Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA
Curso: Ciência da Computação
Disciplina: Matemática Discreta
Professor: Hudson Costa
Entrega: 15/09/2022

Tarefa 01 **- Lógica, Métodos de Demonstração, Introdução a Grafos, Conjuntos**

1. **[Lógica Proposicional]** Um técnico suspeita ue um ou mais dos processadores de um sistema distribuído não está funcionando corretamente. Os processadores A, B e C são todos capazes de relatar informação sobre o estado (funcionando ou não funcionando) de processadores do sistema. O técnico não tem certeza se um processador de fato não funciona, ou se o problema está nas rotinas de transmissão de estado de um ou mais processadores. Depois de sondar cada processador, o técnico recebeu o seguinte relatório de estados:

   - O processador A relata que o processador B não está funcionando e que o processador C está funcionando.
   - O processador B relata que o processador A está funcionando se e somente se B está funcionando.
   - O processador C relata que pelo menos um dos outros processadores não está funcionando.

   Ajude o técnico a resolver as seguintes questões:

   a) Sejam a = "A está funcionando", b = "B está funcionando"e c = "C está funcionando". Escreva os três relatórios de estado nos termos de a, b e c, usando os símbolos da lógica formal.

   b) Complete a tabela verdade seguinte:

a	b	c	Rel. A	Rel. B	Rel. C
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

   c) Assumindo que todos esses relatórios sejam verdadeiros, que processador(es) não está/estão funcionando?

d) Assumindo que todos os processadores estejam funcionando, que relatório(s) de estado é/são falsos?

e) Assumindo que o relatório de estado de um processador é verdadeiro se e somente se o processador está funcionando, qual o estado de cada processador?

2. **[Lógica Proposicional]** Preencha as razões na sequência de prova seguinte. Não se esqueça de indicar a que etapa(s) cada regra de dedução se refere.

Sentenças	Razões
1. $p \to (q \to r)$	
2. $\neg p \vee (q \to r)$	
3. $\neg p \vee (\neg q \vee r)$	
4. $(\neg p \vee \neg q) \vee r$	
5. $\neg (p \wedge q) \vee r$	
6. $(p \wedge q) \to r$	

a) Explique por que a prova da parte (a) é reversível.

b) A prova da parte (a) (juntamente com a sua inversa) estabelece a seguinte tautologia: $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$. Portanto, para provar uma asserção da forma $A \Rightarrow B \to C$, é suficiente provar

$$\left.\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right\} \Rightarrow C$$

em seu lugar. Use esse fato para reescrever a tautologia $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$ como uma tautologia da forma

$$\left.\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right\} \Rightarrow C$$

em que C não contém o conectivo $\to$. (O processo de reescrever uma tautologia desse jeito é chamado de método dedutivo.)

c) Dê uma sequência de prova para a tautologia reescrita na parte (c).

3. **[Lógica de Predicados]** Sejam dados os predicados a seguir no domínio de todas as aulas de Ciência da Computação:

$I(x)$ = "x é interessante".
$U(x)$ = "x é útil".
$H(x, y)$ = "x é mais difícil que y".
$M(x, y)$ = "x tem mais alunos que y".

a) Escreva as sentenças seguintes usando a lógica de predicados:

i. Todas as aulas de CC são úteis.
ii. Há algumas aulas úteis de CC que não são interessantes.
iii. Toda aula interessante de CC tem mais alunos do que qualquer aula de CC que não é interessante.

4. **[Métodos de Demonstração]** Suponha que lhe seja pedido para provar uma afirmação do tipo "se A ou B, então C". Explique por que você precisa provar (a) "Se A, então C"e também (b) "se B, então C". Por que não é suficiente provar apenas (a) ou (b)?
5. **[Métodos de Demonstração]** Seja x um inteiro. Prove que x é impar se e somente se existe um número inteiro b de modo que $x = 2b - 1$.
6. **[Métodos de Demonstração]** Suponha que a, b e c sejam números inteiros. Prove que, se $a|b$ e $a|c$, então $a|(b + c)$.
7. **[Métodos de Demonstração]** Suponha que lhe seja pedido para provar uma afirmação do tipo "A se B". O método padrão é provar ambos $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$.

   Considere a seguinte estratégia alternativa de prova: Prove ambos $A \Rightarrow B$ e (não A) $\Rightarrow$ (não B). Explique por que isso seria uma prova válida.
8. **[Introdução a Grafos]** Usando o mínimo de grupos possíveis, coloque as palavras vinil, rei, página, nada, fase, um, marte, jogo e copo em grupos tal que palavras em um mesmo grupo nunca tenham letras em comum. Use um modelo de grafo e a coloração de grafos. Justifique sua resposta: explique por que o seu agrupamento usa o menor número possível de grupos.
9. **[Introdução a Grafos]** Considere a seguinte lista de números: $123, 684, 121, 511, 602, 50, 43$.

   a) Coloque os números, na ordem dada, em uma árvore binária.
   b) A *altura* de uma árvore de busca binária é o número máximo de arestas que devemos percorrer para alcançar o fundo da árvore, começando pela raiz. Qual a altura da árvore na parte (a)?
   c) Reordene os números de forma que, quando colocados em uma árvore de busca binária, a altura da árvore resultante seja menor que a altura da árvore na parte (a). Dê a sua nova lista e a árvore de busca que ela produz.

10. **[Conjuntos]** Em uma classe de 40 alunos, todo mundo tem ou um piercing no nariz ou um piercing na orelha. O professor pede para que todos os alunos com piercing no nariz levantem as mãos. Nove mãos se levantam. Em seguida o professor pede que todos com piercing na orelha façam o mesmo. Dessa vez, 34 mãos se levantaram. Quantos alunos têm piercings tanto na orelha quanto no nariz?
11. **[Conjuntos]** Sejam A e B conjuntos. Prove que $A \cap B \subseteq A \cup B$.