Newton Bölünmüş Fark İnterpolasyonu

Bölünmüş Farklar:

$P_n(x)$, $x_0, x_1, \dots, x_n$ ayrık noktalarında $f(x)$ ile aynı değeri alan Lagrange interpolasyon polinomu olsun. $f(x)$ fonksiyonunun sonlu farkları, $P_n(x)$ fonksiyonunu aşağıdaki formda yeniden ifade etmek için kullanılır:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (1)$$

Burada polinomun sabit katsayıları $a_0, a_1, \dots, a_n$ belirlenmelidir. $P_n(x)$ polinomunun $x = x_0$'daki değerini hesapladığımızda a_0 katsayısının yalnız kalacağı görülür. O halde

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0). \quad (2)$$

Benzer şekilde $P_n(x)$ polinomunun $x = x_1$'deki değeri hesaplandığında a_1 katsayısı elde edilir.

$$a_0 + a_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1);$$

Buradan

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3)$$

$P_n(x)$ polinomunun $x = x_2$'deki değeri hesaplandığında

$$a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = P_n(x_2) = f(x_2) \quad (4)$$

(2) ve (3) teki a_0 ve a_1 değerleri (4)'te yerine konulduğunda, basit cebirsel işlemlerden sonra a_2 aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$a_2 = \frac{\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)}{x_2 - x_0} \quad (5)$$

İlerleyebilmek için bölünmüş fark notasyonunu tanıtalım. f fonksiyonunun $x_i'ye\ göre$ **sıfırıncı dereceden bölünmüş farkı** $f[x_i]$ ile gösterilir ve f fonksiyonunun $x_i' deki$ değeridir.

$$f[x_i] = f(x_i)$$

Yüksek dereceden bölünmüş farklar tümevarımsal olarak tanımlanır. x_i, $x_{i+1}{}' \, e \, göre$ **birinci dereceden bölünmüş fark** $f[x_i, x_{i+1}]$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$x_i, x_{i+1}, x_{i+2}{}'$ye göre **ikinci dereceden bölünmüş fark** $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde iki farklı birinci dereceden sonlu farkın farkı olarak tanımlanır:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

$x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}{}' \, ya \, göre$ **k. bölünmüş fark**

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2,} \dots, , x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1,} \dots, , x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

(1) polinomunun katsayıları bölünmüş fark notasyonunda yazıldığında, $a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k],\ k = 0,1, \dots, n$ olduğu görülür ve polinom aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad (6) \end{aligned}}$$

Bu polinom **Newton'un bölünmüş farklar interpolasyon polinomu** olarak adlandırılır.

$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$, $\quad değeri$ $x_0, x_1, \dots, x_k$ sayılarının dizilişinden bağımsızdır.

Toplam notasyonu ile aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\boxed{P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1})}$$

Aşağıdaki tabloda bölünmüş farkların türetilişi ana hatları ile gösterilmiştir.

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \dfrac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	
		$f[x_4, x_5] = \dfrac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Hata Terimi

Teorem (Newton Polinom Yaklaşımı) $f \in C^{n+1}[a, b]$ ve $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ olsun. Eğer $x \in [a, b]$ ise o zaman

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

Hata terimi $E_n(x)$ $c \in [a, b]$ olmak üzere aşağıdaki formdadır.

$$\boxed{E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x - x_0)\,(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n+1)!}}$$

Örnek:

-

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

Verilen tablo değerlerini kullanarak Newton bölünmüş fark interpolasyon polinomuyla $f(1.5)$ için yaklaşık bir değer bulunuz.

Çözüm

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \ldots, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			−0.4837057			
1	1.3	0.6200860		−0.1087339		
			−0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
			−0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			−0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

-

$$
\begin{aligned}
P_4(x) = {} & 0.7651977 - 0.4837057(x - 1.0) - 0.1087339(x - 1.0)(x - 1.3) \\
& + 0.0658784(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6) \\
& + 0.0018251(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9).
\end{aligned}
$$

Newton interpolasyon polinomuyla türetilen $P_4(x)$=0.5118200 değeri ile Lagrange polinomununkinin aynı olduğuna dikkat edilmelidir. Polinomlar aynı olmak zorundadır. Çünkü türetilme şekilleri farklı olsa da verilen noktalardan geçen tek bir polinom vardır.

Örnek: $f(x) = x^3 - 4x$ fonksiyonunun $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 6$

noktaları için bölünmüş fark tablosunu oluşturun ve üçüncü derece

Newton bölünmüş fark interpolasyon polinomunu yazınız.

Çözüm:

Örnek: $f(x) = \cos(x)$ fonksiyonunun $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$ noktaları için bölünmüş fark tablosunu oluşturun ve 4. dereceye kadar Newton bölünmüş fark interpolasyon polinomlarını yazınız.

Çözüm:

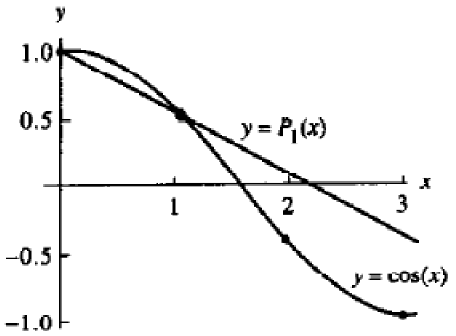

Figure 4.14 (a) Graphs of $y = \cos(x)$ and the linear Newton polynomial $y = P_1(x)$ based on the nodes $x_0 = 0.0$ and $x_1 = 1.0$.

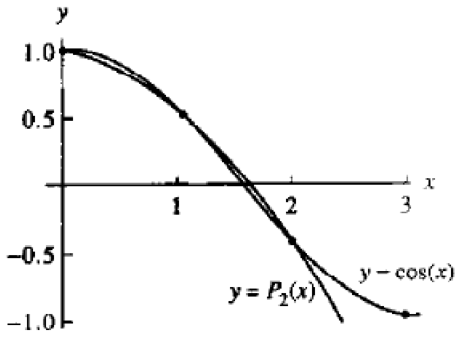

Figure 4.14 (b) Graphs of $y = \cos(x)$ and the quadratic Newton polynomial $y = P_2(x)$ based on the nodes $x_0 = 0.0$, $x_1 = 1.0$, and $x_2 = 2.0$.

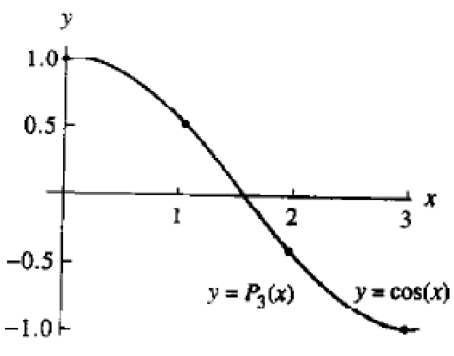

Figure 4.14 (c) Graphs of $y = \cos(x)$ and the cubic Newton polynomial $y = P_2(x)$ based on the nodes $x_0 = 0.0$, $x_1 = 1.0$, $x_2 = 2.0$, and $x_3 = 3.0$.

Newton (Newton-Gregory) İleri Fark Formülü

$x_0, x_1, \dots, x_n$ verilen **noktalar eşit aralıklı** ise Newton bölünmüş fark interpolasyon polinomu basitçe ifade edilebilir. İki nokta arasındaki fark $h = x_{i+1} - x_i$ olsun, $i = 0,1,2, \dots n-1$. Yeni bir s değişkeni tanımlayalım, öyle ki $s = (x - x_0)/h$ olsun. Bu durumda

$$x - x_0 = sh$$
$$x - x_1 = x - x_0 - h = h(s-1)$$
$$x - x_{n-1} = h(s - n + 1)$$

Böylece, (6) polinomu aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} P_n(x) = P_n(x_0 + sh) &= f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \cdots + s(s-1)(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &= \sum_{k=0}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k]. \end{aligned}$$

Şimdi bu polinomu daha sade yazabilmek için aşağıdaki ileri fark notasyonunu kullanalım.

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$
$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta\big(\Delta f(x_0)\big) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$$

O halde eşit aralıklı veriler için bölünmüş farklar ileri fark notasyonu kullanılarak aşağıdaki şekilde daha basit bir formda ifade edilebilir.

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h}\left[\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h}\right] = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0),$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f(x_0).$$

(7) polinomunda yerine yerleştirildiğinde, polinom aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0)$$

Bu yeni formül **Newton ileri fark formülü** ya da **Newton-Gregory ileri fark formülü** olarak adlandırılır.

Örnek: Aşağıdaki tablo değerlerini sağlayan **Newton-Gregory ileri fark** interpolasyon polinomunu yazınız, **ileri fark tablosunu** oluşturunuz.

x_k	$f(x_k)$
0	1
0.5	1.335
1	0.92
1.5	0.505
2.0	0.84