

Versuch 13: Ungedämpfte-, gedämpfte-, erzwungene Schwingungen und Resonanz

Yago Obispo Gerster

1. März 2024

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1 Einleitung und Motivation | 1 |
| 1.1 Physikalische Grundlagen | 1 |
| 1.1.1 Freie, ungedämpfte Schwingung | 1 |
| 1.1.2 Freie, gedämpfte Schwingung | 2 |
| 1.1.3 Erzwungene, gedämpfte Schwingung | 3 |
| 1.1.4 Anwendung: Pohlsche Rad | 4 |
| 2 Messprotokoll | 5 |
| 3 Auswertung | 13 |
| 3.1 Fehlerabschätzung | 13 |
| 3.2 Freie Schwingung: Schwingungsperiode | 13 |
| 3.3 Dämpfungskonstante bei freier, gedämpften Schwingung | 14 |
| 3.4 Dämpfungskonstante bei erzwungenen, gedämpften Schwingung | 17 |
| 3.5 Qualitative Beobachtung der Phasenverschiebung | 22 |
| 4 Zusammenfassung und Diskussion | 23 |

1 Einleitung und Motivation

Das Ziel des Versuches ist die Untersuchung unterschiedlicher Schwingungsarten an einem Drehpendel. Dabei stehen die Bestimmung der Schwingungsdauer des freien, ungedämpften Drehpendels, die Ermittlung der Dämpfung des gedämpften Drehpendels und die Untersuchung der Abhängigkeit der Amplitude von der Erregerfrequenz beim erzwungenen Drehpendel, im Vordergrund des Versuchs.

1.1 Physikalische Grundlagen

1.1.1 Freie, ungedämpfte Schwingung

Die *freie, ungedämpfte Schwingung* ist die idealisierte aller drei Schwingungsarten. Man spricht von diesem Typ von Schwingung wenn in einem System nur

die Rückstellkraft $F = -kx$ (Hooke'sches Gesetz) mit einer Konstanten k und Auslenkung x aus der Gleichgewichtslage, resultierend wirkt. Die dazugehörige Differentialgleichung ist nach Newtons zweitem Axiom also:

$$m\ddot{x} = -kx \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1)$$

Die Differentialgleichung wird z.B. für $x = a(t)$ mit $w_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$ gelöst:

$$a(t) = a_0 \cdot \sin w_0 t \quad (2)$$

Dabei ist a_0 die zeitlich konstante Amplitude der Schwingung. w_0 wird hier als die Kreisfrequenz interpretiert und diese liefert uns die Periodendauer:

$$T_0 = \frac{2\pi}{w} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3)$$

1.1.2 Freie, gedämpfte Schwingung

Die *freie, gedämpfte Schwingung* nähert sich schon den meisten Schwingungsarten in der Natur an. Sie ist wie die Schwingung davor definiert, nur das zusätzlich eine zur Geschwindigkeit \dot{x} proportionale Reibungskraft wirkt $F_R = -b\dot{x}$. Die sog. Dämpfungskonstante $\delta = \frac{b}{2m}$ gibt dabei an, wie stark diese Reibungskraft ist und entsprechend wie stark die Schwingung gedämpft wird. Die Bewegungsgleichung wird zu:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + w_0^2 x = 0 \quad (4)$$

Für diese Differentialgleichung lautet eine Lösung:

$$a(t) = a_0 \cdot e^{-\delta t} \sin w_f t \quad (5)$$

Wobei w_f nun die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung ist. Zwischen dieser und der Kreisfrequenz der ungedämpften w_0 , besteht der Zusammenhang:

$$w_f = \sqrt{w_0^2 - \delta^2} \quad (6)$$

Vergleicht man die Bewegung einer gedämpften Schwingung in (5) mit der ungedämpften in (2), so fällt einem auf, dass diese sich recht ähnlich sehen mit dem Unterschied das die Amplitude bei der gedämpften Schwingung exponentiell abklingt. In einem der Umkehrpunkte an dem der Sinusteil zu 1 wird, gilt für die Amplitude:

$$a(t) = a_0 \cdot e^{-\delta t} \quad (7)$$

Hat die Schwingung weiterhin bei $t = 0$ in einem Umkehrpunkt begonnen, dann können diese Zeiten als $t = nT_f$ geschrieben werden, wobei n eine ganzzahlige

Zahl ist, welche die Anzahl der Schwingungen beschreibt und T_f die Periodendauer.

Um die Dämpfungskonstante zu bestimmen ist folgende Methode sinnvoll:
Sei $t_{1/2}$ die Zeit, nach der die Amplitude auf die Hälfte der Anfangsamplitude abgesunken ist. So gilt unter dieser Voraussetzung nach (7):

$$a(t_{1/2}) = a_0 \cdot e^{-\delta t_{1/2}} = \frac{a_0}{2} \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad (9)$$

Man kann dabei $t_{1/2}$ leicht (z.B. grafisch) ermitteln, wodurch man direkt die Dämpfungskonstante erhält.

1.1.3 Erzwungene, gedämpfte Schwingung

Der letzte Typ ist die *erzwungene, gedämpfte Schwingung*. Dabei wirkt neben der Rückstell- und Dämpfungskraft noch eine dritte periodische Kraft, die für den Antrieb der Schwingung sorgt. Zum Beispiel kann man mit einem Schrittmotor eine Frequenz w an ein Pendel anlegen.

Das System nimmt die Frequenz des Erregers an (*Einschwingvorgang*). Die durch den Antrieb erzwungene Amplitude ist von der Erregerfrequenz abhängig. Dabei zeigt sich bei Schwingungen folgender charakteristischer Zusammenhang zwischen Amplitude und Erregerfrequenz: Die Amplitude $b(w)$ kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$b(w) = \frac{Aw_0^2}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + (2\delta w)^2}} \quad (10)$$

Die maximale Amplitude wird bei der *Resonanzfrequenz* w' erreicht, für welche

$$w' = \sqrt{w_0^2 - 2\delta^2} \quad (11)$$

gilt.

Um die Resonanzkurve einer Schwingung mit derjenigen einer anderen Schwingung vergleichbar zu machen, werden anschliessend noch die Halbwertsbreite H und die Resonanzüberhöhung definiert.

Die Halbwertsbreite ist als die Breite der Kurve in der Höhe $\frac{b(w')}{\sqrt{2}}$ definiert. Bei nicht zu starken Dämpfungen:

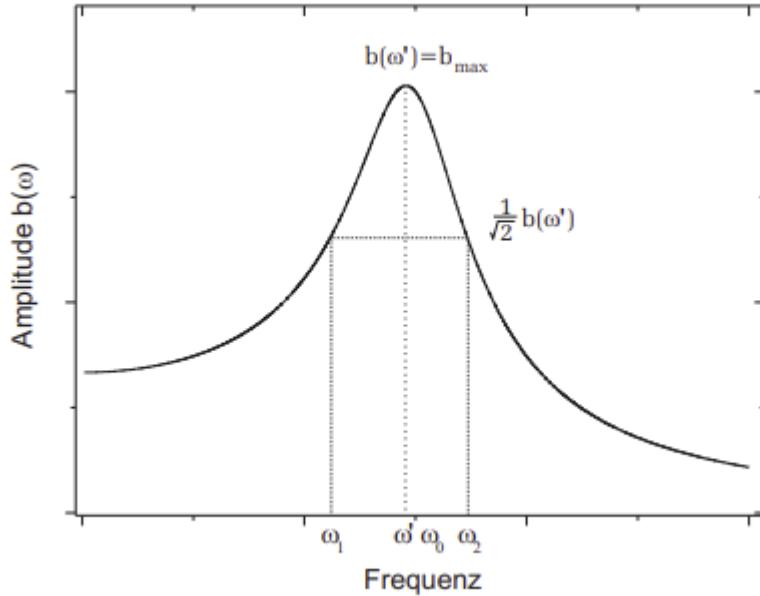
$$H = w_2 - w_1 = 2\delta \quad (12)$$

Dabei sind w_1 und w_2 die Kreisfrequenzen die dieser Amplitudenhöhe entsprechen.

Die Resonanzüberhöhung ist über den Quotienten

$$\frac{b(w')}{b(w \rightarrow 0)} = \frac{w_0}{2\delta} \quad (13)$$

Abbildung 1: Resonanzkurve



definiert (wobei $w_0 \approx w_f$).

Die allgemeine Bewegung einer erzwungenen Schwingung kann durch folgende Gleichung modelliert werden:

$$\phi(t) = a_0 \sin(w_f t - \beta) e^{-\delta t} + b(w) \sin(wt - \epsilon) \quad (14)$$

Dabei ist $\phi(t)$ die Auslenkung zu einem gewissen Zeitpunkt mit Phasenverschiebung des Anfangszustandes des Systems β und Phasenverschiebung zwischen Erreger und erzwungener Schwingung ϵ .

1.1.4 Anwendung: Pohlsche Rad

Im heutigen Versuch wollen wir uns dem Pohlschen Rad widmen. Wie man an Abbildung 2 erkennen kann, besteht es aus einer Feder, welche durch das Auslenken einer Metallplatte mit einem Zeiger auf einer Kreislinie entspannt bzw. komprimiert werden kann. Dadurch schwingt die Feder hin und her, was auch dazu führt, dass der Zeiger auf der Metallplatte hin und her schwingt. Der Zeiger zeigt dabei direkt auf eine Skala anhand der die Auslenkung abgelesen werden kann.

Lässt man alle restlichen Geräte ausgeschaltet, so kann man eine nahezu freie, ungedämpfte Schwingung beobachten.

Um eine Dämpfung anzulegen, wird ein Netzgerät verwendet. Bei diesem kann

ein Strom eingestellt werden, der dann durch zwei Spulen fliesst, die am unteren Teil des Pohlschen Rades befestigt sind. Um die Spulen entsteht ein Magnetfeld. Da sich die Metallplatte durch dieses Magnetfeld bewegt und diese leitf ig ist, entstehen aufgrund von elektromagnetischer Induktion Wirbelströme. Nach der *Lenzschen Regel* wirken diese Wirbelströme ihrer Ursache (der Bewegung des Rades) entgegen, weshalb die Metallplatte abgebremst, d.h. gedämpft wird.

2 Messprotokoll

26.09.2023 09:00 -

12:00

Messprotokoll: Versuch 13

Juan Bueno Fontanilla
Yago Obispo Getster

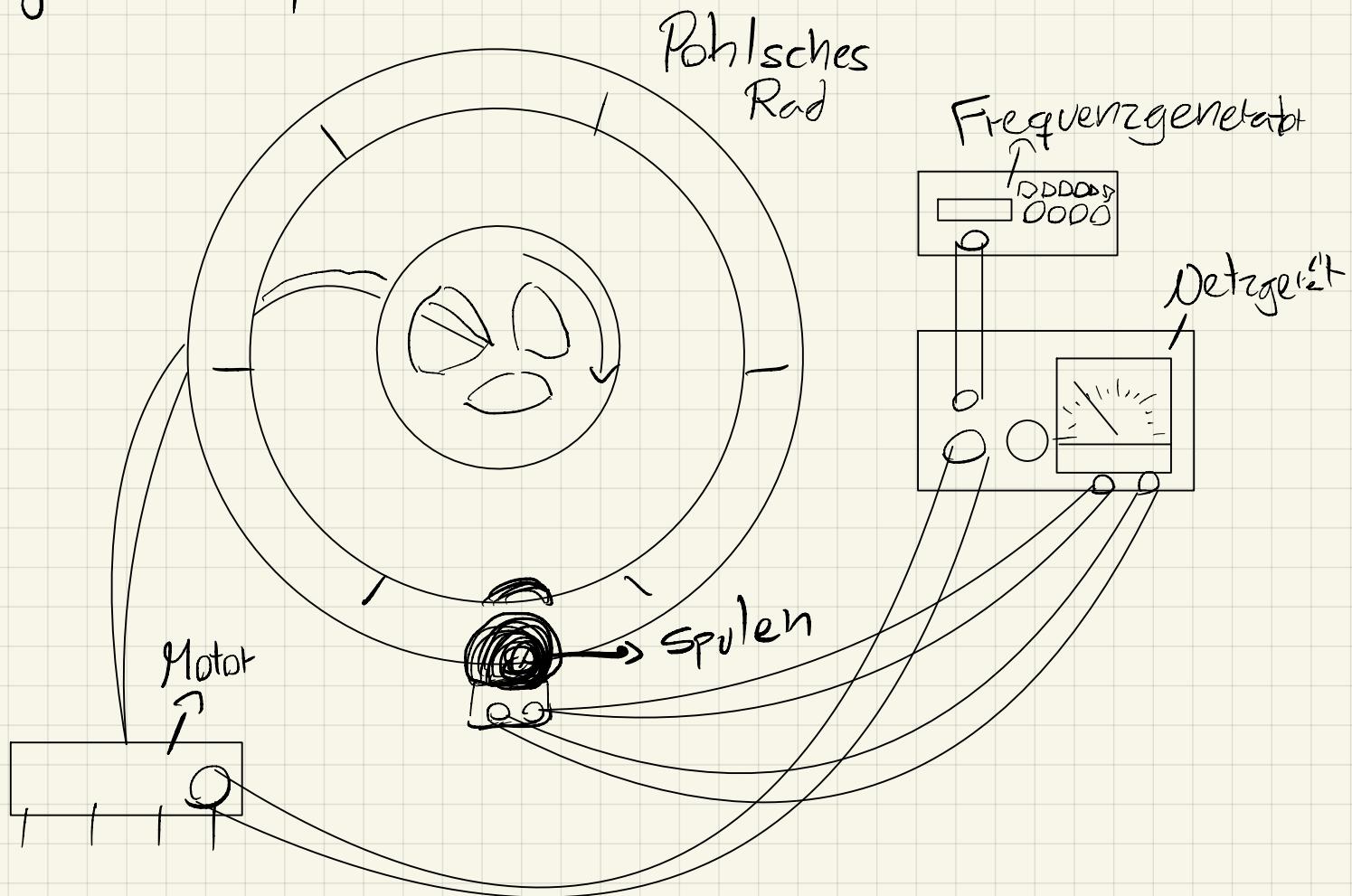


Abb1: Versuchsaufbau und Getäte

Wir messen zuerst 3-mal die Schwingdauer des Polleschen Rads, indem wir mit einer Stoppuhr die Zeit 20 Periodenlängen messen:

$$T_1 = 36,32 \text{ s}$$

$$T_2 = 36,39 \text{ s}$$

$$T_3 = 36,31 \text{ s}$$

Jetzt machen wir die selbe Messung aber beim gedämpften Polleschen Rad.

Wir bestimmen ^{auch} die Zeiten, bei denen zuerst mit Dämpfung 1 und dann mit Dämpfung 2 die Amplitude einer 5% des Maximalausklangs beträgt - diese sind dann die Einschwingraten

$$\begin{array}{c} 12 \\ \sim \\ 28,00 \quad 21,86 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 10 \\ \sim \\ 19,00 \quad 18,01 \end{array}$$

Strom I : (320 mA): (Brückenschaltung Anfangsab-
lung von 1)

Einschwingzeit: 28,00s

Zeitmessung über 12 Perioden: 21,86s

Amplitudenänderung: (Sk.)

| | Sk. |
|-----|------|
| P0 | 19.9 |
| P1 | 16.9 |
| P2 | 14.2 |
| P3 | 12.0 |
| P4 | 10.1 |
| P5 | 8.5 |
| P6 | 7.2 |
| P7 | 6.1 |
| P8 | 5.1 |
| P9 | 4.3 |
| P10 | 3.5 |
| P11 | 2.9 |
| P12 | 2.4 |
| | |

| | Sk. |
|-----|-----|
| P13 | 1.9 |
| P14 | 1.6 |
| P15 | 1.3 |
| P16 | 1.1 |
| P17 | 0.8 |

Tabelle 1

Stream L: (400mA):

Einschwungzeit: 19,00s

Zeitmessung über 10 Perioden: 18,01s

Amplitudenänderung: (Sk.)

| | Sk. |
|-----|------|
| P0 | 19,9 |
| P1 | 15,5 |
| P2 | 12,0 |
| P3 | 9,3 |
| P4 | 7,2 |
| P5 | 5,5 |
| P6 | 4,3 |
| P7 | 3,2 |
| P8 | 2,5 |
| P9 | 1,9 |
| P10 | 1,3 |
| P11 | 1,0 |
| P12 | 0,7 |
| | |

Tabelle 2

Wir schalten jetzt den Motor an mit den 2 Dämpfern u. messen die maximale Ausleuchtung bei verschiedenen Frequenzen

| Schwache Dämpfung | | Starke Dämpfung | | Tabelle 3 | |
|-------------------|----------|-------------------|----------|-------------------|----------|
| Frequenzgenerator | Frequenz | Frequenzgenerator | Frequenz | Frequenzgenerator | Frequenz |
| ↓ | ↓: 4000 | ↓ | ↓: 4000 | ↓ | ↓: 4000 |
| f [Hz] | f [Hz] | Stufen | f [Hz] | f [Hz] | Stufen |
| 480,1 | 0,12 | 0,3 | 480,2 | 0,120 | 0,2 |
| 800,2 | 0,20 | 0,3 | 800,1 | 0,200 | 0,2 |
| 1120,0 | 0,28 | 0,4 | 1120,2 | 0,280 | 0,3 |
| 1440,2 | 0,36 | 0,4 | 1439,6 | 0,360 | 0,4 |
| 1760,0 | 0,44 | 0,7 | 1760,3 | 0,440 | 0,6 |
| 2080,1 | 0,52 | 1,4 | 2082 | 0,521 | 1,3 |
| 2140 | 0,586 | 2,3 | 2160 | 0,540 | 1,9 |
| 2219 | 0,565 | 3,6 | 2240 | 0,560 | 2,4 |
| 2300 | 0,558 | 2,5 | 2320 | 0,580 | 1,8 |
| 2522 | 0,656 | 0,6 | 2640 | 0,660 | 0,5 |
| 2940 | 0,735 | 0,3 | 2961 | 0,740 | 0,3 |
| 3362 | 0,841 | 0,2 | 3360 | 0,840 | 0,2 |
| 2229 | 0,55 | 3,9 | 2200 | 0,55 | 2,2 |
| 2200 | 0,550 | 3,3 | 2281 | 0,57 | 2,2 |
| 2240 | 0,56 | 3,6 | 2229 | 0,55 | 2,5 |
| 2235 | 0,559 | 3,7 | 2219 | 0,565 | 2,4 |

Qualitative Beobachtung: (Phase des
Poldson Rads
geg.)

Bei kleiner Frequenz: fast 0 Phasenversetzen. Ratio)

Resonanzfrequenz: $\frac{\pi}{2}$

Bei größer Frequenz: fast π Phasenversetzen

Fehlerabschätzung

Skala am Drehrad:

$$\Delta S_k = \sqrt{0,12 + 0,12} \stackrel{!}{=} 0,14 \text{ Sht}$$

↓ ↴ Ablesefehler wegees
Ablesefehler Geschwindigkeit
wegeen Skalenteilung

Netzgerät: (Dämpfungsstrom)

$$\Delta I = 5 \text{ mA} \quad (\frac{1}{4} \text{ der Skalenteilung})$$

Frequenzwiegengenerator: (Schwankungen):

$$\Delta f = 4 \text{ Hz} \Rightarrow \Delta f_M = 0,001$$

Py WD

Abbildung 2: Pohlsches Rad Aufbau



3 Auswertung

3.1 Fehlerabschätzung

Bevor ich mit der eigentlichen Auswertung des Versuches beginne, werde ich die angenommenen Fehler genauer erläutern.

Die Auslenkung, welche über die Skalenteilung am Drehrad bestimmt wurde, besitzt einen Fehler, der sich zum einen aus einem Ablesefehler von $0,1 Skt$ der durch die Geschwindigkeit des Zeigers entsteht (dieser ist recht klein gewählt, da die Auslenkungen mit der Slow-Motion-Video-Funktion des iPads aufgenommen wurden und man hieran die Auslenkung sehr genau bestimmen konnte) und zum anderen aus dem Fehler der Skalenteilung von ebenfalls $0,1 Skt$. Insgesamt ergibt sich: $\sqrt{0,1^2 + 0,1^2} Skt = 0,14 Skt$.

Für die Messung der Schwingungsdauer mit der Stoppuhr wird für die gemessene Zeit ein Fehler von $0,2s$ angenommen, welcher sowohl den menschlichen Reaktionsfehler berücksichtigt und ein Ablesefehler von $0,01s$. Beides ergibt zusammen $\sqrt{0,01^2 + 0,20^2} s = 0,20s$.

Für die Dämpfungsströme, die über das Netzgerät eingestellt wurden entsteht ein Fehler von $5mA$ wegen der Skalenteilung.

Für den Antrieb des Motors, welcher über den Frequenzgenerator erfolgt ist, wurde ein Fehler von $4Hz$ angenommen.

3.2 Freie Schwingung: Schwingungsperiode

Als erstes soll die Schwingungsperiode der freien Schwingung bestimmt werden. Im Versuch wurde drei Male die Zeit gemessen, welche das ungedämpfte Dreh-

pendel benötigt, um 20 Schwingungen zu durchführen. Dabei müssen diese Zeiten durch 20 geteilt werden, um die Periodendauern zu erhalten. Daraus wird der Mittelwert gebildet und der Fehler des Mittelwertes berechnet. Der Fehler des Mittelwertes ergibt $0,0012s$. Dabei muss neben diesem auch noch der systematische Fehler von uns bei der Zeitmessung berücksichtigt werden. Für diesen gilt: $\frac{0,2s}{20} = 0,01s$. Quadratische Addition des statistischen uns systematischen Fehlers ergibt wieder $0,010s$. Insgesamt erhalten wir für die freie ungedämpfte Schwingungsdauer T_0 :

$$\overline{T_0} = (1,818 \pm 0,010)s \quad (15)$$

3.3 Dämpfungskonstante bei freier, gedämpften Schwingung

Im zweiten Schritt des Versuches wurde zunächst die Dämpfung des Drehpendels qualitativ beobachtet. Dabei haben wir das bereits davor überlegte exponentielle Abklingen der Amplitude festgestellt. Außerdem war die Dämpfung des Pendels bei dem Strom von $400mA$ auch deutlich grösser als beim Strom von $320mA$. Dies liegt an der bereits erklärten Funktionsweise der Wirbelstrombremse. Bei einem grösseren Strom ist das Magnetfeld was durch die Elektromagneten erzeugt wird auch entsprechend stärker und somit auch die induzierten Wirbelströme, welche das Drehpendel zum Stillstand zwingen wollen.

Nun wollen wir diesen Prozess auch quantitativ untersuchen. Dazu wurde die Amplitude der Schwingung bei den beiden unterschiedlichen Dämpfungen beobachtet und nach jeder Schwingung notiert (siehe Tabelle 1 des Messprotokolls). Dazu haben wir ein Video in Slow-Motion der Schwingung aufgenommen um die Amplituden genauer ablesen zu können.

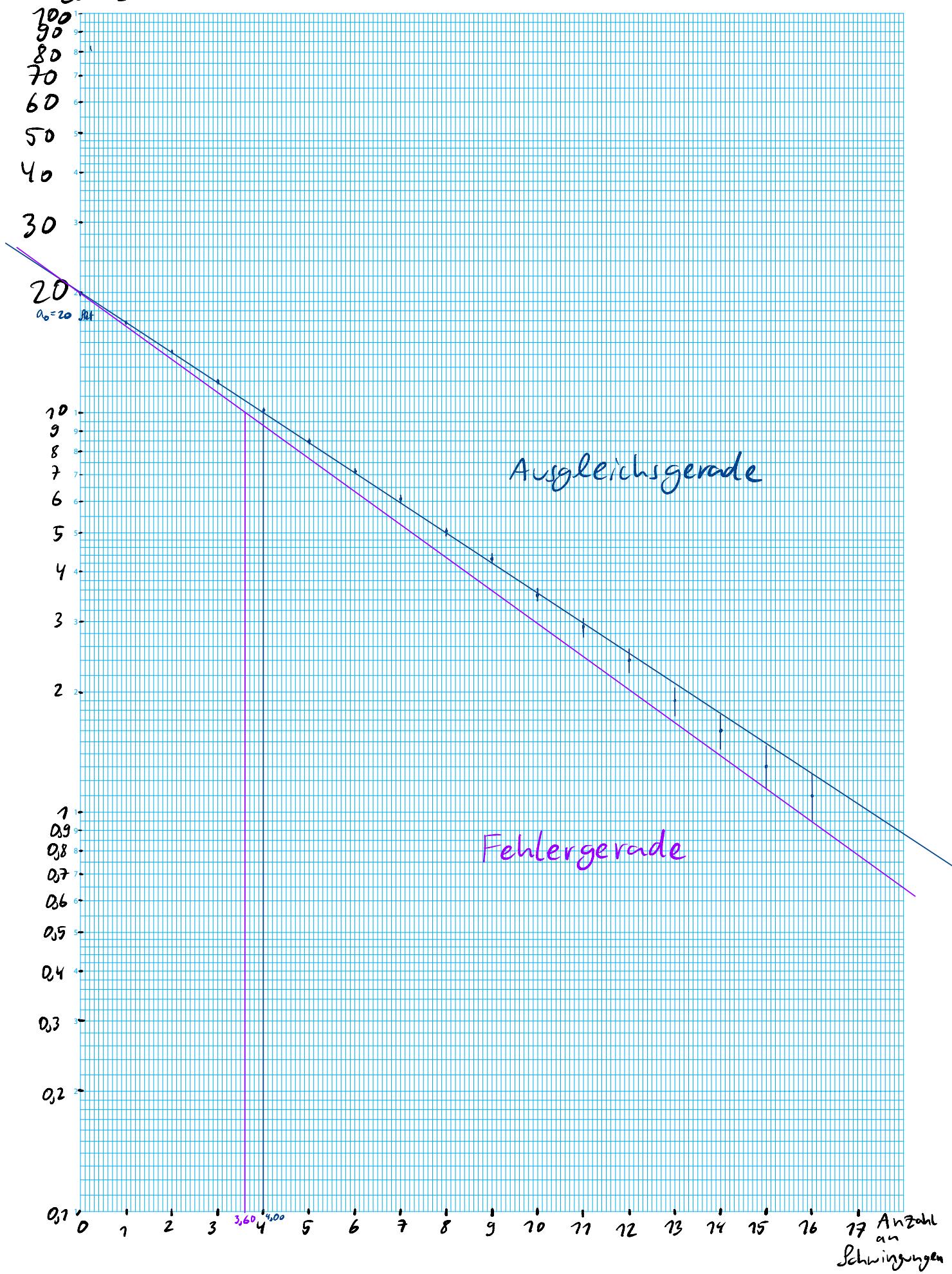
Die Dämpfung kann, wie in den Grundlagen besprochen, über die Zeit $t_{1/2}$ ermittelt werden, nach der die Amplitude zur Hälfte der Anfangsamplitude gesunken ist. Es gilt:

$$\delta = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad (16)$$

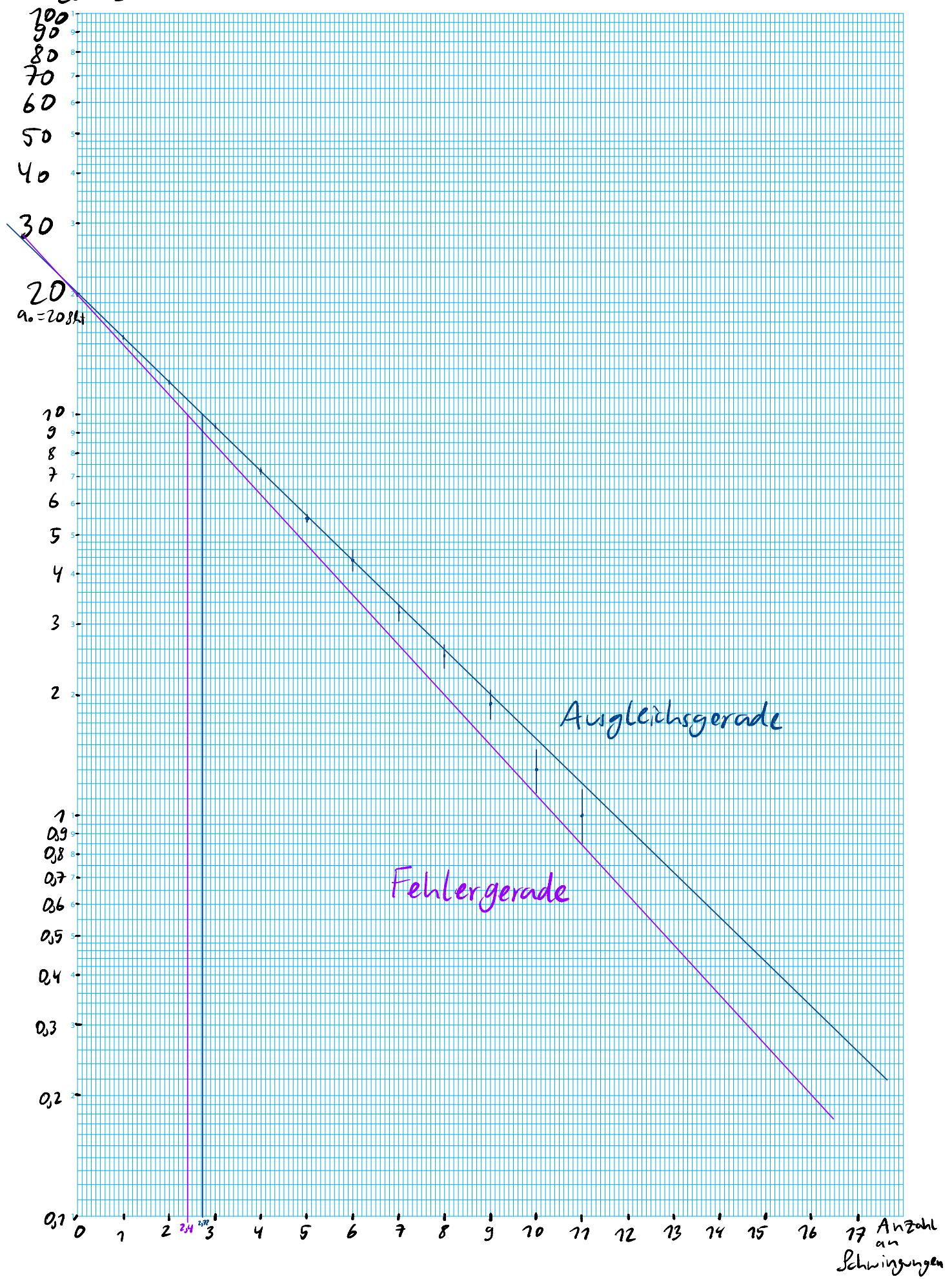
Um diese Zeit zu bestimmen muss die Auslenkung $a(t)$ gegen die Anzahl an Schwingungen n in logarithmischen Massstab aufgetragen werden, damit man anhand der Ausgleichsgerade leicht erkennen kann, an welchem Punkt die Hälfte der Anfangsamplitude erreicht wurde und mit der Fehlergerade der Fehler abgeschätzt werden kann. Der Fehler entspricht der Differenz der Anzahl an Schwingungen nach der die Fehlergerade anzeigt, dass $t_{1/2}$ erreicht wurde mit der Anzahl an Schwingungen der Ausgleichsgeraden.

Die Ausgleichsgerade wurde so gezeichnet, sodass bei niedrigen Schwingungszahlen, sie fast genau durch die Punkte geht. Bei höheren Schwingungszahlen ist der relative Fehler den man beim Ablesen macht nämlich entscheidend grösser (da der absolute Fehler für die Auslenkung konstant bei $0,14Skt$ liegt) und entsprechend sind diese nicht so genau und weichen vom eigentlichen Wert etwas ab.

Auslenkung [Skt] grafische Bestimmung der Dämpfung δ für $I = 320 \text{ mA}$



Auslenkung [Skt] grafische Bestimmung der Dämpfung δ für $I = 400 \text{ mA}$



Für die Anzahl an Schwingungen gilt:

$$n_1 = (4,0 \pm 0,4) \quad (17)$$

$$n_2 = (2,7 \pm 0,3) \quad (18)$$

Dabei bezeichnet n_1 die Anzahl bei der schwächeren Dämpfung und n_2 die Anzahl bei der stärkeren.

Um anschliessend die dazugehörige Zeit zu bestimmen sind zuerst die Schwingungsdauern notwendig. Wir erhalten aus den Messungen:

$$T_1 = (1,822 \pm 0,017)s \quad (19)$$

$$T_2 = (1,801 \pm 0,020)s \quad (20)$$

Der Fehler entsteht durch die Division von $0,2s$ durch 12 bzw. 10 Schwingungen.
Für die Zeiten gilt:

$$t_{1/2(1)} = n_1 \cdot T_1 = (7,3 \pm 0,7) \quad (21)$$

$$t_{1/2(2)} = n_2 \cdot T_2 = (4,9 \pm 0,5) \quad (22)$$

Für die Fehler:

$$\Delta t_{1/2} = \sqrt{(T \Delta n)^2 + (n \Delta T)^2} \quad (23)$$

Für die Dämpfung gilt somit insgesamt:

$$\delta = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad (24)$$

$$\Delta \delta = \frac{\delta \Delta t_{1/2}}{t_{1/2}} \quad (25)$$

$$\Rightarrow \delta_1 = (0,095 \pm 0,009)Hz \quad (26)$$

$$\delta_2 = (0,141 \pm 0,014)Hz \quad (27)$$

Dabei ist δ_1 die Dämpfungskonstante die einem Strom von $320mA$ entspricht und δ_2 die, die $400mA$ entspricht.

3.4 Dämpfungskonstante bei erzwungenen, gedämpften Schwingung

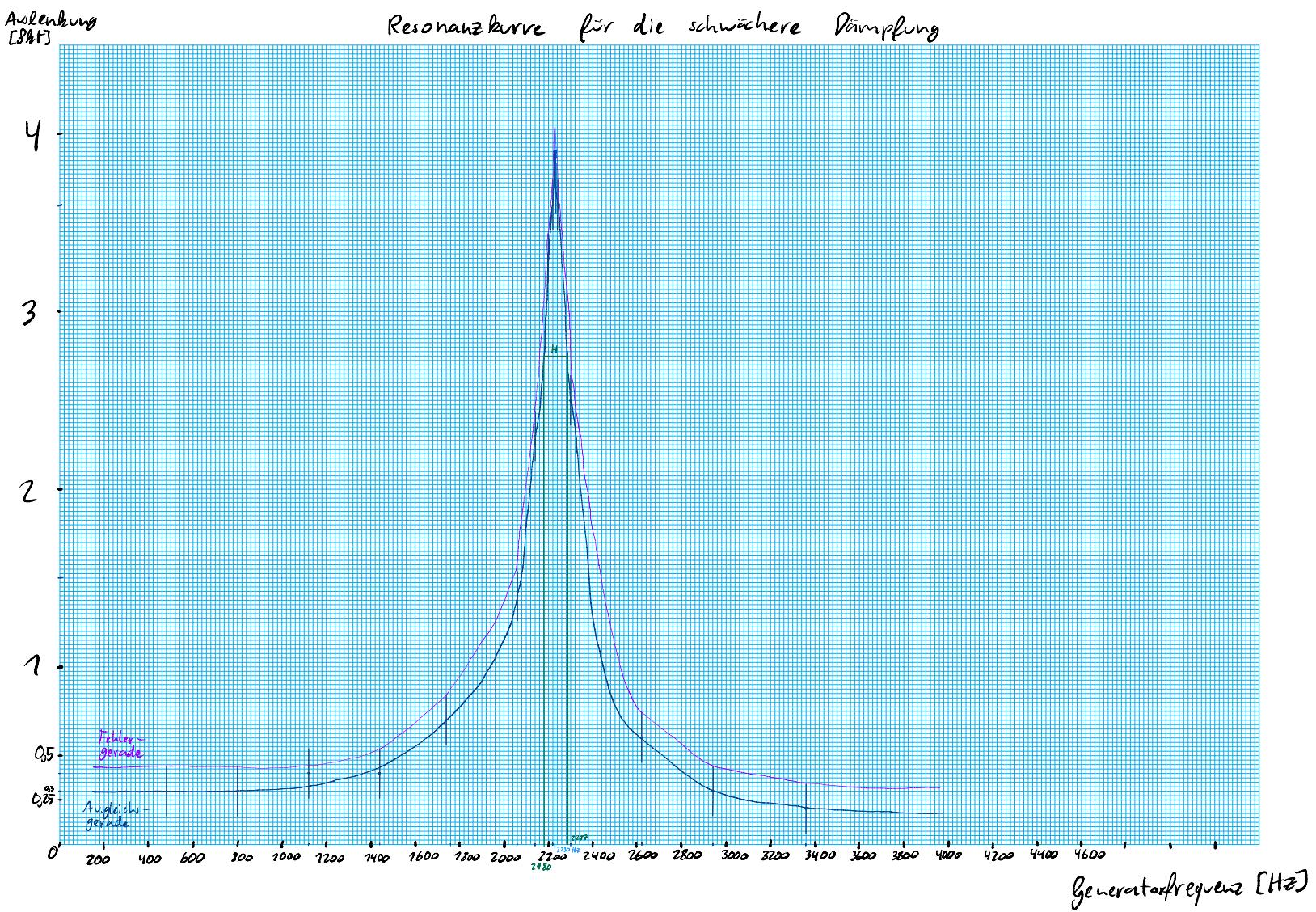
Im letzten Versuchsteil beschäftigen wir uns mit der erzwungenen, gedämpften Schwingung.

Mit dem Frequenzgenerator wurde an das Drehpendel über einen Motor eine Frequenz angelegt. Dabei entspricht einer angelegten Frequenz von $4000Hz$ des Motors $1Hz$ der Schwingung des Drehpendels.

Die stationäre Amplitude wurde in Abhängigkeit von der angelegten Frequenz für beide Dämpfungen registriert (siehe Tabelle 3 des Messprotokolls: links die schwächere Dämpfung und rechts die stärkere). Bevor die Amplitude gemessen

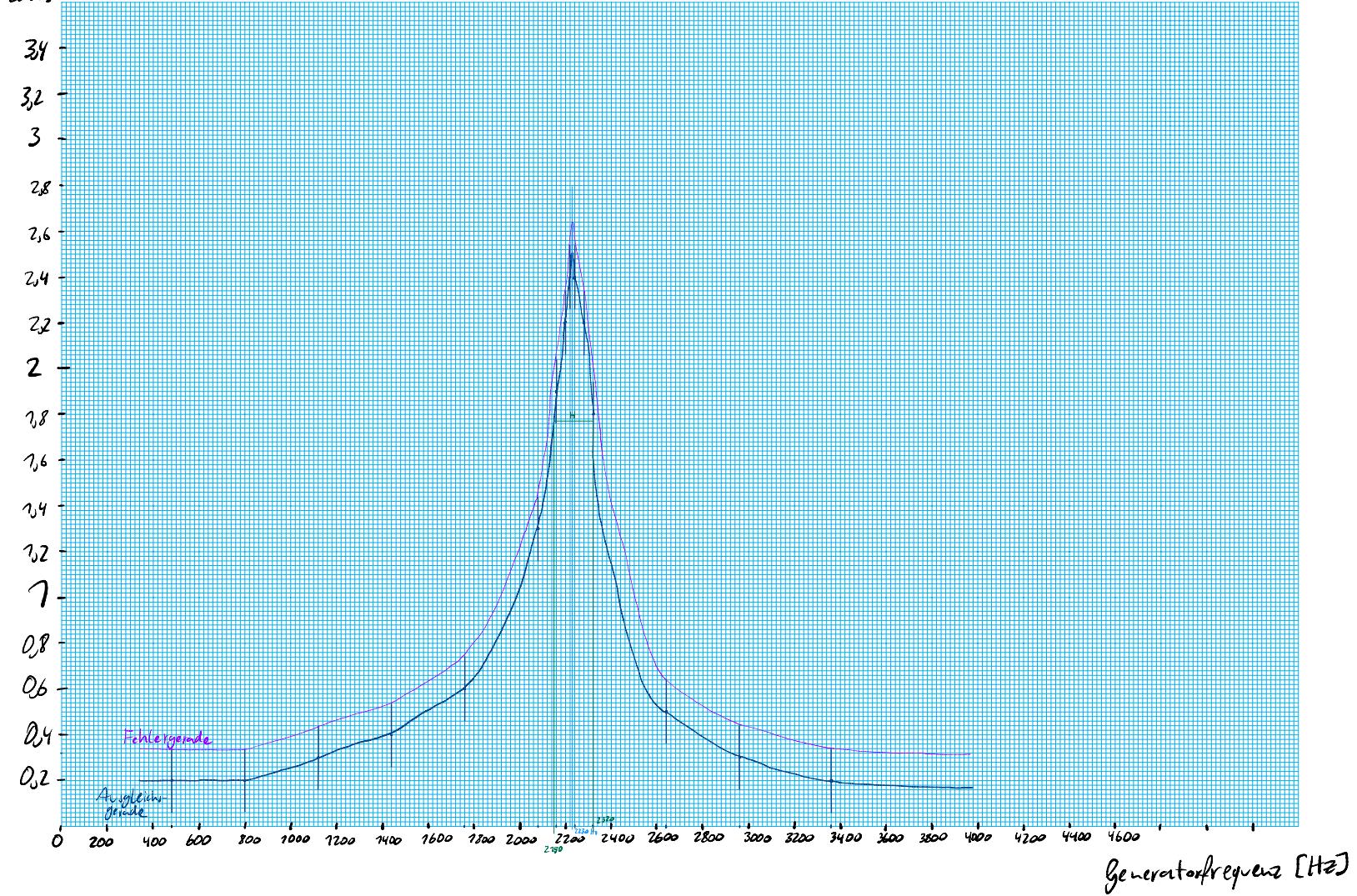
wird, wurde der Einschwingvorgang abgewartet, dessen Zeit bereits im Schritt davor als die Zeit die das Drehpendel benötigt um auf 5% seiner Anfangsamplitude zu kommen, bestimmt wurde. Dabei wurden kleinere Frequenzschritte in der Nähe der Resonanzfrequenz gewählt als weiter entfernt davon.

Die Amplitude wird für jede Dämpfung gegen die Generatorfrequenz aufgetragen. Der Fehler der Auslenkung wird durch Fehlerbalken angegeben. Da die Generatorfrequenz nur einen Fehler von 4Hz besitzt, ist dieser Fehler in meinem Diagramm bereits durch den Punkt des eingetragenen Messwertes gekennzeichnet (er ist sehr klein).



Auslenkung
[dB/t]

Resonanzkurve für die stärkere Dämpfung



Wir erhalten erstaunlicherweise genau, die gleiche Resonanzfrequenz bei beiden Dämpfungen:

$$f_{Resonanz} = (2230 \pm 4) \text{Hz} \quad (28)$$

Diese wollen wir mit der Eigenfrequenz $w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = (3,456 \pm 0,019) \text{Hz}$ der Schwingung vergleichen. Dazu muss die Resonanzfrequenz in w' gemäss

$$w' = \frac{2_{Resonanz}}{4000} \quad (29)$$

$$\Delta w' = \frac{2\pi\Delta f_{Resonanz}}{4000} \quad (30)$$

umgerechnet werden. Wir erhalten (für beide Dämpfungen da die Resonanzfrequenz gleich ist):

$$w' = (3,503 \pm 0,006) \text{Hz} \quad (31)$$

Aus Gleichung (11) folgt:

$$w_0 = \sqrt{w'^2 + 2\delta^2} \quad (32)$$

$$\Delta w_0 = \sqrt{\left(\frac{\Delta w' 2 w'}{2\sqrt{w'^2 + 2\delta^2}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \delta 2 \delta}{\sqrt{w'^2 + 2\delta^2}}\right)^2} \quad (33)$$

Für die Dämpfungskonstante wird die aus dem Teil der freien, gedämpften Schwingung verwendet. Dabei wird einmal die schwache Dämpfung für w_{01} berücksichtigt und einmal die starke für w_{02} .

Wir erhalten:

$$w_{01} = (3,506 \pm 0,006) \text{Hz} \quad (34)$$

$$w_{02} = (3,509 \pm 0,006) \text{Hz} \quad (35)$$

Im Anschluss soll sowohl aus der Halbwertsbreite, als auch aus der Resonanzüberhöhung die Dämpfungskonstante bestimmt werden.

Um die Halbwertsbreite H zu bestimmen, wird geprüft, welche Frequenzen der Höhe $\frac{b(w')}{\sqrt{2}} = \frac{3,9 Skt}{\sqrt{2}}$ (schwache Dämpfung) bzw. $\frac{2,5 Skt}{\sqrt{2}}$ (starke Dämpfung) entsprechen.

Nach (12) gilt:

$$\delta = \frac{w_2 - w_1}{2} = \frac{\pi(f_2 - f_1)}{4000} \quad (36)$$

$$\Delta \delta = \frac{\pi \sqrt{\Delta f_2^2 + \Delta f_1^2}}{4000} \quad (37)$$

Für die Fehler von den beiden Frequenzen werden diesmal jedoch nicht die üblichen 4Hz verwendet, da in diesem Fall die Frequenz am gezeichneten Diagramm abgelesen werden muss, wobei die Stelle nicht genau auf einen Messwert trifft.

Die Resonanzfrequenz war viel genauer bestimmbar, da wir sehr viele Werte um sie gemessen haben und einer unserer Messwerte den Hochpunkt darstellte. Für die Frequenzen hier wurde anhand möglicher Abweichungen durch das Zeichnen des Diagramms ein Fehler von 20Hz für plausibel gehalten.

Für die Dämpfungen (schach: 1, stark:2) erhalten wir somit jeweils:

$$\delta_{H1} = (0, 084 \pm 0, 022)\text{Hz} \quad (38)$$

$$\delta_{H2} = (0, 134 \pm 0, 022)\text{Hz} \quad (39)$$

Zum Schluss werden wir über eine dritte Methode die Dämpfungen mit der Resonanzüberhöhung bestimmen. Sei R die Resonanzüberhöhung. Nach (13) aus den Grundlagen gilt:

$$\delta = \frac{w_0}{2R} = \frac{w_0}{2} \frac{b(w \rightarrow 0)}{b(w')} \quad (40)$$

$$\Delta\delta = \delta \sqrt{\left(\frac{\Delta w_0}{w_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b(w \rightarrow 0)}{b(w \rightarrow 0)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b(w')}{b(w')}\right)^2} \quad (41)$$

Dabei kann dem Diagramm für schwache (1) und starke (2) Dämpfung die Werte:

$$b_1(w \rightarrow 0) = (0, 30 \pm 0, 14)\text{Skt} \quad (42)$$

$$b_2(w \rightarrow 0) = (0, 20 \pm 0, 14)\text{Skt} \quad (43)$$

$$b_1(w') = (3, 9 \pm 0, 14)\text{Skt} \quad (44)$$

$$b_2(w') = (2, 5 \pm 0, 14)\text{Skt} \quad (45)$$

Somit wurden für die Dämpfungskonstanten folgende Ergebnisse ermittelt:

$$\delta_{R1} = (0, 13 \pm 0, 06)\text{Hz} \quad (46)$$

$$\delta_{R2} = (0, 138 \pm 0, 010)\text{Hz} \quad (47)$$

Alle bestimmten Dämpfungskonstanten werden in der Diskussion verglichen und kommentiert.

3.5 Qualitative Beobachtung der Phasenverschiebung

Ganz am Ende haben wir noch untersucht, ob und wie sich die Phasenverschiebung zwischen der Schwingung des Motors und der Schwingung des Drehpendels unter unterschiedlichen Erregerfrequenzen verändert. Bei Frequenzen, welche deutlich kleiner als die bestimmte Resonanzfrequenz waren, weist der Erreger und der Schwinger keine Phasenverschiebung voneinander auf. Als die Resonanzfrequenz eingestellt wurde, eilte die Motorschwingung dem Schwinger um etwa $\pi/2$ voraus. Bei deutlich höheren Frequenzen konnte beobachtet werden, wie sich die Phasenverschiebung genau π annäherte.

4 Zusammenfassung und Diskussion

Zusammenfassend haben wir uns in diesem Versuch mit den drei grundlegendsten Schwingungsarten - der ungedämpften, gedämpften und erzwungenen gedämpften Schwingung - am Beispiel des Pohlschen Rads beschäftigt.

Dabei haben wir zuerst über dreimalige Messung der Zeiten für 20 Schwingungen, die Schwingungsperiode der freien ungedämpften Schwingung zu $\bar{T}_0 = (1,818 \pm 0,010)s$ bestimmt.

Danach haben wir über drei unterschiedliche Methoden die Dämpfungskonstante einer freien gedämpften und einer erzwungenen gedämpften Schwingung, bei zwei unterschiedlichen Dämpfungen bestimmt. Die Dämpfung erfolgte dabei über die Einstellung eines Stromes, welcher an zwei Elektromagneten angeschlossen war, dessen induktiven Wirbelströme das Rad bremsten.

Die erste Methode, bei der freien Schwingung bestand darin, die Auslenkung der Schwingung nach ganzzahligen Schwingungsanzahlen zu notieren und logarithmisch grafisch aufzustragen. An dem Diagramm konnte dann die Zeit ermittelt werden, nach der die Amplitude zur Hälfte der Anfangsamplitude abgenommen hatte. Damit konnte direkt die Dämpfungskonstante zu $\delta_1 = (0,095 \pm 0,009)Hz$ bzw. $\delta_2 = (0,141 \pm 0,014)Hz$ (stärkere Dämpfung) bestimmt werden.

Die zweite Methode, bei der erzwungenen, gedämpften Schwingung bestand darin, die Resonanzkurve, d.h. die Auslenkung in Abhängigkeit des Erregerfrequenz, für beide Dämpfungen jeweils zu zeichnen. Daraus konnte dann die Halbwertsbreite abgelesen werden, mit welcher die Dämpfungen zu $\delta_{H1} = (0,084 \pm 0,022)Hz$ bzw. $\delta_{H2} = (0,134 \pm 0,022)Hz$ bestimmt wurden.

Die Resonanzkurve konnte weiterhin für die dritte Methode ausgenutzt werden, in welcher wir die Dämpfung über die Resonanzüberhöhung bestimmt haben. Diese konnte dem Diagramm leicht entnommen werden und die Rechnung lieferte $\delta_{R1} = (0,13 \pm 0,06)Hz$ bzw. $\delta_{R2} = (0,138 \pm 0,010)Hz$.

Bei der erzwungenen gedämpften Schwingung wurde außerdem die Resonanzfrequenz bestimmt und für jede Dämpfung die erwartete Eigenfrequenz des Drehpendels zu $w_{01} = (3,506 \pm 0,006)Hz$ bzw. $w_{02} = (3,509 \pm 0,006)Hz$ bestimmt. Diese wird in der Diskussion mit der Eigenfrequenz des Drehpendels aus der ungedämpften Schwingung $w_0 = (3,456 \pm 0,019)Hz$ verglichen.

Zum Schluss haben wir die Phasenverschiebung bei unterschiedlichen Erregerfrequenzen beobachtet und festgestellt dass bei niedrigen Frequenzen diese nahezu verschwindet, bei der Resonanzfrequenz in etwa $\pi/2$ entspricht und bei grösseren Frequenzen genau π .

Im Anschluss möchte ich die ermittelten Ergebnisse miteinander vergleichen, auf Abweichungen eingehen und diese diskutieren und Verbesserungsmöglichkeiten des Versuches zur genaueren Bestimmung der Grössen und Minimierung der Fehler präsentieren. Im Anschluss wird für die Sigma-Abweichung folgende Formel verwendet:

$$\frac{|Wert1 - Wert2|}{\sqrt{Fehler1^2 + Fehler2^2}} \quad (48)$$

Über die Resonanzfrequenz wurde die Eigenfrequenz des Drehpendels bei beiden Dämpfungen hergeleitet (w_{01} und w_{02}). Diese können mit der Eigenfrequenz verglichen werden, welche aus der Schwingungsdauer der freien ungedämpften Schwingung kommt. Für die schwächere Dämpfung kommt es zu einer absoluten Abweichung von $0,05\text{Hz}$ zum ungedämpften Wert, was $2,5\sigma$ -Abweichungen entspricht. Bei der stärkeren Dämpfung ist die absolute Abweichung $0,053\text{Hz}$, was einer $2,7\sigma$ -Abweichung entspricht. Dabei sollte man beachten, dass die sigma-Abweichungen trotz geringen absoluten Abweichungen ziemlich hoch sind, da vor allem die Fehler der über die Dämpfung berechneten Frequenzen sehr klein sind und dazu beispielsweise der Fehler der Resonanzfrequenz der in diesen Fehler einen Einfluss hat, erhöht werden könnte. Die absoluten Abweichungen sind dabei nicht signifikant, weshalb man davon ausgehen kann, dass die theoretisch hergeleiteten Formeln stimmen, da die Eigenfrequenzen übereinstimmen. Würde man also keine Dämpfung anlegen (oder näherungsweise eine sehr sehr schwache), dann kommt ein System genau dann in Resonanz, wenn Resonanzfrequenz und Eigenfrequenz übereinstimmen, was ein ziemlich interessantes Ergebnis ist. Die Dämpfungskonstanten die über eine grafische Methode bei der freien Schwingung(Methode 1), die Halbwertsbreite (Methode 2) und die Resonanzüberhöhung (Methode 3) bestimmt wurden, werden in Tabelle 1 miteinander verglichen: An der Tabelle kann man erkennen, dass die Abweichungen alle nicht

Tabelle 1: Abweichungen und Fehler bei den Dämpfungskonstanten

| | Schwache Dämpfung [Hz bzw. σ] | Starke Dämpfung [Hz bzw. σ] |
|-------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| Methode 1 | 0,095 | 0,141 |
| Fehler 1 | 0,009 | 0,014 |
| Methode 2 | 0,084 | 0,134 |
| Fehler 2 | 0,022 | 0,022 |
| Methode 3 | 0,13 | 0,138 |
| Fehler 3 | 0,06 | 0,010 |
| Absolute Abw. 1&2 | 0,011 | 0,007 |
| Sigma Abw. 1&2 | 0,5 | 0,27 |
| Absolute Abw. 1&3 | 0,04 | 0,003 |
| Sigma Abw. 1&3 | 0,6 | 0,17 |
| Absolute Abw. 2&3 | 0,05 | 0,004 |
| Sigma Abw. 2&3 | 0,7 | 0,17 |

signifikant sind. Somit sind alle 3 Methoden zur Bestimmung der Dämpfungskonstante valide. Alle Ergebnisse stimmen unter Berücksichtigung ihrer Fehlergrenzen miteinander überein. Jedoch ist auffällig, dass der Fehler bei der ersten Methode viel geringer ist als bei den beiden anderen. Dies kann dadurch ge deutet werden, dass bei der ersten grafischen Methode, kein Erreger verwendet wurde, was impliziert, das weniger Fehler bei der Fehlerrechnung berücksichtigt werden mussten. Somit stellt sich die erste Methode als die genaueste heraus. Würde man den Versuch noch genauer durchführen wollen, so könnte man, anstatt die Gerade , anhand der die Halbamplitudenzeit $t_{1/2}$ bestimmt wurde, per

Hand und Augenmass zu zeichnen, ein Computerprogramm wie Python nutzen, welches die nötige Regression berechnen kann und somit die Ausgleichsgerade viel genauer einzeichnen kann. Vermutlich spielte der grafisch gemachte Fehler bei dieser Methode die grösste Rolle.

Die zweite und dritte Methode sind, wie bereits angedeutet, zwar fehlerreicher, da auch der erzwungene Teil berücksichtigt werden muss. Hinzu kommt der grafische Fehler beim Zeichnen der Resonanzkurve. Dieser hat bei der Methode mit der Resonanzüberhöhung einen grossen Einfluss, da vor allem in der Nähe des Nullwertes für die Frequenz, nicht viele Messwerte aufgenommen wurden und somit die Kurve hier ein wenig willkürlich gezeichnet wurde. Mehr Messwerte und ein Computerprogramm zum Zeichnen der Kurve hätten die Fehler drastisch reduziert. Dies ist vor allem bei der schwachen Dämpfung erkennbar, die bei der dritten Methode die grösste absolute Abweichung zu den anderen beiden Methoden zeigt.

Ausserdem war die Feder von unserem Drehpendel schon etwas ausgenutzt, weshalb diese eine Anfangsauslenkung von 0,1 (im Ruhezustand) hatte, die während des Versuchs immer wieder berücksichtigt werden musste. Bei richtiger Einstellung des Drehpendels hätten wir die Messungen einfacher und genauer machen können, da diese Korrektur nicht dauernd notwendig wäre.

Insgesamt empfand ich den Versuch sehr lehrreich, um noch einmal die grundlegenden Schwingungsarten zu wiederholen und diese experimentell und visuell etwas zu veranschaulichen und intuitiver zu machen.

Ein tiefes Verständnis für unterschiedliche Schwingungsarten ist die Grundlage für sehr viele Phänomene in der Physik. Sowohl in Forschung als auch in der Praxis, hat man näherungsweise oft mit diesen drei Schwingungsarten zu tun. So muss ein Ingenieur beispielsweise beim Bau einer Brücke den Wind (als Erreger einer erzwungenen Schwingung) berücksichtigen, damit die Frequenz mit der dieser die Brücke zum Schwingen bringt, nicht genau der Eigenfrequenz der Brücke entspricht. In diesem Fall kann es nämlich zur Resonanzkatastrophe kommen und die Brücke zusammenbrechen. Es ist erstaunlich, wie bei einem nicht so hohen Wind, ganze riesige Brücken zerstört werden können, wenn die Eigenfrequenz getroffen wurde. Dies passierte tragischerweise im 20. Jahrhundert bei der bekannten Tacoma-Bridge-Hängebrücke in Washington. Im Internet findet man Aufnahmen von der Resonanzkatastrophe.