Lineární algebra

September 16, 2025

Contents

1 Komplexní čísla

Komplexní čísla jsou rozšířením oboru reálných čísel. V algebraickém tvaru se zapisují jako $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. a nazýváme reálnou a b imaginární částí.

1.1 Operace s komplexními čísly

Sčítání, odčítání a násobení funguje tak, jak bychom čekali.

$$z = 1 + 4i$$
$$u = -2 + 3i$$
$$z + u = (1 + 4i) + (-2 + 3i) = -1 + 7i$$
$$z - u = (1 + 4i) - (-2 + 3i) = 3 + i$$
$$z * u = (1 + 4i) * (-2 + 3i) = -14 - 5i$$

Dělení je speciální případ. Pro dělení dvou komplexních čísel rozšíříme zlomek komplexně sdruženým číslem jmenovatele, které získáme obrácením prostředního znaménka.

$$\frac{u}{z} = \frac{u}{z} * \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{-2 + 3i}{1 + 4i} * \frac{1 - 4i}{1 - 4i} = \frac{-2 + 3i + 8i - 12i^2}{1 - 4i + 4i - 16i^2} = \frac{10 + 11i}{17} = \frac{10}{17} + \frac{11}{17}i$$

1.2 Goniometrický tvar

K zapsání goniometrického tvaru nám postačí absolutní hodnota komplexního čísla a úhel, který svírá s osou x.

$$z = |z| * (\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Příklad 1: $z = -1$
Goniometrický tvar: $z = 1 * (\cos\pi)$
Příklad 2: $|z| = \sqrt{2}; \alpha = \frac{7}{4}\pi$
Goniometrický tvar: $z = \sqrt{2} * (\cos\frac{7\pi}{4} + i * \sin\frac{7\pi}{4})$

1.2.1 Moivreova věta

Moivreova věta nám slouží k umocňování a odmocňování komplexních čísel.

$$z^n = |z|^n * (\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n})$$
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} * (\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n})$$

Příklad:

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$
$$k = 0: \quad \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$k = 1: \quad \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = -1$$
$$k = 2: \quad \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 Analytická geometrie

2.1 Vektor

Pro $n \in \mathbb{N}$ se zapisuje jako $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

2.1.1 Vektorový součin

Je definována pouze na dvou vektorech v $\mathbb{R}^3$. Výsledkem je vektor na ně kolmý.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Pozor! $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$. Oba vektory jsou kolmé, ale každý na opačnou stranu.

2.2 Přímka

Parametrické rovnice přímky se zapisují jako $X = A + \vec{u}t$, kde $A = [a_1, a_2, a_3]; \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

$$x = a_1 + u_1 t$$
$$y = a_2 + u_2 t$$
$$z = a_3 + u_3 t$$

Příklad: Nalezněte průsečík X přímek p a q

$$p: \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= -2 + t \\ z &= -1 - t \end{aligned} \qquad\qquad q: \begin{aligned} x &= 0 + s \\ y &= 1 - s \\ z &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + t &= 0 + s \\ -2 + t &= 1 - s \\ -1 - t &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t - s &= -1 \\ t + s &= 3 \\ t &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 - s &= -1 \\ 1 + s &= 3 \\ t &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s &= 2 \\ s &= 2 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Jelikož se parametry s v první i druhé rovnici shodují, tak mají přímky průsečík. Souřadnice bodu X získáme dosazením parametru t do parametrických rovnic přímky p

$$X: \begin{aligned} x &= 1 + t = 1 + 1 = 2 \\ y &= -2 + t = -2 + 1 = -1 \\ z &= -1 - t = -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

2.3 Rovina

Parametrické rovnice roviny se zapisují jako $X = A + t\vec{u} + s\vec{v}$, kde $A = [a_1, a_2, a_3]; \vec{u} = (u_1, u_2, u_3); \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$x = a_1 + u_1 t + v_1 s$$
$$y = a_2 + u_2 t + v_2 s$$
$$z = a_3 + u_3 t + v_3 s$$