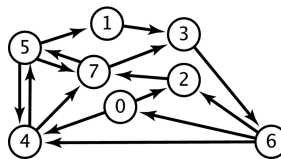


Grafos

Este capítulo define o objeto combinatório conhecido como *grafo*, ou *grafo dirigido*, ou ainda *grafo orientado*. Grafos são importantes modelos para uma grande variedade de problemas de engenharia, computação, matemática, economia, biologia, etc.

Sumário:

- [Definições básicas](#)
- [Arcos antiparalelos e “arcos paralelos”](#)
- [Leques e graus de vértices](#)
- [Número de arcos](#)
- [Subgrafos](#)
- [Grafos não-dirigidos](#)
- [Perguntas e respostas](#)



Definições básicas

Um *grafo* (= *graph*) é um par de conjuntos: um conjunto de coisas conhecidas como *vértices* e um conjunto de coisas conhecidas como *arcos*. Cada arco é um par ordenado de vértices. O primeiro vértice do par é a *ponta inicial* do arco e o segundo é a *ponta final*.

Os arcos dos grafos são *dirigidos*: cada arco “começa” na sua ponta inicial e “termina” na sua ponta final. Para enfatizar esse fato, usamos ocasionalmente a expressão *grafo dirigido* (= *directed graph*) no lugar de *grafo*, embora o adjetivo *dirigido* seja redundante. (Alguns livros usam o termo [digrafo](#). Esse termo é uma tradução de *digraph*, que resultou da contração de *directed* e *graph*.)

A ponta final de todo arco é [diferente](#) da ponta inicial. Um arco com ponta inicial v e ponta final w será denotado por

$$v-w.$$

(Não confunda essa expressão com “ v menos w ”.) Dizemos que o arco $v-w$ *sai* de v e *entra* em w . A presença de um arco $v-w$ é independente da presença do arco $w-v$: o grafo pode ter os arcos $v-w$ e $w-v$, pode ter apenas um deles, ou pode não ter nenhum deles.

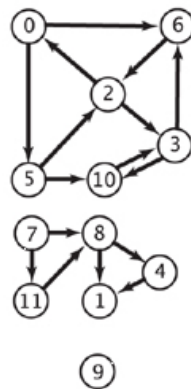
Dizemos que um vértice w é *vizinho de* um vértice v se $v-w$ é um arco do grafo. Dizemos também, nessa circunstância, que w é *adjacente a* v . A relação de vizinhança não é simétrica: w pode ser vizinho de v sem que v seja vizinho de w .

O *tamanho* de um grafo com V vértices e A arcos é a soma $V + A$.

Exemplo A. Uma boa maneira de especificar um grafo é exibir o seu conjunto de arcos. Por exemplo, o conjunto de arcos

0-5 0-6 2-0 2-3 3-6 3-10 4-1 5-2 5-10
6-2 7-8 7-11 8-1 8-4 10-3 11-8

define um grafo sobre o conjunto de vértices $0..11$. [Este exemplo foi copiado do livro [Algorithms](#), de Sedgewick e Wayne.]



Exemplo B. A estrutura da rede WWW pode ser representada por um grafo: os vértices são as páginas HTML e os arcos são os links que apontam de uma página para outra. “Navegar” na rede é pular de um vértice a outro seguindo os arcos.

Exercícios 1

- ★ Faça uma figura bonita do grafo cujos arcos são indicados a seguir. Uma figura é tão mais bonita quanto mais simétrica e quanto menor o número de cruzamentos de linhas.

a-b b-c c-d d-a a-e e-f f-b e-d f-c

Arcos antiparalelos e “arcos paralelos”

Dois arcos são *antiparalelos* se a ponta inicial de um é a ponta final do outro e vice-versa. Em outras palavras, dois arcos são antiparalelos se um é $v-w$ e o outro é $w-v$.

Poderíamos tentar dizer que dois arcos são “paralelos” (ou “repetidos”) se têm a mesma ponta inicial e a mesma ponta final. Mas esse conceito não faz sentido sob nossas definições, uma vez que arcos são meros pares de vértices e portanto dois arcos diferentes não podem ter a mesma ponta inicial e a mesma ponta final. Portanto, nossos grafos não têm “arcos paralelos”.

Leques e graus de vértices

O *leque de saída* (= *fan-out*) de um vértice num grafo é o conjunto de todos os arcos que saem do vértice. O *leque de entrada* (= *fan-in*) de um vértice é o conjunto de todos os arcos que entram no vértice.

Dado um conjunto X de vértices de um grafo, o *leque de saída* de X é o conjunto dos arcos que saem de X , ou seja, saem de algum vértice em X e entram em algum vértice fora de X . O *leque de entrada* de X é o conjunto dos arcos que entram em X .

O *grau de saída* (= *outdegree*) de um vértice num grafo é o tamanho do seu leque de saída, ou seja, o número de arcos que saem do vértice. O *grau de entrada* (= *indegree*) é o tamanho do leque de entrada do vértice.

Uma *fonte* (= *source*) é um vértice que tem grau de entrada nulo. Um *sorvedouro* (= *sink*) é um vértice que tem grau de saída nulo.

Um vértice é *isolado* se seu grau de entrada e seu grau de saída são ambos nulos. É claro que um grafo sem vértices isolados é completamente definido por seu conjunto de arcos.

Número de arcos

É fácil verificar que a soma dos graus de saída de todos os vértices de um grafo é igual ao número de arcos do grafo. A soma dos graus *de entrada* de todos os vértices também é igual ao número de arcos. Segue daí que um grafo com V vértices tem no máximo

$$V(V-1)$$

arcos. Esse número é apenas um pouco menor que V^2 .

Um grafo é *completo* se todo par ordenado de vértices distintos é um arco. Um grafo completo com V vértices tem exatamente $V(V-1)$ arcos. Um *torneio* é qualquer grafo dotado da seguinte propriedade: para cada par vw de vértices distintos, $v-w$ é um arco ou $w-v$ é um arco, mas não ambos. Um torneio com V vértices tem exatamente $\frac{1}{2}V(V-1)$ arcos.

Um grafo é *denso* se tem muitos arcos em relação ao seu número de vértices e *esparso* se tem poucos arcos. Mais precisamente, um grafo é *denso* se o seu número de arcos é da mesma ordem que o quadrado do número de vértices, digamos $V^2/2$, ou $V^2/10$, ou $V^2/100$, ou algo assim. (Portanto, o [tamanho](#) de um grafo denso é proporcional a V^2 .) Um grafo é *esparso* se seu número de arcos é da mesma ordem que V , digamos $10V$, ou $V/2$, ou algo assim. (Portanto, o tamanho de um grafo esparso é proporcional a V .) É claro que essas definições não se aplicam a grafos individuais, mas a famílias infinitas de grafos.

Exercícios 2

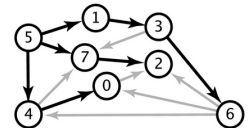
1. [Sedgewick 17.9] Quantos grafos diferentes existem com conjunto de vértices $0 \dots V-1$ e A arcos?

2. Mostre que a soma dos graus de saída de todos os vértices de qualquer grafo é igual ao número de arcos do grafo.

Subgrafos

Um subgrafo de um grafo G é um “pedaço” de G . O conjunto de vértices e o conjunto de arcos do “pedaço” de G devem ser coerentes. Assim, é melhor formular o conceito como uma *relação* entre dois grafos: Um grafo H é *subgrafo* de um grafo G se todo vértice de H é vértice de G e todo arco de H é arco de G . (Notação: $H \subseteq G$.)

Por exemplo, se G é o grafo definido por todos os arcos da figura e H é o grafo formado apenas pelos arcos escuros, então $H \subseteq G$. Outro exemplo: o grafo que tem vértices 1 3 5 7 e arcos 1-3 5-1 5-7 é um subgrafo de H (e também de G). Já os vértices 1 3 5 e os arcos 1-3 5-1 5-7 nem chegam a constituir um grafo.



Alguns tipos de subgrafos merecem destaque. Um subgrafo H de um grafo G é

- *gerador* (= *spanning*) se contém todos os vértices de G ,
- *induzido* se todo arco de G com ambas as pontas em H também é arco de H ,
- *próprio* se for diferente de G (notação: $H \subset G$).

Dado um conjunto X de vértices de um grafo G , o subgrafo de G induzido por X é o subgrafo formado por X e todos os arcos de G que têm ambas as pontas em X . Esse grafo pode ser denotado por $G[X]$.

Se a é um arco de um grafo G , denotaremos por $G-a$ o subgrafo que resulta da remoção do arco a de G .

Um supergrafo é o contrário de um subgrafo: um grafo G é *supergrafo* de um grafo H se H for subgrafo de G .

Grafos não-dirigidos

Um grafo é *não-dirigido* (= *undirected*) se cada um de seus arcos é [antiparalelo](#) a algum outro arco: para cada arco $v-w$, o grafo também tem o arco $w-v$. Por exemplo, o conjunto de arcos abaixo define um grafo não-dirigido.

0-1 0-2 0-5 1-2 2-3 2-4 3-4 3-5
1-0 2-0 5-0 2-1 3-2 4-2 4-3 5-3

Num grafo não-dirigido, a relação de adjacência é simétrica: um vértice w é adjacente a um vértice v se e somente se v é adjacente a w . (O mesmo se aplica ao sinônimo “vizinho” de “adjacente”.)



Convém tratar os pares de arcos antiparalelos de um grafo não-dirigido como uma nova entidade. Assim, diremos que cada par de arcos antiparalelos é uma *aresta* (= *edge*). Qualquer um dos dois arcos da aresta pode ser usado para representar a aresta. Podemos dizer, então, que

0-1 0-2 0-5 1-2 2-3 2-4 3-4 3-5

é o conjunto de arestas do grafo não-dirigido que aparece no exemplo acima. O número de arestas de um grafo não-dirigido é a metade do seu número de arcos: se E denota o número de arestas e A denota o número de arcos então $E = A/2$. Diremos que uma aresta $v-w$ *liga* os vértices v e w . Diremos também que $v-w$ *incide* em v e em w .

Num grafo não-dirigido, o *leque* de um vértice v é o conjunto de arestas que incidem em v . O *grau* de v é o número de arestas no leque de v . É claro que o grau de um vértice é igual ao seu grau de entrada e também ao seu grau de saída. É fácil verificar que a soma dos graus de todos os vértices de um grafo não-dirigido vale $2E$, sendo E o número de arestas.

Subgrafos. Um subgrafo de um grafo [não-dirigido](#) pode não ser não-dirigido (pois pode incluir apenas um dos arcos de alguma aresta). Se queremos um subgrafo não-dirigido, precisamos dizer isso explicitamente.

A propósito, é claro que todo subgrafo [induzido](#) de um grafo não-dirigido é necessariamente não-dirigido.

Exercícios 3

1. *Certo ou errado?* Num grafo não-dirigido, se $v-w$ é um arco então $w-v$ também é um arco. Num grafo (dirigido), se $v-w$ é um arco então $w-v$ não é um arco.
2. ★ Faça uma figura bonita do grafo não-dirigido cujas arestas são indicados a seguir. Uma figura é tão mais bonita quanto mais simétrica e quanto menor o número de cruzamentos de linhas.
a-d b-c h-f e-g a-e b-h c-f d-g a-b d-c h-e f-g
3. Mostre que a soma dos graus de todos os vértices de qualquer grafo não-dirigido é igual ao dobro do número de arestas.

Perguntas e respostas

- PERGUNTA: Por que [digrafo](#) é escrito sem acento? Não deveria ser *dígrafo*, com acento?
- RESPOSTA: Nããão! *Dígrafo* (com acento) é [outra coisa muito diferente!](#)
- PERGUNTA: Eu fico confuso com “adjacente”: se $v-w$ é um arco, devo dizer “ w é adjacente a v ” ou “ v é adjacente a w ”?

RESPOSTA: É a primeira alternativa. Mas eu também fico confuso. Teria sido melhor, quem sabe, dizer algo como “ v domina w ”.

- PERGUNTA: Por que este sítio não permite [arcos paralelos](#)?

RESPOSTA: Arcos são meros pares de vértices. Assim, não é possível ter dois arcos com a mesma ponta inicial e a mesma ponta final. O livro de Sedgewick permite arcos paralelos de maneira apenas informal, tratando-os como “cópias” distintas de um mesmo arco.

- PERGUNTA: O livro de Sedgewick admite *laços* (= *loops*), ou seja, arcos com ponta final igual à ponta inicial. Por que este sítio proíbe laços?

RESPOSTA: Porque isso simplifica ligeiramente as coisas e não traz nenhum prejuízo.

www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/

Atualizado em 2017-04-10

© Paulo Feofiloff

IME-USP