



**Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA**

**Curso:** Ciência da Computação

**Disciplina:** Matemática Discreta

**Professor:** Hudson Costa

**Entrega:** 18/10/2022

**Tarefa 02 - Funções, Relações e Equivalências, Ordem Parcial, Relações de Recorrência e Soluções em Forma Fechada**

1. [ **Funções** ] Sejam  $f : X \leftarrow Y$  e  $g : Y \leftarrow Z$  funções tal que  $h = g \circ f$  é uma bijeção.
  - a) Prove que  $f$  é injetiva.
  - b) Prove que  $g$  é sobrejetiva.
2. [ **Funções** ] Suponha que  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  são ambas sobrejetivas. Prove que  $g \circ f$  é sobrejetiva.
3. [ **Relações e Equivalências** ] Para todo  $[x] \in \mathbb{Z}/n$  e todo  $k \in \mathbb{Z}$ , podemos definir  $k[x]$  por:

$$k[x] = \underbrace{[x] + [x] + \cdots + [x]}_{k \text{ vezes}}$$

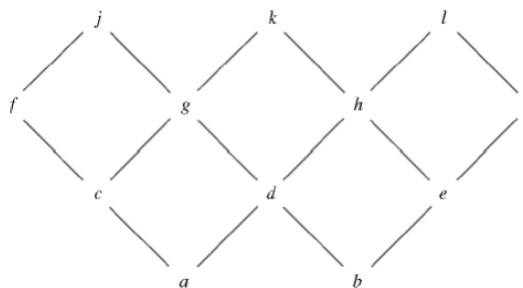
em que o resultado é um elemento de  $\mathbb{Z}/n$ . Dizemos que  $k[x]$  é um múltiplo de  $[x]$ .

- a) Liste todos os múltiplos de  $[3]$  em  $\mathbb{Z}/9$ .
  - b) Liste todos os múltiplos de  $[3]$  em  $\mathbb{Z}/8$ .
4. [ **Relações e Equivalências** ] Seja  $G$  um grafo conexo não orientado e seja  $V$  o conjunto de todos os vértices em  $G$ . Defina uma relação  $R$  em  $V$  da seguinte forma: dados vértices  $a, b \in V$ ,  $aRb$  quando existe um caminho de  $a$  para  $b$  com um número par de arestas. (Um caminho pode usar a mesma aresta mais de uma vez). Prove que  $R$  é uma relação de equivalência.
  5. [ **Ordem Parcial** ] Suponha que você queira escrever um programa que irá coletar informação sobre os gostos de um cliente e customizar o conteúdo web de acordo com esses dados. Ao monitorar os hábitos de compra online, você é capaz de coletar um conjunto de preferências entre pares de produtos. Seja  $X$  o conjunto dos produtos. Se  $x, y \in X$  são dois produtos diferentes, dizemos que  $x \preceq y$  se o cliente prefere  $y$  a  $x$ . (A fim de satisfazer a propriedade reflexiva, estipulamos que  $x \preceq x$  para todo  $x \in X$ .) Suponha que você saiba as seguintes coisas a respeito do seu cliente.

| Cliente prefere | Mais que |
|-----------------|----------|
| alface          | brócolis |
| repolho         | brócolis |
| tomate          | repolho  |
| cenoura         | repolho  |
| cenoura         | alface   |
| aspargos        | alface   |
| cogumelo        | tomate   |
| milho           | tomate   |
| milho           | cenoura  |
| berinjela       | cenoura  |
| berinjela       | aspargos |
| cebola          | cogumelo |
| cebola          | milho    |

A fim de que  $(X, \preceq)$  seja um conjunto parcialmente ordenado, devemos assumir também que as preferências do cliente são transitivas.

- Desenhe o diagrama de Hasse para  $(X, \preceq)$ .
  - Qual é (ou quais são) o(s) vegetal(is) favorito(s) do cliente? [Ou seja, quais são os elementos maximais?] Qual é (ou quais são) o(s) vegetal(is) menos apreciado(s)?
  - Use ordenação topológica para classificar esses vegetais na ordem de preferência do cliente. Essa classificação é única?
6. [ **Ordem Parcial** ] Seja  $W = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ . Defina uma ordem parcial em  $W$  pelo diagrama de Hasse abaixo.



- Encontre dois elementos de  $W$  cujo encontro existe mas cuja junção não existe.
  - Encontre dois elementos de  $W$  cuja junção existe mas cujo encontro não existe.
  - Encontre dois elementos de  $W$  cujo encontro e cuja junção não existam.
7. [ **Relações de Recorrência** ] Círculos podem ser arrumados na forma arrumados na forma de triângulo equilátero. seja  $T(n)$  o número de círculos necessários para formar um triângulo com  $n$  círculos. Escreva uma relação de recorrência para  $T(n)$ .

8. [ **Relações de Recorrência** ] O antigo jogo indiano Chaturanga — do qual aparentemente deriva o jogo de xadrez moderno — era jogado em um tabuleiro com 64 quadrados. Uma certa lenda folclórica conta a história de um rajá que prometeu uma recompensa de um grão de arroz para o primeiro quadrado do tabuleiro, dois grãos de arroz para o segundo quadrado, quatro para o terceiro e assim por diante, dobrando o número de grãos para cada quadrado consecutivo.

- a) Escreva uma relação de recorrência para  $R(n)$ , o número de grãos de arroz no  $n$ -ésimo quadrado.
- b) Calcule  $R(64)$ . Assumindo que um grão de arroz pesa 25 miligramas, quantos quilogramas de arroz devem ser colocados no 64º quadrado?

9. [ **Soluções em Forma Fechada** ] Considere a relação de recorrência a seguir:

$$B(n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1 \\ 3 * B(n - 1) + 2 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

use indução para provar que  $B(n) = 3^n - 1$

10. [ **Soluções em Forma Fechada** ] Dê um palpite de solução em forma fechada para a relação de recorrência a seguir:

$$P(n) = \begin{cases} 5 & \text{se } n = 0 \\ P(n - 1) + 3 & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Demonstre que seu palpite está correto.