1-01-LAA-Polynomy-Matice

čtvrtek, září 18, 2025 3:14 odp.

LAA

Definice - věta (tvrzení) → důkaz

POLYNOMY

(množina)

**Definice** Nechť $\mathbb{C}$ je těleso komplexních čísel, nechť $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Funkce $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definovaná předpisem

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

se nazývá **polynom (mnohočlen) stupně** $n$.

Píšeme $st(\cancel{p}) = n$. $p(x)$

Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se nazývají **koeficienty polynomu**.

Př.: 1) $p(x) = a_0,\ a_0 \neq 0$ polynom nultého stupně → čísla

2) $p(x) = a_1 x + a_0,\ a_1 \neq 0$ 1. stupně lineární

3) $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ a_2 \neq 0$ 2. stupně kvadratická

4) 3. stupně → kubická

Jestliže pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ je $a_i \in \mathbb{R}$, ~~kde~~ ne ZA X $\mathbb{R}$ označuje těleso reálných čísel, potom mluvíme o **polynomu s reálnými koeficienty**.

Jestliže $a_i = 0$ pro každé $i$, potom $p = 0$ se nazývá **nulový polynom**. Dodefinujeme stupeň nulového polynomu $st(0) = -\infty$.

1

? co dál ? $p(x) = 0 \Rightarrow$ ALGEBRAICKÁ ROVNICE ŘÁDU $n \geq 1$

stupně $n$

Číslo $c \in \mathbb{C}$ se nazývá **kořen** polynomu $p(x)$, jestliže $p(c) = 0$.

Př.: 1) $p_1(x) = 2x + 4 \quad c_1 = -2$

$p_2(x) = x^2 + 4x + 4 \quad c_{1,2} = -2$

$p_3(x) = 5x^3 - 9x^2 + 4$

**Věta 1 (Základní věta algebry)**
*Každý polynom stupně aspoň 1 má v oboru komplexních čísel alespoň 1 kořen.*

Základní operace s polynomy jsou **sčítání**, **odčítání**, **násobení** a **dělení**.

SČÍTÁNÍ: $p_1(x) - 2x^2 - 3x + 4 \qquad p_2(x) = x^3 - 2x$

!DŮLEŽITÉ!

$p_1(x) + p_2(x) = \underline{x^3 + 2x^2 - 5x + 4}$

SČÍTÁME KOEFICIENTY U STEJNÝCH MOCNIN

obecně $st(p_1(x) + p_2(x)) \leq \max\{st(p_1(x)); st(p_2(x))\}$

ODEČÍTÁNÍ: $p_1(x) - p(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 4$

NÁSOBENÍ: $p_1(x) \cdot p_2(x) = (2x^2 - 3x + 4) \cdot (x^3 - 2x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^3 + 6x^2 - 8x =$

$= 2x^5 - 3x^4 + 6x^2 - 8x$

!DŮLEŽITÉ!

obecně $st(p_1(x) \cdot p_2(x)) = st(p_1(x)) + st(p_2(x))$

DĚLENÍ: $p_1(x) : p_2(x)$ → hotové

$p_2(x) : p_1(x) = (x^3 - 2x) : (2x^2 - 3x + 4) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

$\ominus$ $\ominus$ $q(x)$

$\ominus (x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x)$

$p_2(x)$ $a(x)$ $r(x)$

$\ominus\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right)$

$\frac{3}{2}x^2-4x$

$\ominus\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{4}x+3\right)$

$-\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}=r(x)$ ... zbytek po dělení

$r_2(x) \to a(x)$, $r_1(x) \to b(x)$

$$\frac{a(x)}{b(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{r(x)}$$

**Věta 2** *Jsou-li $a(x)$, $b(x)$ dva polynomy ($st(a(x)) \geq st(b(x))$), polynom $b(x)$ není nulový, potom existují a jsou jednoznačně určeny polynomy $q(x)$, $r(x)$ takové, že $st(r(x)) < st(b(x))$ a platí $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$.*

*Speciálně, je-li $b(x) = x-c$, potom existuje polynom $q(x)$ tak, že $a(x) = (x-c)q(x)+r$, kde navíc $r = a(c)$.*

!

algoritmus dělení + $a(c)=(c-c)\cdot q(x)+r=r$

$\boxed{(x-c) = \text{KOŘENOVÝ ČINITEL}}$

**Věta 3** *Je-li $c$ kořen polynomu $a(x)$, potom existuje polynom $q(x)$ takový, že $a(x) = (x-c)q(x)$ a platí $st(q(x)) = st(a(x)) - 1$.* $n$ $1$ $n-1$

Odvodíme, že polynom stupně $n$ má v $\mathbb{C}$ právě $n$ kořenů

$a(x)=(x-c_1)\cdot \underbrace{q(x)}_{n-1}$ ← $c_1$ (1. kořen)

$a(x)=(x-c_1)\cdot(x-c_2)\cdot \underbrace{q_2(x)}_{n-2}$ ← $c_2$ (2. kořen)

$a(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\cdot \underbrace{q_3(x)}_{n-3}$ ← $c_3$

TAKHLE POKRAČUJEME DOKUD NEDOSTANEME POLYNOM 0. STUPNĚ

**Věta 4** *Každý polynom $a(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x + a_0$ stupně $n$ $(n \geq 1)$ lze v komplexním oboru vyjádřit ve tvaru*

$$a(x) = a_n(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n),$$

*kde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ jsou kořeny polynomu $a(x)$.*

*Tento zápis polynomu se nazývá **rozklad polynomu na kořenové činitele**.*

Pozn.: $c_1, c_2, \ldots c_n$ nemusí být různé (např.: DISKRIMINANT = 0)

**Věta 5** *Je-li číslo $c \in \mathbb{C}$ kořenem polynomu $a(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ s reálnými koeficienty, potom také číslo komplexně sdružené $\bar{c} \in \mathbb{C}$ je kořenem polynomu $a(x)$.*

např.: když $c_1 = 9+17i$

potom $c_2 = 9-17i$

komplexně sdružené číslo

Dk.: $a(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\ldots+a_1c+a_0=0=\bar{0}=\overline{a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\ldots a_1c+a_0}=$

$=\bar{a_n}\cdot\bar{c}^n+\bar{a}_{n-1}\cdot\bar{c}^{n-1}+\ldots+\bar{a_1}\cdot\bar{c}+\bar{a_0}=$

$=a_n\cdot\bar{c}^n+a_{n-1}\cdot\bar{c}^{n-1}+\ldots+a_0=$

$=a(\bar{c}) \Rightarrow \bar{c}$ je kořen

a je reálné číslo, proto tam nemusí

**Důsledek 6** *Každý polynom s reálnými koeficienty lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.*

**Reálný rozklad polynomu**

Jestliže v rozkladu polynomu (s reálnými koeficienty) na kořenové činitele roznásobíme každé dva kořenové činitele, které odpovídají dvojici komplexně sdružených kořenů,

**Reálný rozklad polynomu**

Jestliže v rozkladu polynomu (s reálnými koeficienty) na kořenové činitele roznásobíme každé dva kořenové činitele, které odpovídají dvojici komplexně sdružených kořenů, získáme **reálný rozklad polynomu**.

$= a(\bar{c}) \Rightarrow \bar{c}$ je kořen

číslo, proto tam nemusí být –

$D<0$ $D<0$

Př.: $a(x) = a_n \underbrace{(x-c_1)\cdot(x-c_2)\ldots}_{\text{pro reálné kořeny}} \underbrace{(x^2+b_1x+c_1)\cdot(x^2+b_2x+c_2)\ldots}_{\text{pro komplexní kořeny}}$

**Hornerovo schéma**

Dělení polynomu $a(x)$ polynomem $x - c$ lze jednoduše zapsat do tabulky. Tento způsob dělení polynomu polynomem $x - c$ se nazývá Hornerovo schéma.

Označme $a(x) = (x - c)q(x) + r$, kde

$$\begin{aligned} a(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ q(x) &= q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \cdots + q_1 x + q_0. \end{aligned}$$

Dělení zapíšeme do tabulky takto:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_1 & a_0 \\ & & + & + & + & \cdots & + & + \\ c & & q_{n-1}c & q_{n-2}c & q_{n-3}c & \ldots & q_1c & q_0c \\ \hline & q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & q_{n-4} & \ldots & q_0 & r \end{array}$$

zbavím se mocnin

Př.: $(x^3 - 3x^2 + 2x + 7) : (x - 2) = x^2 - x$

$(x - c)$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline \quad -x^2 + 2x + 7 \\ \quad (-x^2 + 2x) \\ \hline \quad\quad \boxed{7} = r \neq 0 = a(c) \end{array}$$

7 není kořen

$a(2) = 7 = 2^3 - 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 + 7 =$
$= 8 - 12 + 4 + 7 = 7$

$c$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 2 & 7 \\ 2 & & 2 & -2 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 7 \end{array}$$

$\boxed{x^2 - x}$ ← kořen

kořen

$7 = r \neq 0 \Rightarrow 7$ není k~

zbytek

musím zvolit jiný kořen $c$

Návod co zkoušet jako kořeny? → Vietovy vzorce

$a(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = a_n(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n)$

$$a(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = a_n (x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n)$$

Rozložíme roznásobíme

$x^n: a_n = a_n$

$x^{n-1}: a_{n-1} = a_n(-c_1 - c_2 - \dots - c_n) = -a_n(c_1 + c_2 + \dots + c_n)$

$x^{n-2}$: ← nezajímavé

$\vdots$

nutná podmínka

$x^0: a_0 = (-1)^n a_n \cdot c_1 \cdot c_2 \dots c_n \Rightarrow$ $c$ je kořen, potom $c$ dělí $a_0$

$c / a_0$

$\Rightarrow$ umíme najít všechny celočíselné kořeny

Př.:

1) Určete všechny kořeny polynomu $p(x)$ a najděte rozklad $p(x)$ na kořenové činitele a reálný rozklad $p(x) = x^3 - x^2 - 4x -$

| $c$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −1 | −4 | −6 |
| 3 | | 3 | 6 | 6 |
| | 1 | 2 | 2 | 0 |
| −2 | | −2 | 0 | |
| | 1 | 0 | 2 | × |

$a_0 = -6$

seženeme celočíselné dělitele $-6$

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

1 … ne

−1 … ne

2 … ne

3 … je kořen

DOSAZUJEME ZA $C$

reálné

$p(x) = (x-3)(x^2+2x+2)$

$(x-c)$

$D = -4$

$c_{2,3} = \frac{-2 \pm i2}{2} = -1 \pm i$

$c_1 = 3$

$c_2 = -1 + i$

$c_3 = -1 - i$

Rozklad na kořenové činitel

$p(x) = 1 \cdot (x-3)(x+1-i)(x+1+i)$

Reálný rozklad

$p(x) = 1 \cdot (x-3)(x^2+2x+2)$

# MATICE

# MATICE

**Matice typu** $m/n$ je soubor $m \cdot n$ prvků uspořádaných do $m$ řádků a $n$ sloupců:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

$$\text{Př. } A_{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad a_{23} = 2 \quad a_{31} = 1$$

→ obdélníková

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 11 & -4 \end{bmatrix}$$

→ čtvercová matice 2. řádu

Prvky $a_{kk}$, pro které je řádkový index stejný jako index sloupcový, se nazývají prvky **diagonální**.

$a_{22} = 4$

Matice **A** typu $m/n$ se nazývá matice **čtvercová řádu** $n$, jestliže $m = n$, t.j. jestliže má stejný počet řádků a sloupců.

Matice **A** typu $m/n$ se nazývá matice **obdélníková**, jestliže $m \neq n$.

$n$**-členný aritmetický vektor** je matice typu $n/1$.
Při zápisu $n$-členného aritmetického vektoru budeme vynechávat druhý index, budeme psát

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [a_1, a_2, ..., a_n]^T.$$

1

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu $m/n$ se nazývá matice **nulová** a značí se **0**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i = 1, ..., m$ a pro každé $j = 1, ..., n$, t.j. jestliže na každém místě matice je prvek 0.

Čtvercová matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu $n$ se nazývá matice **diagonální**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i \neq j$. Potom píšeme $\mathbf{A} = \text{diag}\,[a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}]$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Jednotková** matice řádu $n$ je matice $\mathbf{I} = \text{diag}[\underbrace{1, 1, ..., 1}_{n}]$, t.j. $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

↓ není to matice samých 1

Řekneme, že matice **A** typu $m/n$ je **horní (resp. dolní) trojúhelníková** matice, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i > j$ (resp. $i < j$).

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Řekneme, že čtvercová matice **A** řádu $n$ je **symetrická**, jestliže $a_{ij} = a_{ji}$ pro každé $i, j = 1, ..., n$.

Řekneme, že čtvercová matice **A** řádu $n$ je **antisymetrická**, jestliže $a_{ij} = -a_{ji}$ pro každé $i, j = 1, ..., n$.

Matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ jsou si **rovny**, jestliže to jsou matice stejného typu $m/n$ a jestliže $a_{ij} = b_{ij}$ pro každé $i = 1, ..., m$ a pro každé $j = 1, ..., n$. Píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ -5 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$