# İNTERPOLASYON (ARA DEĞER BULMA)

Taylor Polinomunun, analitik bir fonksiyonu yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılabileceğini hatırlayalım.

**TANIM** *n.* **Mertebe Taylor Polinomu**

$f$, $a$'yı iç nokta olarak içeren bir aralıkta $k$. mertebeden, $k = 1, 2, \ldots, N$, türevleri var olan bir fonksiyon olsun. 0'dan $N$'ye kadar olan herhangi bir $n$ tam sayısı için $f$'nin $x = a$'da ürettiği ***n*. mertebe Taylor polinomu**

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ile verilir.

**Kesme Hatası**

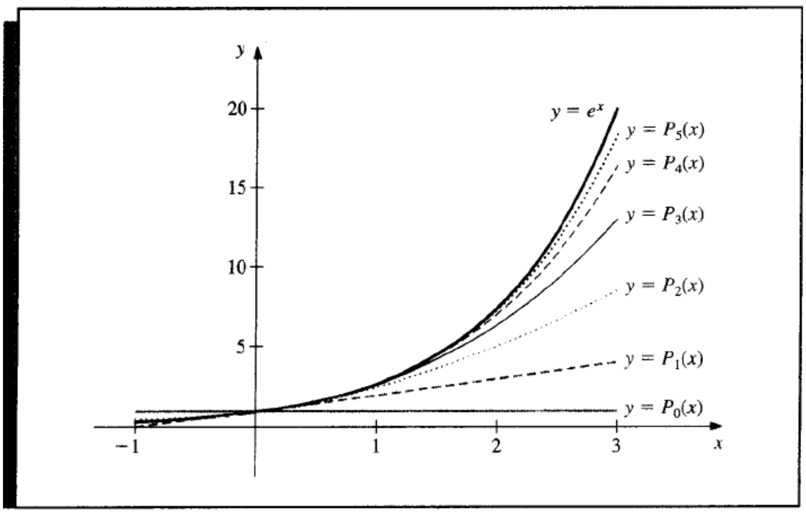
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (c,\ a \text{ ile } b \text{ arasında bir sayı })$$

**Örnek:** *e*= 2.718281828459 sayısına 13 dijitlik bir yaklaşım elde etmek için 15. Dereceden bir polinom yaklaşımı gerektiğini gösteriniz.

**Çözüm:**

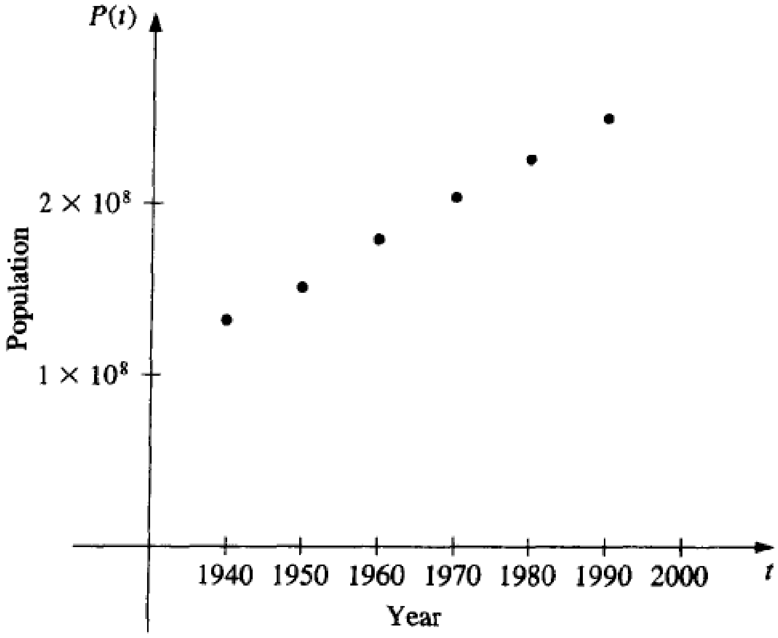
**Table 4.2** Partial Sums $S_n$ Used to Determine *e*

| $n$ | $S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ |
|---|---|
| 0 | 1.0 |
| 1 | 2.0 |
| 2 | 2.5 |
| 3 | 2.666666666666 ... |
| 4 | 2.708333333333 ... |
| 5 | 2.716666666666 ... |
| 6 | 2.718055555555 ... |
| 7 | 2.718253968254 ... |
| 8 | 2.718278769841 ... |
| 9 | 2.718281525573 ... |
| 10 | 2.718281801146 ... |
| 11 | 2.718281826199 ... |
| 12 | 2.718281828286 ... |
| 13 | 2.718281828447 ... |
| 14 | 2.718281828458 ... |
| 15 | 2.718281828459 ... |



Taylor polinomunu yazmak için $f(x)$ fonksiyonunun ve türevlerinin $x = a$ noktasındaki değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Oysa ki yüksek mertebe türevlerin hesaplanması mümkün olmayabilir ya da bu türevleri hesaplamak işlem yükünü arttırabilir. Bu sebeple alternatif metotlar gereklidir.

| Year | 1940 | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Population (in thousands) | 132,165 | 151,326 | 179,323 | 203,302 | 226,542 | 249,633 |




Yukarıdaki tabloda 1940-1990 yılları arasında her 10 yılda bir Birleşik Devletlerdeki nüfus sayımı verilmiştir. Verilen data göz önüne alınarak 1965 yılındaki  nüfusun makül bir tahmini yapılabilir mi? Bu tip bir tahmin, verilen noktalardan geçen fonksiyon kullanılarak yapılabilir. Bu işleme **interpolasyon** denir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun $N + 1$ noktada aldığı değerler biliniyor olsun. $x_k$ değerleri $[a, b]$ aralığında olmak üzere, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ değerlerinin bilindiğini varsayalım. Burada

$$a \leq x_0 < x_1 \dots < x_n \leq b \quad \text{ve} \quad y_k = f(x_k)$$

olmak üzere verilen $N+1$ noktadan geçen maksimum $N$. mertebeden tek bir $y = P(x)$ polinomu yazılabilir.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Bu polinom, $f(x)$ fonksiyonunu $[a, b]$ aralığı üzerinde yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılır. Eğer $a \leq x < b$ ise $P(x)$ yaklaşık değerine **interpolasyon** değeri, eğer $x < x_0$ ya da $b < x_N$ ise $P(x)$ yaklaşık değerine **ekstrapolasyon** değeri olarak adlandırılır. Polinomlar, sayısal türev, sayısal integral ve belirtilen noktalardan geçen eğrilerin bilgisayar çizimlerini yapmak için fonksiyonları yaklaşık olarak hesaplayan yazılım algoritmaları tasarlamada kullanılır. Polinomların türev ve integrallerini hesaplamak kolaydır ve yine polinomlardır, bu sebeple fonksiyon yaklaşımında sıklıkla kullanılırlar. En kullanışlı ve en bilindik fonksiyon sınıflarından biri cebirsel polinomlardır. $N+1$ noktadan geçen maksimum $N$. mertebeden **tek** bir $y = P(x)$ polinomu varken, bu polinomu yazmanın bir çok yolu vardır.

## Lagrange İnterpolasyon Polinomu

Lineer interpolasyonda, iki noktadan geçen doğru parçası denklemi kullanılır. $(x_0, y_0)$ ve $(x_1, y_1)$ noktaları arasındaki eğim $m = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ ‘dir. Doğru denklemi için nokta-eğim formülü $y = y_0 + m\,(x - x_0)$ aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$y = P(x) = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Yukarıdaki formül düzenlendiğinde derecesi $\leq 1$ olan bir polinom olduğu görülür. $P(x)$ polinomu $x_1$ ve $x_0$ noktalarında sırasıyla $y_1$ ve $y_0$ değerlerini almaktadır.

$$P(x_0) = y_0 + (y_1 - y_0)(0) = y_0$$
$$P(x_1) = y_0 + (y_1 - y_0)(1) = y_1.$$

Fransız matematikçi Joseph Louis Lagrange, bu polinomu bulmak için farklı bir yöntem kullanmış ve max. birinci mertebe bir polinomun aşağıdaki gibi yazılabileceğine dikkat çekmiştir.

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{1}$$

Sağ taraftaki herbir çarpan lineerdir, bu sebeple bu toplam en fazla birinci dereceden bir polinomdur. Çarpanlar aşağıdaki şekilde sembolize edilebilir:

$$L_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \text{ ve } L_{1,1}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$L_{1,0}(x_0) = 1, \quad L_{1,0}(x_1) = 0, \quad L_{1,1}(x_0) = 0, \quad L_{1,1}(x_1) = 1$$

olduğuna dikkat edilirse, $P_1(x)$ polinomu verilen iki noktadan geçer:

$$P_1(x_0) = y_0, \quad P_1(x_1) = y_1$$

$L_{1,0}(x)$ ve $L_{1,1}(x)$ terimlerine sırasıyla $x_0$ ve $x_1$ noktalarını (düğümlerini) baz alan **Lagrange katsayı polinomları** adı verilir. $P_1(x)$, toplam notasyonu ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^{1} y_1 L_{1,k}(x)$$

**Örnek:** $y = f(x) = \cos(x)$ fonksiyonunun $[0, 1.2]$ aralığındaki grafiğini göz önüne alarak,

a) $x_0 = 0$, $x_1 = 1.2$ düğümlerini kullanarak lineer interpolasyon polinomu $P_1(x)'$i yazınız.
b) $x_0 = 0.2$, $x_1 = 1$ düğümlerini kullanarak lineer interpolasyon polinomu $Q_1(x)'$i yazınız.

**Çözüm:**

**a)** $x_0 = 0,\ \ x_1 = 1.2$ için $y_0 = \cos(0) = 1,\ \ y_1 = \cos(1.2) = 0.362358$

Böylece

$$P_1(x) = 1\frac{x-1.2}{0-1.2} + 0.362358\frac{x-0}{1.2-0}$$

**b)** $x_0 = 0.2,\ \ x_1 = 1$ için $y_0 = \cos(0.2) = 0.980067,\ \ y_1 = \cos(1) = 0.540302$

Böylece

$$P_1(x) = 0.980067\frac{x-1}{0.2-1} + 0.540302\frac{x-0.2}{1-0.2}$$
$$= -1.225083(x-1) + 0.675378(x-0.2)$$

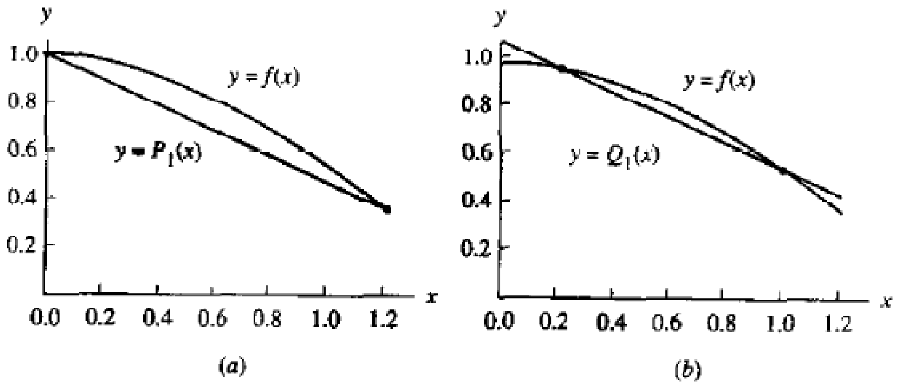



**Table 4.6** Comparison of $f(x) = \cos(x)$ and the Linear Approximations $P_1(x)$ and $Q_1(x)$

| $x_k$ | $f(x_k) = \cos(x_k)$ | $P_1(x_k)$ | $f(x_k) - P_1(x_k)$ | $Q_1(x_k)$ | $f(x_k) - Q_1(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.000000 | 1.000000 | 0.000000 | 1.090008 | −0.090008 |
| 0.1 | 0.995004 | 0.946863 | 0.048141 | 1.035037 | −0.040033 |
| 0.2 | 0.980067 | 0.893726 | 0.086340 | 0.980067 | 0.000000 |
| 0.3 | 0.955336 | 0.840589 | 0.114747 | 0.925096 | 0.030240 |
| 0.4 | 0.921061 | 0.787453 | 0.133608 | 0.870126 | 0.050935 |
| 0.5 | 0.877583 | 0.734316 | 0.143267 | 0.815155 | 0.062428 |
| 0.6 | 0.825336 | 0.681179 | 0.144157 | 0.760184 | 0.065151 |
| 0.7 | 0.764842 | 0.628042 | 0.136800 | 0.705214 | 0.059628 |
| 0.8 | 0.696707 | 0.574905 | 0.121802 | 0.650243 | 0.046463 |
| 0.9 | 0.621610 | 0.521768 | 0.099842 | 0.595273 | 0.026337 |
| 1.0 | 0.540302 | 0.468631 | 0.071671 | 0.540302 | 0.000000 |
| 1.1 | 0.453596 | 0.415495 | 0.038102 | 0.485332 | −0.031736 |
| 1.2 | 0.362358 | 0.362358 | 0.000000 | 0.430361 | −0.068003 |

Grafikten ve tablo değerlerinden görülmektedir ki $0.1 < x_k < 1.1$

değerleri için $Q_1$ daha az hataya sahiptir. Tablodaki en büyük hata $f(0.6) - P_1(0.6) = 0.144157$ $Q_1(x)$ yaklaşımıyla azaltılmıştır: $f(0.6) - Q_1(0.6)$ =0.065151

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, $n+1$ noktadan geçen en fazla n. dereceden $P_n(x)$ polinomu için (1)'in genelleştirilmiş halini yazabiliriz:

$$\boxed{P_n(x) = y_0 L_{n,0}(x) + y_1 L_{n,1}(x) + \cdots + y_n L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{n,k}(x)}$$

Burada

$$\begin{aligned} L_{n,k}(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \end{aligned}$$

Sağ tarafta $(x - x_k)$ $ve$ $(x_k - x_k)$ çarpanlarının olmamasına dikkat ediniz.

$L_{n,k}(x)$ katsayılarının aşağıdaki özelliğe sahip olduğu kolayca görülebilir:

$$j = k \text{ } için \text{ } L_{n,k}(x_j) = 1, \qquad j \neq k \text{ } için \text{ } L_{n,k}(x_j) = 0.$$

Böylece $y = P_n(x)$ polinomunun $(x_j, y_j)$ noktasından geçtiği gösterilebilir:

$$P_n(x_j) = y_0 L_{n,0}(x_j) + y_1 L_{n,1}(x_j) + \cdots y_j L_{n,j}(x_j) + \cdots + y_n L_{n,n}(x_j) = y_j$$

**Not:** $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, $n+1$ noktadan geçen en fazla n. dereceden **tek** bir $P_n(x)$ polinomunu vardır.

n=2 için;

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ noktalarından geçen kuadratik (ikinci dereceden) Lagrange polinomu:

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

n=3 için;

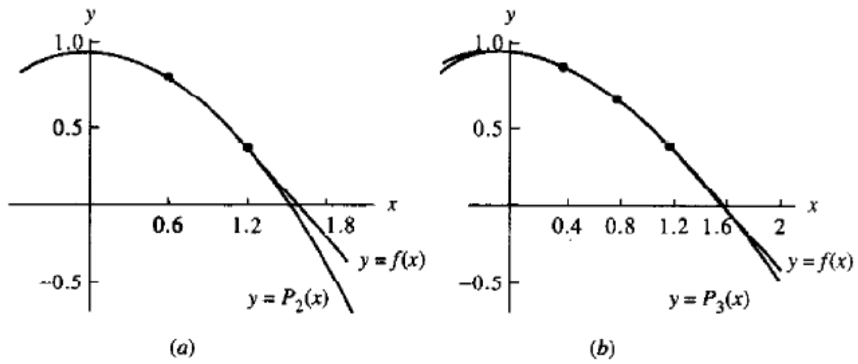
$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ve $(x_3, y_3)$ noktalarından geçen Lagrange kübik interpolasyon polinomu:

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

**Örnek:** $y = f(x) = \cos(x)$ fonksiyonunun $[0, 1.2]$ aralığındaki grafiğini göz önüne alarak,

a) $x_0 = 0, \quad x_1 = 0.6, \quad x_2 = 1.2$ noktalarını kullanarak kuadratik interpolasyon polinomu $P_2(x)$'i yazınız.
b) $x_0 = 0, \quad x_1 = 0.4, \quad x_2 = 0.8, \quad x_3 = 1.2$ noktalarını kullanarak kübik interpolasyon polinomu $P_3(x)$'i yazınız.

**Çözüm:** (Sınıfta)



**Örnek**: $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$ noktalarını kullanarak $f(x) = 1/x$ fonksiyonu için kuadratik interpolasyon polinomu $P_2(x)'$i yazınız.

**Çözüm: (**Sınıfta**)**

**Hata Terimi ve Hata Sınırları**

**Teorem (Lagrange Polinom Yaklaşımı)** $f \in C^{n+1}[a,b]$ ve $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ olsun. Eğer $x \in [a,b]$ ise o zaman

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

Burada $P_n(x)$, $f(x)$ yaklaşımı için kullanılan polinom,

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{n,k}(x)}$$

Hata terimi $E_n(x)$ ise $c \in [a,b]$ olmak üzere aşağıdaki formdadır.

$$\boxed{E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x-x_0)\,(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!}}$$

**Not:** Lagrange polinomunun hata teriminin Taylor polinomunun hata terimi ile benzer formda olduğuna dikkat ediniz. $x_0$ civarındaki n. dereceden Taylor polinomu ($x_0$ noktasındaki fonksiyonun ve türevlerinin değerlerini içeren ) için hata terimi

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

**n. mertebeden Lagrange polinomunda** $x_0, x_1, \dots, x_n$ ayrık noktalarındaki bilgiler kullanıldığı için hata teriminde $(x-x_0)^{n+1}$

yerine $n+1$ terim çarpanı $(x-x_0)\,(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ kullanılır. Bu durum beklenilen bir durumdur çünkü interpolasyon polinomu $n+1$ noktada fonksiyon değerlerini sağlayacak şekilde yazılmıştır, yani

$$\boxed{E_n(x_k) = f(x_k) - P_n(x_k) = y_k - y_k = 0, \qquad k = 0,1,\ldots,n.}$$

**Hata Sınırları**

$f \in C^{n+1}[a,b]$ için eşit uzaklıktaki noktalar kümesi $x_k = x_0 + hk$ verilmiş olsun. $f(x)$ ve n+1. mertebeye kadar türevlerinin $[x_0,\ x_1],\ [x_0,\ x_2]\ ve\ \ [x_0,\ x_3]$ alt aralıklarında sınırlı olduğunu kabul edelim, yani

$$|f^{(n+1)}(x)| \le M_{n+1}$$

$n = 1,2,3$ için hata terimlerinin üst sınırları aşağıdaki gibidir.

$$\boxed{\begin{aligned} |E_1(x)| &\le \frac{h^2M_2}{8}, && x \in [x_0,\ x_1] \\ |E_2(x)| &\le \frac{h^3M_3}{9\sqrt{3}}, && x \in [x_0,\ x_2] \\ |E_3(x)| &\le \frac{h^4M_4}{24}, && x \in [x_0,\ x_3] \end{aligned}}$$

**Kaynaklar**

Chapra S. C., Canale R. P., (Tercüme) Mühendisler için Sayısal Yöntemler, Literatür Yayınları.

Burden R. L., Faires J. D., Numerical Analysis, 10th Edition, Cengage Learning, Boston, 2016.

Mathews John H., Fink Kurtis D., Numerical Methods Using MATLAB, Prentice Hall, 1999

Doç. Dr. Ekin Özdemir