- Alpha が入った式の例（５＋グループのとき）

4 歳

$$N_{4,y} = \frac{\alpha \cdot C_{4,y} \times N_{5,y+1} \times exp(M)}{\alpha \cdot C_{4,y} + C_{5,y}} + C_{4\,y} \times \exp\left(\frac{M}{2}\right)$$

5＋歳

$$N_{5+,y} = \frac{C_{5,y} \times N_{5,y+1} \times exp(M)}{\alpha \cdot C_{4,y} + C_{5,y}} + C_{5\,y} \times \exp\left(\frac{M}{2}\right)$$

- 上記の式の導出

もともとの式は,

$$N_{A,y+1} = N_{A-1,y} \exp\left(-F_{A-1,y} - M\right) + N_{A,y} \exp\left(-F_{A,y} - M\right)$$

ですが，Pope の近似式を使えば,

$$N_{A,y+1} = \left[N_{A-1,y} \exp(-0.5M) - C_{A-1,y}\right] \exp(-0.5M) + [N_{A,y} \exp(-0.5M) - C_{A,y}] \exp(-0.5M)$$

となります．この両辺に exp(M)を掛けてやれば,

$$N_{A,y+1} \exp(M) = [N_{A-1,y} - C_{A-1,y} \exp(0.5M)] + [N_{A,y} - C_{A,y} \exp(0.5M)]$$

これは，$N_{A,y+1} \exp(M)$を$N_{A-1,y}$から来る部分と$N_{A,y}$から来る部分に分けてやっています.

$$N_{A,y+1} \exp(M) = \widetilde{N}_{A-1,y} + \widetilde{N}_{A,y} \tag{1}$$

年の中央の資源量は，$N_{A-1,y} \exp(-0.5M) - C_{A-1,y} = \exp\,(-0.5M)\,\widetilde{N}_{A-1,y}$など，なので，漁獲係数 F を

$$F_{A-1,y} \approx \frac{C_{A-1,y}}{\exp\,(-0.5M)\,\widetilde{N}_{A-1,y}}$$

$$F_{A,y} \approx \frac{C_{A,y}}{\exp\,(-0.5M)\,\widetilde{N}_{A,y}}$$

とします．$F_{A,y} = \alpha F_{A-1,y}$としますと，上の式から,

$$\frac{C_{A,y}}{\exp\,(-0.5M)\,\widetilde{N}_{A,y}} = \frac{\alpha C_{A-1,y}}{\exp\,(-0.5M)\,\widetilde{N}_{A-1,y}}$$

$$\tilde{N}_{A-1,y} = r\alpha C_{A-1,y} \tag{2}$$

$$\tilde{N}_{A,y} = rC_{A,y} \tag{3}$$

となります．(1)式の$N_{A,y+1}\exp(M) = \tilde{N}_{A-1,y} + \tilde{N}_{A,y}$から，

$$N_{A,y+1}\exp(M) = r\alpha C_{A-1,y} + rC_{A,y}$$

より，

$$r = \frac{N_{A,y+1}\exp(M)}{\alpha C_{A-1,y} + C_{A,y}}$$

なので，(2)および（3）式に r を代入すると

$$\tilde{N}_{A-1,y} = r\alpha C_{A-1,y} = \frac{\alpha C_{A-1,y}}{\alpha C_{A-1,y} + C_{A,y}} N_{A,y+1}\exp(M)$$

$$\tilde{N}_{A,y} = rC_{A,y} = \frac{C_{A,y}}{\alpha C_{A-1,y} + C_{A,y}} N_{A,y+1}\exp(M)$$

となります．

$$\tilde{N}_{A-1,y} = N_{A-1,y} - C_{A-1,y}\exp(0.5M)$$

などから，

$$N_{A-1,y} = \frac{\alpha C_{A-1,y}}{\alpha C_{A-1,y} + C_{A,y}} N_{A,y+1}\exp(M) + C_{A-1,y}\exp(0.5M)$$

および

$$N_{A,y} = \frac{C_{A,y}}{\alpha C_{A-1,y} + C_{A,y}} N_{A,y+1}\exp(M) + C_{A,y}\exp(0.5M)$$

が得られます．α=1 のときは，従来の式になります．第 1 項目の漁獲尾数は，漁獲係数の割合の近似値として使われていますので，α が関係してきます．第 2 項目の漁獲尾数は，資源尾数に足し戻す絶対値としての尾数ですので，α は関係しません．

ここで，いくつかの近似を使っています．まず，高齢の M は一定となっています．これが成り立たない場合，このようにきれいに解けなくなるでしょう．また，漁獲係数 F が漁獲率に等しいという近似も行っており，そのときにも M が一定という仮定を用いています．ただ，そういう仮定をおかないと簡単に解けなくなって，Pope の近似式の魅力が失われてしまうこともあるでしょう…． ということで，ちょっと注意が必要です．たぶん，Baranov 方程式の場合の α の扱いはもう少し厳密に行われているでしょう（もともと数値計算で解くものなので，（解析的に解けなくなるという）複雑さが問題にならないでしょう）．

【以下，もっと厳密なことを考えようとした場合】

$$F_{A-1,y} \approx \frac{C_{A-1,y}}{\exp\left(-0.5M\right)\tilde{N}_{A-1,y}}$$

$$F_{A,y} \approx \frac{C_{A,y}}{\exp\left(-0.5M\right)\tilde{N}_{A,y}}$$

のところ，正確には,

$$1-\exp\left(-F_{A-1,y}\right)=\frac{C_{A-1,y}}{\exp\left(-0.5M\right)\tilde{N}_{A-1,y}}$$

$$1-\exp\left(-F_{A,y}\right)=\frac{C_{A,y}}{\exp\left(-0.5M\right)\tilde{N}_{A,y}}$$

より,

$$F_{A-1,y}=-\log\left(1-\frac{C_{A-1,y}}{\exp(-0.5M)\tilde{N}_{A-1,y}}\right)$$

$$F_{A,y}=-\log\left(1-\frac{C_{A,y}}{\exp(-0.5M)\tilde{N}_{A,y}}\right)$$

だから，$F_{A,y}=\alpha F_{A-1,y}$とすると,

$$\log\left(1-\frac{C_{A,y}}{\exp(-0.5M)\tilde{N}_{A,y}}\right)=\alpha\log\left(1-\frac{C_{A-1,y}}{\exp(-0.5M)\tilde{N}_{A-1,y}}\right)$$

よって,

$$1-\frac{C_{A,y}}{\exp(-0.5M)\tilde{N}_{A,y}}=\left(1-\frac{C_{A-1,y}}{\exp(-0.5M)\tilde{N}_{A-1,y}}\right)^{\alpha}$$

となる．今,

$$\tilde{N}_{A,y}=pN_{A,y+1}\exp(M)$$
$$\tilde{N}_{A-1,y}=(1-p)N_{A,y+1}\exp(M)$$

とおけば,

$$\frac{C_{A,y}}{\exp(0.5M)\,pN_{A,y+1}}=1-\left(1-\frac{C_{A-1,y}}{\exp(0.5M)\,(1-p)\,N_{A,y+1}}\right)^{\alpha}$$

となる．この式を満たす p を求めれば良いが，これは数値計算でないと解けない.

$$\left(1-\frac{C_{A-1,y}}{\exp(0.5M)\,(1-p)N_{A,y+1}}\right)^{\alpha}\approx 1-\alpha\frac{C_{A-1,y}}{\exp(0.5M)\,(1-p)N_{A,y+1}}$$

と近似してやれば,

$$\frac{C_{A,y}}{\exp(0.5M)\,pN_{A,y+1}}=\frac{\alpha C_{A-1,y}}{\exp(0.5M)\,(1-p)N_{A,y+1}}$$

となり,

$$p=\frac{C_{A,y}}{\alpha C_{A-1,y}+C_{A,y}}$$

が得られる.