{dx} :\ \ln x \to \frac{1}{x},\ x \in (0,+\infty),$$
$$\frac{d}{dx} :\ \sin x \to \cos x,\ x \in \mathbb{R},$$

Uvedené zobrazení (operátor) je *aditivní* a *homogenní*, tj. *lineární*:

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}(f) + \frac{d}{dx}(g),$$
$$\frac{d}{dx}(\alpha f) = \alpha\frac{d}{dx}(f).$$

6.6 Primitivní funkce

Definice 6.3 Je dána funkce $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ je interval). Funkce $F : I \to \mathbb{R}$, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x)\ \ \forall x \in I,$$

se nazývá *primitivní funkce k funkci f na intervalu I.* (V případných krajních bodech intervalu I jde o derivaci jednostrannou).

Příklad
K funkci $f(x) = x^2 - \cos x,\ x \in \mathbb{R}$ je $F(x) = \frac{x^3}{3} - \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Věta 6.10 Předpokládáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f na I:

1. potom také každá funkce $\widetilde{F}$ tvaru $\widetilde{F} = F + C$ (C je konstanta) je primitivní k funkci f na I;
2. pro libovolný bod $x_0 \in I$ a pro každé číslo $y_0 \in \mathbb{R}$ existuje **právě jedna** primitivní funkce $\widetilde{F}$ k funkci f na I, pro kterou platí $\widetilde{F}(x_0) = y_0$ (graf funkce $\widetilde{F}$ prochází bodem $[x_0, y_0]$).
3. Funkce F je spojitá.

Důkaz

1. Protože
$$(C)' = 0 \text{ (z definice derivace) } \Rightarrow (F + C)' = F' = f.$$
2. Nechť jsou dvě: F a G (různé) : $F' = f,\ G' = f \Rightarrow F' - G' = 0 \Rightarrow (F - G)' = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow F - G = \text{konst.}$, tj.
$$G(x) = F(x) + C.$$
Protože musí být $y_0 = F(x_0),\ y_0 = G(x_0) = F(x_0) + C \Rightarrow C \equiv 0 \Rightarrow F(x) \equiv G(x)$, a to je spor s předpokladem.
3. F je diferencovatelná, neboť F' existuje a je rovna f, proto podle věty 6.2 je F spojitá.

Je-li F primitivní funkce k funkci f, potom množinu všech primitivních funkcí k funkci f označujeme
$$\{\widetilde{F} : \widetilde{F} = F + C,\ C \in \mathbb{R}\} = \int f(x)dx.$$
Tato množina se nazývá *neurčitý integrál* a zapisuje se
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$
a C se nazývá *integrační konstanta.*

Platí:
$$\left.\begin{array}{lrcll} 1. & \int \alpha f(x)dx & = & \alpha \int f(x)dx, & \textit{homogenita} \\ 2. & \int [f(x) + g(x)]dx & = & \int f(x)dx + \int g(x)dx, & \textit{aditivita} \end{array}\right\} \textit{linearita}.$$

Důkaz

1. Když $F'(x) = f(x)$, potom $(\alpha F)' = \alpha f$, tj.
$$\int \alpha f(x)dx = \alpha(F + C).$$

2. Když také $G' = g(x)$, potom $(F + G)' = f + g$, tj.
$$\int [f(x) + g(x)]dx = F(x) + G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

6.7 Metody výpočtu primitivních funkcí (technika integrování)

Základní úlohy

Úloha 1 Dána funkce $f : I \to \mathbb{R}$. Najít funkci $F : I \to \mathbb{R}$ takovou, že
$$F'(x) = f(x)\ \forall x \in I.$$

Úloha 2 Dána funkce $f : I \to \mathbb{R}$ a čísla $x_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}$. Najít funkci $F : I \to \mathbb{R}$ takovou, že platí:
$$F'(x) = f(x),\ F(x_0) = y_0.$$

Příklad
Dáno:
$$f(x) = \sin x;\ x_0 = \frac{\pi}{6},\ y_0 = 2;$$
Hledáme $F(x)$ takové, aby platilo
$$F(x):\ F'(x) = \sin x,$$
$$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2.$$
Výsledek: $\int \sin x\ dx = \underbrace{-\cos x + C}_{F(x)}$.
Určíme $C : -\cos\frac{\pi}{6} + C = 2$, tj. $C = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tedy
$$F(x) = -\cos x + 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\square$

Tabulka základních vzorců:

1. $\displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1, \begin{cases} x \in (-\infty, +\infty) & \text{pro } \alpha \text{ celé nezáporné;} \\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) & \text{pro } \alpha \text{ celé záporné;} \\ x \in (0, +\infty) & \text{pro } \alpha \text{ necelé.} \end{cases}$

2. $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + C, \ x \in \mathbb{R},$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C : \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{pro } x > 0, \\ \ln(-x) + C_2 & \text{pro } x < 0, \end{cases}$

4. $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \ x \in \mathbb{R},$

5. $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + C, \ x \in \mathbb{R},$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C, \ x \neq k\pi,$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \ x \in (-1, 1),$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C, \ x \in \mathbb{R},$

10. $\displaystyle\int \sinh x \, dx = \cosh x + C, \ x \in \mathbb{R},$

11. $\displaystyle\int \cosh x \, dx = \sinh x + C, \ x \in \mathbb{R},$

12. $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}, \ x \in \mathbb{R}, \ a > 0, \ a \neq 1,$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C, \ x \in \mathbb{R},$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + C, \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh}|x| + C = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C, \ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsinh} x + C = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C, \ x \in \mathbb{R},$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{argtgh} x + C, \ x \in (-1, 1) \\ \operatorname{argcotgh} x + C, \ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$

Poznámka K funkci $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pro $x > 1$ je primitivní funkce $\operatorname{argcosh} x + C$ a pro $x < -1$ je primitivní funkcí funkce $\operatorname{argcosh}(-x) + C$. Vzorec 17 je třeba chápat tak, že primitivní funkce k funkci $\dfrac{1}{1-x^2}$ se v různých částech $\mathbb{R}$ označuje různě.

Příklad
Ukázka užití elementárních vzorců (integrační konstantu C připisujeme až k výsledku):

1. $\displaystyle\int e^{3x}\ dx = \frac{1}{3}\int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x} + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{5x^2+3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{3}})^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}d(\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{3}})}{(\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{3}})^2+1} = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{3}}x + C.$

□

Věta 6.11 (integrace per partes - po částech) Nechť $u : I \to \mathbb{R}$, $v : I \to \mathbb{R}$ jsou funkce diferencovatelné v intervalu I a nechť existuje v I primitivní funkce k funkci uv'. Potom také existuje primitivní funkce k funkci $u'v$ a platí

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx,$$

resp.

$$\int vdu = uv - \int udv.$$

Důkaz Ve vnitřních bodech I platí

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow u'v = (uv)' - uv'.$$

K funkci $(uv)'$ je primitivní funkce uv, k funkci uv' primitivní funkce podle předpokladu existuje a píšeme ji ve tvaru $\int uv'\ dx$. Odtud plyne příslušný vzorec.

Příklad

1. $\displaystyle\int x\sin x\ dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x & , u = -\cos x \\ v = x & , v' = 1 \end{array} \right| = -x\cos x + \int \cos x\ dx =$

   $= -x\cos x + \sin x + C,\ x \in \mathbb{R};$

2. $\displaystyle\int \ln x\ dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & , u = x \\ v = \ln x & , v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C,\ x \in (0, +\infty).$

□

Další užití věty 6.11

1. Integrování per partes užíváme s úspěchem k hledání primitivních funkcí k funkcím typu:

   a) $x^n \cos\omega x,\ x^n \sin\omega x,\ x^n e^{kx},\ n \in \mathbb{N};\ \omega, k$ jsou konstanty,

   b) $e^{\alpha x}\cos\omega x,\ e^{\alpha x}\sin\omega x,\ \alpha, \omega$ jsou konstanty,

   c) $x^n \arcsin x,\ x^n \arccos x,\ x^n \ln x,\ x^n \operatorname{arctg} x,\ x^n \operatorname{arccotg} x$.

   Lze např. odvodit vzorce:

$$\int e^{\alpha x}\cos\omega x\ dx = \frac{e^{\alpha x}(\omega\sin\omega x + \alpha\cos\omega x)}{\alpha^2+\omega^2} + C,$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\omega x\ dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\omega x - \omega\cos\omega x)}{\alpha^2+\omega^2} + C.$$

2. Odvození rekurentních formulí integrováním per partes:

   a) $J_n = \displaystyle\int \cos^n x\ dx$; známe-li J_1, J_2, pak
   $J_n = \dfrac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \dfrac{n-1}{n} J_{n-2};\ n \geq 2.$

   b) $J_n = \displaystyle\int \sin^n x\ dx$; známe-li J_1, J_2, pak
   $J_n = -\dfrac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \dfrac{n-1}{n} J_{n-2};\ n \geq 2.$

   c) $J_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$; známe-li J_1, pak
   $J_{n+1} = \dfrac{1}{2n}\left[\dfrac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)J_n\right],\ n \geq 1.$

Věta 6.12 (integrace substitucí) Nechť funkce $z = f(x)$ je diferencovatelná na intervalu X a zobrazuje jej **do** intervalu Z (tj. $f(X) \subset Z$), na kterém je definována funkce $g(z)$ a má na něm primitivní funkci $G(z)$. Potom platí

$$\int g(z)dz = \int g(f(x))f'(x)dx = G(f(x)) + C.$$

Důkaz Složená funkce $F(x) = G(f(x)),\ x \in X$ je podle předpokladu diferencovatelná a platí

$$F'(x) = G'(z)f'(x) = g(z)f'(x).$$

Proto primitivní funkcí k funkci $F'(x) = g(f(x))f'(x)$ je funkce $F(x) = G(f(x))$.

Užití věty 6.12

1. Chceme určit $\int g(z)dz$: Volíme vhodnou funkci $z = f(x)$ tak, aby výpočet integrálu $\int g(f(x))f'(x)dx$ v proměnné x byl jednodušší:

Příklad

$$\int \sqrt{1-z^2}dz = \left| \begin{array}{ll} z & = \sin x \\ & dz = \cos x \ dx \\ z & \in (-1,1) \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 x}.\cos x \ dx = \int |\cos x| \cos x \ dx =$$

$$(\text{volíme } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow |\cos x| = \cos x)$$

$$= \int \cos^2 x \ dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x) \ dx =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C = \frac{1}{2}\arcsin z + \frac{1}{4}\cdot 2z\sqrt{1-z^2} + C.$$

□

2. Chceme určit $\int g(f(x))f'(x)dx$: Část integrandu označíme $f(x) = z$ tak, aby výpočet integrálu $\int g(z)dz$ v proměnné z byl jednodušší:

Příklad

$$\int \operatorname{tg} x \ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left| \begin{array}{r} \cos x = z \\ -\sin x \ dx = dz \end{array} \right| = \int \frac{-dz}{z} = -\ln|z| + C =$$

$$= -\ln|\cos x| + C.$$

Zde obecně integrujeme (tj. hledáme primitivní funkci) v takovém intervalu I, ve kterém $\cos x \neq 0$.

□

Příklad

$$\int \frac{x \ dx}{x^2-1} = \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 = z \\ 2x \ dx = dz \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C.$$

□

Integrály typu $\int R(x) \ dx$

$R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q jsou polynomy; $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$.

Funkci $R(x)$ rozložíme na součet základních racionálních funkcí typu (rozklad na parciální zlomky):

1. $\frac{A}{x-x_0}$; $A,\ x_0$ jsou konstanty;

2. $\frac{A}{(x-x_0)^k}$, $A,\ x_0,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$ jsou konstanty;

3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $A,\ B,\ p,\ q$ jsou konstanty (reálné), kořeny jmenovatele jsou komplexní (sdružené);

4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $A,\ B,\ p,\ q,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$ jsou konstanty (reálné), kořeny jmenovatele jsou komplexní k-násobné.

Primitivní funkce k těmto základním racionálním funkcím stanovte jako cvičení.

Integrály typu $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$

Každý integrál uvedeného typu (integrand je racionální funkce v sinech nebo kosinech) lze převést na integrál z racionální lomené funkce *univerzální substitucí*: v intervalech neobsahující body $x_k = (2k+1)\pi$, k celé, volíme

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\ , \quad \text{tj.} \quad x = 2\operatorname{arctg} t$$

a stanovíme

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}\ .$$

Někdy stačí speciálnější substituce: používá se v případě, že $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$. Volíme

$$\operatorname{tg} x = t\ , \quad \text{tj.} \quad x = \operatorname{arctg} t$$

a stanovíme

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2};\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2};\ dx = \frac{dt}{1+t^2}\ .$$

Někdy dokonce stačí substituce $\cos x = t$ nebo $\sin x = t$, a to v případech, kdy

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \text{ nebo}$$
$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Poznámka Zkoušíme nejdříve speciálnější substituce. Univerzální substituci užíváme v "krajní nouzi".

Příklad

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \left|\operatorname{tg} x = t\right| = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} = \int \frac{(1+t^2)^2}{1+t^2}dt = \int (1+t^2)dt =$$
$$= t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

□

Příklad

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t\right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

□

Integrály typu:

$$\int \cos mx \cos nx \ dx, \quad \int \sin mx \cos nx \ dx, \quad \int \sin mx \sin nx \ dx, \qquad m, n \text{ celé.}$$

Užije se vzorců:

$$\int \cos mx \cos nx \ dx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$
$$\int \sin mx \cos nx \ dx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$
$$\int \sin mx \sin nx \ dx = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Příklad

$$\int \sin 5x \sin 3x \ dx = \frac{1}{2}\int [-\cos 8x + \cos 2x]dx =$$
$$= -\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

□

Integrály typu $\int R(\sqrt{1-x^2})dx$
Užije se substituce: $x = \sin t$ nebo $x = \cos t$ a vzorců: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$; $\sin 2t = 2\sin t \cos t$, $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$.

Integrály typu $\int R(\sqrt{1+x^2})dx$
Užije se substituce: $x = \sinh t$ a vzorců: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, $\cosh t = \sqrt{1+\sinh^2 t}$, $\sinh^2 t + \cosh^2 t = \cosh 2t$.

Integrály typu $\int R(\sqrt{x^2-1})dx$
Užije se substituce: $x = \cosh t$ a vzorců: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, $\sinh t = \sqrt{\cosh^2 t - 1}$, $\sinh^2 t + \cosh^2 t = \cosh 2t$.

6.8 Cvičení

6.8.1

Užitím definice vypočtěte derivaci funkce f v bodě x_0, je-li

1. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = t + 1, \quad t \in \mathbb{R} - \{-1\};$
2. $f(x) = x + \operatorname{cotg} x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$

Výsledky

1. $-\dfrac{1}{(t+1)^2}$; 2. -2.

6.8.2

Dokažte, že derivace sudé funkce je funkce lichá a derivace liché funkce je funkce sudá.

6.8.3

Dokažte, že derivace periodické funkce je také funkce periodická se stejnou periodou.

6.8.4

Ukažte, že funkce $y = \dfrac{1}{1 + x + \ln x}$ vyhovuje diferenciální rovnici $xy' = y(y \ln x - 1)$.

6.8.5

Je dána křivka $y = \frac{1}{4}x^4$. Napište rovnici její tečny rovnoběžné s osou II. kvadrantu. Napište rovnici její normály rovnoběžné s osou II. kvadrantu.

Výsledek: $t: \ y = -x - \frac{3}{4}$; n: $y = -x + \frac{5}{4}$.

6.8.6

Pro $g(x) = x - \frac{1}{x}$ najděte

1. $g'(x)$;
2. $g'\left(x - \frac{1}{x}\right)$;
3. $g''(x)$;
4. $g''\left(x - \frac{1}{x}\right)$;
5. $\frac{d}{dx} g\left(x - \frac{1}{x}\right)$;
6. $\frac{d}{dx} g'\left(x - \frac{1}{x}\right)$;
7. $\frac{d^2}{dx^2} g\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

Výsledky

1. $1+\frac{1}{x^2}$;
2. $1+\frac{x^2}{(x^2-1)^2}$;
3. $-\frac{2}{x^3}$;
4. $-\frac{2x^3}{(x^2-1)^3}$;
5. $1+\frac{1}{x^2}+\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$;
6. $-2x\frac{x^2+1}{(x^2-1)^3}$;
7. $-\frac{2}{x^3}-2x\frac{x^2+3}{(x^2-1)^3}$.

6.8.7

Pro $h(x)=f(g(x))$ platí $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$. Jaký je příslušný vzorec pro

1. h'' ?
2. h''' ?

Výsledky

1. $h''=f''(g(x))\cdot[g'(x)]^2+f'(g(x))\cdot g''(x)$;
2. $h'''=f'(g(x))g'''(x)+3f''(g(x))g'(x)g''(x)+f'''(g(x))g'(x)^3$.

6.8.8

Dokažte, že funkce $y=\frac{1}{2}x^2e^x$ je řešením diferenciální rovnice $y''-2y'+y=e^x$.

6.8.9

Vypočtěte přibližnou hodnotu $\sin 46^0$.

6.8.10

Odvoďte vztah (pro $|\Delta x|$, malé ve srovnání s x)

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$$

a s jeho pomocí najděte přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{70}$; $\sqrt{640}$.

Návod: Vyjádřete diferenciál funkce $f(x)=\sqrt{x}$.

7 Newtonův integrál

7.1 Základní vlastnosti

Definice 7.1 Nechť k funkci $f: I \to \mathbb{R}$ existuje na I primitivní funkce $F: I \to \mathbb{R}$ a nechť $< a, b > \subset I$. Číslo $F(b) - F(a)$ se nazývá *Newtonův integrál* funkce f přes interval $< a, b >$ a značí se

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f,$$

kde a je *dolní mez*, b je *horní mez* integrálu.

Výše uvedený vztah je tzv. *Newtonova – Leibnizova formule (vzorec).*

Věta 7.1 Newtonův integrál nezávisí na výběru primitivní funkce.

Důkaz Nechť $F_1 \neq F_2$ a platí $F_1' = F_2' = f$. Proto $F_1(x) = F_2(x) + c$, c je libovolná konstanta a tedy

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a).$$

Označíme $\mathcal{N}(I)$ množinu všech funkcí f, k nimž existuje Newtonův integrál, tj. které jsou *newtonovsky integrovatelné*. Výroky

$$f \in \mathcal{N}(< a, b >); \quad \text{existuje} \quad \int_a^b f(x)\,dx \equiv F(b) - F(a)$$

jsou proto ekvivalentní.

Věta 7.2 Pro $a, b, c \in I$, $f \in \mathcal{N}(I)$ platí:

1. $\int_a^b f = -\int_b^a f$;
2. $\int_a^a f = 0$;
3. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Důkaz

1. $F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$;
2. $F(a) - F(a) = 0$;
3. $F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + [F(b) - F(c)]$.

Věta 7.3

1. Když $f \in \mathcal{N}(< a, b >)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, potom $\alpha f \in \mathcal{N}$ a platí
$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

2. Když $f_1, f_2 \in \mathcal{N}(< a, b >)$, potom $f_1 + f_2 \in \mathcal{N}(< a, b >)$ a platí
$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2.$$

Množina $\mathcal{N}(< a, b >)$ je *lineární prostor.*

Důkaz

1. $\alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha[F(b) - F(a)]$, neboť $(\alpha F)' = \alpha f$.
2. $F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a) = [F_1(b) + F_1(b)] - [F_1(a) + F_1(a)]$, kde $F_1' = f_1$, $F_2' = f_2$.

Příklad

$\int\limits_1^3 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^3 = 3 \ln 3 - 3 - 1 \ln 1 + 1 = 3 \ln 3 - 2.$

□

Příklad

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x \sin 3x \, dx = \left[-\frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{16} \sin 2\pi + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}.$

□

Věta 7.4 (per partes v Newtonově integrálu). Nechť funkce $u = u(x)$, $v = v(x)$ jsou diferencovatelné na $< a, b >$ a nechť $uv' \in \mathcal{N}(< a, b >)$. Potom také $u'v \in \mathcal{N}(< a, b >)$ a platí
$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

Důkaz Plyne z rovnosti $u'v = (uv)' - uv'$.

Věta 7.5 (**Substituce v Newtonově integrálu**). Nechť $g \in \mathcal{N}(Z)$ a nechť funkce $z = f(x)$ je diferencovatelná na intervalu X, přičemž $f(X) \subset Z$. Potom pro $< a, b > \subset X$ platí

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(z)\,dz.$$

Důkaz plyne z věty 6.12.

Příklad

$$\int_{-1}^{2} 3x\sin(x^2+1)\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2x\,dx = dt \\ < -1, 2 > \to < 2, 5 > \end{array} \right| = \frac{3}{2}\int_2^5 \sin t\,dt = \frac{3}{2}\left[-\cos t\right]_2^5 = \frac{3}{2}(\cos 2 - \cos 5).$$

□

Příklad
(poučný!)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \\ x \in < 0, 1 > \Rightarrow t \in < 0, \frac{\pi}{2} > \\ \text{nebo } t \in < \frac{\pi}{2}, \pi > \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} |\cos t|\cos t\,dt = \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}, \\ -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 t\,dt = -\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Který výsledek je správný? Kde je chyba? Správný výsledek je $\frac{\pi}{4}$; podle věty 7.5 musí druhý integrál být $-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$ (zdůvodněte!).

□

Definice 7.2 Nechť $a, x \in I$ a $f \in \mathcal{N}(I)$. Potom primitivní funkci F k funkci f určenou vztahem

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$$

nazýváme *integrálem s proměnnou mezí.*

Důsledek

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = F'(x) = f(x);$$

$$\frac{d}{dx}\int\limits_x^b f(t)\,dt = -F'(x) = -f(x);$$

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\,[F(\varphi(x)) - F(a)] = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Příklad

1. $\int\limits_a^x \sin t\,dt = -\cos x + \cos a;$
2. $\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt = F(x); \quad F'(x) = \frac{\sin x}{x}.$
   Funkce $F(x)$ je uvedeným způsobem definována.

$\square$

Definice 7.3 Nechť $f \in \mathcal{N}(< a, x >)$ pro každé $x > a$. Existuje-li $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, potom $\lim\limits_{x\to+\infty}[F(x) - F(a)]$ se nazývá *nevlastní Newtonův integrál vlivem meze* a značí se

$$\lim_{x\to+\infty}\int\limits_a^x f(t)\,dt = \int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Analogicky definujeme

$$\int\limits_{-\infty}^b f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty}\int\limits_x^b f(t)\,dt\ , f \in \mathcal{N}(< x, b >)\ \text{ pro každé } x < b\ ;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{y\to-\infty}\int\limits_y^c f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty}\int\limits_c^x f(t)\,dt\ , f \in \mathcal{N}(< y, x >)\ \text{ pro každé } y, x \in \mathbb{R}\ .$$

Existuje-li konečná limita $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_a^x f(t)\,dt$, říkáme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *konverguje*. Neexistuje-li konečná limita $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_a^x f(t)\,dt$ (např. je nevlastní), říkáme, že nevlastní integrál $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *diverguje* (neexistuje!). Ve stejném smyslu hovoříme o konvergenci či divergenci v ostatních případech.

Poznámka Termíny konvergence, divergence nevlastního integrálu se opírají o Heineovu definici limity, tj. chování posloupnosti $F(x_n)$ pro $x_n \to +\infty$ (resp. $x_n \to -\infty$). Viz také odst. 7.3.

Příklad

$$\int_1^{+\infty} e^t\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x e^t\, dt = \lim_{x\to+\infty} [e^x - e^1] = +\infty\ , \quad \text{integrál diverguje;}$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} [-e^{-x} + e^{-1}] = e^{-1}\ , \quad \text{integrál konverguje;}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^2}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{x} + 1\right] = 1\ , \quad \text{integrál konverguje.}$$

□

Další příklady:

1. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, $(\operatorname{arctg}(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x)$;

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{c} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{c}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= [\operatorname{arctg} c - \operatorname{arctg}(-\infty)] + [\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} c] = \pi.$$

□

Definice 7.4 Mějme interval $< a, b >$ a nechť $f \in \mathcal{N}(< a, x >)$ pro každé $x \in< a, b)$, avšak $f \notin \mathcal{N}(< a, b >)$ (tj. rovnost $F'(x) = f(x)$ platí pouze pro $x \in< a, b)$).

Existuje-li $\lim\limits_{x\to b-} F(x)$, potom $\lim\limits_{x\to b-} [F(x) - F(a)]$ se nazývá *nevlastní Newtonův integrál vlivem funkce* a značí se

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Opět říkáme, že nevlastní integrál *konverguje*. Pokud $\lim\limits_{x\to b-} F(x)$ neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál *diverguje*. Analogicky definujeme

$$\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt\ , \quad f \in \mathcal{N}(< x, b >)\ \text{pro každé}\ x \in< a, b >\ .$$

Příklad

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim_{x\to 1-} \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x = \lim_{x\to 1-} \left[-2\sqrt{1-x}+2\right] = 2.$$

$\square$

Příklad

Pro jaké α integrál $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje?

$$\text{Pro } \alpha > 1: \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^\alpha}, \quad \alpha > 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\ , \text{ integrál konverguje;}$$

$$\text{Pro } \alpha = 1: \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \quad \Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}\ , \text{ integrál diverguje;}$$

$$\text{Pro } 0 < \alpha < 1: \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha} \text{ (kladný exponent)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\ , \text{ integrál diverguje.}$$

Například $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ konverguje; $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ divergují.

$\square$

Příklad

Pro jaké β integrál $\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ konverguje?

Pro $\beta > 1$: $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\beta} = \left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\beta} - \frac{\varepsilon^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad 1-\beta < 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^{1-\beta} \to +\infty$,
$\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ diverguje.

Pro $\beta = 1$: $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln 1 - \ln\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverguje, neboť $\ln\varepsilon \to -\infty$.

Pro $0 < \beta < 1$: $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\beta} = \left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\beta} - \frac{\varepsilon^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad 1-\beta > 0 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{1-\beta}$, integrál konverguje.

Například $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$ diverguje, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konverguje.

□

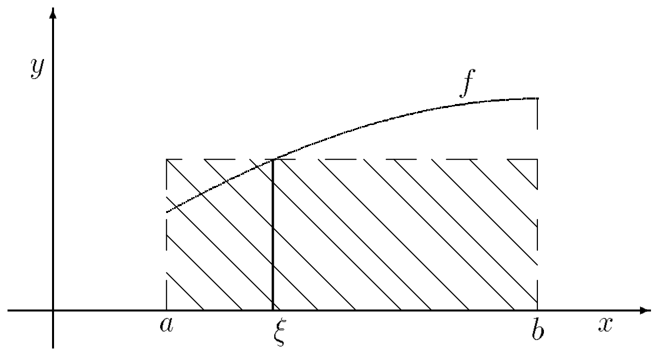
7.2 Základní věty integrálního počtu

Věta 7.6 **(o střední hodnotě)**. Je-li $f \in \mathcal{N}(< a, b >)$, potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\ dx\ ,$$

resp.

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b-a).$$



Obr. 7.1

Důkaz Pro $f \in \mathcal{N}(< a, b >)$ existuje primitivní funkce F na $< a, b >$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro $x \in < a, b >$, tj. v každém vnitřním bodě je F diferencovatelná oboustranně, a dále F je spojitá na $< a, b >$. Tedy existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) =$ $= f(\xi)(b-a)$ (viz obr. 7.1).

Poznámka Číslo $\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\ dx$ se nazývá *střední hodnotou funkce* f na $< a, b >$. Věta 7.6 říká, že pro $f \in \mathcal{N}(< a, b >)$ je střední hodnota rovna funkční hodnotě funkce f v nějakém vnitřním bodě.

Příklad
Je dána funkce $i(t) = I_0 \sin \omega t = I_0 \sin \frac{2\pi}{T}\, t$. Stanovme střední hodnotu funkce $i^2(t)$ na intervalu $< 0, T >$, T je perioda funkcí $i(t), i^2(t)$.

$$\int\limits_0^T i^2(t)\, dt = I_0^2 \cdot \int\limits_0^T \sin^2 \frac{2\pi}{T} t\, dt = I_0^2 \cdot \int\limits_0^T \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{T} t}{2} = I_0^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin \frac{4\pi t}{T}}{2 \frac{4\pi}{T}} \right]_0^T = I_0^2 \cdot \frac{T}{2}.$$

Tedy $\frac{1}{T} \int\limits_0^T i^2(t)\, dt = \frac{I_0^2}{2}$ je střední hodnota funkce $i^2(t)$.
Číslo $\sqrt{\frac{1}{T} \int\limits_0^T i^2(t)\, dt}$, se nazývá *efektivní hodnota* funkce $i(t)$.

Důsledky věty o střední hodnotě:

Důsledek 1. Zvolme na $< a, b >$ body (tzv. *dělení* D intervalu $< a, b >$):

$$x_0 = a, \quad x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \quad x_n = b.$$

Pro $f \in \mathcal{N}(< a, b >)$ je $f \in \mathcal{N}(< x_k, x_{k+1} >)$ pro libovolné dělení D. Potom

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k); \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+1}).$$

Důsledek 2. Nechť $f \in \mathcal{N}(< a, b >)$ a $f(x) \geq 0,\ x \in < a, b >$. Potom platí

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

Důkaz $F(b) - F(a) = f(\xi)(b - a) \geq 0$, neboť $f(\xi) \geq 0$.

Důsledek 3. Pro $f, g \in \mathcal{N}(< a, b >)$ a $f(x) \geq g(x),\ x \in < a, b >$ platí

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \geq \int\limits_a^b g(x)\, dx.$$

Důkaz Pro funkci $f(x) - g(x) \geq 0$ platí podle důsledku 2 nerovnost:

$$\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \geq 0.$$

Důsledek 4. Nechť $g \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle),\ fg \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ a $g(x) \geq 0,\ m \leq f(x) \leq M, x \in \langle a, b \rangle$. Potom

a) $m \cdot \int\limits_a^b g(x)\,dx \le \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \le M \cdot \int\limits_a^b g(x)\,dx;$

b) $m \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$

Důkaz a) plyne z důsledku 3, užijeme-li nerovnost

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x);$$

b) plyne z a), vezmeme-li $g(x) \equiv 1$.

Důsledek 5. Nechť $f \in \mathcal{N}(<a,b>)$, $|f| \in \mathcal{N}(<a,b>)$. Potom platí

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Důkaz Protože $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, potom podle důsledku 3:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

což zapíšeme výše uvedeným způsobem.

Věta 7.7 Nechť $f \in \mathcal{N}(<a,b>)$ a $f(x) \ge 0$ pro $x \in <a,b>$ a předpokládáme navíc, že f není identicky nulová (tj. $f \not\equiv 0$). Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Důkaz Na základě důsledku 2 a podmínky $F'(x) = f(x) \ge 0$ vyloučíme možnost, že $F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, neboť musí být $F(a) \le F(x) \le F(b)$.

Věta 7.8 (**obecná věta o střední hodnotě**). Nechť $f, g, fg \in \mathcal{N}(<a,b>)$ a navíc $g(x) \ge 0$ pro $x \in <a,b>$. Potom existuje takové $\xi \in <a,b>$, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

Důkaz se opírá o větu 7.7.

Věta 7.9 (**Fundamentální věta matematické analýzy**). Je-li $f \in C(<a,b>)$, potom $f \in \mathcal{N}(<a,b>)$. Tj.

$$C(<a,b>) \subset \mathcal{N}(<a,b>).$$

Důkaz provedeme později.

Definice 7.5 *Zobecněnou primitivní funkcí* k funkci f na intervalu $< a, b >$ rozumíme takovou funkci F, pro kterou platí:

1. F je spojitá na $< a, b >$;

2. platí $F'(x) = f(x)$ na $< a, b >$ s výjimkou nejvýše spočetně mnoha bodů.

Číslo $F(b) - F(a)$ se pak nazývá *zobecněný Newtonův integrál.*

Příklad

Pro funkci $F(x) = |x|$ je $F'(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x > 0; \\ -1, & x < 0; \end{cases}$,

tj. $F'(x) = f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{pro } x > 0; \\ 0, & \text{pro } x = 0; \\ -1, & x < 0; \end{cases}$

Obr. 7.2

Rovnost $F'(x) = f(x)$ neplatí pouze v bodě $x = 0$, tj. $|x|$ je zobecněnou primitivní funkcí k funkci $\operatorname{sgn} x$ (viz obr. 7.2).

□

Dá se dokázat, že k omezené funkci f, která má na $< a, b >$ konečný počet bodů nespojitosti (1. druhu), existuje zobecněná primitivní funkce.

7.3 Kritéria konvergence nevlastních integrálů

Definicemi 7.3., 7.4 byl zaveden pojem **nevlastního (Newtonova) integrálu**:

1. **vlivem funkce**: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{x\to b} \int\limits_a^x f(t)\,dt$:
   Zde předpokládáme, že funkce f je v okolí bodu b neomezená – "*singularita v bodě b*". Je-li funkce f v okolí bodu a neomezená, hovoříme o singularitě v bodě a, nebo že a je singulární bod integrálu.

   Je-li f neomezená v okolí vnitřního bodu $c \in (a, b)$, potom užijeme vlastnosti

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

   Příklad

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x\to 0-} \int\limits_{-1}^{x} \frac{dt}{\sqrt{-t}} + \lim_{x\to 0+} \int\limits_{x}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$
$$= \lim_{x\to 0-} [-2\sqrt{-x} + 2\sqrt{1}] + \lim_{x\to 0+} [2\sqrt{2} - 2\sqrt{x}] = 2 + \sqrt{2}.$$

$\square$

2. **vlivem meze**: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f(t)\,dt$; zde je neomezený integrační obor – "singularita v bodě $+\infty$".

Konvergencí nevlastního integrálu rozumíme existenci konečné limity uvedené v definici.

Poznámka Integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (resp. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$) konverguje právě tehdy, když pro každé $x_n \to b$ (resp. $x_n \to \infty$), posloupnost $F(x_n) - F(a) = \int\limits_a^{x_n} f(t)\,dt$ konverguje.

Věta 7.10 (**srovnávací kritérium**).

1. Nechť b je singulární bod integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (tj. f je buď neomezená v okolí b nebo $b = +\infty$).
2. Nechť $f, g \in \mathcal{N}(< a, x >)$ pro libovolné x takové, že $< a, x > \subset < a, b)$.
3. Nechť $0 \le f(t) \le g(t), \quad \forall t \in < a, x >$.

Potom

1. Konverguje-li $\int\limits_a^b g(t)\,dt$, konverguje také $\int\limits_a^b f(t)\,dt$.
2. Diverguje-li $\int\limits_a^b f(t)\,dt$, diverguje také $\int\limits_a^b g(t)\,dt$.

Důkaz využívá tzv. Bolzanovo – Cauchyovo kritérium existence (konečné) limity funkce opírající se o Heineovu definici limity. Podrobný důkaz lze nalézt v některé standardní učebnici matematické analýzy.

Příklad
Rozhodněte o konvergenci integrálu $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

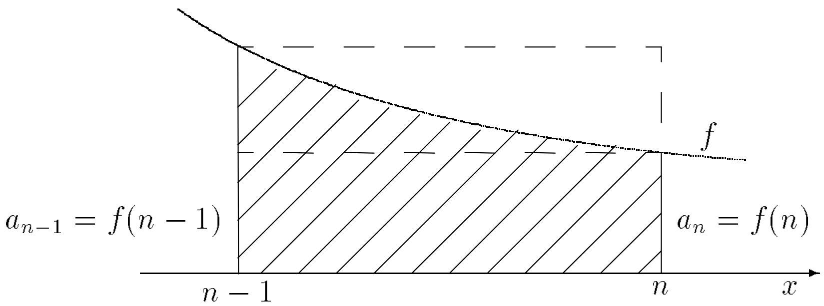
Protože $0 \leq \frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2}$ a integrál $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ konverguje (k číslu 1), původní integrál také konverguje.

□

Poznámka Srovnávací kritérium je také užitečné pro odhad chyby numerického výpočtu.

Věta 7.11 Nechť f je nerostoucí kladná funkce definovaná na $\langle 1, +\infty)$ a nechť $f \in \mathcal{N}(\langle 1, x\rangle)$ pro každé $x \in (1, +\infty)$. Nechť dále $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost taková, že $a_n = f(n)$. Potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ a integrál $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ buď současně konvergují, nebo současně divergují.

Důkaz Podle předpokladu je $f(n-1) \geq f(n),\ n \geq 2,\ a_n = f(n) \leq f(x) \leq f(n-1) = a_{n-1},\ x \in <n-1, n>$.



Obr. 7.3

Podle důsledku 4 věty 7.6 (viz také obr. 7.3) dostáváme $a_n \leq \int\limits_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq a_{n-1}$, tj.

$$a_2 \leq \int\limits_1^2 f(x)\,dx \leq a_1, \quad a_3 \leq \int\limits_2^3 f(x)\,dx \leq a_2, \ldots, \text{ atd.}$$

Po sečtení dostaneme

$$\underbrace{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}_{s_n - a_1} \leq \int\limits_1^n f(x)\ dx \leq \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}_{s_{n-1}}.$$

Podle srovnávacího kritéria pro řady s nezápornými členy vidíme, že konvergence integrálu je ekvivalentní s konvergencí řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n = f(n)$; případně ekvivalentní s konvergencí řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n,\ u_n = \int\limits_{n-1}^{n} f(x)\ dx$.

Poznámka Věta 7.11 se velmi často používá "ve funkci" tzv. **integrálního kritéria konvergence řad** a doplňuje soubor kritérií z odst. 3.2.

Poznámka Lehce se odvodí nerovnost $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leq \int\limits_n^{+\infty} f(x)\ dx$, která se užívá k odhadu chyby přibližného součtu nekonečné řady.

Příklad

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \to \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty,\quad$ tj. diverguje.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+7} \to \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{3x+7} = \frac{1}{3}\left[\ln|3x+7|\right]_1^{+\infty} = +\infty,\quad$ tj. diverguje.

□

Věta 7.12 (**kritérium divergence**). Nechť $f \in \mathcal{N}(< a, x >)$ pro každé $x > a$ a nechť $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq 0$. Potom integrál $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\ dx$ diverguje.

Důkaz Z předpokladů se dá ukázat, že řada z věty 7.11 diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

7.4 Integrální součet. Aplikace v geometrii a ve fyzice

Mějme na intervalu $< a, b >$ dánu spojitou funkci f. Zvolme na $< a, b >$ body (tzv. **dělení** $\mathcal{D}$ intervalu $< a, b >$), tj. množinu bodů

$$\mathcal{D} = \{x_0 = a, \quad x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \quad x_n = b\}.$$

Je-li f spojitá na $< a, b >$, potom $f \in \mathcal{N}(< a, b >)$ a také $f \in \mathcal{N}(< x_k, x_{k+1} >)$. Potom pro libovolné dělení $\mathcal{D}$ platí

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k),$$

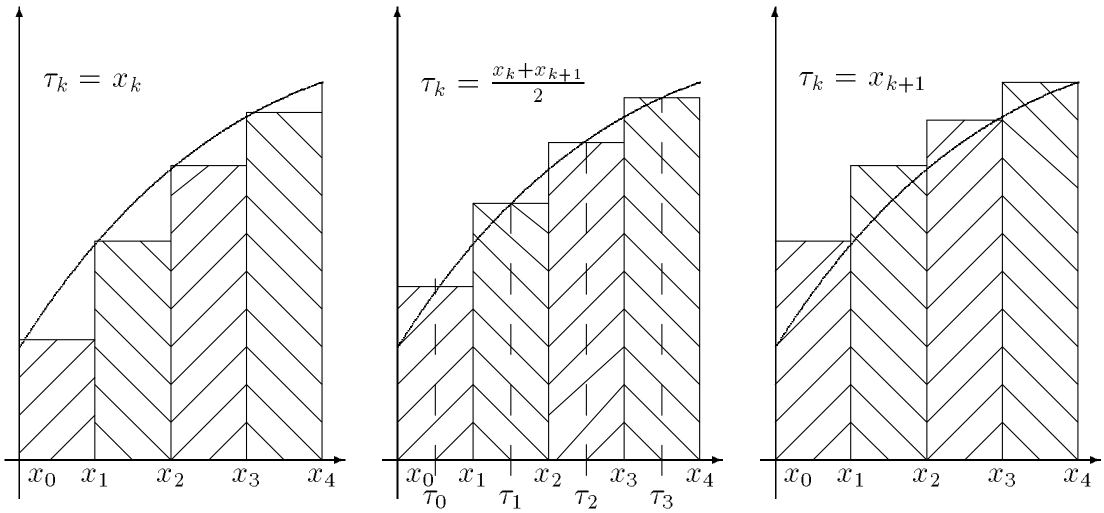
kde $\xi_k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1$, jsou body, jejichž existence je zaručena prvním důsledkem věty 7.6. Určitý integrál se tedy dá vyjádřit jako součet součinů typu $(x_{k+1} - x_k)f(\xi_k)$, kde $\xi_k \in < x_k, x_{k+1} >$ jsou jisté vhodné body, jejichž existence je u spojité funkce f zaručena.

Zvolíme-li libovolné $\tau_k \in < x_k, x_{k+1} >$ a vytvoříme analogický součet, nemusíme obecně dostat příslušný určitý integrál, ale číslo, které pro dostatečně jemné dělení $\mathcal{D}$ bude dobrou aproximací uvažovaného integrálu.

Definice 7.6 Nechť τ_k je libovolný bod intervalu $< x_k, x_{k+1} >$ (např. $\tau_k = x_k$, resp. $\tau_k = x_{k+1}$). Výraz

$$S(\mathcal{D}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(x_{k+1} - x_k)$$

se nazývá *integrálním součtem pro funkci f* odpovídající danému dělení $\mathcal{D}$ a vybraným bodům τ_k.
Příklady integrálních součtů jsou uvedeny na obr. 7.4.



Obr. 7.4

□

Věta 7.13 Je-li f spojitá na $< a, b >$ (tj. platí také $f \in \mathcal{N}(< a, b >)$), potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, že nerovnost

$$\left| S(\mathcal{D}) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

platí pro všechna ta dělení $\mathcal{D}$, pro která je $\max \underbrace{|x_{k+1} - x_k|}_{\Delta x_k} < \delta$.

Jinak řečeno

$$\lim_{\max|\Delta x_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(x_{k+1} - x_k) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Důkaz (hlavní myšlenka). Jestliže zjemňujeme dělení $\mathcal{D}$ tak, aby $\max|\Delta x_k| \to 0$, budou se součty

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(x_{k+1} - x_k); \qquad \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \int_a^b f(x)\ dx,$$

(v nichž $\tau_k \in< x_k, x_{k+1} >$ je libovolné a $\xi_k \in< x_k, x_{k+1} >$ je zaručeno větou o střední hodnotě) od sebe lišit stále méně, neboť výraz

$$\sum_{k=0}^{n-1} [f(\tau_k) - f(\xi_k)](x_{k+1} - x_k)$$

bude v limitě (pro $n \to +\infty$, $\max|\Delta x_k| \to 0$) nulový v důsledku spojitosti funkce f.

Poznámka Z předchozích úvah je (snad) patrné, jak zobecnit pojem určitého integrálu i na takové funkce f, které nejsou newtonovsky integrovatelné z toho důvodu, že vztah $F'(x) = f(x)$ neplatí v každém bodě $x \in< a, b >$. Teorie Riemannova integrálu (viz [2]) dává odpověď na otázku, za jakých podmínek existuje $\lim\limits_{\max|x_n|\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(x_{k+1} - x_k)$ nejen pro funkce spojité, ale i pro funkce omezené a po částech spojité. Pak se uvedená limita nazývá *Riemannovým integrálem* a opět se značí $\int\limits_a^b f(x)\ dx$.

A. **Výpočet obsahu obrazce v $\mathbb{R}^2$**

Mějme na intervalu $< a, b >$ spojitou funkci $y = f(x)$. Když $f(x) \geq 0$ na $< a, b >$, potom integrál

$$S = \int_a^b f(x)\ dx$$

představuje obsah obrazce z obr. 7.5 (obsah "křivočarého" lichoběžníku – vyšrafováno).

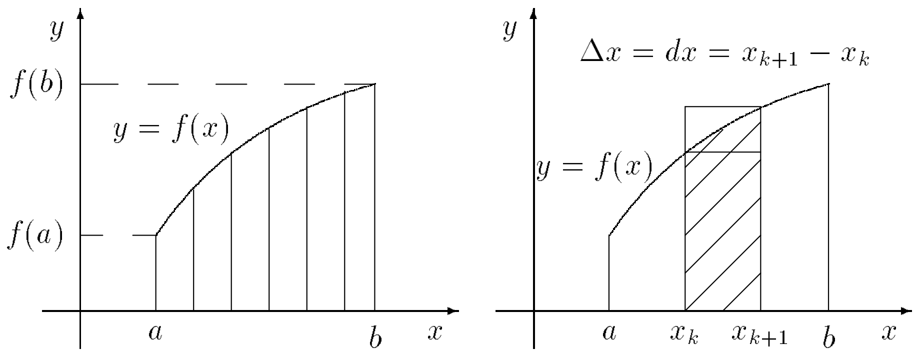
Protože

$$f(x_k)\Delta x \leq f(x)\Delta x \leq f(x_{k+1})\Delta x\ , \quad x \in< x_k, x_{k+1} >,$$

nazýváme výraz $dS = f(x)\ dx$ "elementem obsahu".

Když $f(x) \leq 0$ na $< a, b >$, potom obsah příslušného "křivočarého" lichoběžníku je dán vzorcem

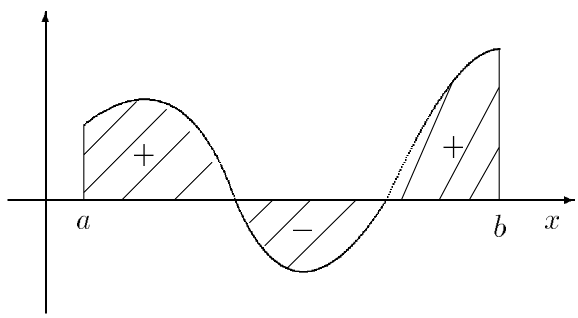
$$S = -\int_a^b f(x)\ dx\ .$$



Obr. 7.5

Když funkce $f(x)$ mění znaménko na $< a, b >$, potom obsah vyšrafovaného obrazce z obr. 7.6 je dán vzorcem

$$S = \int_a^b |f(x)| \; dx \; .$$



Obr. 7.6

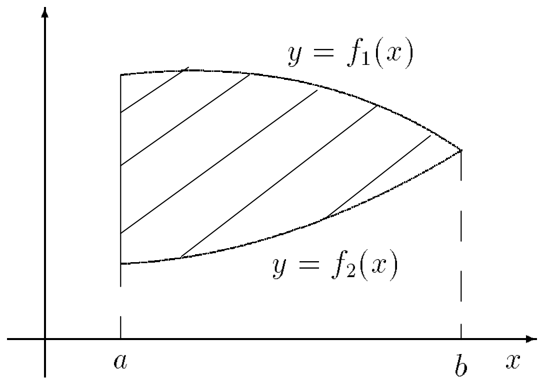
Poznámka Integrál $\int_0^{2\pi} |\sin x| \; dx = 4$ představuje obsah obrazce ohraničeného sinusoidou na intervalu $< 0, 2\pi >$ (obr. 7.6), kdežto $\int_0^{2\pi} \sin x \; dx = 0$. Není proto správné interpretovat integrál $\int_a^b f(x) \; dx$ jako obsah obrazce omezeného intervalem $< a, b >$ a grafem funkce $f(x)$.

Obsah obrazce určeného více křivkami

Je-li obrazec určený křivkami (grafy funkcí) $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x \in < a, b >$ (viz obr. 7.7), potom obsah tohoto obrazce je dán vzorcem

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] \; dx \; ,$$

když $f_1(x) \geq f_2(x)$.



Obr. 7.7

B. **Objem rotačního tělesa**

Osu x kartézského systému umístíme do osy rotačního tělesa a předpokládáme, že těleso bylo vytvořeno rotací "křivočarého" lichoběžníku z odst. A (viz obr. 7.8) určeného grafem funkce $y = f(x)$.

Těleso si představíme složené z n vrstev tvaru komolého kužele nahrazené válcovou vrstvou s poloměrem podstavy $f(\xi_k)$ a výškou Δx_k. Objem jedné této vrstvy je

$$\Delta V_k = \pi f^2(\xi_k) \Delta x_k \; .$$

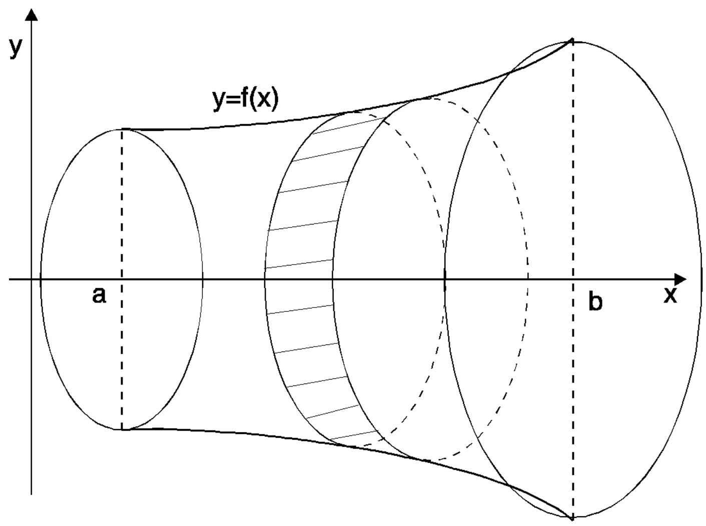
Objem celého tělesa je pak dán vzorcem

$$V = \sum_k \Delta V_k = \lim_{\max |\Delta x_k| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \pi f^2(\tau_k) \Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x) \; dx \; .$$

Výraz $dV = \pi f^2(x) \; dx$ je diferenciál funkce $V(x) = \pi \int_a^x f^2(t) \; dt$ a nazývá se "element objemu".

C. **Délka oblouku grafu funkce**

Nechť oblouk hladké křivky je graf diferencovatelné funkce $y = f(x)$, $x \in < a, b >$. Oblouk můžeme aproximovat lomenou čarou $M_0 M_1 \ldots M_n$ (viz obr. 7.9).



Obr. 7.8

Délka lomené čáry: $\quad s_M = \sum\limits_{k=0}^{n-1} s_k \,, \quad s_k = \overline{M_{k+1}M_k} \,.$

Protože

$$s_k = \overline{M_{k+1}M_k} = \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} =$$

$$= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + f'^2(\tau_k)(\Delta x_k)^2} = \sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\ \Delta x_k \,,$$

lze délku lomené čáry

$$s_M = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\ \Delta x_k$$

považovat za integrální součet integrálu

$$s = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\ dx = \lim_{\max|\Delta x_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\ \Delta x_k \,,$$

kterým je dána délka oblouku dané křivky.

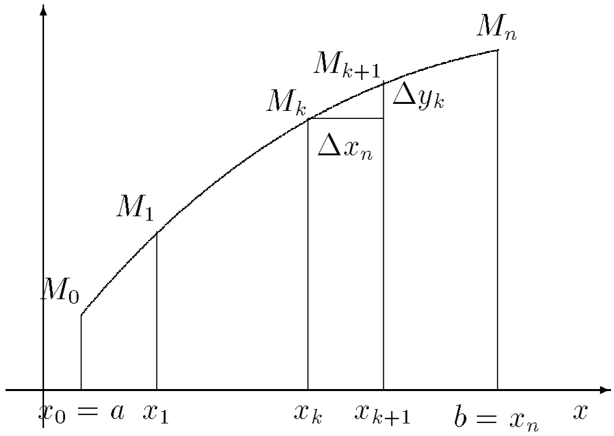
Podle věty 7.13 uvedená limita existuje, pokud $f'(x)$ je spojitá na $< a, b >$ (říkáme také, že oblouk křivky je *rektifikovatelný*).

Výraz

$$ds = \sqrt{1+f'^2(x)}\ dx$$

se také nazývá *diferenciálem délky oblouku* křivky. Je to diferenciál funkce $s(x) = \int\limits_a^x \sqrt{1+f'^2(t)}\ dt$.

Hlubší pohled na křivky a jejich délky je uveden v [3].



Obr. 7.9

D. **Obsah povrchu rotačního tělesa**

Využitím poznatků z odst. B a C vztahujícím se k obrázkům 7.8 a 7.9 můžeme konstatovat, že obsah pláště jedné vrstvy tvaru komolého kužele je dán vzorcem (viz vzorce středoškolské matematiky)

$$\Delta P_k = 2\pi \, \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} =$$
$$= 2\pi \, \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \, \Delta x_k \, .$$

Součet obsahů plášťů jednotlivých řezů

$$P_n = \pi \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \, \Delta x_k$$

lze považovat za integrální součet integrálu

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx = \lim_{\max |\Delta x_k| \to 0} 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\overline{\xi}_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \, \Delta x_k \, ,$$

$$\overline{\xi}_k, \xi_k \in < x_k, x_{k+1} > \, ,$$

kterým je dán obsah povrchu uvažovaného tělesa.

E. **Hmotnost "úsečky"**

Předpokládáme, že přímý úsek drátu (vlákna) zaujímá interval $< a, b >$ na ose x a jeho proměnná hmotnost je popsána funkcí hustoty $\rho = \rho(x)$.

Průměrnou hmotnost úseku $< x_k, x_{k+1} >$ označíme $\rho(\xi_k)$. Hmotnost úseku $< x_k, x_{k+1} >$ je proto dána vzorcem

$$\Delta m_k = \rho(\xi_k)\ \Delta x_k\ .$$

Celková hmotnost vlákna je dána vzorcem

$$m \approx \sum_{k=0}^{n-1} \Delta m_k = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k)\ \Delta x_k\ .$$

Proto

$$m = \int_a^b \rho(x)\ dx = \lim_{\max|\Delta x_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\xi_k)\ \Delta x_k$$

je celková hmotnost drátu na úseku $< a, b >$.

Poznámka "Drát" si představujeme jako válec, jehož výška je řádově větší než poloměr podstavy, a můžeme zanedbat všechny změny uvažovaných veličin na řezu kolmém k ose válce.

F. **Práce proměnné síly na přímé dráze**

Nechť na přímém úseku délky $b - a$ působí proměnná síla velikosti $f(x)$ ve směru osy x (resp. umístíme osu x do přímého směru působení dané síly). Síla f se tedy mění pro $x \in < a, b >$.

Interval $< a, b >$ rozdělíme pomocí bodů $x_0 = a,\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},\ x_n = b$ na úseky $< x_k, x_{k+1} >$ délky Δx_k. Práce konstantní síly $f(\tau_k)$ na dráze délky Δx_k je dána vzorcem (viz středoškolská fyzika)

$$\Delta W_k = f(\tau_k)\ \Delta x_k\ .$$

Pro dostatečně malé Δx_k nám součet

$$W_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta W_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\ \Delta x_k$$

dává dostatečně dobrou aproximaci práce W vykonané proměnnou silou $f(x)$. Pokud existuje limita uvedeného součtu pro $\max|\Delta x_k| \to 0$, pak představuje právě námi požadovanou práci

$$W = \int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\max|\Delta x_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\ \Delta x_k\ .$$

Všimněme si, že v tomto případě můžeme Newtonův – Leibnitzův vzorec

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx\ ; \quad F'(x) = f(x)\ ,$$

interpretovat tak, že práce vykonaná silou f na úseku $< a, b >$ je rovna rozdílu hodnot funkce $F(x)$ v koncových bodech intervalu. Primitivní funkce $F(x)$ (neurčitý integrál) se v této souvislosti nazývá *potenciálem* síly f.

Zdůrazněme: **Práce síly** f je určitý integrál (číslo);
Potenciál síly f je neurčitý integrál (primitivní funkce).

G. **Hybnost a impuls**

Mění-li se síla $f = f(t)$ s časem $t \in < a, b >$ (v daném místě), potom vztah (m je konstanta)

$$mv(t_{k+1}) - mv(t_k) = f(\tau_k)\ \Delta t_k$$

představuje tvar pohybového zákona na úseku $< t_k, t_{k+1} >$ a výraz $f(\tau_k)\ \Delta t_k$ představuje průměrný impuls (průměrná hybnost) na tomto úseku.

Standardní úvahou přes integrální součty dostaneme

$$mv(b) - mv(a) = \int_a^b f(t)\ dt\ ,$$

což je tvar pohybového (Newtonova) zákona pro $t \in < a, b >$. Pokud tento zákon napíšeme ve tvaru

$$m[v(t) - v(a)] = \int_a^t f(\tau)\ d\tau\ , \quad t \in < a, b >\ ,$$

plyne odtud

$$m\frac{dv(t)}{dt} = f(t)\ .$$

7.5 Cvičení

7.5.1

Ukažte, že $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{\ln x} = \int\limits_1^2 \frac{e^x}{x}\ dx$.

7.5.2

Odvoďte vzorce pro výpočet objemu a plochy pláště válce o poloměru podstavy R a výšce v, kužele o poloměru podstavy R a výšce v a koule o poloměru R.

7.5.3

Bez výpočtu integrálů proveďte odhad, který z integrálů je větší: $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ nebo $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

7.5.4

Určete střední hodnotu i_S střídavého proudu v průběhu poloviny periody. Okamžitá hodnota i střídavého proudu je dána funkcí $i(t) = I_0 \sin \omega t$, kde I_0 je maximální elektrický proud a ω úhlová frekvence, která je dána vztahem $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (T je perioda).

Výsledek: $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$

8 Taylorova formule a její užití

8.1 Derivace a diferenciály vyšších řádů

Definice 8.1 Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě x_0 a jeho okolí. Je-li navíc v bodě x_0 diferencovatelná funkce f', tj. když existuje limita

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=f''(x_0),$$

pak se nazývá *druhá derivace* funkce f *v bodě* x_0 a funkce f se pak nazývá *dvakrát diferencovatelná* v bodě x_0.

Poznámka Když existuje $f''(x_0)$, potom platí

$$f''(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}.$$

Definice 8.2 Předpokládáme, že na intervalu I má funkce f derivace $f'(x), f''(x),\dots,f^{(n-1)}(x)$. Existuje-li derivace funkce $f^{(n-1)}(x)$, potom se tato derivace nazývá *derivace n-tého řádu v bodě* x a značíme ji

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))';\quad f^{(0)}(x)=f(x).$$

Definice 8.3 Pro funkci f a bod x_0 definujeme:

1. $f(x_0+h)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$ – *první diference v bodě* x_0 (viz odst. 6.1).
   Platí: $\Delta(f+g)=\Delta f+\Delta g$.

   $$\Delta^2 f(x_0)=\Delta(\Delta f(x_0))=\Delta[f(x_0+h)-f(x_0)]=[f(x_0+2h)-f(x_0+h)]-[f(x_0+h)-f(x_0)],$$

   je tzv. *druhá diference funkce* f v bodě x_0.
   Obecně $\Delta^n y=\Delta(\Delta^{n-1}y)$ je tzv. *n-tá diference.*

2. *První diferenciál*:

   $$df(x_0,h_1)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th_1)-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th_1)-f(x_0)}{th_1}\,h_1=f'(x_0)h_1\ .$$

   Druhý diferenciál:

   $$d^2f(x_0,h_1,h_2)=\lim_{t\to 0}\frac{df(x_0+th_2,h_1)-df(x_0,h_1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(x_0+th_2)h_1-f'(x_0)h_1}{t}=$$
   $$=\lim_{t\to 0}\frac{f'(x_0+th_2)h_1-f'(x_0)h_1}{th_2}\,h_2=f''(x_0)h_1h_2.$$

   Když $h_1=h_2=h$, pak píšeme $d^2f(x_0,h)=f''(x_0)h^2$.
   n-tý diferenciál:

   $$d^nf(x_0,h_1,\dots,h_n)=f^{(n)}(x_0)h_1\dots h_n\ .$$

   Když $h_1=\dots=h_n=h$, pak píšeme

   $$d^nf(x_0,h)=d(d^{n-1}f(x_0,h))=f^{(n)}(x_0)h^n.$$

8.2 Taylorova formule

O funkci f budeme postupně předpokládat, že má v bodě x_0 a jeho okolí $U(x_0)$ derivace až do požadovaného řádu, a stanovíme důsledky těchto předpokladů pro samotnou funkci f.

1. **Nechť existuje** $f'(x),\ x \in U(x_0)$: potom

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0), \quad \text{neboli} \quad f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

Podle věty 7.6 o střední hodnotě: pro každé $x \in U(x_0)$ existuje $\xi \in (x_0, x)$, resp. $\xi \in (x, x_0)$ takové, že platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

2. **Nechť existuje** $f''(x),\ x \in U(x_0)$: potom lze následujícím způsobem užít metodu per-partes:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \left| \begin{array}{l} t = x - z \\ dt = -dz \\ < x_0, x > \to < x - x_0, 0 > \end{array} \right| = \int_{0}^{x-x_0} f'(x-z)\,dz = \left| \begin{array}{ll} f' = \frac{df}{dz} = u, & u' = -f'' \\ 1 = v', & v = z \end{array} \right| =$$

$$= [zf'(x-z)]_0^{x-x_0} + \int_0^{x-x_0} zf''(x-z)\,dz = (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,dt,$$

tj.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,dt.$$

Podle obecné věty o střední hodnotě (věta 7.8): pro každé $x \in U(x_0)$ existuje ξ takové, že

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2.$$

3. **Nechť existuje** $f'''(x_0),\ x \in U(x_0)$: uvedenou substitucí a následným užitím metody per partes dostaneme

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f'''(t)\,dt,$$

tj.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3.$$

Indukcí zobecníme předchozí výsledky:

Věta 8.1 (**Taylorova věta**). Nechť funkce f je diferencovatelná až do řádu $n+1$ v bodě x_0 a jeho okolí $U(x_0)$. Potom pro každé $x \in U(x_0)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \\ + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt}_{R_{n+1}(x_0,x)}$$

a existuje $\xi = \xi(x)$ ležící mezi x a x_0 (a závislé na x) takové, že

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_n(x)} + \\ + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}}_{R_{n+1}(x_0,x)}.$$

Polynom $T_n(x)$ nejvýše n-tého stupně se nazývá *Taylorův polynom funkce f v bodě x_0*. Rozdíl $f(x) - T_n(x) = R_{n+1}(x_0, x)$ se nazývá *chyba aproximace* funkce f Taylorovým polynomem. Vztah

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x_0, x)$$

se nazývá *Taylorovým rozvojem* nebo *Taylorovou formulí* (v bodě x_0).

Důkaz Tvrzení věty je dokázáno pro $n = 1, 2$. Pro $n \geq 3$ lze postupovat zcela obdobně.

Taylorovu formuli je zvykem psát také v následujících podobách. Při označení $x - x_0 = h$; $\xi = x_0 + \Theta h$, $0 < \Theta < 1$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

nebo

$$\Delta f(x_0, h) = df(x_0, h) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0, h) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0, h) + R_{n+1}.$$

Věta 8.2 Nechť funkce f má v bodě x_0 a jeho okolí $U(x_0)$ derivace všech řádů a existuje číslo $M > 0$ takové, že

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

pro všechna $n \geq 0$ a pro libovolné $x \in U(x_0)$. Potom

$$\lim_{n\to+\infty} R_{n+1}(x_0, x) = 0.$$

Důkaz Z předpokladu vyplývá, že $|R_{n+1}(x_0, x)| \leq \frac{M|x-x_0|^n}{(n+1)!}$, a je dále známo, že $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Poznámka Věta 8.2 nám umožňuje chápat $T_n(x)$ jako n-tý částečný součet jisté řady, které se říká *Taylorova řada.*

Aplikace Taylorovy formule

1. Aproximace dané diferencovatelné funkce v okolí daného bodu. Užití k řešení nelineárních rovnic, odhady chyb.
2. Metoda výpočtu limity funkce.
3. Nástroj k určování průběhu funkce.

Pro výpočet limit užíváme Taylorovu formuli ve tvaru:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

(Symbol $o(h^n)$ je definován podmínkou $\frac{o(h^n)}{h^n} \to 0$ pro $h \to 0$.)

Příklad

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \left| \begin{array}{l} \text{Subst:} \\ x = \frac{1}{t} \end{array} \right| = \lim_{t\to 0+}\left(\frac{1}{t}\sqrt{1+t}-1\right), \quad |t|<1;$$

$$\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} t + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}t^2 + o(t^2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{t}\left(\sqrt{1+t}-1\right) = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)\right] \to \frac{1}{2}.$$

□

8.3 Základy optimalizace. Průběh funkce.

Definice 8.4 Funkce $f : I \to \mathbb{R}$ *(ostře) roste (resp. klesá)* v bodě $x_0 \in I$, když existuje okolí $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bodu x_0 takové, že

$$\begin{array}{lll} f(x) < f(x_0) & (\text{resp. } f(x) > f(x_0)) & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0), \\ f(x) > f(x_0) & (\text{resp. } f(x) < f(x_0)) & \forall x \in (x_0, x_0 + \delta). \end{array}$$

Když místo znaku $<$ máme $\leq$, řekneme, že f *neklesá (roste neostře)*, při znaku $\geq$ místo $>$ řekneme, že *neroste (klesá neostře).*

Poznámka Lze dokázat následující tvrzení (pokuste se o to!). Je-li funkce ostře rostoucí v každém bodě intervalu I, potom je ostře rostoucí na I. Připomeňme, že ostrý růst funkce f na I znamená, že funkce f má tuto vlastnost:

$$\forall x_1, x_2 \in I: \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Bod, v němž funkce f roste (klesá), se nazývá *bodem růstu (poklesu)* funkce. Připomínáme, že termíny "roste" a "ostře roste" užíváme jako synonyma. Podobně užíváme termíny "neklesá"a "roste neostře". Slovem "ostře", resp. "neostře" chceme pouze zdůraznit požadavek ostré nerovnosti, resp. neostré nerovnosti.

Věta 8.3 Když funkce $f: I \to \mathbb{R}$ má derivaci v bodě $x_0 \in I$ a je $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), potom funkce f v bodě x_0 ostře roste (ostře klesá).

Důkaz Když $f'(x_0) > 0$, pak $\exists \delta > 0$, takové, že

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

Odtud podle definice 8.4 plyne tvrzení věty.

Poznámka Věta 8.3 udává postačující podmínky monotonie funkce f v bodě. Obrácená věta ("Když f ostře roste v x_0, pak $f'(x_0) > 0$") neplatí: $f(x) = x^3$ ostře roste v bodě $x_0 = 0$, ačkoliv $f'(0) = 0$.

Kromě toho je třeba upozornit na to, že růst (pokles) funkce v bodě je lokální vlastnost. Z toho, že funkce f je rostoucí (klesající) v bodě, ještě nevyplývá, že f roste (klesá) v nějakém dostatečně malém okolí tohoto bodu. Například funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

má v bodě $x = 0$ derivaci $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, a tedy roste v tomto bodě podle věty 8.3. Avšak derivace $f'(x) = \frac{1}{2} + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ dané funkce pro $x \neq 0$ nabývá v libovolném okolí bodu $x = 0$ jak kladné, tak záporné hodnoty, tj. neexistuje okolí bodu 0, v němž by daná funkce byla monotónní:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}: \ \forall k > k_0 \quad x_k \in (-\delta, \delta), \ x_k = \frac{1}{2k\pi}, \quad \overline{x}_k \in (-\delta, \delta), \ \overline{x}_k = \frac{1}{\pi + 2k\pi}:$$

$$f'(x_k) = -\frac{1}{2}, \ \ f'(\overline{x}_k) = \frac{3}{2}.$$

Definice 8.5 Bod $\widehat{x}$ se nazývá *stacionární bod* funkce f, když f je diferencovatelná v tomto bodě a $f'(\widehat{x}) = 0$.

Definice 8.6 Mějme reálnou funkci $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ je interval). V definici 6.2 jsme zavedli pojem *lokální minimum* (resp. *lokální maximum*) funkce f v bodě $\widehat{x}$. Píšeme:

$$f(\widehat{x}) = \min_{x \in U(\widehat{x},\delta) \cap I} f(x), \qquad \left(f(\widehat{x}) = \max_{x \in U(\widehat{x},\delta) \cap I} f(x)\right) .$$

Termínem *extrém* (resp. *optimum*) označujeme buď minimum nebo maximum [extremum = krajní, optimum = nejlepší].

Věta 8.4 (nutná podmínka existence lokálního extrému) Je-li $\widehat{x} \in I$ bod lokálního extrému funkce f, potom buď $f'(\widehat{x}) = 0$ nebo $f'(\widehat{x})$ neexistuje.

Důkaz Neexistuje-li derivace, není co dokazovat; existuje-li derivace, je tvrzení důsledkem Fermatovy věty (věta 6.6).

Věta 8.5 (postačující podmínka existence lokálního extrému - bez derivace) Nechť funkce f je spojitá v bodě $\widehat{x}$ a jeho okolí $U(\widehat{x}) = (\widehat{x} - \delta, \widehat{x} + \delta)$.

a) Je-li f ostře rostoucí v intervalu $(\widehat{x} - \delta, \widehat{x})$ a ostře klesající v intervalu $(\widehat{x}, \widehat{x} + \delta)$, potom $f(\widehat{x})$ je ostré lokální maximum funkce f.

b) Je-li f ostře klesající v intervalu $(\widehat{x} - \delta, \widehat{x})$ a ostře rostoucí v intervalu $(\widehat{x}, \widehat{x} + \delta)$, potom $f(\widehat{x})$ je ostré lokální minimum funkce f.

Důkaz vyplývá z definic 8.4 a 8.6.

Věta 8.6 (postačující podmínka existence lokálního extrému - s derivací) Nechť funkce f je spojitá v bodě $\widehat{x}$ a jeho okolí $U(\widehat{x}) = (\widehat{x} - \delta, \widehat{x} + \delta)$ a je diferencovatelná v $U(\widehat{x})$.

a) Když
$$\begin{aligned} f'(\widehat{x}) = 0 \text{ a } f'(x) &> 0 \text{ pro } x \in (\widehat{x} - \delta, \widehat{x}), \\ f'(x) &< 0 \text{ pro } x \in (\widehat{x}, \widehat{x} + \delta), \end{aligned}$$
potom $f(\widehat{x})$ je ostré lokální maximum funkce f.

b) Když
$$\begin{aligned} f'(\widehat{x}) = 0 \text{ a } f'(x) &< 0 \text{ pro } x \in (\widehat{x} - \delta, \widehat{x}), \\ f'(x) &> 0 \text{ pro } x \in (\widehat{x}, \widehat{x} + \delta), \end{aligned}$$
potom $f(\widehat{x})$ je ostré lokální minimum funkce f.

Důkaz Na intervalu $\langle x, \widehat{x} \rangle$, resp. $\langle \widehat{x}, x \rangle$ se užije věta o střední hodnotě:

$$f(x) - f(\widehat{x}) = f'(\xi)(x - \widehat{x}).$$

Poznámka Jsou tři možnosti v hodnotě derivace: $f'(\widehat{x}) < 0$, $f'(\widehat{x}) = 0$, $f'(\widehat{x}) > 0$. Neznamená to však, že bod $\widehat{x}$ má také jen tři možnosti být: bodem růstu, poklesu, extrému. Např. u funkce $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, je $f'(0) = 0$, avšak bod $\widehat{x} = 0$ není ani bodem růstu, ani bodem poklesu, ani bodem extrému.

Věta 8.7 (postačující podmínka existence lokálního extrému - s vyšší derivací) Nechť funkce f je spojitě diferencovatelná v bodě $\widehat{x}$ a jeho okolí až do řádu n a platí

$$f'(\widehat{x}) = f''(\widehat{x}) = \ldots = f^{(n-1)}(\widehat{x}) = 0, \quad f^{(n)}(\widehat{x}) \neq 0.$$

a) Když n je sudé a $f^{(n)}(\widehat{x}) < 0$, potom $f(\widehat{x})$ je ostré lokální maximum f.

b) Když n je sudé a $f^{(n)}(\widehat{x}) > 0$, potom $f(\widehat{x})$ je ostré lokální minimum f.

c) Když n je liché a $f^{(n)}(\widehat{x}) < 0$, potom $\widehat{x}$ je bodem poklesu.

d) Když n je liché a $f^{(n)}(\widehat{x}) > 0$, potom $\widehat{x}$ je bodem růstu.

Důkaz Z Taylorova vzorce a z předpokladů dostaneme

$$f(\widehat{x} + h) - f(\widehat{x}) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\widehat{x} + \Theta h), \quad 0 < \Theta < 1, \ h = x - \widehat{x} \ .$$

a) Z podmínky $f^{(n)}(\widehat{x}) < 0$ a ze spojitosti $f^{(n)}(x)$ plyne, že existuje okolí bodu $\widehat{x}$, v němž $f^{(n)}(\widehat{x} + \Theta h) < 0$. V tomto okolí pak je $f(\widehat{x} + h) < f(\widehat{x})$, neboť $h^n > 0$ pro n sudé.

b) Dokazuje se analogicky jako a).

c) Pro n liché je $\operatorname{sgn} h = \operatorname{sgn} h^n$ a ze spojitosti $f^{(n)}$ plyne, že $\operatorname{sgn} f^{(n)}(\widehat{x}) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(\widehat{x} + \Theta h)$ v nějakém okolí $\widehat{x}$. Když tedy

$$h < 0, \ f^{(n)}(\widehat{x}) < 0, \ \text{pak } f(\widehat{x} + h) > f(\widehat{x});$$

$$h > 0, \ f^{(n)}(\widehat{x}) < 0, \ \text{pak } f(\widehat{x} + h) < f(\widehat{x}),$$

a tedy $\widehat{x}$ je bodem poklesu.

d) Dokazuje se analogicky jako c).

Příklad
Pro funkci $f(x) = x^2 - x^3$ jsou $\widehat{x}_1 = 0$, $\widehat{x}_2 = \frac{2}{3}$ stacionární body. Protože $f'(\widehat{x}_1) = 0$, $f''(\widehat{x}_1) = 2 > 0$, je $\widehat{x}_1$ bod ostrého lokálního minima. Protože $f'(\widehat{x}_2) = 0$, $f''(\widehat{x}_2) = -2 < 0$, je $\widehat{x}_1$ bod ostrého lokálního maxima; $f(0) = 0$; $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ jsou hledané extrémy.

□

Příklad
Pro funkci $f(x) = x^3 + x^4$ v bodě $\widehat{x} = 0$ platí: $f'(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 6(\neq 0)$. První nenulová derivace ve stacionárním bodě je lichá a její hodnota je číslo kladné. Proto $\widehat{x} = 0$ není bodem extrému, ale bodem růstu.

□

Poznámka Z definice extrému a z věty 8.5 bychom mohli usoudit, že když např. funkce f má v bodě x_0 maximum. pak existuje takové okolí bodu x_0, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ funkce f roste a pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ funkce f klesá. Dá se ukázat, že takový úsudek je nesprávný. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & \text{pro } x \neq 0, \\ 2, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Protože $f(x) - f(0) = -x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) < 0,\ x \neq 0$, existuje $\max f(x) = f(0) = 2$. Avšak pro body $x_k = \dfrac{1}{\pi + 2k\pi},\ x_k \to 0$, je $f'(x_k) < 0$, a tedy funkce f nemůže růst v žádném levostranném okolí bodu $x = 0$. Tedy výrok typu: "V levostranném okolí bodu maxima funkce roste a v pravostranném okolí bodu maxima funkce klesá" je nepravdivý.

Poznámka Existují funkce, které mají v bodě extrému všechny derivace nulové. Příkladem je funkce $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right),\ x \neq 0,\ f(0) = 0$. Protože $f(x) - f(0) > 0$, pak $f(0) = \min f(x)$. Lze ukázat, že $f^{(n)}(0) = 0,\ n \in \mathbb{N}$ (ověřte).

Definice 8.7 Mějme reálnou funkci $f : I \to \mathbb{R}$. Číslo $f(\widehat{x})$ se nazývá *globální minimum (globální maximum)* funkce f na I, platí-li

$$f(\widehat{x}) \leq f(x) \quad (f(\widehat{x}) \geq f(x)) \quad \forall x \in I.$$

Pokud platí ostré nerovnosti pro $x \neq \widehat{x}$, hovoříme o ostrém globálním minimu (maximu). Píšeme:

$$f(\widehat{x}) = \min_{x \in I} f(x), \text{ resp. } f(\widehat{x}) = \max_{x \in I} f(x).$$

Definice 8.8 Úloha najít lokální, resp. globální extrém $f(\widehat{x})$ dané (spojité) funkce f a příslušný bod extrému $\widehat{x}$ se nazývá *optimalizační úloha* nebo *úloha na extrém.*

Definice 8.9 Diferencovatelná funkce f je *konvexní (ostře konvexní)* v bodě $\widehat{x}$, existuje-li okolí $U(\widehat{x})$ bodu $\widehat{x}$ takové, že pro všechna $x \in U(\widehat{x})$ platí

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq f(\widehat{x}) + f'(\widehat{x})(x - \widehat{x}) \\ (f(x) > f(\widehat{x}) + f'(\widehat{x})(x - \widehat{x})) \end{array}\right\} \text{ tj. graf } f \text{ leží "nad tečnou" v bodě } \widehat{x}.$$

Obrácené nerovnosti definují funkci *konkávní* (ostře konkávní) v bodě $\widehat{x}$.

Poznámka Připomeňme, že spojitá funkce je konvexní na intervalu I, platí-li nerovnost

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I \qquad \forall t \in \langle 0, 1\rangle \ .$$

Diferencovatelná funkce je konvexní na intervalu I, je-li konvexní v každém jeho bodě. Pro nediferencovatelné funkce nelze pojem konvexnosti v bodě definovat pomocí derivace.

Věta 8.8 (nutná a postačující podmínka konvexnosti, resp. konkávnosti) Nechť funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná na I. Funkce f je konvexní (konkávní) na I právě tehdy, když $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ $\forall x \in I$. Ostrá nerovnost implikuje ostrou konvexnost (ostrou konkávnost).

Důkaz plyne z Taylorova vzorce v libovolném bodě $\hat{x} \in I$ a z definice 8.9:

$$f(x) - f(\hat{x}) - f'(\hat{x})(x - \hat{x}) = \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - \hat{x})^2.$$

Definice 8.10 Nechť funkce f má spojitou derivaci v bodě $\overline{x}$ a jeho okolí. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (\overline{x} - \delta, \overline{x})$ platí

$$f(x) < f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) \qquad (f(x) > f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}))$$

a pro $x \in (\overline{x}, \overline{x} + \delta)$ platí

$$f(x) > f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) \qquad (f(x) < f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}))\ ,$$

pak řekneme, že funkce f má v bodě $\overline{x}$ *inflexi*, resp. že $\overline{x}$ je *inflexní bod* funkce f nebo že $[\overline{x}, f(\overline{x})]$ je *inflexní bod grafu funkce f*.

Věta 8.9

1. **Nutná podmínka inflexe** Nechť funkce f je spojitě diferencovatelná na I a existuje $f''(x)$, $x \in I$. Je-li $\overline{x} \in I$ inflexní bod, potom $f''(\overline{x}) = 0$.

2. **Postačující podmínka inflexe** Nechť funkce f má druhou derivaci f'' v nějakém okolí bodu $\overline{x}$ a graf funkce f má v bodě $[\overline{x}, f(\overline{x})]$ tečnu. Mění-li f'' znaménko při přechodu přes bod $\overline{x}$, potom $\overline{x}$ je inflexní bod.

Důkaz plyne z Taylorova vzorce.

Úlohou na průběh funkce rozumíme následující sérii úloh:

1. Stanovit $D(f)$ a určit hromadné body $D(f)$, v nichž funkce f není definována, a určit nulové body funkce.

2. Vyšetřit body (intervaly) spojitosti a body nespojitosti.

3. Stanovit případné speciální vlastnosti: sudost, lichost, periodičnost.

4. Stanovit limity ve význačných bodech (krajní body definičního oboru, body nespojitosti, body, v nichž neexistuje derivace).

5. Určit intervaly monotonie (růst, pokles).

6. Určit lokální, příp. globální extrémy funkce.

7. Určit intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce.

8. Určit inflexní body a určit inflexní tečny.

9. Určit asymptoty grafu funkce.

10. Načrtnout graf funkce.

Poznámka Asymptoty grafu funkce $y = f(x)$, $x \in I$:

a) "Svislá asymptota" existuje, jestliže v některém bodě x_0 je

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty \,.$$

b) "Vodorovná asymptota" existuje, když existuje konečná

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \,.$$

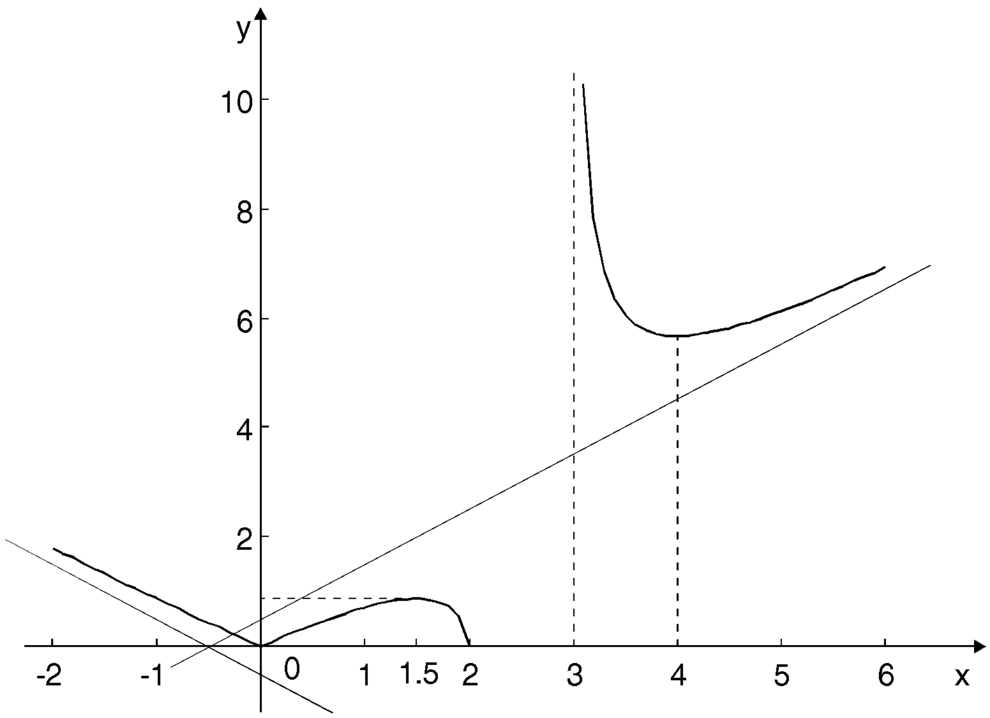
c) "Šikmá asymptota" existuje (je to přímka $y = kx + q$), když existují

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \ ; \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = q,$$

kde k a q jsou reálná čísla.

Příklad Vyšetřete průběh funkce $f(x) = |x| \cdot \sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$.

x	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0 nul. bod	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, 2\right\rangle$	$(2, 3\rangle$
$f(x)$	$+\infty$	$+$ klesá	0	$+$ roste	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+$ klesá	2 nul. bod není def.
$f'(x)$		< 0	neex.	> 0	$= 0$	< 0	
$f''(x)$		> 0 konvex.	neex.	< 0 konkáv.	< 0	< 0 konkáv.	



Obr. 8.1

3+	(3,4)	4	$(4,+\infty)$	$+\infty$	asymptoty
$+\infty$	>0 klesá	$4\sqrt{2}$	roste		$y=-x-\frac{1}{2}$ $x\to-\infty$
vertikální	<0	$=0$	>0		$y=x+\frac{1}{2}$ $x\to+\infty$
asymptota	>0 konvex.	>0 konvex.	>0 konvex.		

Příklad
Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$.

Postup:

1. $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$, nulové body: $x=0$.

2. f je spojitá ve všech bodech $x\neq-2$.

3. Ani sudá, ani lichá, ani periodická.

4. Limity ve význačných bodech:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)\frac{1}{x}}{(x+2)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+\frac{2}{x}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2)\frac{1}{x}}{(x+2)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+\frac{2}{x}}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+}\frac{x^2}{x+2}=+\infty,\ \lim_{x\to-2-}\frac{x^2}{x+2}=-\infty,$$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x+2}\right)'=\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}\ ,$$

5.

$$f'(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad x^2+4x=0\quad\Leftrightarrow\quad x_1=0,\ x_2=-4,$$

$$x\in(-\infty,-4),\quad f'(x)>0\quad\Rightarrow\quad f(x)\ \text{ roste},$$

$$x\in(-4,0),\quad f'(x)<0\quad\Rightarrow\quad f(x)\ \text{ klesá},$$

$$x\in(0,+\infty),\quad f'(x)>0\quad\Rightarrow\quad f(x)\ \text{ roste},$$

6. $f(0)=0$ lokální minimum,
   $f(-4)=-8$ lokální maximum.

7.

$$f''(x)=\frac{(2x+4)(x+2)^2-(x^2+4x)2(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{2x^2+8x+8-2x^2-8x}{(x+2)^3}=$$

$$=\frac{8}{(x+2)^3}\ ,$$

$f''(x)<0$ pro $x\in(-\infty,-2)$ $f(x)$ je konkávní,
$f''(x)>0$ pro $x\in(-2,+\infty)$ $f(x)$ je konvexní.

8. Nemá inflexní body, neboť v bodě -2 není f definována

x	$(-\infty,-4)$	-4	(-4,-2)	-2	(-2,0)	0	$(0,+\infty)$
$f(x)$	roste,konk.	0	klesá,konk.	není def.	klesá,konvex.	0	roste,konvex.
$f'(x)$	>0	$=0$	<0	-”-	<0	$=0$	>0
$f''(x)$	<0	<0	<0	-”-	>0	>0	>0

9. Určení asymptot:

   a) Asymptota ve vlastním bodě $x=-2$:

$$\lim_{x\to-2+}\frac{x^2}{x+2}=+\infty,\quad\lim_{x\to-2-}\frac{x^2}{x+2}=-\infty.$$

b) Asymptoty v $\pm\infty$: $y = kx + q$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x+2} - (kx+q)\right] = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{x}{x+2} - k - \frac{q}{x}\right] = 0\ ,$$

$$0 = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x+2} - k\right] \;\Rightarrow\; k = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+2} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x+2} - kx\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+2} = -2\ ;$$

$y = x - 2$ je asymptota v $+\infty$.
Podobně v $-\infty$:

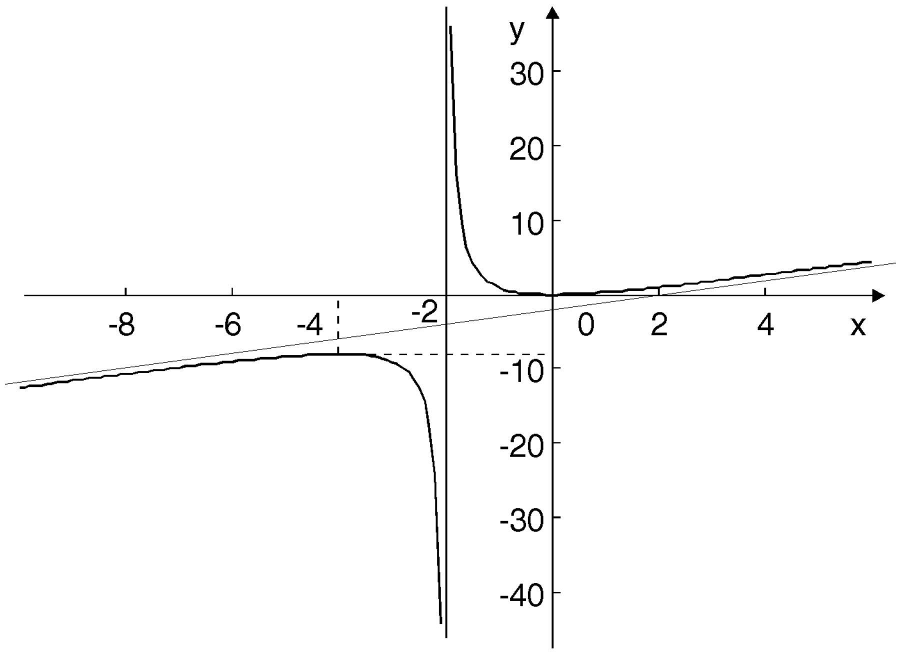
$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+2} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x+2} = -2,$$

$y = x - 2$ je také asymptotou v $-\infty$.

Poznámka Obecně může být asymptota v $-\infty$ jiná přímka než je asymptota v $+\infty$!

10. Graf:



Obr. 8.2

$\square$

8.4 Cvičení

8.4.1

Polynomickou funkci $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ napište pomocí mocnin $x - 2$.

8.4.2

Vypočtěte s přesností na 10^{-6} hodnotu $\cos 5^0$.

8.4.3

Najděte lokální extrémy funkce f, je-li

1. $f(x) = \dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;
2. $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$.

Výsledky

1. maximum $f\left(\frac{12}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{205}}{10} \doteq 1,43$;
2. minimum $f(1) = 0$, maximum $f(e^2) = \dfrac{4}{e^2} \doteq 0,541$.

8.4.4

Do polokoule o poloměru R vepište kvádr se čtvercovou podstavou tak, aby jeho objem byl maximální.

Výsledek: Rozměry kvádru $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}, \dfrac{2R}{\sqrt{3}}, \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.

8.4.5

Vyšetřete průběh funkce f a načrtněte její graf, je-li

1. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;
2. $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$;
3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
4. $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Výsledky

1. Definována pro $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, sudá, kladná; asymptota $x = 0$; minimum 2 pro $x = \pm 1$;
2. definována pro $x \in \mathbb{R}$, sudá, kladná, asymptota $y = 0$, maximum 1 pro $x = 0$, inflexní body pro $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \doteq \pm 1,225$;
3. definována pro $x > 0$, nulový bod $x = 1$, asymptoty $x = 0, y = 0$, maximum $\frac{2}{e} \doteq$ $\doteq 0,736$ pro $x = e^2 \doteq 7,389$, inflexní bod $[e^{\frac{8}{3}}; \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}]$.
4. definována pro $x \in \mathbb{R}$, lichá, nulový bod $x = 0$, maximum $\frac{\pi}{2}$ pro $x = 1$, minimum $-\frac{\pi}{2}$ pro $x = -1$, inflexní body $x = \pm 1$, $x = 0$.

Doporučená literatura

1. Čížek, Kubr, Míková: Sbírka příkladů z matematické analýzy I., skripta ZČU Plzeň, 1995.
2. Drábek, Míka: Matematická analýza II., 1. a 2. část, skripta ZČU Plzeň, 1992.
3. Míka: Matematická analýza III., skripta ZČU Plzeň, 1993.
4. Brabec, Martan, Rozenský: Matematická analýza I, SNTL Praha, 1986.
5. Kluvánek, Mišík, Švec: Matematika I, II, Alfa Bratislava, 1970.
6. Eliáš, Horvát, Kajan: Zbierka úloh z vyššej matematiky, část 2,3, Alfa Bratislava, 1972,73.
7. Jirásek, Kriegelstein, Tichý: Sbírka řešených příkladů z matematiky, SNTL Praha, 1979 (Alfa, Bratislava 1981).
8. Polák: Matematická analýza I, cvičení 1, VŠSE Plzeň, 1983.