עבודת מסכמת- תורת ההחלטות

מרצה: ד״ר אילה משיח

מבוא

בעבודה זו נבחן את ההבדלים בין המודלים הקלאסיים של תורת ההחלטות שנלמדו במהלך הקורס לבין המודל שהציעו גלבוע ושמיידלר במאמרם משנת 1989.
במהלך הסמסטר עסקנו במגוון מודלים המתארים את אופן קבלת ההחלטות האנושית במצבי אי-ודאות, בהגרלות ובהתמודדות עם הסתברויות ידועות ולא ידועות.
למדנו כיצד לאורך השנים פותחו מודלים שונים שמטרתם לתאר את הבחירות האנושיות, בהתאם להקשרים שונים של הסתברויות ומצבי טבע, ובמיוחד במצבים של חוסר ודאות.

במטרה להציג השוואה בין המודלים הקלאסיים לבין המודל של גלבוע ושמיידלר, ננקוט בגישה רוחבית שתתמקד במאפיינים מרכזיים המשותפים למודלים השונים. גישה זו תאפשר להבחין בהיבטים קריטיים כמו אקסיומות ומבני פונקציית התועלת החוזרים על עצמם, ולבחון כיצד המודל של גלבוע ושמיידלר מציע גישה שונה, בעיקר בהקשרים של אי-ודאות עמוקה ועוד.

הסבר כללי

המודל **מקסמין תועלת מצופה (Maxmin Expected Utility)** של גלבוע ושמיידלר, נועד להתמודד עם מצבים של אי-ודאות עמוקה, בהם לא ניתן להסתמך על הסתברות יחידה לכל מצב טבע. בניגוד לחישוב תוחלת התועלת כפי שלמדנו במודלים הקודמים, הדרך בה נקבע יחס ההעדפות בין זוג הגרלות או פעולות מבוססת על רעיון של בחירה בפעולה שמבטיחה את התוצאה המינימלית של תוחלת התועלת מתוך כל ההסתברויות האפשרויות הנוצרות מתוך אי הוודאות. מודל זה לוקח בחשבון את מצבי הטבע (בדומה לדה פינטי ולאנסקומב אומן) להלן הסבר המבנה של פונקציית התועלת של המודל:

מבנה פונקציית התועלת במודל מקסמין תועלת מצופה

הפונקציה מתוארת כך:

$$J(f) = min_{p\in C}\int u\big(\mathrm{f(s)}\big)\mathrm{dP(s)}$$

פירוט האיברים והמבנה:

1. $J(f)$
   - זוהי התועלת הצפויה של פעולה f תחת המודל של מקסמין תועלת מצופה.
   - היא מייצגת את הערך המינימלי של התועלת הצפויה האפשרית תחת כל הפריורים האפשריים בתוך הקבוצה C.
   - הכוונה היא למזער את הסיכון הנובע מאי-הוודאות, כלומר בחירת הפעולה שמעניקה את התוצאה המינימלית הטובה ביותר.
2. $min_{p\in C}$
   - $p \in C$ מציין שהחיפוש אחר המינימום מתבצע על פני כל קבוצת הפריורים C, שהם התפלגויות הסתברות סופיות תומכות על מצבי הטבע האפשריים.
   - זהו החלק שמבטא את האסטרטגיה הפסימית במודל – הבחירה של התוצאה הגרועה ביותר מכל הפריורים.
3. $u\big(\mathrm{f(s)}\big)$
   - u היא פונקציית התועלת המוקצית למצבים שונים.
     u הינה אפינית על אוסף הגרלות Y וקבוצה קמורה C לא ריקה של התפלגויות אפשריות על Σ (תת קבוצה של מצבי הטבע) כך שלכל $f, g \in L_0$ מתקיים $f \gtrsim g \Leftrightarrow min_{p\in C}\int u\circ f dp \gtrsim min_{p\in C}\int u\circ g dp$
   - f(s) היא התוצאה של הפעולה f , הגרלה, עבור מצב טבע s והפונקציה u מייצגת את התועלת של תוצאה זו עבור מקבל ההחלטות.
   - פונקציית התועלת u היא ייחודית עד כדי טרנספורמציה ליניארית חיובית, והיא מבטאת את ההעדפות של מקבל ההחלטות.
4. $\int u\big(\mathrm{f(s)}\big)\mathrm{dP(s)}$
   - זהו האינטגרל של פונקציית התועלת u על פני ההתפלגות P, שהיא אחת מהפריורים האפשריים בקבוצה C.
   - האינטגרל מייצג את החישוב של תוחלת התועלת עבור פעולה מסוימת f על פני כל מצבי הטבע האפשריים, בהינתן הפריור P.
5. C
   - C היא קבוצת הפריורים, המייצגת את כל ההתפלגויות האפשריות של מצבי הטבע.
   - היא סגורה וקמורה, כלומר יש בה מכלול של התפלגויות הסתברות שמקבל ההחלטות מתחשב בהן.
   - במודל מקסמין, מקבל ההחלטות אינו יודע בדיוק מהי ההתפלגות הנכונה, ולכן מתחשב בכל הסט האפשרי של ההתפלגויות C .

התהליך והרעיון המרכזי:

המודל של גלבוע ושמיידלר מבוסס על הרעיון שמקבל ההחלטות נמצא במצב של **אי-ודאות עמוקה** ,בה למצבי הטבע האפשריים אין הסתברות אחת ידועה. במקום זאת, יש סט של פריורים (התפלגויות הסתברות אפשריות) שנלקח בחשבון, והאסטרטגיה של מקבל ההחלטות היא **מינימיזציה של התוצאה הגרועה ביותר** מתוך סט ההתפלגויות האפשריות. המודל משקף גישה פסימית, בה מקבל ההחלטות מעדיף להבטיח את עצמו מפני התרחיש הגרוע ביותר.
מקבל ההחלטות מחשב את **התוחלת הצפויה** עבור כל פעולה f על פני כל ההתפלגויות האפשריות ב-C. לאחר מכן, הוא בוחר את המינימום מבין כל התוחלות הצפויות, כדי למנוע את הסיכון הגבוה ביותר.

אסטרטגיה פסימית מול אסטרטגיה אופטימית:

- במודל של גלבוע ושמיידלר, מקבל ההחלטות נוקט בגישה פסימית, ומנסה להבטיח את עצמו מפני התרחיש הגרוע ביותר . זהו ההיפך מאסטרטגיה אופטימית, שבה מקבל ההחלטות מתמקד במקסום התוצאה האפשרית הטובה ביותר מתוך כל התרחישים האפשריים.

גישה זו מתאימה למצבים שבהם קיימת אי-ודאות עמוקה, ואי אפשר לסמוך על הסתברות אחת ברורה לכל מצב טבע. לכן, מקבל ההחלטות מעדיף להיות שמרני ולבחור בתוצאה שמקטינה את ההפסד הפוטנציאלי.

קמירות קבוצת הפריורים (Convexity):

- קבוצת הפריורים C נחשבת סגורה וקמורה (convex). משמעות הקמירות היא שמקבל ההחלטות יכול לשקול שילוב של מספר התפלגויות הסתברות שונות כאשר הוא בוחן את האפשרויות.
קמירות זו מבטיחה שלמקבל ההחלטות יש מרחב שלם של אפשרויות לשקול, והיא מאפשרת לו גמישות רבה יותר בהתמודדות עם אי-ודאות.

הקשר בין פונקציית התועלת של MEU לפונקציות תוחלת תועלת רגילות (Expected Utility) :

- המודל של תוחלת התועלת של MEU נחשב להרחבה של המודל הקלאסי של פונקציית תוחלת תועלת (Expected Utility Theory). במקום לבחור את הפעולה שממקסמת את תוחלת התועלת על בסיס הסתברות ידועה אחת, המודל בוחר את הפעולה שממזערת את הסיכון מתוך קבוצה של הסתברויות אפשריות.

כלומר, במודל הקלאסי יש הסתברות אחת לכל מצב טבע, בעוד שבמקסמין יש סט שלם של התפלגויות (פריורים), והבחירה נעשית על בסיס הערכת כל הסט.

קבוצת הפריורים כסט של הסתברויות סובייקטיביות:

- קבוצת הפריורים C יכולה לייצג הסתברויות סובייקטיביות שאינן ידועות במדויק למקבל ההחלטות. מקבל ההחלטות מתחשב בכל סט האפשרויות כדי להימנע ממצב שבו הוא בוחר על בסיס הסתברות שגויה.

זה מאפשר לו להתמודד עם חוסר ודאות גם כאשר אין מידע מדויק על הסתברויות האירועים השונים.

אינטגרל שוקט (Choquet Integral) :

- לעיתים נעשה שימוש באינטגרל שוקט (Choquet Integral) כדי להרחיב את מודל מקסמין תועלת מצופה. אינטגרל זה נועד להתמודד עם הסתברויות לא-אדיטיביות (non-additive probabilities), מה שמאפשר למקבל ההחלטות לחשב תועלת גם במצבים שבהם הסתברויות לא ניתנות להוספה בצורה קונבנציונלית.

אינטגרל שוקט משמש למצבים של חוסר ודאות עמוקה עוד יותר, שבהם קשה מאוד להגדיר הסתברויות בצורה מסודרת לכל תרחיש.

סיבוכיות החישוב :ב-MEU נדרשת גישה שמחשבת את המקרה הגרוע ביותר, מה שהופך אותו לסבוך יותר במקרים מסוימים, בעוד שב-VNM ובמודלים האחרים יש שימוש בחישובי הסתברויות פשוטים יותר.

השוואה בין פונקציות התועלת של המודלים:

פונקציית התועלת של VNM (Von Neumann-Morgenstern)

במודל VNM הקלאסי, פונקציית התועלת f היא לינארית ותלויה בתוחלת התועלת של ההגרלות. פונקציית התועלת מבוססת על תוחלת תועלת רגילה, בה ההסתברויות לכל תוצאה הן ידועות וקבועות. מקבל ההחלטות מחשב את התועלת הצפויה על ידי שקלול התועלת של כל פרס לפי ההסתברות שלו. כלומר, מחושב על פי הסתברויות מוגדרות מראש לכל פרס.

נוסח מתמטי: $u(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$

במודל VNM על הגרלות פונקציית התועלת u על אוסף הפרסים X קובעת את יחס ההעדפות כך:

$p \gtrsim q \Leftrightarrow \sum_{x\in X} p(x)u(x) \geq \sum_{x\in X} q(x)u(x)$.

כאשר p היא הגרלה, p_i היא הסתברות התוצאה הi ו-x_i היא התועלת המוקצית לתוצאה הi .
התועלת של ההגרלה היא סכום המשקלים המיוחסים לתועלות של התוצאות במשקל הסתברויותיהן כשהמטרה היא למקסם את תוחלת התעולת.

הסתמכות על פריורים:

במודל VNM ההסתברויות הן קבועות ומדויקות. מקבל ההחלטות פועל תחת הנחה שהוא יודע את כל הסתברויות הפרסים ולכן מחשב את תוחלת התועלת לפי הסתברויות אלו. זה אומר שמקבל ההחלטות מתבסס על מידע מוחלט על הסתברויות התוצאות האפשריות.

לעומת זאת, במודל גלבוע ושמיידלר אין הסתברות אחת מוגדרת. מקבל ההחלטות צריך להתמודד עם חוסר ודאות עמוק יותר, ולכן הוא מסתמך על סט של פריורים אפשריים. כדי להימנע מחוסר ודאות, הוא בוחר את התוצאה הגרועה ביותר בין כל הפריורים האפשריים, מה שמצביע על נטייה להימנע מהסיכון הגדול ביותר.

התמודדות עם אי ודאות:

במודל VNM אי הוודאות מטופלת באמצעות חישוב תוחלת התועלת, כאשר כל ההסתברויות ידועות וברורות למקבל ההחלטות. המודל מתמקד בניהול סיכונים על בסיס הסתברויות ידועות.

לעומת זאת, במודל גלבוע שמידלר, הדגש הוא על אי ודאות עמוקה יותר, בה הסתברויות הפרסים אינן ידועות. מקבל ההחלטות מתמודד עם כל האפשרויות האפשריות על ידי בחירה בתוצאה המינימלית האפשרית מתוך הסט של הפריורים, כדי להימנע מהתרחיש הגרוע ביותר.

תוצאה מינימלית מול תוצאה ממוצעת:

במודל VNM מקבל ההחלטות מחפש את התוצאה הממוצעת הטובה ביותר מתוך כל האפשרויות על ידי חישוב תוחלת התועלת. זאת אומרת שהוא משקלל את כל האפשרויות לפי ההסתברויות שלהן, כדי להגיע לתוצאה המיטבית הממוצעת.

לעומת זאת, במודל MEU , מקבל ההחלטות מתמקד בתוצאה המינימלית הטובה ביותר מתוך כל האפשרויות. הוא מתחשב בתרחיש הגרוע ביותר מתוך כל האפשרויות ומעדיף אותו, מה שהופך את המודל לאידיאלי למצבים של חוסר ודאות קיצוני.

היבט התועלת:

פונקציית התועלת במודל VNM מתבססת על הסתברויות מדויקות וליניאריות, והיא נבנית תחת אקסיומות כמו שלמות, טרנזיטיביות ורציפות. פונקציית התועלת יחידה עד כדי טרנספורמציה אפינית חיובית.
הגרלה p עדיפה אדישה על פני הגרלה q אמ״מ תוחלת הפונקציה u על p ביחס לתוצאות $x\in X$ גדולה שווה מתוחלת הפונקציה u על q ביחס לתוצאות $x\in X$. על כן, נעדיף הגרלה אחת על אחרת אם ורק אם תוחלת הפונקציה u ביחס לתוצאות גדולה יותר.

לעומת זאת, במודל MEU, פונקציית התועלת מתבססת על אינטגרל שוקט, שמאפשר גמישות רבה יותר במצבים של חוסר ודאות. מקבל ההחלטות מחשב את התוצאה המינימלית הצפויה, תוך הסתמכות על מינימום התועלות האפשריות בכל פריור אפשרי, ומתאים במיוחד למקרים של חוסר ודאות משמעותית.
כאן, u יחידה עד כדי טרנספורמציה לינארית, וC (קבוצה סגורה וקמורה של מידות הסתברות סופיות) יחידה אם ורק אם אקסיומת אי הניוון מתקיימת. על כן, נעדיף פעולה על אחרת אם ורק אם מינימום תוחלת הרווח על פני ההגרלות על התוצאות ועל פני כל ההתפלגויות על מצבי הטבע גדול יותר.

במודל VNM על הגרלות פונקציית התועלת אינה בהכרח אפינית ויכולה להיות קמורה או קעורה בהתאם להעדפות הסיכון של מקבל ההחלטות. פונקציה קעורה מייצגת מקבל החלטות שונא סיכון ופונקציה קמורה מייצגת מקבל החלטות אוהב סיכון.

מודל MEU עוסק בתנאי אי ודאות ומכיל התייחסות למצבי טבע ולפעולות. VNM עוסק בתנאי סיכון ולא מתייחס לאי-ודאות, למצבי טבע ולפעולות. בהתאם לכך, מודל MEU מתמקד ביחס על פעולות ויחד עם זאת תוצאות, בעוד שמודל VNM עוסק רק במצבים של סיכון והגדרת תועלות בהתאם.

למעשה, ניתן לראות במודל VNM מעיין מודל MEU כאשר מצב הטבע S קבוע, כלומר סינגלטון ולכן L מכיל אבייקטים מימד 1. במקרה זה, לא קיימת קבוצה חלופית של מצבי טבע, אלא רק הסתברות למצב טבע יחיד.

השוואת ההגדרות

- **X**

מדובר באוסף של כל הפרסים או התוצאות האפשריות של פעולה נתונה ב-2 המודלים.

- **Y**

במודל **VNM**, **Y** מכיל את כל ההתפלגויות האפשריות על פני אוסף התוצאות X. כל $y \in Y$ מייצג הסתברות מסוימת עבור כל תוצאות אפשרית של X.
במודל **MEU**, Y מוגדר בצורה זהה (מכיל את כל ההתפלגויות האפשריות על פני אוסף התוצאות) . כאן, ההתפלגות על התוצאות לא יחידה- במקרה זה מדובר בקבוצת התפלגויות.

- **S**

במודל **VNM**, אין מושג של מצבי טבע חיצוניים שמשפיעים על התוצאה, וכל ההתפלגויות מתמקדות ישירות בפעולה ובתוצאותיה בלבד.
במודל **MEU**, **S** היא קבוצת מצבי הטבע. כל מצב טבע עשוי להשפיע על התוצאות האפשריות. כלומר, במודל זה, פעולות אינן מתבססות רק על הסתברויות התוצאה אלא גם על המצב הנוכחי של העולם (או של הסביבה החיצונית) שמשפיע על הפעולה.

- **L**

במודל **VNM**, אין מושג שכזה. המודל אינו עוסק במצב החיצוני או באי-ודאות חיצונית שמשפיעה על התוצאה.
במודל **MEU**, L מייצג אוסף של פעולות שבהן יש מצבי טבע שונים שמשפיעים על כל פעולה. כלומר, הפעולה לא נקבעת רק על בסיס התוצאה הישירה, אלא גם על פי המצב החיצוני שבו מתרחשת הפעולה.

פונקציית התועלת של מודל VNM על קבוצה קמורה:

פונקציית התועלת במודל זה היא לינארית, כלומר יש לה תכונת הקמירות שמבטיחה שברגע שאנחנו משלבים שני פרסים x-ו y ביחס α, התועלת תהיה לינארית ביחס לשקלול הפרסים. פונקציית התועלת הינה אפינית כלומר:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$$

פונקציה זו מאפשרת שקלול ליניארי של תועלות ומבטיחה התנהגות רציונלית בעדיפות בין פרסים שונים, כמו בתורת תוחלת התועלת, כאשר A ו B הן קבוצות של הגרלות, α הוא משקל בין 0 ל-1, ו u(A), u(B) הן התועלות של הקבוצות. פונקציית התועלת מבטיחה שהעדפות ניתנות להרחבה בצורה קמורה ולא לינארית.

התייחסות לקבוצה קמורה: ב-VNM, פונקציית התועלת היא לינארית, וכל צירוף קמור של פרסים מוביל לתוצאה ממוצעת לפי המשקל של כל פרס. לעומת זאת, במודל MEU, החישוב מתמקד בתוצאה המינימלית מתוך כל הפריורים האפשריים, ולא בממוצע לינארי.

יחס להסתברויות: ב-VNM, הסתברויות נלקחות בצורה לינארית, וכל פרס משוקלל בהתאם להסתברות שלו. בMEU, אין הסתברות מדויקת אחת, אלא סט של פריורים, ומקבל ההחלטות בוחר את התוצאה הגרועה ביותר כדי להימנע מחוסר ודאות.

באופן כללי, ניתן לראות כי במודל MEU קיבלנו את תכונת האפיניות של פונקציית התועלת מתוך אקסיומת הרתיעה מאי ודאות ללא דרישה מסוימת על אוסף תוצאות X.

שני המודלים (MEU, VNM לקבוצות קמורות) נהנים מיתרונות הקמירות, פונקציית התועלת שלהם אפינית. קמירות מאפשרת לשמור על יציבות העדפות גם במצבים של שילוב אפשרויות, מה שמקנה יתרון במצבים בהם מקבל ההחלטות חייב לשקלל מספר אפשרויות. קמירות מבטיחה שהשקלול לא יגרום להעדפות "להשתנות" באופן לא צפוי.

פונקציית התועלת של דה פיניטי

במודל דה-פינטי, אין **פונקציית תועלת** כמו במודל MEU. במקום זאת, מודל דה-פינטי מתבסס על העדפות של מקבל ההחלטות בין פעולות שונות, כאשר כל פעולה מובילה לתוצאה שונה בהתאם למצב טבע מסוים (כלומר ללמוד על הסתברות מתוך התנהגות). במודל זה הייצוג בא לידי ביטוי בפונקציית הסתברות יחידה הממפה את כל אוסף הפעולות האפשריות כתלות במצבי הטבע השונים. במקרה זה נעדיף פעולה אחת על אחרת אם ורק אם:

$x \gtrsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot y_i$ לכל $x, y \in X$, כאשר $p^T x$ תוחלת הערך הכספי

ניתן לראות במודל MEU מקרה כולל של דה פינטי שבו קבוצת ההתפלגויות C מכילה איבר יחיד – p. בנוסף, בכל קבוצה של אוסף ההגרלות Y קיימת הגרלה יחידה וודאית.

השוואת ההגדרות

- **X**

במודל **De Finetti**, התוצאות במרחב הפעולות. X מקביל ל L ב MEU.
במודל **MEU**, אוסף התוצאות X מייצג את כלל התוצאות האפשריות המתקבלות מההחלטה שנעשית בתנאי אי-ודאות. כלומר, כל תוצאה מושפעת ישירות ממצבי הטבע, והן נלקחות בחשבון לפי קבוצה מוגדרת של אפשרויות.

- **Y**

במודל **De Finetti**, כל מצב טבע מתקיים בהסתברות כלשהי כתלות בפעולה שנבחרה ובמצב הטבע. אין אוסף המקביל לאוסף Y עבור מודל זה.
במודל **MEU**, Y מכיל את כל ההתפלגויות האפשריות על פני אוסף התוצאות X. ההתפלגות על התוצאות לא יחידה- במקרה זה מדובר בקבוצת התפלגויות.

- **S**

במודל **De Finetti**, זוהי קבוצה סופית של מצבי הטבע. עבור מצבי הטבע התפלגות p יחידה. התוצאה במודל זה תתקבל בהתאם לפעולה מסוימת ומצב טבע מסוים.
במודל **MEU**, S היא קבוצת מצבי הטבע. כל מצב טבע עשוי להשפיע על התוצאות האפשריות. כלומר, במודל זה, פעולות אינן מתבססות רק על הסתברויות התוצאה אלא גם על המצב הנוכחי של העולם (או של הסביבה החיצונית) שמשפיע על הפעולה.

- **L**

במודל **De Finetti**, כפי שהוזכר קודם לכן, X מקביל לL ב MEU ומייצג את מרחב הפעולות. כל פעולה X מיוצגת על ידי ווקטור תוצאות. כל כניסה בווקטור מייצגת תוצאה דטרמיניסטית בהינתן מצב טבע.
במודל **MEU**, L מייצג אוסף של פעולות שבהן יש מצבי טבע שונים שמשפיעים על כל פעולה. כלומר, הפעולה לא נקבעת רק על בסיס התוצאה הישירה, אלא גם על פי המצב החיצוני שבו מתרחשת הפעולה.

פונקציית התועלת של אנסקומב-אומן

במודל אנסקומב-אומן, פונקציית התועלת משולבת בין הסתברויות (הגרלות) לבין תוצאות אמיתיות בעולם האמיתי. המודל כולל שני שלבים : קביעת הסתברויות לתוצאות ולאחר מכן שימוש בפונקציית תועלת קלאסית.

נוסח מתמטי $U(a) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \sum_{x \in X} \mathrm{p}_i(x) u(x) \;\; \pi \in \Delta(S)$:

- $U(a)$ היא התועלת הצפויה מהגרלה או פעולה a.
- π_i היא ההסתברות של מצב טבע $\mathrm{s_i}$. ההתפלגות הינה יחידה.
- $\mathrm{p_i}(x)$ היא ההסתברות הסובייקטיבית של תוצאה x הנובעת ממצב הטבע $\mathrm{s_i}$.
- u (x) היא התועלת שמקבל ההחלטות משייך לתוצאה x. התועלת יחידה עד כדי טרנספורמציה לינארית. קיום האקסיומות שקול לקיומה של התועלת.

במודל זה נרצה למקסם את תוחלת התועלת ביחס להגרלות וביחס למצב הטבע.

במודל זה נקבע יחס ההעדפות כך : $a \gtrsim b \Leftrightarrow \sum_i \pi_i \sum_x p_i(x) u(x) \geq \sum_i \pi_i \sum_x q_i(x) u(x)$

כאשר $b = (q_1, \dots, q_n)$, $a = (p_1, \dots, p_n)$, π פונקציית הסתברות סובייקטיבית על מצבי הטבע , $\pi(i)$ ההסתברות הסובייקטיבית לכל מצב טבע i.

יחס להסתברויות של מצבים: במודל אנסקומב-אומן ההסתברויות של מצבי הטבע ידועות וקבועות מראש, ומאפשרות חישוב תוחלת התועלת על סמך שקלול התוצאות. ההחלטות מתקבלות על פי הסתברויות ברורות וידועות. במודך MEU, אין הסתברויות קבועות אלא סט של פריורים וההחלטות מתקבלות על בסיס ההסתברות המינימלית כדי להקטין את הסיכון.

היבט התועלת: במודל אנסקומב-אומן, פונקציית התועלת לינארית ומחושבת לפי תוחלת ההסתברויות הידועות, כאשר המטרה היא למקסם את התועלת הממוצעת. במקסמין תועלת מצופה, התועלת מחושבת על פני סט של פריורים, ומקבל ההחלטות מתמקד במזעור הסיכון ולא במקסום תוחלת התועלת.

תוצאה מינימלית מול תוצאה ממוצעת: במודל אנסקומב-אומן מקבל ההחלטות מחפש את התוצאה הממוצעת הטובה ביותר. במודל MEU, ההתמקדות היא בבחירת התוצאה המינימלית (הגרועה ביותר) כדי להימנע מהתרחיש הגרוע ביותר.

התמודדות עם אי ודאות: במודל אנסקומב-אומן, ההסתברויות ידועות ולכן אין חוסר ודאות, ומקבל ההחלטות יכול להעריך את הסיכון באופן מדויק. במודל MEU, יש אי ודאות עמוקה, ומקבל ההחלטות מתמקד בתרחיש הגרוע ביותר כדי להקטין את הסיכון ולהימנע מחוסר ודאות.

יחס העדפות: בשני המודלים יחס ההעדפות הוא על פני פעולות.

ניתן לראות במודל MEU מקרה כולל של מודל אנסקומב-אומן שבו קבוצת ההתפלגויות C מכילה איבר יחיד – π. כלומר, ההתפלגות היא קבועה.

במודל AA אין וודאות מוחלטת. כלומר, ישנה מידה של סיכון. במודל זה, מוגדרת הסתברות סובייקטיבית, אשר משקפת את אמונותיו של מקבל ההחלטות לגבי הסיכויים של מצבי הטבע השונים להתרחש. במודל זה, מקבל ההחלטות לא יודע בוודאות מהן ההסתברויות למצבי הטבע, אך הוא קובע אותן בעצמו, ולכן ישנה מידה של אי וודאות.

במודל גלבוע-שמיידלר, בדומה, ההסתברויות למצבי הטבע גם אינן ידועות מראש. אך בשונה ממודל אנסקומב-אומן, מקבל ההחלטות בוחן קבוצה של הסתברויות אפשריות למצבי הטבע ולא מחויב להסתברות אחת קבועה.

במודל AA על הגרלות פונקציית התועלת אינה בהכרח אפינית ויכולה להיות קמורה או קעורה בהתאם להעדפות הסיכון של מקבל ההחלטות. פונקציה קעורה מייצגת מקבל החלטות שונא סיכון ופונקציה קמורה מייצגת מקבל החלטות אוהב סיכון.

השוואת ההגדרות

- **X**

מדובר באוסף של כל הפרסים או התוצאות האפשריות של פעולה נתונה ב-2 המודלים.

- **Y**

במודל **AA**, Y כולל התפלגויות שונות על X , כאן ההסתברויות מתחשבות בכל אפשרות בתוך קבוצת הפרסים עצמה, ולא רק במצבי הטבע. הדבר מאפשר לבחון את ההתפלגות בהתאם למצבים ידועים ולקבל החלטות בהתאם למידע הקיים.
במודל **MEU**, Y מכיל את כל ההתפלגויות האפשריות על פני אוסף התוצאות X. ההתפלגות על התוצאות לא יחידה- במקרה זה מדובר בקבוצת התפלגויות.

- **S**

במודל **AA**, ישנה קבוצת מצבי טבע. ההתפלגות π הינה יחידה על מצבי הטבע. בנוסף, במודל זה מוגדר גם מצב טבע אפס.
במודל **MEU**, S היא קבוצת מצבי הטבע. כל מצב טבע עשוי להשפיע על התוצאות האפשריות. כלומר, במודל זה, פעולות אינן מתבססות רק על הסתברויות התוצאה אלא גם על המצב הנוכחי של העולם (או של הסביבה החיצונית) שמשפיע על הפעולה. כאן, קיימת C – קבוצת ההתפלגויות על מצבי הטבע.

- **L**

במודל **AA**, הפעולות נובעות מתוך שילוב של הסתברויות והבנת מצבי הטבע, כאשר מתקבלות תוצאות משוקללות בהתאם להתפלגויות השונות, והפעולות עצמן מחוברות בצורה ישירה לאותם מצבי טבע והסתברויותיהם.
במודל **MEU**, L מייצג אוסף של פעולות שבהן יש מצבי טבע שונים שמשפיעים על כל פעולה.

לסיכום ,ניתן להסתכל על MEU כאילו הוא עובד במרחב ממימד הכי גובה. כל אוסף פרסים (עם הסתברויות מסוימות) הוא הגרלה. בהתאם לכל מצב טבע יש אוסף התפלגויות לפיו ההגרלה נקבעת וממנו בוחרים את ההתפלגות שממזערת את התוחלת.

בAA הכל אותו דבר רק שלכל מצב טבע יש התפלגות בודדת קבועה. כלומר C הוא סינגלטון.

בדה פינטי C היא גם סינגלטון כי לכל מצב טבע יש התפלגות קבועה שמקבל ההחלטות מחליט עליה. בנוסף גם ההגרלה היא סינגלטון כי מדובר בפרס בודד. עבור כל פרס נראה איך הוא נקבע ביחס לכל אחד ממצבי הטבע.

בVNM וVNM Convex C הוא סינגלטון וS הוא סינגלטון, כל הגרלה עומדת בפני עצמה לל התייחסות למצב טבע או התלפגות תחת מצב טבע.

רציפות

שינויים "קטנים" מספיק אינם משנים את ההעדפה, כלומר מקבל ההחלטות עקבי בהעדפות שלו גם כאשר מדובר בערבוב הגרלות

MEU:

אקסיומה זו מגדירה שכאשר יש סדר העדפות בין שלוש פעולות f,g,h (כאשר $f > g$ and $g > h$ ישנם משקלים α ו β- בטווח בין 0 ל-1 שמאפשרים ליצור צירופים קמורים ביניהם, כך שהעדפות יישמרו. אם f עדיפה על g תמיד ניתן למצוא שילוב לינארי עם פעולת ביניים h, כך שהשילוב ייצור סדר תעדופים ברור.

$$\alpha f + (1-\alpha)h > g > \beta f + (1-\beta)h \quad \exists\, \alpha,\beta \in [0,1]$$

האקסיומה הזאת מבטיחה שההעדפות של האדם הן עקביות ורציפות, כך שההעדפות לא משתנות באופן שרירותי, אלא נשמרות בצורה סדורה ועקבית לאורך כל טווח האפשרויות. המשמעות היא שהשוני בין העדפות שונות אינו תלוי בתוצאות מקריות, אלא מבוסס על עקרונות לוגיים של העדפות קבועות ורציפות לאורך כל האפשרויות הזמינות.

האקסיומה מבטיחה שניתן ליצור צירופים קמורים בין הפעולות הללו, ולשמור על סדר העדפות ברור, גם אם ההסתברויות לכל תרחיש אינן ידועות.

אקסיומה זו משותפת למודלים אלו, כאשר במודל גלבוע-שמיידלר ובמודל אנסקומב-אומן ההתייחסות היא לפעולות, ובמודלים של VNM ההתייחסות היא להגרלות.

VNM , VNM לקבוצות קמורות:

אם $p \succ q \succ r$, אז ניתן לערבב את p עם r וליצור תמהיל קמור שנמצא עדיין בסדר ההעדפות המתאים. כלומר שילוב של הגרלה הכי טובה המוצעת עם חלק קטן מספיק מהגרלה הכי פחות טובה עדין עדיף מההגרלה הבינונית. הנוסחה המבטאת את הרציפות היא:

$$p \succ \beta p + (1-\beta)r \succ q \succ \alpha p + (1-\alpha)r \succ r \quad \exists\, \alpha,\beta \in [0,1]$$

האקסיומה מתייחסת להגרלות (להעדפות בין הגרלות שונות שבהן לכל תוצאה יש הסתברות ידועה מראש). פונקציית התועלת במודל זה מתארת את תוחלת התועלת –ממוצע משוקלל של תועלות בהתאם להסתברויות. בשני המודלים מדובר על אפשרות לשקלל בין שתי אפשרויות, באופן שמוודא שהעדפות נשמרות גם במקרים מעורבים.

במודלי VNM , השקלול הקמור נשמר על בסיס תוחלת התועלת ומחושב באופן ליניארי, בעוד שבמודל MEU, השקלול הקמור מאפשר להתמודד עם מצבים של אי-ודאות רבה, כאשר התוצאה נמדדת על בסיס הגרוע מבין האפשרויות (מינימקס).

Anscombe-Aumann:

$$\alpha a + (1-\alpha)c \succ b \succ \beta a + (1-\beta)c \quad \exists\, \alpha,\beta \in [0,1]$$

באנסקומב-אומן יש תלות בקמירות, כלומר ניתן לשלב בין חלופות באמצעות שילובים הסתברותיים (convex combinations) ועדיין לשמור על העדפות מסוימות. זו דרך לפתח רציפות בהעדפות ולהבטיח שמקבל ההחלטות יוכל לשקלל את כל התרחישים האפשריים.

de Finetti:

לכל $x \in X$ מתקיים: $\{y \in X | y \succ x\}$, $\{y \in X | x \succ y\}$ קבוצות פתוחות כאשר X קבוצת הפעולות

אמנם משמעות אקסיומת הרציפות זהה עבור שני המודלים אך האקסיומה מוגדרת בצורה שונה עבור כל אחד מהם.

במודל דה פינטי, המשמעות של קבוצה פתוחה באקסיומת הרציפות היא שהעדפה לפעולה y נשמרת גם כאשר מתבצע שינוי קטן בפעולה זו. כלומר, אפילו עם שינוי קל בפעולה, היא תמשיך להשתייך לאותה קבוצה של פעולות מועדפות, והשינוי אינו משפיע על ההעדפה של מקבל ההחלטות.

לעומת זאת, במודל גלבוע שמידלר, האקסיומה מתייחסת לכך שעבור α קרובה ל1 - עבור הפעולה $\alpha f + (1-\alpha)h$ יש סיכוי גבוה יותר לפעולה f וסיכוי נמוך לפעולה h. במילים אחרות, שינוי קטן בf לא משנה את העדפתה על פני g.

ההבדל בניסוח נובע מהגדרות שונות של הפעולות במודלים: במודל דה פינטי, הפעולות הן וקטורים של פרסים בהתאם למצבי הטבע, בעוד שבמודל גלבוע שמידלר הפעולות הן פונקציות המחזירות הגרלות בהתבסס על מצבי הטבע.

מונוטוניות

MEU:

אקסיומת המונוטוניות במודל מקסמין קובעת שאם פונקציה f נותנת תוצאות גבוהות יותר מאשר פונקציה g בכל מצב טבע אפשרי s כלומר $f(s) \gtrsim g(s) \forall s \in S \implies f \gtrsim g$

אם בכל מצב טבע s, פונקציה f נותנת ערך תועלת גבוה יותר מ-g, אז פונקציה f מועדפת באופן כללי. המונוטוניות מבטיחה שהעדפה זו תישמר בכל מצב טבע ולא תשתנה כתוצאה מתנאים מסוימים. מצבי הטבע משפיעים על העדפה בין הפעולות. ההגרלות במצבי הטבע הן שיקבעו את ההעדפה בין הפעולות.

VNM, VNM לקבוצות קמורות:

אקסיומת המונוטוניות אינה מוצגת באופן ישיר תחת מודלי VNM. עם זאת, נבחין כי אקסיומה זו מקבילה לתכונת המונוטוניות הנובעת בVNM מאקסיומת אי התלות כמו שראינו בשיעורי הבית.

de Finetti:

מונוטוניות במודל דה פינטי:

לכל $i \in S$ מתקיים: $x_i \geq y_i \Rightarrow x \gtrsim y$. כאשר S קבוצת מצבי הטבע ו-x,y הם פעולות

אמנם משמעות אקסיומת המונטוניות זהה עבור שני המודלים אך האקסיומה מוגדרת בצורה שונה עבור כל אחד מהם.

במודל דה פינטי, המונוטוניות אומרת שאם לכל i $x_i \geq y_i$, אז פעולה x מועדפת או שווה לפעולה y. במודל זה, אנחנו מדברים על העדפות בין וקטורים של ערכים ממשיים ,כאשר כל רכיב בווקטור מייצג תוצאה אפשרית (למשל, עבור מצבי טבע או הסתברויות). מדובר בהשוואה ישירה בין רכיבים של וקטורים ממשיים, כאשר כל רכיב מייצג ערך תוצאה כלשהו, והעדפה נובעת מהשוואת כל רכיב ורכיב בווקטור.

לעומת זאת, במודל גלבוע שמידלר, האקסיומה מתייחסת לכך שאם לכל s (מצב טבע) ההגרלה שמחזירה f עדיפה לפחות כמו ההגרלה שמחזירה g, אז הפעולה f מועדפת או שווה לפעולה g.
ההעדפה נובעת מכך שפעולה אחת עדיפה בכל מצב טבע אפשרי, גם אם לא ידועות הסתברויות ברורות עבור כל מצב טבע. ההעדפה היא על בסיס תוצאה מינימלית.

ההבדל בניסוח נובע מהגדרות שונות של הפעולות במודלים: במודל דה פינטי, הפעולות הן וקטורים של פרסים בהתאם למצבי הטבע, בעוד שבמודל גלבוע שמידלר הפעולות הן פונקציות המחזירות הגרלות בהתבסס על מצבי הטבע.

אנסקומב־אומן:

אקסיומת המונוטוניות אינה קיימת במודל זה.

למדנו כי ניתן להחליף בין אקסיומת אי תלות הגרלות ומצבי טבע לבין אקסיומת מונוטוניות או מוטוניות חזקה:

אם לכל $s \in S$ מתקיים כי $a(s) \gtrsim b(s)$ אזי $a \gtrsim b$, ביחס לפעולות ב $\Delta(X)^S$.

המשמעות, עדיפות מתקיימת על פני כל מצבי הטבע.- ללא תלות בהם. ההעדפה תלויה בהגרלה ולא במצב הטבע בה היא מתקיימת. כפי שלמדנו בתרגיל הבית, ניתן להחליף אקסיומה באקסיומת מונוטוניות.

משמעמות אקסיומה זו במודל AA זהה למשמעות אקסיומת המונוטוניות בMEU.

אי-ניוון

MEU:

לא לכל f ו-g בL מתקיים $f \gtrsim g$.

כלומר, לא כל הפעולות שוות בערכן ואין העדפה טריוויאלית בין כל הזוגות. ישנם מקרים בהם אחת הפעולות תהיה מועדפת באופן מובהק על פני האחרת. האקסיומה מונעת מצב שבו כל האפשרויות הן שקולות עבור מקבל ההחלטות, כלומר, היא מבטיחה שהעדפותיו אינן טריוויאליות ושיש לו העדפות ברורות בין לפחות חלק מהאפשרויות.

VNM, VNM לקבוצות קמורות:

אקסיומת אי הניוון אינה קיימת במודלים אלו.

De Finetti :

אי טריוויאליות במודל דה פינטי קיימים $x, y \in X$ כך שעבורם $x \succ y$

במודל דה פינטי, אקסיומת אי **טריוויאליות** מקבילה לאקסיומת אי ניוון בMEU. משמעותה היא שלא כל זוגות של אפשרויות הן שוות בעיני מקבל ההחלטות, ולכן יש משמעות לסדר ההעדפות בין התוצאות. זה מבטיח שהעדפות אינן טריוויאליות ושאכן תתקיים העדפה ביו פעולות, ולכן יש תהליך רציונלי של קבלת החלטות שמבוסס על בחירה בין חלופות שונות.
אקסיומת הרציפות מבטיחה את קיומה של פונקציית הסתברות יחידה. היא מבטיחה הבחנה ברורה בין הפרסים השונים על מנת לאפשר קביעת הסתברויות ברורות ומוגדרות ליצירת פונקציית הסתברות יחידה.
לעומת זאת, במודל MEU הדגש באקסיומה זו הוא על מנת להבטיח יחס העדפות מובהק בין פעולות.

אנסקומב אומן:

קיימים $a, b \in A$ כך שעבורם $a \succ b$

גם במודל **אנסקומב-אומן** ,אקסיומת אי-ניוון משמשת להבטיח שמקבל ההחלטות אינו אדיש לחלוטין בין כל האפשרויות. ההבדל הוא שהמודל של אנסקומב-אומן מתמקד בהגרלות, כלומר תערובות של הסתברויות ותוצאות, והאי-ניוון מבטיח שקיימות העדפות שונות בין הגרלות שונות.
בדומה למודל דה פינטי, אקסיומת הרציפות מבטיחה במודל AA את קיומה של פונקציית הסתברות סובייקטיבית יחידה.
לעומת זאת, במודל MEU הדגש באקסיומה זו הוא על מנת להבטיח יחס העדפות מובהק בין פעולות.

רתיעה מחוסר ודאות

MEU:

לכל $f, g \in L$ ולכל $\alpha \in [0,1]$ מתקיים: אם $f \sim g$ אז $\alpha f + (1-\alpha)g \gtrsim f$

האקסיומה מתארת את העדפות מקבל ההחלטות במצבים של אי-ודאות.

האקסיומה מתארת כיצד מקבל ההחלטות מתמודד עם מצבי אי-ודאות, ומדגישה את ההעדפה שלו לשלב בין פעולות כאשר הוא אדיש ביניהן, מתוך מטרה להפחית את חוסר הוודאות. במקום להסתכן בבחירה בפעולה אחת עם אי-ודאות מלאה, מקבל ההחלטות יעדיף ליצור תערובת של פעולות, מתוך רצון להגביר את הוודאות או לפחות למזער את הסיכון.

האקסיומה משקפת את העיקרון של גידור סיכונים, שבו תוצאות בעלות אי-ודאות (כמו הימורים) מומרות לתוצאות יותר בטוחות, מבלי להזדקק למידע נוסף על הסיכון הקיים. כך היא מדגימה את חשיבות פיזור הסיכונים בתהליך קבלת ההחלטות, במיוחד כאשר אי-ודאות היא גורם מרכזי בהחלטה.

אקסיומת C-Independence, שהיא גרסה "חלשה" של אקסיומת אי-תלות. אקסיומת C-Independence עוסקת בשמירת ההעדפות כאשר משלבים עם פעולה וודאית.

אקסיומת הרתיעה מאי-ודאות מתמקדת במצבים שבהם מקבל ההחלטות בוחר לערבב פעולות אדישות כדי לצמצם סיכון. כל אקסיומה כזו מטפלת במצב אי וודאות בצורה שונה.

אקסיומה זו ייחודית למודל ואינה מופיעה באף אחד מהמודלים האחרים שנלמדו.

Maxmin Expected Utility

במודל MEU אקסיומת האי-תלות מוחלשת ונקראת **C-independence**. בניגוד לאקסיומה הקלאסית, כאן מקבל ההחלטות שומר על העדפותיו רק כאשר הערבוב מתבצע עם פעולה קבועה (constant act), ולא עם כל פעולה אפשרית. מטרת הגרסה המוחלשת היא לאפשר למקבל ההחלטות להיות זהיר יותר במצבים של אי-ודאות עמוקה, כלומר במצבים שבהם אין הסתברות ייחודית או מידע ברור על ההסתברויות. המודל מתמקד במזעור ההפסד הפוטנציאלי הגרוע ביותר במקום במיצוע ההסתברויות, והוא מתאים לתרחישים שבהם מקבל ההחלטות בוחר את התוצאה המינימלית האפשרית מתוך קבוצת הסתברויות.
במודל זה, אנו מדברים על בחירה בין אסטרטגיות תחת סיכון. ההשוואה היא בין תועלות מינימליות (בהקשר של סיכון מקסימלי).

כאן f ו g הן חלופות אסטרטגיות, ו h היא חלופה שלישית שייתכן ומייצגת אסטרטגיית ייחוס או ערך ייחוס. הפרמטר α מייצג את מידת המעורבות של f או g ביחס לh.

המשמעות המתמטית: עקרון האי-תלות מבטיח שאם f מועדפת על g היא תישאר מועדפת גם כאשר נשלב את שתיהן עם h במידה שווה. זה עיקרון דומיננטיות במובן שהעדפה בין שתי אסטרטגיות נשמרת תחת צירוף ליניארי עם גורם חיצוני (במקרה הזה h).

$$f > g \Leftrightarrow \alpha f + (1-\alpha)h > \alpha g + (1-\alpha)$$

$$\forall\, h \in L_c \;\; f, g \in L \;\; \forall \alpha \in [0,1]$$

אקסיומה זו לא חוסמת את האפשרות לגדר (hedging), כלומר, היא מאפשרת למקבלי החלטות להחליף סיכונים במטרה למזער את אי-הוודאות. אקסיומה זו משקפת בצורה טובה יותר את ההתנהגות של מקבלי החלטות במצבים של חוסר וודאות, שכן הם נוטים להעדיף יציבות (רתיעה מאי וודאות).

VNM

$$\forall\, p, q \in \Delta(x)\,;\; p \succ q, \;\; \forall\, h \in \Delta(x) \;\; \forall \alpha \epsilon [0,1]$$

$$\alpha p + (1-\alpha) r \succ \alpha q + (1-\alpha) r$$

במודל זה, מדובר על העדפות תועלת צפויה p ו q-מייצגות הגרלות (הסתברויות לתוצאות שונות), ו r היא הגרלה שלישית. כאן, האקסיומה טוענת שאם הגרלה p מועדפת על הגרלה q היא תישאר מועדפת גם כאשר נשלב אותן עם r לפי α.

המשמעות המתמטית: העדפה בין הגרלות נשמרת כאשר מתבצע שילוב ליניארי של הגרלות עם הגרלה אחרת, ולכן הבחירה אינה תלויה במרכיב המתווסף המשותף r.

נבחין כי במודל VNM מדובר בערבב הגרלות ואילו בMEU מדובר בערבוב פעולות.

במודלים MEU והגרסה הקמורה שלו, אקסיומת האי-תלות חלה על **הגרלות** בלבד. מקבל ההחלטות בוחר את ההגרלה שנותנת את התועלת הצפויה הגבוהה ביותר לפי הסתברויות נתונות ומדויקות. העדפותיו צריכות להישמר עקביות גם כאשר מערבבים תוצאות עם הסתברויות שונות. בגרסה הקמורה של vNM, האקסיומה חלה על תמהילים קמורים של הסתברויות או תוצאות בתוך קבוצות קמורות, והיא שומרת על יציבות ההעדפות. עם זאת, בשני המודלים הללו לא מתייחסים לאי-ודאות עמוקה כמו במודל MEU והם מניחים שההסתברויות ידועות היטב.

מודל MEU אקסיומת אי תלות מתקיימת עבור ערבובים עם פעולה קבועה $h \in L_c$ בלבד (פעולה וודאית) ולכן הוא מעין החלשה של אקסיומת אי תלות שמופיעה בVNM ובVNM Convex שבהם אין הגבלה על הגרלה r . בנוסף, לפי המאמר, מקבל ההחלטות מדמיין בקלות יותר את ערבוב הפעולות שלו עם פעולה קבועה ולכן סביר יותר שהעדופתיו ישמרו על הערבוב.

Anscombe-Aumann

לכל $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A$ אם $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ אז $\alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\,\mathbf{c} \succ \alpha\mathbf{b} + (1-\alpha)\,\mathbf{c}$ לכל $\alpha \in (0,1)$

אקסיומה זו מדגישה שהתועלת מהחלטה תלויה אך ורק במרכיביה, ולא בתערובת עם חלופות אחרות, ומבטיחה רציונליות בקבלת החלטות גם כאשר מערבבים בין אפשרויות שונות בהסתברויות.
במודל **Anscombe-Aumann** יש התמקדות בהסתברויות סובייקטיביות. במודל זה, אקסיומת האי-תלות נשמרת, ומקבל ההחלטות שומר על עקביות בהעדפותיו גם כאשר מערבבים הסתברויות שונות. ההבדל העיקרי בין מודל זה ל- MEU הוא שהם לא מתמודדים עם אי-ודאות עמוקה אלא עם הסתברות סובייקטיבית וכן שמדובר בהרכב פעולות ולא הגרלות.

גמישות בהעדפות:
אנסקומב-אומן מאפשר לשחקן לשלב בין העדפות שונות באמצעות תערובות קמורות של הסתברויות ואפשרויות. השחקן יכול לשקול כל חלופה בצורה מורכבת יותר על ידי שילוב חלופות.
בMEU, ההעדפות הן קשיחות, כי המטרה היא לבחון כל תרחיש במונחים של "מה יקרה במקרה הגרוע ביותר", ולבחור בהתאם לתוצאה המינימלית הטובה ביותר. אין מקום לגמישות ביחס להעדפות או להסתברות.

de Finetti

אדיטיביות:

$$\forall z, x, y \in X \mid x \geq y \Longrightarrow x_i + z_i \geq y_i + z_i \ \forall i$$

הקשר והדמיון בין אדיטיביות במודל דה פינטי לבין אי-תלות (C-independence) במודל MEU נעוצים בכך ששתי האקסיומות הללו מתארות תכונות השומרות על יציבות סדר ההעדפות של מקבל ההחלטות תחת מצבים שונים. שתי האקסיומות מבטיחות שלא תהיה השפעה על העדפות כאשר מתווספים או מתערבבים פרסים או הגרלות (פעולות) בתנאים מסוימים.

שמירה על סדר העדפות: בשתי האקסיומות, מקבל ההחלטות משמר את סדר ההעדפות שלו כאשר מתווספת תוצאה או מתבצע שילוב בין אפשרויות שונות.

- באדיטיביות של דה פינטי: אם מקבל ההחלטות מעדיף תוצאה x על y, הוא ימשיך להעדיף את x גם לאחר שתתווסף לשתיהן אותה תוצאה z.
- באי-תלות במודל MEU: אם מקבל ההחלטות מעדיף הגרלה f על g, הוא ימשיך להעדיף את f גם כאשר שתי ההגרלות מעורבבות כצירוף קמור עם הגרלה נוספת h.

שמירה על מבנה ליניארי: באדיטיביות של דה פינטי התוצאה נשמרת בקו ליניארי — תוספת זהה לכל פרס משמרת את העדפות.

באי-תלות של MEU, השילוב של הגרלות גם שומר על מבנה יחסית ליניארי, שכן יחס הערבוב בין האפשרויות (באמצעות α) נשמר ויציב.

רציונליות של מקבל ההחלטות: בשני המקרים, מקבל ההחלטות נחשב לרציונלי בכך שהוא לא משנה את העדפותיו כאשר מתווספים או מתערבבים ערכים שונים, כל עוד התהליך מתבצע לפי הכללים המוגדרים (תוספת קבועה במקרה של אדיטיביות, ערבוב עם פרס נוסף במקרה של אי-תלות).

למעשה, **אדיטיביות** היא מקרה פרטי שבו מתווספת תוצאה זהה לכל האפשרויות. זוהי אקסיומה שמבטיחה שמקבל ההחלטות ישמור על העדפותיו כאשר הוא מוסיף את אותו ערך לכל פרס או תוצאה. **אי-תלות** מציגה מקרה כללי יותר שבו שתי הגרלות מעורבבות עם הגרלה שלישית, תוך שמירה על אותו יחס ערבוב (כלומר, השילוב לא משנה את סדר ההעדפות).

סדר חלש

MEU :

$$for\ all\ f,g,h\ in\ L:\ f \succsim g\ or\ g \succsim f$$
$$and\ if\ \ f \succsim g\ and\ g \succsim h\ \Rightarrow f \succsim h$$

אקסיומה זו מתארת את הסדר העדיפויות של מקבל ההחלטה בין חלופות שונות. אקסיומת הסדר החלש כוללת שני מרכיבים :

(א) עבור כל שתי חלופות f ו-g, אחת מהן תמיד תועדף על השנייה או ששתיהן יהיו שוות בעדיפות.

(ב) אם f מועדף על g ו- g מועדף על h אז f מועדף גם על h.

אקסיומת הסדר החלש שבמודל MEU מקבילה לאקסיומת השלמות בצירוף לאקסיומת הטרנזיטיביות אשר מתקיימות בכל שאר המודלים אשר נלמדו. עם זאת, יש הבדל בקבוצה עליה מופעלת האקסיומה ועל כך מפורט בפירוט הקבוצות שבתחילת העבודה.
אקסיומות השלמות והטרנזיטיביות חייבות להתקיים בכדי שתהיה למקבל ההחלטות העדפה אחרת, הוא לא יוכל לקבל החלטה.

עמידות המודלים השונים בפרדוקסים השונים:

כעת נבחן את עמידות המודלים שנלמדו בכיתה (VNM,VNM על קבוצה קמורה, מודל דה-פינטי, מודל אנסקומב -אומן) ומודל המאמר, מודל גלבוע-שמידלר, בפרדוקסים הבאים פרדוקס מוריס אלה, טיעון הספר ההולנדי,פרדוקס של אלסברג.

תחילה נשים לב כי המודלים שנלמדו בכיתה מבוססים על מודל תוחלת התועלת וכי מודל גלבוע מבוסס על מודל MEU – כלומר האופציה הגרועה ביותר שנותנת את התוצאה הטובה ביותר (בעצם המודל לוקח בחשבון ומתייחס לקו המחשבה אצל הרבה אנשים בעת קבלת ההחלטות – "מה האפשרות הכי גרועה שיכולה לקרות שבה אקבל את הכי הרבה רווח?")

ראשית, נציג בקצרה תחילה את הפרדוקסים שראינו בקורס:

1. **פרדוקס של מוריס אלה:(Maurice Allais)**

פרדוקס אלה, שפותח על ידי מוריס אלה, מצביע על כך שאנשים לעיתים מקבלים החלטות שמפרות את תורת התועלת הצפויה ובפרט אקסיומת אי-תלות, במיוחד כאשר הם מעדיפים ודאות על פני הסתברויות גבוהות לרווחים גדולים יותר, כלומר אנשים שונאים אי ודאות – לעיתים באופן כזה שסותר את מודל תוחלת התועלת (בצורה לא רציונלית).
דוגמה מההרצאה:

	א		ב
ניסוי 1	$(1M, 0.11\ ;\ 0, 0.89)$	$\succ$	$(5M, 0.1\ ;\ 0, 0.9)$
ניסוי 2	$(5M, 0.1\ ;\ 1M, 0.89\ ;\ 0, 0.01)$	$\succ$	$(1M, 1)$

בהינתן 2 הניסויים הבאים, רוב האנשים יעדיפו את $\text{א}_2 \succ \text{ב}_2, \text{א}_1 \succ \text{ב}_1$
אך העדפות אלה כמו שראינו בהרצאה סותרות את מודל תוחלת התועלת וכי ניתן להראות בהנחה בשלילה כי יש למקבל ההחלטות הנ"ל פונקציית תועלת, כי עבור $u(1M)$ נקבל $u(1M) < \frac{0.1}{0.11}$ וגם $u(1M) > \frac{0.1}{0.11}$ ולכן סתירה.

2. **טיעון הספר ההולנדי:**

נתבונן בהגדרת הטיעון ברשימות ההרצאה:

> טיעון הספר ההולנדי תומך במודל תוחלת התועלת כמודל נורמטיבי. טיעון הספר ההולנדי מצדיק את אקסיומת אי תלות. נניח כי מקבל החלטות אינו מקיים את אקסיומת אי תלות , בפרט קיימות הגרלות $L_1 < L_2$ אבל $\alpha L + (1-\alpha)L_1 \succ \alpha L + (1-\alpha)L_2$. נראה כי ניתן להוציא ממקבל החלטות זה כספים באופן הבא:

מקריאה נוספת באינטרנט ומהרשימות, טיעון הספר ההולנדי אומר כי ניתן ליצור מכשיר הנקרא -ספר הולנדי, אשר בהינתן מהמר שלא בוחר החלטות בצורה רציונאלית ומקיים את אקסיומת אי-התלות ניתן ליצור רצף מצבים שבהינתן ההחלטות שלו, בסופן הוא יפסיד בוודאות.

3. **פרדוקס אלסברג:**

פרדוקס אלסברג נסביר באמצעות הדוגמה הבאה מההרצאות:
מוצגים 2 כדים, כל כד מכיל 100 כדורים אדומים ושחורים.
כד א' ללא יחס ידוע בין הכדורים האדומים והשחורים.
כד ב' מכיל 50 אדומים,50 שחורים.
יש לבחור מאיזה כד להוציא כדור-להמר על צבע הכדור שיצא-ואז להוציא באקראי כדור מהכד שבחרנו.
אם הצבע שיצא זהה לצבע שאמרנו – קיבלנו 100$
אחרת – קיבלנו 0$

בפני מקבל ההחלטות עומדות האופציות הבאות:
א1 - הימור על כדור אדום מכד א'
ש1 - הימור על כדור שחור מכד א'
א2 - הימור על כדור אדום מכד ב'
ש2 - הימור על כדור שחור מכד ב'
לפי מודל תוחלת התועלת מתקבל כי מקבל ההחלטות צריך להיות אדיש בין א1~ש1,א2~ש2 ויש העדפה של בחירה בכד ב' על פני כד א'. אולם מהניסויים שנעשו התקבל כי אנשים בוחרים דווקא את א2\ש2 – כלומר אנשים שונאים יותר "אי-ודאות" מאשר "סיכון"(אנשים מעדיפים את ה"שטן המוכר" על פני הלא נודע).

עמידות המודלים לפרדוקסים:

עתה נסתכל על מודל גלבוע(מודל MEU) ומודל תוחלת התועלת אל מול הפרדוקסים:
פרדוקס מוריס-אלה מראה בעצם שהעדפות מקבל ההחלטות אינן מקיימות תמיד את מודל תוחלת התועלת ,אשר המודלים מהקורס מבוססים אליהם, כלומר לא מקבלים החלטות שמוגדרות כרציונליות.(יש לציין כי המודלים שלמדנו נחשבים מודלים 'קלאסיים' וכי מודל תוחלת התועלת שלמדנו בקורס הוא התפתחות מוקדמת בתורת ההחלטות ביחס למודל MEU למידול קבלת ההחלטות של אדם).
כאשר יש החלטה בין 2 אופציות אשר אחת מהן בעלת סיכוי להפסד גבוהה אך עם רווח גבוהה גם כן אל מול רווח נמוך ללא סיכון – אנשים יעדיפו לרוב את האופציה הבטוחה למרות שהיא סותרת את מודל התועלת תוחלת.

במודלים שנלמדו בהרצאות, חוץ ממודל דה פינטי – ישנה התייחסות לקיום אקסיומת אי-תלות ולכן הם לא עומדים בפרדוקס. מודל דה-פינטי נותן מקום להסתברויות סובייקטיביות ולכן משאיר למקבל ההחלטות לפעול בצורה הנוגדת את אקסיומת אי התלות.
מודל MEU מדבר על מצבים עם 'אי ודאות עמוקה' ומשלב בתוכו הסתברויות אובייקטיביות וסובייקטיביות. המודל יכול להיות מופר ולא לעמוד בפרדוקס אם אקסיומת 'אי תלות וודאית' מופרת (אשר במאמר מופיע כי היא מקלה יותר מאשר אקסיומת 'אי תלות' הקלאסית),בדומה אבל למודל דה – פינטי האפשרות להסתברות סובייקטיבית מאפשר למודל "להתגבר" על ההפרה.
מקריאה באינטרנט והמאמר, המודלים אשר עמידים לפרדוקס מוריס-אלה אלו מודלים "מורכבים" יותר אשר מאפשרים למקבל ההחלטות ודאות על פני רווח גבוהה יותר בסיכון גבוה.

טיעון הספר ההולנדי אומר כי אם מקבל החלטות לא מקבל החלטות בצורה רציונלית ומקיים את אקסיומת אי-התלות אז הוא מפסיד בוודאות.
מבין המודלים שראינו בהרצאות – מודלים NVM ומודל אנסקומב-אומן מחייבים קיום אקסיומת אי-תלות, מנגד מודל דה -פינטי לא דורש קיום אי-תלות. לפיכך, מודל דה פינטי לא עמיד לטיעון הספר ההולנדי. בעקבות ההסתברויות הסובייקטיביות של המהמר קיימת אפשרות כי יהיה ניתן לנצלם וליצור לו ספר הולנדי אשר בסופו הוא יפסיד בוודאות(סכום הסתברויות שווה ל1, Σ אדיטיביות והסתברות חיובית).
במודל MEU שבמאמר, ניתן לייצר מצבים בהם ההסתברויות הסובייקטיביות של מקבל ההחלטות יגרמו לכך שניתן לייצר ספר הולנדי, מנגד אם מקבל ההחלטות מייצר עקביות בקבלת ההחלטות שלו תוך התייחסות מתמדת לרווח המקסימלי במצב הגרוע ביותר בכל מצבי האי ודאות, יהיה הדבר דומה למודלים האחרים אשר עמידים לספר ההולנדי.

פרדוקס אלסברג מדבר על שנאת האי ודאות של אנשים על פני סיכון, כמו שהצגנו בהצגת הפרדוקס – הוא נותן מקרה בוחן אשר מודל תוחלת התועלת לא עומד בו, כלל המודלים שראינו בהרצאות הן על מודל תוחלת התועלת ועל כן הם לא עומדים בפרדוקס.
מודל גלבוע(MEU) מתייחס ביסודו לשנאת האי ודאות של אנשים ומתייחס לכך בבניית המודל עצמו(בנוסף מקריאה נוספת נראה כי מודל זה נוצר כצורך למדל את קבלת ההחלטות ששגורה אצל רוב האנשים של האופציה הגרועה ביותר שנותנת הכי הרבה רווח).
על ידי התייחסות ל'אי ודאות עמוקה' המודל מאפשר למקבל ההחלטות להסתכל על "מה הכי גרוע שיכול לקרות" ובכך להתמודד עם שנאת אי הודאות שבפרדוקס אלסברג.

מהשוואת עמידות המודלים לפרדוקסים ניתן לראות כי לכל מודל מההרצאות יש פרדוקס "ששובר" אותו, בבסיסם המודלים הללו מציגים גישה רציונלית-אנליטית לקבלת ההחלטות ומתעלם מהיבטים פסיכולוגיים\תרבותיים שנכנסים לשיקול קבלת ההחלטות אצל המקבל-אשר חלקם באים לידי ביטוי במודל MEU כדוגמת אי הודאות ושנאת הסיכון.
בהרצאות ראינו גם רעיונות\עקרונות למודלים מתקדמים יותר אשר נותנים משקל להטיות פסיכולוגיות\חברתיות או שתלויות בזמן שמשפיעות על קבלת ההחלטות(לדוגמה תורת הערך) .

הרחבות מודל גלבוע – שמיידלר

בחלקו האחרון, המאמר מדבר על הרחבות המודל האם כאשר מרחיבים את הקבוצה L_0 לכל הקבוצה L שהיא superset קמורה של L_0. המאמר מראה שקיים ביחידות הרחבה של L_0 היחס שמוגדר ב 6.1 (≧) מתקיים בקבוצה המורחבת בהינתן והוא מקיים את ההנחות שהוצגו בחלק 6.2- האקסיומות של מודל גילבוע (אקסיומות A5-A1).

בהרחבות המודל מובא המושג (Σ מדידה) $measurable$ Σ -עבור ≧ על הפעולה f
$f: S \to Y$, תקרא Σ מדידה אם לכל $y \in Y$, $\{s|f(s) \geqq y\} and \{s|f(s) > y\}$ הקבוצות שייכות ל Σ.
בנוסף, נגיד שהפעולה חסומה($bounded$ ≧),אם קיימים $y_1, y_2 \in Y$ כך ש $y_2 \leqq f(s) \leqq y_1$ עבור כל $s \in S$, וסימון הקבוצה של כל הפעולות שהן סיגמא מדידות חסומות ($\Sigma - bounded - measurable$) ב Y^S מסומן על ידי- L(≧) כאשר הקבוצה היא קמורה ומכילה את L_0.

בעצם, חלק הזה במאמר מציג אפשרות לעדכון המודל והתמודדות שלו עם אפשרויות חדשות שמתגלות לבעיה,יש בכך התייחסות לעקרון 'אי הודאות העמוקה' של המודל ולכך שיכול להיות שכתוצאה מאי הודאות יתווסף מידע.

לדוגמה בחירת איזה סוג תחבורה ציבורית אבחר להגיע מהבית לאוניברסיטה, ידוע לי כעת כי אני יכול להגיע באוטובוס, רכבת או מונית וכי לפי מודל גלבוע – הגעתי למסקנה כי כדאי לי רכבת למיקסום מינימום תוחלת התועלת.
אולם כאשר אני מגיע לתחנה המרכזית אני מגלה כי נפתח קו הרכבת הקלה וכי יש שאטלים ישירים לאוניברסיטה גם כן(אי הודאות מתקיימת בשל כך שלא ידוע לי על האפשרויות נסיעה הנוספות), כעת אני רוצה לבדוק איזה סוג תחבורה ציבורית עדיפה לי על פי מודל MEU בנוסף לאופציות החדשות.

לפי הרחבת מודל גלבוע ,כדי שאוכל להשתמש בפונקציית התועלת המקורית על הקבוצה החדשה שמכילה את L_0 נדרש שהקבוצה החדשה L תהיה קמורה-על מנת שיחס ההעדפות ישמר לאופרטור הבינארי.

בהמשך ההרחבות המאמר מציג גם 2 רעיונות חדשים בהקשר המודל והרחבותיו, עצמאות הפעולות (*independence of acts*) ומכפלת מרחבי הסתברות(*Products of binary relations*).

<u>עצמאות הפעולות</u>

בחלק זה מגדירים איך 2 פעולות יכולות להיות בלתי תלויות ובעצם לא משפיעות אחת על השנייה (ההפך ממכפלת מרחבי העדפות שמופיעה בהמשך אשר לוקחת בחשבון שכל החלטה נעשית ב'ואקום' משאר ההחלטות)

בהינתן האופרטור ≧ שמקיים את אקסיומות $A6$-$A1$ ב L_0 והרחבת הקבוצה ל L=L(≧)
ויהי הפונקציה u פונקציה תועלת ו C קבוצה (כמו שהוגדר בחלק 6.1).
עבור 2 פעולות f,g -המאמר מגדיר 2 תנאים שהפעולות נדרשות לקיים על מנת להיחשב בלתי תלויות\עצמאיות:
1) קיימת מידת הסתברות P_0 (כמו שהוגדר בתחילת המאמר), כך שלכל פעולה f ו g-ב ,L-האינטגרל של $u \circ g$, $u \circ f$ עם המידה P_0 מינימלי.

$$\int u \circ f dP_0 = \min\{\int u \circ f dP \,|P \in C\}$$

$$\int u \circ g dP_0 = \min\{\int u \circ g dP \,|P \in C\}$$

כלומר קיים $P_0 \in C$ שמביא למינימום את התועלת המינימלית מכל האפשרויות בקבוצה C עבור כל 2 פעולות בקבוצה L.

2) $u \circ f$, $u \circ g$ הן משתנים מקריים סטוכסטיים בלתי תלויים ביחס לכל נקודת קיצון ב C ((Ext(C)).

הרעיון השני, שניתן לראות בו הרחבה של מודל גלבוע הוא מכפלת מרחבי העדפות.

רוצה לומר, במאמר מוצע הרחבה אשר מאפשרת להתחשב בהחלטות מממדים שונים \נושאים שונים יחדיו.
המאמר מגדיר את אופן בניית המכפלה על ידי הצגת שלשה מרחבית והגדרת פעולת הכפל על כל חלק מן השלשה.
בהינתן המרחב (S, Σ, C) שהוא מרחב הסתברות שלא נקבע ביחידות-כלומר קיים אוסף מידות הסתברות על המרחב.
נגדיר 2 מרחבים כאלו ונסמנן $(S_i, \Sigma_I, C_i); i = \{1,2\}$,שמכפלתם היא $S = S_1 \times S_2, \Sigma = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$
כאשר C מוגדרת כקבוצה המינימלית של $\{P_1 \otimes P_2 | P_1 \in C_1, P_2 \in C_2\}$
בהינתן סט תוצאות\רווחים\פרסים X, יהיו 2 מרחבי פעולה $L_0^i \subset Y^{S_i}, i = 1,2$ ואופרטורים $\geqq^i$ בהתאמה כך שהן יכולות להתקיים באותו מרחב בלי שתהיה סתירה. בהינתן כי האופרטורים מקיימים את אקסיומות המאמר ($A6$-$A1$)וכי ההרחבה שלהם היא כמו שהוגדרה מקודם L=L(≧), נגדיר את

$$\geqq = \geqq^1 \otimes \geqq^2$$

אשר גם כן מקיים את האקסיומות, המרחב החדש מתקיים ביחידות וכי לכל פונקציית תועלת מתתי המרחבים(f) יש הרחבה למרחב החדש($\bar{f}$).

כלומר,המאמר מציג כי ניתן להרחיב כל מרחב החלטות L_0 תחת הגבלות מסויימות וכי ניתן להרכיב מרחב חדש ע"י מכפלת המרחבים המורחבים החדשים אשר מקיים את האופרטורים מהתתי מרחבים יחדיו וכי הם אינם תלויים אחד בשני.
רעיון זה מאפשר למודל החדש להתייחס למצבים "טבעיים" יותר אשר נושאים שונים "מתערבבים" בעת קבלת החלטה יחידה.

2 הרעיונות האלו הם דבר והיפוכו, רעיון העצמאות ואי התלות מאפשרת להגדיר החלטה שלא מושפעת מנושאים אחרים וכי מקבל ההחלטות יכול אולי "לכמת" את אי הודאות שלו או לדעת שאין נושאים חיצוניים המשפיעים על ההחלטה. מנגד, הגדרת המכפלה בין מרחבים מאפשר למקבל ההחלטות לבנות פונקציית תועלת אשר לוקחת בחשבון מספר נושאים.

בסוף המאמר מוצגת גם הטענה הבאה:
טענה 6.2 בהינתן L^1, L^2, L והאופרטורים $\geqq^i$ $i = 1,2$

שהוגדרו לפני, קיים ביחידות האופרטור $\geqq$ על המרחב L אשר מקיים את התנאים הבאים:

1.מקיים את הנחות $A1$-$A6$.

2. לכל $f^i, g^i \in L^i$ מתקיים כי $f^i \geqq^i g^i \Leftrightarrow \bar{f}^i \geqq \bar{g}^i$ $i = 1,2$ (כלומר הרחבה מתת המרחב נשמרת במרחב החדש)

3.לכל $f \in L^1, g \in L^2$ מתקיים כי $\bar{f}^i, \bar{g}^i$ הם בלתי תלויים\עצמאיים.(פעולות מתת המרחב א' אינן תלויות בפעולות מתת המרחב ב' במרחב החדש)

לסיכום חלק זה, במהלך ההרצאות ראינו גם הרחבות של מודלים VNM– לקבוצות קמורות כהרחבה של VNM להגרלות כהרחבה להתמודדות עם קבוצת החלטות אל מול הגרלה בודדת, מודל אלסבורג כהרחבה של מודל דה -פינטי והתייחסות להסתברויות סובייקטיביות ואובייקטיביות יחד.

מאחר ומודל גלבוע הוצג מאוחר ביחס למודלים הקלאסיים ניתן להעריך כי הוא גלגול של הרחבה של מודל קלאסי, בנוסף המאמר מתייחס לכך שחלק מן האקסיומות במודל הינן אקסיומות "קלאסיות".

ניתן לראות גם כי מודל גלבוע ובפרט הרחבתו של מכפלת המרחבים, הינם מודלים שיותר "דומים למציאות" מאשר המודלים הקלאסיים וכי הם מתייחסים לאספקטים של האדם שלא בא לידי ביטוי במודלים הקלאסיים כדוגמת היבטים פסיכולוגיים\אי הכרת התמונה המלאה.
יתר על כן, ראינו בקורס ומהיכרות אישית שלנו את תורת הערך של דניאל כהנמן, כי קיום יש מודלים או רעיונות בתחום תורת ההחלטות והכלכלה ההתנהגותית אשר נותנים משקל גדל להיבטים פסיכולוגיים\תרבותיים וחברתיים של מקבל ההחלטות כחלק ממושקלות המודל ומידול קבלת ההחלטה.