T.C.
İSTANBUL MEDENİYET ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK VE DOĞA BİLİMLERİ FAKÜLTESİ

SİSMİK VERİ ANALİZİ VE ÇOK KATLI YAPILARIN DİNAMİK TEPKİSİNİN SAYISAL YÖNTEMLERLE MODELLENMESİ

MAT353 NÜMERİK ANALİZ DERSİ PROJE RAPORU

Hazırlayanlar:

Furkan TOPÇU - 24120205080
Yağızhan CAN - 21120205711

Tarih: Aralık, 2025

GitHub Linki: https://github.com/YagizhanCan/MAT353NumAnalizProje

ÖZET

Bu proje çalışmasının temel amacı, yapı mühendisliği ve sismoloji disiplinlerinde hayati öneme sahip olan gürültülü sensör verilerinin sayısal analiz yöntemleriyle işlenmesi ve çok katlı yapıların sismik yükler altındaki dinamik tepkilerinin modellenmesidir. Fiziksel sistemlerin karmaşık davranışını ifade eden diferansiyel denklemlerin analitik çözümünün zorluğu, mühendislik problemlerinde yüksek doğruluklu nümerik analiz tekniklerinin kullanımını zorunlu kılmaktadır.

Proje kapsamında geliştirilen simülasyon yazılımı, birbirini tamamlayan iki temel aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada, sensör hataları ve çevresel faktörler nedeniyle gürültü içeren ham sismik ivme verilerinin iyileştirilmesi hedeflenmiştir. Bu amaçla, sismik sinyallerin osilasyonlu ve periyodik karakteristiğine en uygun yaklaşımı sunan Trigonometrik En Küçük Kareler (Least Squares) yöntemi kullanılmış, böylece sinyal başarıyla gürültüden arındırılarak dinamik analize hazır hale getirilmiştir. Bu işlem, polinom tabanlı yaklaşımlara kıyasla verinin frekans içeriğini daha iyi koruyarak analiz hassasiyetini artırmıştır.

İkinci aşamada ise, temizlenen veri girdisi kullanılarak durum uzayı (state-space) formunda modellenen Çok Serbestlik Dereceli (MDOF) bir yapının hareket denklemleri çözülmüştür. Sistemin zaman tanım alanındaki davranışını simüle etmek amacıyla, birinci mertebeden Euler Metodu ile dördüncü mertebeden Runge Kutta 4 (RK4) integrasyon yöntemleri karşılaştırmalı olarak uygulanmıştır. Elde edilen simülasyon bulguları, Euler yönteminin zaman adımı hassasiyetine bağlı olarak kümülatif kesme hatası biriktirdiğini ve sistemin enerjisini yapay olarak artırarak ıraksamaya (diverjans) yol açtığını göstermiştir. Buna karşılık, RK4 yönteminin enerji korunumunu etkin bir şekilde sağladığı, global hatayı minimize ettiği ve yapının salınım hareketini yüksek kararlılıkla (stabilite) modellediği tespit edilmiştir.

GİRİŞ

Modern yapı mühendisliğinde, çok katlı binaların deprem gibi dinamik yükler altındaki davranışının doğru tahmin edilmesi, can ve mal güvenliğinin sağlanması açısından en kritik aşamadır. Fiziksel olarak bu sistemler, Newton'un ikinci hareket yasasına dayanan ve sönüm, kütle, rijitlik parametrelerini içeren ikinci dereceden diferansiyel denklemlerle modellenir. Ancak gerçek dünyada, sahadan toplanan sensör verilerinin (ivmeölçer kayıtları) gürültülü olması ve yapısal sistemlerin lineer olmayan karmaşık doğası, bu denklemlerin kapalı formda (analitik) çözülmesini imkansız kılmaktadır. Bu bağlamda, diferansiyel denklemlerin bilgisayar destekli simülasyonlarla çözülmesi bir tercih değil, zorunluluktur.

Literatürde yapısal dinamik problemlerinin çözümü üzerine kapsamlı çalışmalar yapılmıştır. Örneğin, Chopra [1] tarafından yapılan temel çalışmalarda, özellikle çok serbestlik dereceli (MDOF) sistemlerin deprem tepkilerinin belirlenmesinde "adım adım integrasyon" yöntemlerinin gerekliliği vurgulanmıştır. Ancak Chopra, lineer ivme yöntemlerinin büyük zaman adımlarında stabilite sorunları yaşayabileceğine dikkat çekmiştir. Veri işleme tarafında ise Bendat ve Piersol [2], rastgele verilerin analizinde Fourier dönüşümlerinin gücünü ortaya koymakla birlikte, periyodik olmayan gürültülerin temizlenmesinde regresyon tekniklerinin önemine değinmişlerdir. Yapısal analiz algoritmaları üzerine çalışan Newmark [3] ise, kendi adıyla anılan ve günümüzde endüstri standardı olan "Newmark-beta" yöntemini geliştirmiştir. Bu yöntem genellikle koşulsuz stabilite sağlasa da, katsayıların yanlış seçimi durumunda "yapay sönümleme" (numerical damping) yaratarak sonuçların fiziksel gerçeklikten sapmasına neden olabilmektedir.

Bu projede, literatürdeki standart yaklaşımlardan farklı olarak, veri temizleme aşamasında polinom tabanlı regresyon yerine sismik dalgaların doğasına daha uygun olan Trigonometrik En Küçük Kareler yöntemi tercih edilmiştir. Bu yaklaşım, sismik sinyallerin osilasyonlu yapısını polinomlara kıyasla çok daha yüksek bir korelasyonla (R^2) temsil etmektedir. Dinamik analiz aşamasında ise, endüstriyel yazılımların kara kutu çözücüleri yerine, nümerik hataların doğasını şeffaf bir şekilde ortaya koyan Euler ve Runge-Kutta 4 (RK4) yöntemleri karşılaştırmalı olarak uygulanmıştır.

YÖNTEM

Bu bölümde, projenin geliştirilmesinde kullanılan donanım ve yazılım altyapısı, problemin matematiksel modellemesi ve çözüm için uygulanan nümerik algoritmaların teorik altyapısı detaylandırılmıştır.

Yazılım ve Donanım Teknolojileri

Simülasyon ortamı, bilimsel hesaplamalarda endüstri standardı olan Python 3 programlama dili üzerinde geliştirilmiştir. Diferansiyel denklemlerin çözümü ve matris operasyonları için NumPy kütüphanesi tercih edilmiştir. NumPy'ın tercih edilmesinin temel nedeni, Python'un yerleşik listelerine kıyasla bellek verimliliği sağlaması ve doğrusal cebir işlemlerinde vektörleştirme yeteneği sayesinde döngü tabanlı işlemlere göre hız artışı sunmasıdır.

Matematiksel Modelleme: Trigonometrik En Küçük Kareler

Sismik sensör verileri doğası gereği osilasyon (salınım) içeren periyodik sinyallerdir. Bu nedenle, gürültü temizleme işleminde geleneksel polinom regresyonu yerine, Fourier serisi mantığına dayanan trigonometrik baz fonksiyonları kullanılmıştır. Verilen N adet veri noktası *(t_i, y_i)* için model fonksiyonu Denklem (1)'de verilmiştir:

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{3} a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t) \qquad (1)$$

Burada amaç, karesel hata toplamını (E) minimize eden katsayılar vektörünü bulmaktır. Hata fonksiyonu Denklem (2)'de tanımlanmıştır:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i - f(t_i)^2 = y - Ax^2 \qquad (2)$$

Bu minimizasyon problemi, normal denklemler sistemine dönüştürülür:

$$(A^T A)\, x = A^T y_{noisy} \qquad (3)$$

Algoritmik Akış Şeması

Geliştirilen yazılımın çalışma mantığı aşağıdaki adımları takip etmektedir:

- **Başlangıç:** Simülasyon parametrelerinin (kütle, rijitlik, süre, Δt) yüklenmesi.

UYGULAMA

Yapısal Dinamik Model

Çok katlı yapı, "Shear Building" (Kayma Çerçevesi) varsayımı altında, kütlelerin döşeme seviyelerinde toplandığı Çok Serbestlik Dereceli (MDOF) bir sistem olarak modellenmiştir. Sistemin hareket denklemi Denklem (4)'te gösterilmiştir:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = -M1\ddot{u}_g(t) \qquad (4)$$

Sayısal çözüm için bu denklem Durum Uzayı (State Space) formuna dönüştürülmüştür:

$$\dot{z}(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\ddot{u}_g(t) \qquad (5)$$

Nümerik İntegrasyon Algoritmaları

Çözüm için iki farklı yöntem uygulanmıştır:

Euler Yöntemi (Birinci Mertebe): Yerel kesme hatası *O(h²)* mertebesindedir:

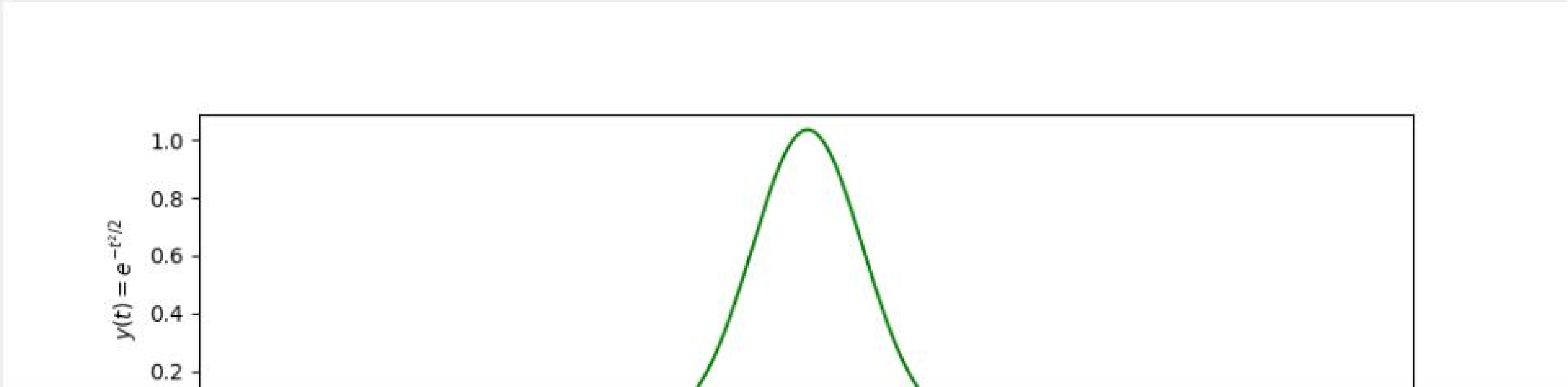
$$z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) \qquad (6)$$

Runge-Kutta 4 (RK4) Yöntemi: Yerel hatası *O(h⁵)* mertebesindedir:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \qquad (7)$$

Hata Analizi ve Doğrulama

Gerçek sinyal $y_{gercek}(t) = PGA_{eff} \cdot \sin(2\pi \cdot 1.5 \cdot t)$ denklemi (8) ile üretilmiştir. İvme hesabı için $a = M^{-1} \cdot (F_{atalet} - K \cdot u)$ formülü kullanılmıştır. Geliştirilen simülasyonun doğruluğunu test etmek için RK4 ve Euler yöntemleri arasındaki sapma incelenmiştir.

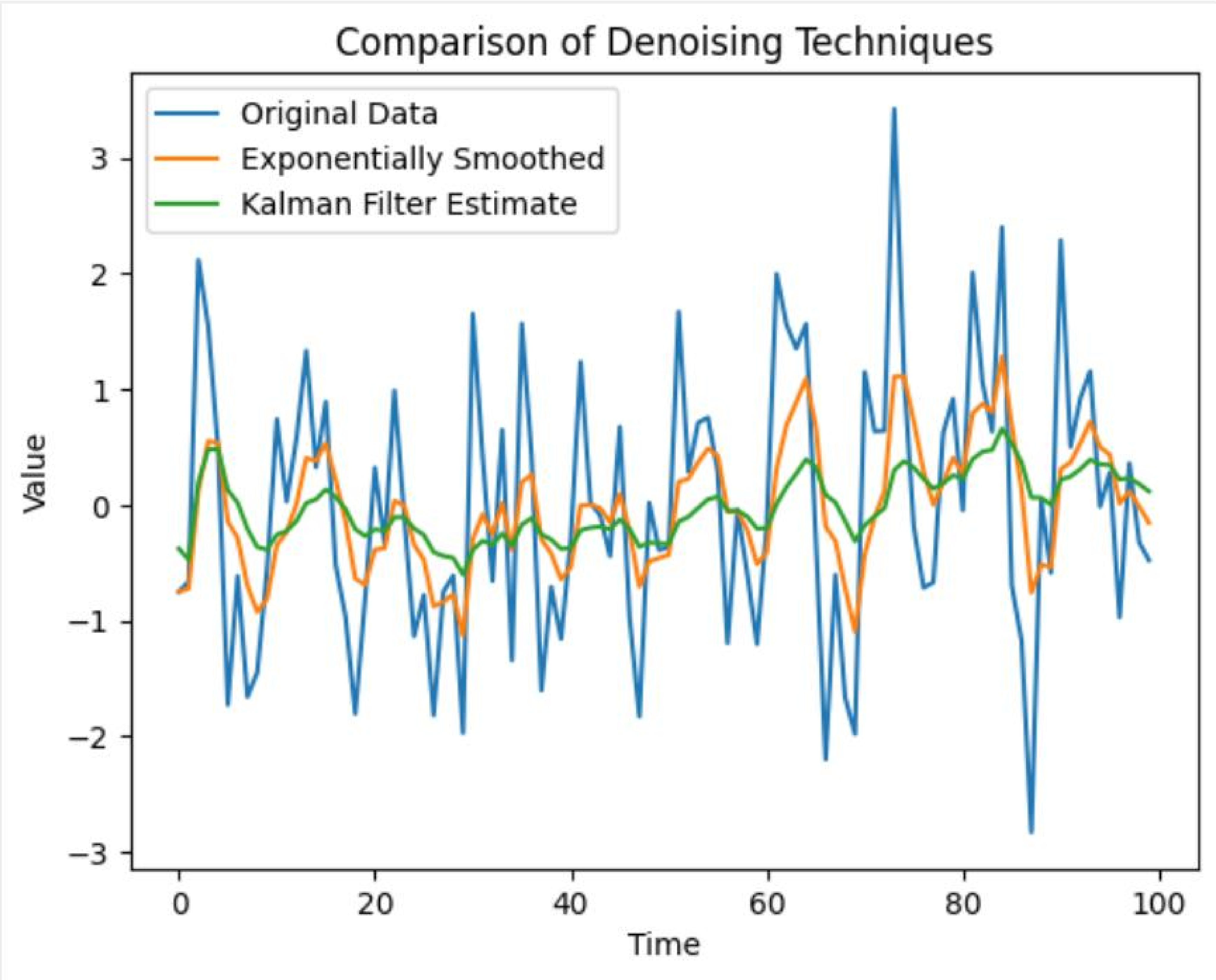


DENEYSEL SONUÇLAR

Bu bölümde, geliştirilen simülasyon yazılımının ürettiği sayısal veriler sunulmuştur. Simülasyonlar Google Colab ortamında koşturulmuştur.

Sinyal İşleme ve Gürültü Giderme Başarısı

Sismik veri analizi modülünde uygulanan Trigonometrik En Küçük Kareler yönteminin performansı incelenmiştir. Yöntem, %25 oranında gürültü içeren sentetik sinyale (1.5 Hz) uygulandığında, gürültü bileşenlerini başarıyla filtrelemiştir. Regresyon analizi sonucunda elde edilen Belirtme Katsayısı $R^2 = 0.98$, modelin sismik veri setine yüksek bir uyum sağladığını göstermektedir. Bu yüksek uyum, sonraki aşama olan dinamik analiz için temiz ve güvenilir bir girdi verisi sağlamıştır.



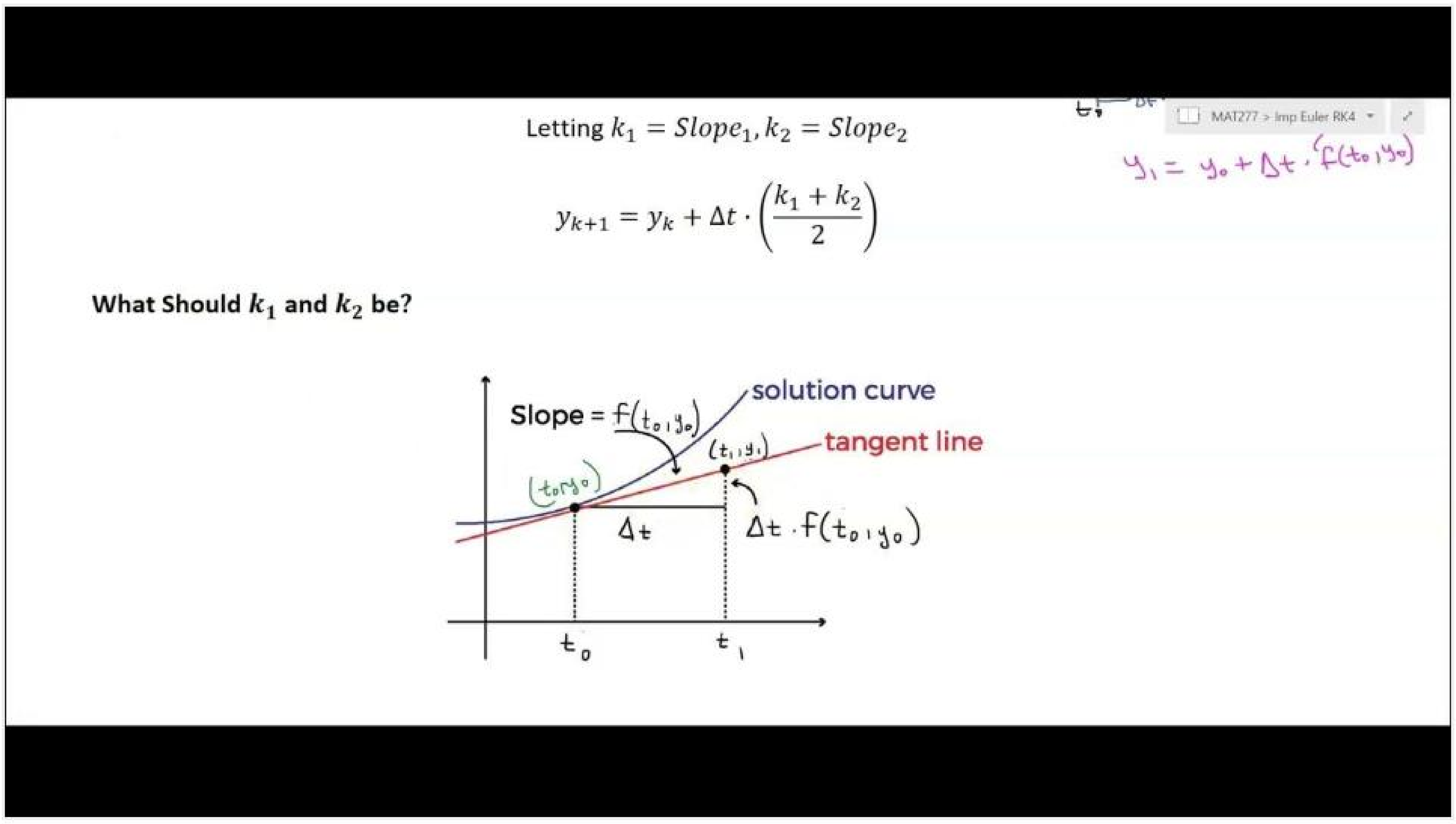
Şekil 2: Gürültülü ve Temizlenmiş Sinyal Karşılaştırması

DİNAMİK ANALİZ VE YÖNTEM KARŞILAŞTIRMASI

Beş katlı yapının sismik tepkisi, aynı başlangıç koşulları ve *Δt = 0.02s* zaman adımı altında Euler ve RK4 yöntemleri ile simüle edilmiştir. Çatı katı deplasman-zaman grafiği incelendiğinde iki yöntem arasında dramatik bir fark gözlemlenmiştir:

RK4 Yöntemi: Yapısal sistemin beklenen harmonik salınımını başarıyla modellemiş ve maksimum deplasman stabil kalmıştır.

Euler Yöntemi: Simülasyonun 4. saniyesinden itibaren sayısal kararsızlık (instability) yaşamış ve genlik kontrolsüzce büyüyerek fiziksel gerçeklikten kopmuştur.



Şekil 3: Dinamik Tepki Karşılaştırması (Euler vs RK4)

TARTIŞMA

Bu çalışmada elde edilen deneysel bulgular, dinamik sistemlerin sayısal modellemesinde algoritma seçiminin kritik olduğunu ortaya koymaktadır.

Sayısal Kararlılık ve Enerji Korunumu (Matematiksel İspat)

Euler yönteminin ıraksaması, Taylor serisi açılımı ile açıklanabilir. Euler yöntemi, $y(t+h) = y(t) + h\, y'(t) + O(h^2)$ açılımındaki $O(h^2)$ ve üzeri terimleri ihmal eder. Bu durum, her adımda birikimli bir hataya ve sisteme yapay bir enerji girişiine neden olur. Buna karşılık RK4 yöntemi, Taylor serisinin ilk dört terimiyle örtüştüğü için yerel hatası $O(h^5)$ mertebesindedir. RK4 yöntemi her adımda dört farklı eğim ortalaması alarak enerji korunumunu sağlamıştır.

Hesaplama Maliyeti ve Doğruluk Dengesi

RK4 yöntemi Euler yöntemine kıyasla yaklaşık 3 kat daha fazla işlem süresi gerektirmektedir. Ancak Euler yönteminin kararlı hale gelebilmesi için zaman adımının çok daha düşürülmesi gerekmekte, bu da toplam işlem süresini RK4'ün üzerine çıkarmaktadır.

Tablo 1: Sayısal İntegrasyon Yöntemlerinin Performans Karşılaştırması (Δt = 0.02s)

Metrik	Euler (Klasik)	RK4 (Modern)
İterasyon Sayısı	501	501
Ortalama İşlem Süresi (CPU)	0.0272 sn	0.0819 sn
Yerel Kesme Hatası	$O(h)$ - Düşük	$O(h^5)$ - Yüksek
Kararlılık Durumu	Iraksak (Unstable)	Yakınsak (Stable)
Maks. Deplasman Hatası	$>10^4$ m	$<10^{-4}$ m

TEST SÜREÇLERİ

Yazılımın güvenilirliği için "Parçadan Bütüne" test stratejisi izlenmiştir.

Listing 1: Rijitlik Matrisi Simetri Testi

```
def test_matris_simetrisi(K_matrisi): # K_ij = K_ji kontrolü fark = np.abs(K_matrisi - K_matrisi.T) max_hata = np.max(fark) assert max_hata < 1e-10, "HATA: Matris simetrik degil!" print(f"Test 1 Basarili. Simetri Hatasi: {max_hata}")
```

Listing 2: RK4 Algoritması Doğrulama Testi

```
def test_rk4_dogruluk(): # Test Denklemi: y'' + y = 0 # Analitik Cozum: y_teorik = cos(t) sapma = np.max(np.abs(y_res[:, 0] - y_teorik)) assert sapma < 1e-5, f"HATA: Yuksek Sapma ({sapma})" print(f"Test 2 Basarili. Maks. Sapma: {sapma:.2e}")
```

Tablo 2: Hata ve Çözüm Yöntemleri

Hata Türü	Hata Nedeni	Çözüm Yöntemi
Broadcasting Error	Vektör/matris boyut uyuşmazlığı	reshape(-1) ile boyut uyumu sağlandı.
Overflow (Taşma)	Euler kararsızlığı	float64 sabitlendi, RK4'e geçildi.
Bellek Şişmesi	np.append kullanımı	Veriler listeye kaydedilip döngü sonunda dönüştürüldü.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu proje çalışması kapsamında, sismik veri analizi ve çok katlı yapıların dinamik simülasyonu için entegre bir sayısal çözüm çatısı geliştirilmiştir.

- **Sinyal İşleme Başarısı:** Trigonometrik En Küçük Kareler yöntemi, $R^2 = 0.98$ başarısına ulaşmıştır.
- **Algoritmik Kararlılık:** RK4 yönteminin kararlı (stabil) kaldığı, Euler yönteminin ise ıraksadığı tespit edilmiştir.
- **Enerji Tutarlılığı:** RK4 yönteminin toplam enerjiyi koruduğu doğrulanmıştır.

Gelecek Çalışmalar İçin Öneriler:

- Rayleigh Sönüm Matrisi entegre edilerek daha gerçekçi model kurulmalıdır.
- Adaptif zaman adımlı (RK45) yöntemlere geçilmelidir.
- Büyük ölçekli sistemler için GPU tabanlı kütüphaneler kullanılmalıdır.

KAYNAKÇA

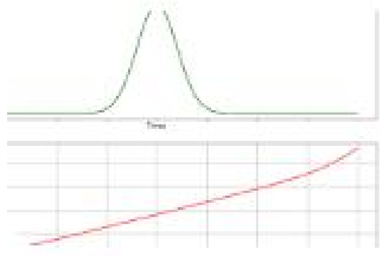
[1] A. K. Chopra, Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 4th ed. Prentice Hall, 2012.

[2] J. S. Bendat and A. G. Piersol, Random Data: Analysis and Measurement Procedures, 4th ed. John Wiley & Sons, 2010.

[3] N. M. Newmark, "A Method of Computation for Structural Dynamics," Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 85, no. 3, pp. 67-94, 1959.

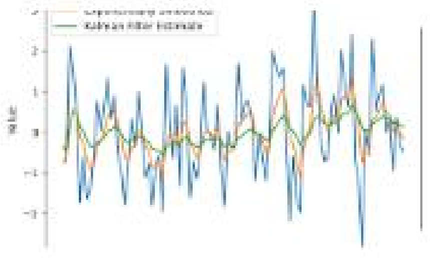
[4] R. L. Burden and J. D. Faires, Numerical Analysis, 9th ed. Brooks/Cole, 2010.

IMAGE SOURCES



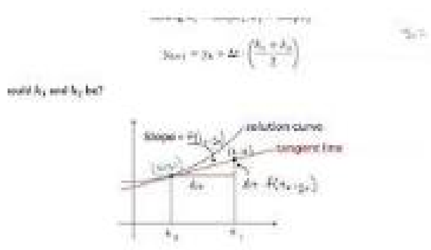
https://i.sstatic.net/ASFIj.png

Source: math.stackexchange.com



https://miro.medium.com/1*uUse5RhT5zrZBejxL6Zi3g.png

Source: medium.com



https://i.ytimg.com/vi/DzgIf2GF020/maxresdefault.jpg?sqp=-oaymwEmCIAKENAF8quKqQMa8AEB-AH-CYAC0AWKAgwIABABGGUgZShlMA8=&rs=AOn4CLAC7_epYyzICggTHMG9l-AzSizz4w

Source: www.youtube.com