MA1

POSLOUPNOSTI, ŘADY 5 courseware /KMA/MA1

23. 10. – 1. zápočtová práce (20 bodů)
4. 12. – 2. zápočtová práce (30 bodů)
} zápočet ≥ 30 bodů (3 opravné termíny)

RNDR. JONÁŠ VOLEK

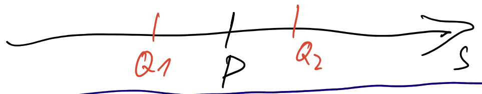
e-mail: volek1@kma.zcu.cz
Kancl: UC-208
Konzultace (e-mail předem): st 12:30 – 13:30, čt 11 – 12:00
SKRIPTA: DRÁBEK, MÍKA: MA1
ZKOUŠKA: PÍSEMNÁ + ÚSTNÍ (detaily na poslední přednášce)

PDF SOUBORY: CVIČENÍ + DÚ

DŮLEŽITÝ ÚLOHY $\ast$

OKAMŽITÁ ZMĚNA (rychlost)

pohyb



- JAKÁ JE OKAMŽITÁ RYCH. POH. V BODĚ P?

SŠ $Q_{1,2}$ = POZOROVATEL
$Q_1 \Rightarrow s_0, t_0$
$Q_2 \Rightarrow s_1, t_1$

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ = PRŮMĚRNÁ RYCHLOST, NE OKAMŽITÁ

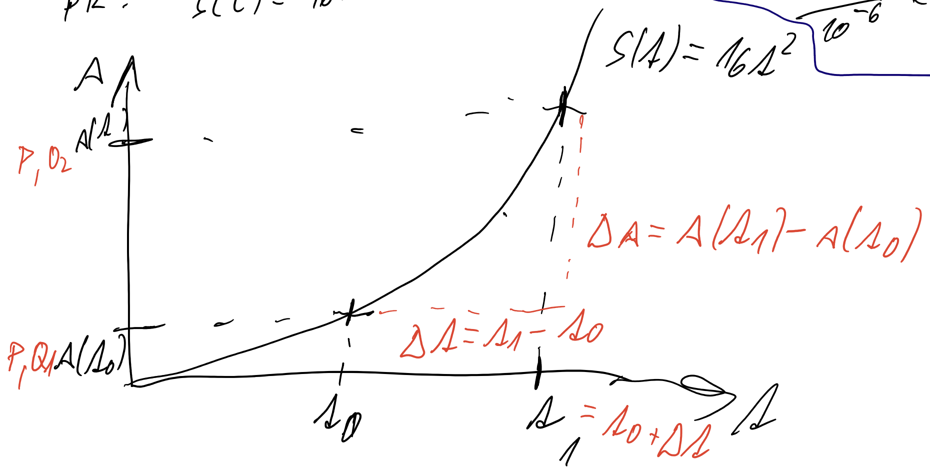
- Jaká hodnota má "$\frac{0}{0}$"?

"$\frac{0}{0}$" je tzv. NEURČITÝ VÝRAZ

Př: $\frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10^{-6-(-12)} = 10^{6}$

$\frac{10^{-12}}{10^{-6}} = 10^{-12-(-6)} = 10^{-6}$

PŘ: $s(t) = 16t^2$



$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Δt se blíží k 0

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

- LIMITA (BLÍŽENÍ SE)
- DERIVACE (OKAMŽITÁ ZMĚNA)

POZN.: Veličina (zde konk. s) se může měnit, definice okamžité změny je stále stejná

NAPŘ.: $i(t) = q'(t)$ el. proud

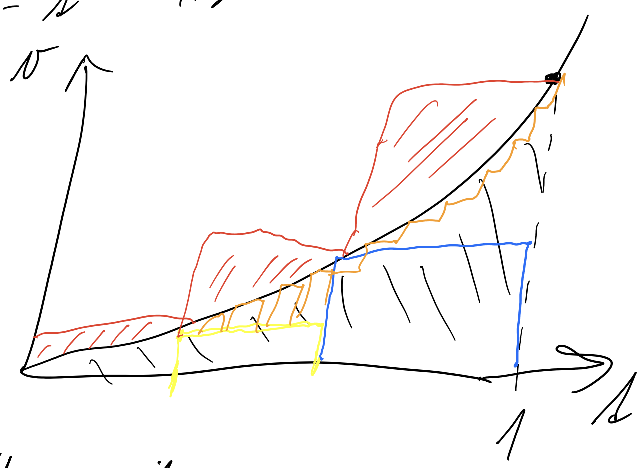
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

stejná

NAPŘ.: $i(t) = q'(t)$ el. proud
$a(t) = v'(t)$ zrychlení

II. PLOCHA POD GRAFEM FCE

PŘ.: $v(t) = t^2$ (rychlost v čase t)



$\underline{S}$ → interval
obsah
$\overline{S}$ → interval

② Jakou dráhu urazil hm. bod za první hodinu svého pohybu?

$\underline{S}_{\square} \leq S \leq \overline{S}_{\square}$

$\lim_{t \to 0}$

ÚSTŘEDNÍ POJEM:
INTEGRÁL (plocha pod grafem)
Pozn.: obdobně opět pro další veličiny
např. ENERGIE vs. VÝKON
RYCHLOST vs. ZRYCHLENÍ

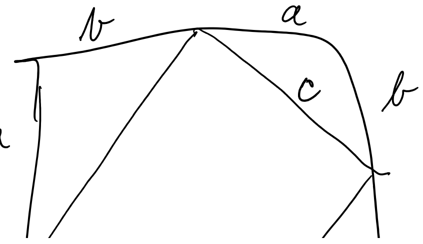
III.

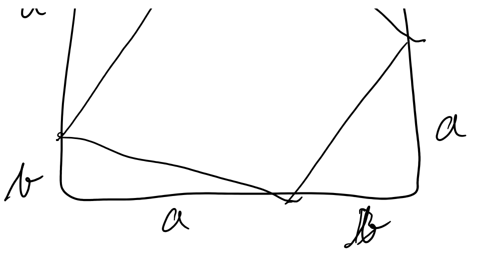
obrázek a intuice vs. rigorózní důkaz

PYTHÁGOROVA VĚTA

$a^2 + b^2 = c^2$

DK:





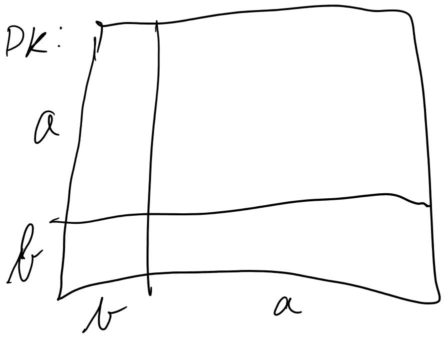
$(a+b)^2 = c^2 + 4\cdot\frac{ab}{2}$

$\boxed{a^2+b^2=c^2}$

ALGEBRAICKÝ VZOREC

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

DK:



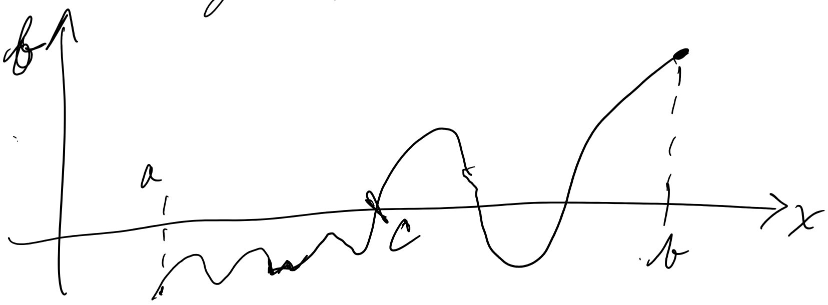
Pozn.

$(a+b)^3$
$(a+b)^4$
$(a+b)^n$

} už si nepředstavíme

Cauchyova věta o nulové

Je-li fce spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$ a $f(a)\cdot f(b) < 0$, potom existuje bod $c \in (a,b)$ takový, že $f(c)=0$.



tohle není důkaz
jen 1 z řešení (slovně)
DK.: pomocí bisekce

MATEMATICKÁ LOGIKA A STRUKTURA MATEM. TEXT

- VÝROK – oznamovací věta, o které má smysl rozhodnout.

MATEMATICKÁ LOGIKA A STRUKTURA MATEM. TEXT

- **VÝROK** – oznamovací věta, o které má smysl rozhodnout, zda je pravdivá či nepravdivá

PŘ.: A: Venku prší. ✓ $p(A) = 0$ nepravdivý výrok

B: $1+1=2$ ✓ $\underbrace{p(B) = 1}_{\text{PRAVDIVOSTNÍ HODNOTA}}$ pravdivý výrok

C: Běž ven! ×

D: $x+1=2$ ×

} nejsou výroky

↖ výroková forma

- **NEGACE VÝROKU** – opačný výrok, má opač. pravd. hod.

„Není pravda, že A"

ZNAČENÍ: $\bar{A}$, $\neg A$, non A, …

Př.: „Není pravda, že venku prší."

„Není pravda, že $1+1=2$."

- **SLOŽENÉ VÝROKY** – výroky lze spojovat do složených výroků pomocí logických spojek

KONJUNKCE $A \wedge B$ "A a zároveň B"

DISJUNKCE $A \vee B$ "A nebo B"

IMPLIKACE $A \Rightarrow B$ "POKUD A, POTOM B"

"Je-li A, potom B"

EKVIVALENCE $A \Leftrightarrow B$ "A právě ~~tehdy~~, když B."

Pozn.: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

TABULKA PRAVD. HODNOT

A	B	$\bar{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

IMPLIKACE: $A \Rightarrow B$

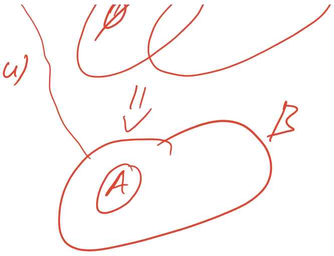
(ZKOUŠKA) A je postačující podmínkou pro B (ZÁPOČET) ← hodně přísný

B je nutnou podm. pro A (ZKOUŠKU)

(ZÁPOČET)

B je nutnou podm. pro A
(ZÁPOČET) (ZKOUŠKU)

ZKOUŠKA $\Rightarrow$ ZÁPOČET



$A \Rightarrow B$

OBRÁCENÁ IMPLIKACE $B \Rightarrow A$ $\Rightarrow$ jiná pravd. hod.

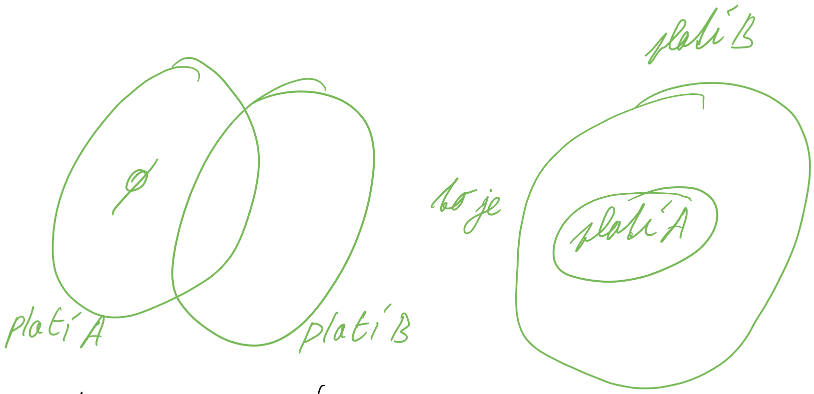
OBMĚNĚNÁ IMPLIKACE $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ $\Rightarrow$ stejná pravd. hod.

↑ používá se u nepřímého důkazu

2. Přednáška 17.9. 2025

Implikace: $A \Rightarrow B$

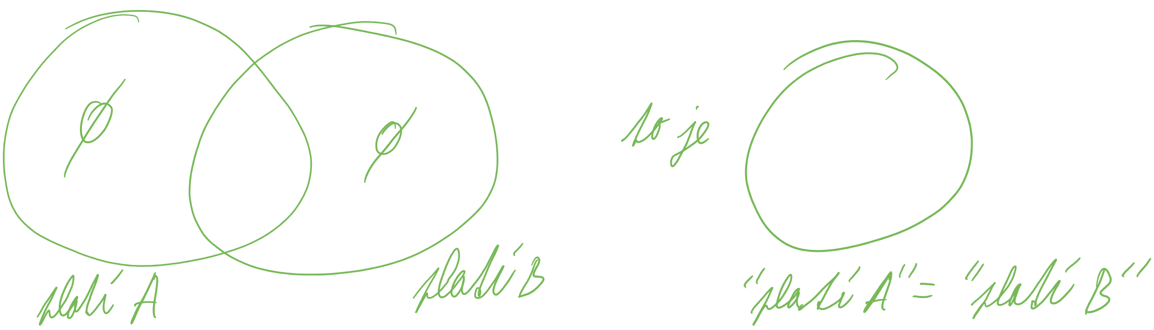
předpoklad(y) ↑ ↖ závěr



A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Ekvivalence: $A \Leftrightarrow B$

to je $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$



• A je nutnou a postačující podm. pro B (a naopak)

Negace složených výroků

$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$

$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$ } de Morganova pravidla

$\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow A \wedge \bar{B}$

Kvantifikované výroky

Př.: $V(x): x+1=2$ | - jakmile dosadím za x, stane se z toho výrok (pravdivý nebo nepravdivý)

VÝROKOVÁ FORMA

• tvrzení obsahující proměnnou (-é), které se po dosazení stává výrokem

Kvantifikátory

$\forall$ - velký, obecný "pro všechna" "pro každé"

$\exists$ - malý, existenční "xistuje"

pozn.: $\nexists$ "neexistuje"

$\exists!$ "existuje právě jedno"

Př.: $\forall x \in M : V(x)$ ← výrokové formy

$\exists x \in M : V(x)$

$M = \mathbb{R}$, $V(x): x+1=2$ pravdivostní hodnota

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x+1=2$ $p=0$ $(x=0)$

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x+1=2$ $p=1$ $(x=1)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: x+1=2 \qquad p=0 \ (x=0)$

$\exists x \in \mathbb{R}: x+1=2 \qquad p=1 \ (x=1)$

platí výroky

$\exists x \in M \ \forall y \in N: V(x;y)$

$\forall x \in M \ \forall y \in M: V(x;y)$

$\forall y \in N \ \exists x \in M: V(x;y)$

! ZÁLEŽÍ NA POŘADI KVANTIFIKATORŮ

PODMNOŽINY $\mathbb{R}$

$\mathbb{N} - \{1; 2; 3; 4; \dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$

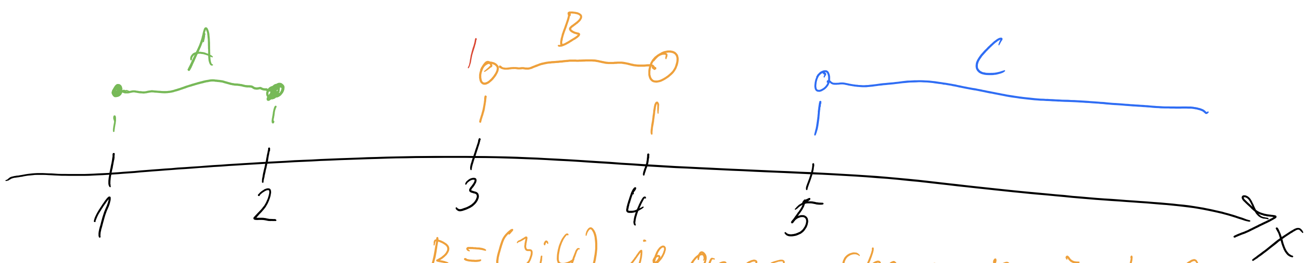
$\mathbb{Q}$ = racionální čísla

$\mathbb{R}$ = reálné čísla

$A = \langle 1; 2 \rangle = \{x \in \mathbb{R}: 1 \leq x \leq 2\}$

$B = (3; 4) = \{x \in \mathbb{R}: 3 < x < 4\}$

$C = (5; +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: 5 < x\}$



$B = (3;4)$ je omez. shora např.: $h = 6, \ \forall x \in B: x < 4 < 6 = h$

$C = (5; +\infty)$ není omez. shora *

$\exists h \in \mathbb{R} \ \forall x \in C: x \leq h \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R} \ \exists x \in C: x > h$

$$\underbrace{\exists h \in \mathbb{R}\ \forall x \in C: x \leq h}_{\text{OMEZ SHORA}} \Leftrightarrow \underbrace{\forall h \in \mathbb{R}\ \exists x \in C: x > h}_{\text{NEGACE OMEZ. SHORA}}$$

$h \leq 5 \ \ldots \ x = 6$

$h > 5 \ \ldots \ x = h +$

NEGACE OMEZ. SHORA (* důkaz)

OMEZENÁ MNOŽINA

Definice: $A \subset \mathbb{R}$

1) Řekneme, že A je omezená zdola, pokud:

$$\exists d \in \mathbb{R}\ \forall x \in A: d \leq x$$

d … DOLNÍ ZÁVORA

2) Řekneme, že A je omezená shora, pokud:

$$\exists h \in \mathbb{R}\ \forall x \in A: x \leq h$$

h … HORNÍ ZÁVORA

3) Řekneme, že A je omezená, pokud je omezená <u>shora a zároveň zdola</u>

Definice (min/max) $A \subset \mathbb{R}$

1) Řekneme, že $a \in \mathbb{R}$ je inimum množiny A, pokud:

a) $a \in A$

b) $\forall x \in A: a \leq x$

Píšeme: $a = \min A$

2) Řekneme, že $b \in \mathbb{R}$ je maximum množiny B, pokud:

2, Řekneme, že $b \in K$ je maximum množiny B, pokud:

a) $b \in A$

b) $\forall x \in A: x \leq b$

Píšeme: $b = \max A$

$A = \langle 1;2 \rangle = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 2\}$

$B = (3;4) = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 4\}$

$a = \min A = 1$ ... $a = 1 \in A$ a) ✓

$\forall x \in A: a = 1 \leq x$ ✓

$\nexists \min B$ .... $a = 3$ a) ✗ není min

$a = 3{,}0001$

✓

$x = 3{,}00001 \in A$ b) ✗

$\underline{M}$: $b \in B$ libovolný

$\Rightarrow b > 3$

$b < 4$

$3 \quad < \quad b \quad 4$

$$\boxed{x_b = 3 + \frac{b-3}{2}}$$

$x_b \in B$

$3 < 3 + \frac{b-3}{2} < 4$

$6 < 6 + b - 3 < 8$

$\boxed{3 < b < 5}$ ✓

$3 + \frac{b-3}{2} < b$ ✓

$6 + b - 3 < 2b$

$3 < b$ ✓

$\boxed{3 < b < 5}$

Definice (infimum, supremum) $A \subset \mathbb{R}$

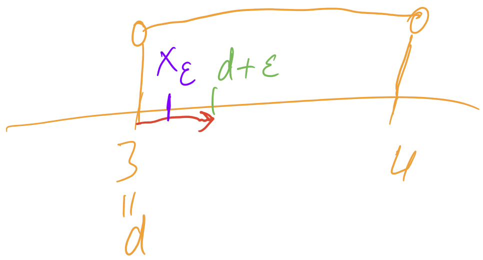
Buď $\emptyset \neq A$, A omezená

1, Řekněme, že $d \in \mathbb{R}$ je infimum množiny A, pokud:

a, $\forall x \in - : d \leq x$ (d je dolní závora)

b, $\forall a > 0\ \exists x_\varepsilon \in A: d + \varepsilon > x_\varepsilon$ (d je největší dolní závora)

$\uparrow$ EPSILON



2, Řekněme, že $h \in \mathbb{R}$ je supremum množiny A, pokud:

a) $\forall x \in A: x \_ h$ (h je horní závora)

b, $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A: x_\varepsilon > h - \varepsilon$ (h je nejmenší horní závora

Platí: $\exists \min A \Rightarrow \inf A = \min A$

$\exists \max A \Rightarrow \sup A = \max A$

Př.: $A = \langle 1; 2 \rangle$ $\quad$ $B = (3; 4)$

$\min A = 1$ $\quad$ $\nexists \min B$

$\max A = 2$ $\quad$ $\nexists \max B$

$\inf A = 1$ $\quad$ $\inf B = 3$

$\sup A = 2$ $\quad$ $\sup B = 4$

Věta: $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, omezená $\Rightarrow \exists!\ \inf A$, $\exists!\ \sup A$

Dk.: nebudeme provádět, vyplývá z konst. $\mathbb{R}$