

# Versuch 211: Gekoppelte Pendel

Yago Obispo Gerster

1. März 2024

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung und Motivation</b>	<b>1</b>
1.1 Physikalische Grundlagen . . . . .	2
1.1.1 Kopplung von zwei Pendeln allgemein . . . . .	2
1.1.2 Symmetrische Kopplung . . . . .	3
1.1.3 Asymmetrische Kopplung . . . . .	4
1.1.4 Schwebungsschwingung . . . . .	4
1.1.5 Kopplungsgrad . . . . .	5
<b>2 Versuchsaufbau und Messtechnik</b>	<b>6</b>
<b>3 Messprotokoll</b>	<b>6</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>11</b>
4.1 Fehlerabschätzung . . . . .	11
4.2 Beobachtete Schwingungen und Frequenzspektren . . . . .	11
4.3 Bestimmung der Frequenzen . . . . .	13
4.4 Kopplungsgrade . . . . .	17
<b>5 Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>19</b>
5.1 Diskussion der Ergebnisse . . . . .	20
<b>6 Quellen</b>	<b>21</b>

## 1 Einleitung und Motivation

In diesem Versuch werden wir uns mit gekoppelten Schwingungen beschäftigen und werden diese am Beispiel von zwei Pendeln quantitativ und am Beispiel von einem Schwingkreis mit Spulenkopplung qualitativ untersuchen. Das Ziel des Versuches ist es, bei unterschiedlichen Arten und Stärken von Pendelkopp- lungen die Frequenzen der einzelnen Pendel zu bestimmen und miteinander zu vergleichen.

## 1.1 Physikalische Grundlagen

Deshalb beginne ich vor der Vorstellung des Versuchs mit einer kurzen theoretischen Einführung zu den Kopplungsarten bei Oszillatoren. Dabei sind 3 davon wesentlich: die *Symmetrische Kopplung*, die *Asymmetrische Kopplung* und die *Schwebungsschwingung*.

### 1.1.1 Kopplung von zwei Pendeln allgemein

Ein harmonischer Oszillator kann über die Differentialgleichung

$$J\ddot{\phi} + D\phi = 0 \quad (1)$$

beschrieben werden, wobei  $J$  das Trägheitsmoment und  $D$  das Direktionsmoment ist. Die Frequenz entspricht dabei  $w = \sqrt{\frac{D}{J}}$  und im Spezialfall eines Pendels wo  $D = mgl$  ( $m$  Masse,  $g$  Erdbeschleunigung und  $l$  Pendellänge) gilt und das Trägheitsmoment einer Punktmasse betrachtet wird:  $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Bei der Kopplung von zwei Pendeln wirken auf die einzelne Pendel noch zusätzliche Drehmomente. Die Kopplung erfolgt über eine Feder mit Direktionsmoment  $D' = D_F \cdot l^2$ , wobei  $D_F$  die Federkonstante ist. Für die durch die Kopplung erzeugte Drehmomente gilt:

$$M_1 = D'(\phi_2 - \phi_1) \quad (2)$$

$$M_2 = D'(\phi_1 - \phi_2) \quad (3)$$

Werden diese bei der DGL berücksichtigt so erhält man das System:

$$J\ddot{\phi}_1 = -D\phi_1 + D'(\phi_2 - \phi_1) \quad (4)$$

$$J\ddot{\phi}_2 = -D\phi_2 + D'(\phi_1 - \phi_2) \quad (5)$$

Um diese zu entkoppeln werden beide zuerst aufeinanderaddiert und dann von einander subtrahiert:

$$(\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2)J = -(\phi_1 + \phi_2)D \quad (6)$$

$$(\ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2)J = (\phi_2 - \phi_1)D + 2D'(\phi_2 - \phi_1) \quad (7)$$

$$u := \phi_1 + \phi_2 \quad v = \phi_1 - \phi_2 \quad (8)$$

$$\Rightarrow J\ddot{u} + Du = 0 \quad (9)$$

$$J\ddot{v} + (D + 2D')v = 0 \quad (10)$$

Dabei wurde eine Substitution durchgeführt um diese im nächsten Schritt einfacher zu lösen. Die Lösungen sind trigonometrische Funktionen. Wenn  $u$  und  $v$

resubstituiert werden, so erhält man:

$$u(t) = A_1 \cos(w_1 t) + B_1 \sin(w_1 t) \quad (11)$$

$$v(t) = A_2 \cos(w_2 t) + B_2 \sin(w_2 t) \quad (12)$$

$$\phi_1(t) = \frac{A_1 \cos(w_1 t) + B_1 \sin(w_1 t) + A_2 \cos(w_2 t) + B_2 \sin(w_2 t)}{2} \quad (13)$$

$$\phi_2(t) = \frac{A_1 \cos(w_1 t) + B_1 \sin(w_1 t) - A_2 \cos(w_2 t) - B_2 \sin(w_2 t)}{2} \quad (14)$$

(15)

mit  $w_1 = \sqrt{\frac{D}{J}}$  und  $w_2 = \sqrt{\frac{D+2D'}{J}}$ .

Diese Bewegungsgleichungen sind jedoch sehr unübersichtlich und schwer interpretierbar, weshalb diese durch Anfangsbedingungen vereinfacht werden können. Jede einzelne Anfangsbedingung behandelt einen der drei Spezialfälle bei Kopplungen:

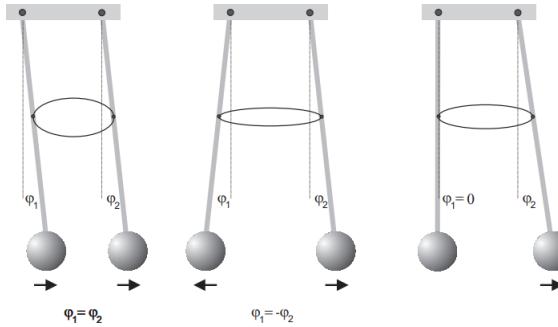


Abbildung 1: 3 Schwingungsformen (Quelle: Praktikumsskript V211 S3)

### 1.1.2 Symmetrische Kopplung

Der erste Fall ist die symmetrische Schwingung. Dabei ist die Anfangsauslenkung  $\phi_0$  beider Pendelkörper gleich und diese werden gleichzeitig losgelassen, also:

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_0 \quad \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0 \quad (16)$$

Die Bewegungsgleichung vereinfacht sich zu einer Schwiegung der Form

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi_0 \cdot \cos w_1 t \quad (17)$$

Interessanterweise spielt hier  $w_2$  und somit  $D'$ , was die Feder beschreibt, keine Rolle. Das heisst, beide Pendelkörper führen die übliche harmonische Eigenschwingung aus, wobei die Feder dabei nicht gestaucht oder gedehnt wird und somit diese keinen Einfluss auf das Gesamtschwingungssystem hat und die Phase gleich ist (erstes Bild aus Abbildung 1). Deshalb findet praktisch keine Kopplung zwischen den beiden Pendeln statt.

### 1.1.3 Asymmetrische Kopplung

Der zweite Spezialfall ist die sogenannte asymmetrische Kopplung. Dabei werden die Schwingkörper um den gleichen Winkelbetrag aber um unterschiedliche Vorzeichen ausgelenkt und gleichzeitig losgelassen, d.h.:

$$\phi_1(0) = -\phi_2(0) = \phi_0 \quad \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0 \quad (18)$$

Die Bewegungsgleichung ergeben sich somit zu:

$$\phi_1(t) = \phi_0 \cos w_2 t \quad (19)$$

$$\phi_2(t) = -\phi_0 \cos w_2 t \quad (20)$$

Die Pendelkörper führen somit mit  $w_2$  eine gegenphasige harmonische Schwingung durch (siehe mittiges Bild in Abbildung 1). Die Frequenz ist dieses Mal vom Direktionsmoment der Kopplungsfeder abhängig, weshalb diese eine wichtige Rolle einnimmt.

### 1.1.4 Schwebungsschwingung

Der dritte Spezialfall ist die Schwebungsschwingung. Dabei verbleibt ein Pendelkörper in der Ruhelage und der andere (ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Zweite) wird um einen Winkel von  $\phi_0$  ausgelenkt, d.h.:

$$\phi_1(0) = \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0 \quad \phi_2(0) = \phi_0 \quad (21)$$

Es ergibt sich:

$$\phi_1(t) = \phi_0 \sin \left( \frac{w_2 - w_1}{2} t \right) \sin \left( \frac{w_2 + w_1}{2} t \right) \quad (22)$$

$$\phi_2(t) = \phi_0 \cos \left( \frac{w_2 - w_1}{2} t \right) \cos \left( \frac{w_2 + w_1}{2} t \right) \quad (23)$$

Anhand dieser Bewegungsgleichungen kann die allgemeine Form einer Schwebung erkannt werden. Man beobachtet dabei zwei wichtige Frequenzen: die Frequenz  $\frac{w_1+w_2}{2}$  beschreibt die Frequenz mit welcher jedes einzelne Pendel schwingt und die Frequenz  $\frac{w_2-w_1}{2}$  beschreibt die Oszillation der Energie eines Einzelpendels. In anderen Worten, Energie wird periodisch über die Kopplung von einem Pendel auf das andere übertragen.

Anschaulich bedeutet dies, dass am Anfang das ausgelenkte Pendel eine hohe Amplitude erreicht, jedoch nach und nach seine Energie an das andere anfänglich stillstehende Pendel überträgt. Somit nimmt die Amplitude des einen ab und die des anderen zu, bis das anfänglich ausgelenkte Pendel still steht und das andere kräftig schwingt. Dieser Prozess wiederholt sich periodisch.

### 1.1.5 Kopplungsgrad

Um die Stärke der Kopplung zu beschreiben definiert man den *Kopplungsgrad*  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{D'}{D + D'} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{w_2^2 + w_1^2} \quad (24)$$

## 2 Versuchsaufbau und Messtechnik

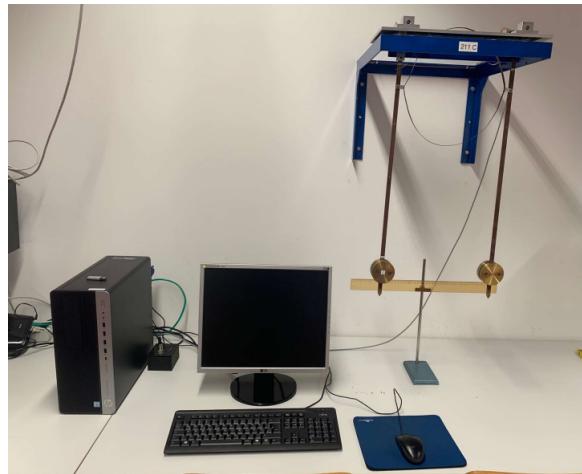


Abbildung 2: Bild Versuchsaufbau (Quelle: Praktikumsskript V211 S1)

Messgeräte:

- Zwei Messingpendel mit drei unterschiedlichen Kopplungslöchern auf unterschiedlichen Höhen
- Kopplungsfeder mit Befestigungsschraube
- Winkelaufnehmer
- Analog-Digital-Wandler
- PC mit Messsoftware zum Aufzeichnen des Auslenkwinkels und mit Fast-Fourier-Transform-Möglichkeit

In diesem Versuch wird der Winkel mit einer Hall-Sonde gemessen. Ein Sensor befindet sich am Pendel befestigt im homogenen B-Feld eines Stabmagneten und wird bei der Bewegung des Pendels somit in diesem Feld mitbewegt. Dabei wird eine Hall-Spannung erzeugt, von welcher bekannt ist, dass sie proportional zum Sinus des Auslenkwinkels ist. Damit kann durch eine Messung der Spannung der Winkel gemessen und aufgezeichnet werden.

## 3 Messprotokoll

# Versuch 211: Gekoppeltes Pendel

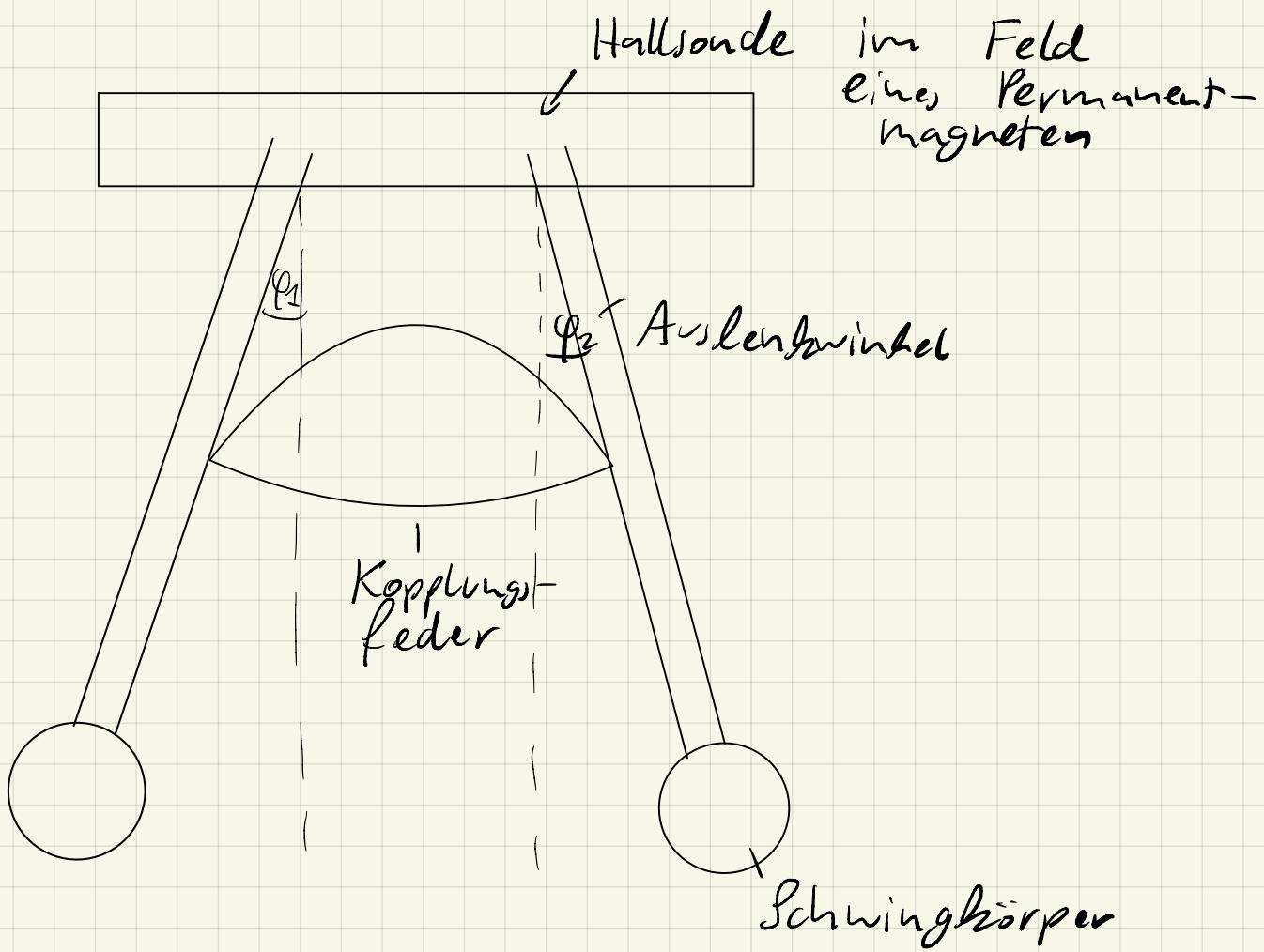
18.12.2023

14:00 - 17:00

Juan Bueno Fontanilla

Yago Obispo Gertster

Malke Walla



Skizze 1: Versuchs-Aufbau

↳ Zuerst führen wir im statischen Fall ohne Auslenkung eine Offset-messung durch

Danach koppeln wir beide Pendeln mit der Kopplungsfeder.

↳ Es gibt 3 Einstellungen: starke, schwache und mittlere Kopplung (unterschiedliche Höhen)

↳ Wir messen symmetrische u. asymmetrische Schwingung bei den 2 Einstellungen führen mit dem Computer die Fourier-Analyse.

⇒ Wir bestimmen somit die Kreisfrequenzen.

symmetrisch: Ruhelage 1: 0 cm, Ruhelage 2: 32,6 cm

Messzeit Auslenkung: 3 cm

antisymmetrisch: Ruhelage 1: 10 cm, Ruhelage 2: 42,6 cm

Auslenkung: 3 cm

↓

Dann die Schwebungsschwingung

Messzeit: 120 sec

Ruhelage 1: 7,4 cm

Ruhelage 2: 41,0 cm

Bei den Schwebungsschwingungen bestimmen wir noch die Kreisfrequenzen mit dem Cweser

↓

starke Kopplung:

$$\Delta E = 0,5s$$

$$n = 6$$

$$n = 12$$

$$\hookrightarrow E_1 = 3,5$$

$$E_1 = 5,23$$

$$E_2 = 99,1$$

$$E_2 = 29,49$$

$$\Delta E = 95,6$$

$$\Delta E = 19,21$$

$$T = \frac{\Delta E}{6} \approx 15,93333$$

$$T = \frac{\Delta E}{n} = \frac{19,21s}{12} = 1,601$$

mit H1. Kopplung

$$n = 1$$

$$n = 23$$

$$E_1 = 10,3s$$

$$E_1 = 10,3s$$

$$\Rightarrow \Delta E = T = 38,7s$$

$$E_2 = 47,23s$$

$$E_2 = 49,0s$$

$$\Delta E = 36,07s$$

schwache Kopplung

$$t_1 = 25,3$$

$$t_2 = 75,5$$

$$n = \frac{1}{2}$$

$$n = 37$$

$$\text{Peak 1} \quad 0,6177 \text{ Hz} \quad 7,77 \text{ [a.u.]}$$

$$0,6230 - 0,6124 = 0,0106$$

$$\text{Peak 2} \quad 0,6373 \text{ Hz} \quad 5,28 \text{ [a.u.]}$$

$$0,6436 - 0,6377 = 0,0125$$

Für alle Messungen gilt:  $\Delta E = 0,55$

$$\Delta(\Delta E) = \sqrt{(0,55)^2 + (0,55)^2}$$

$$= 0,71$$

	$\angle [\text{cm}]$
schwache Kopplung	15,5
mittlere Kopplung	25,5
starke Kopplung	40,5

Tabelle 1: Längenmessungen

M. Wanka

## 4 Auswertung

### 4.1 Fehlerabschätzung

Alle Fehler wurden in diesem Versuch gemäss der Gaussschen Fehlerfortpflanzung ermittelt und die Formel zur Berechnung des Fehlers von relevanten Grössen wurde ebenfalls in der Auswertung mitangegeben.

In diesem Versuch spielen vor allem Fehler die durch die Software entstehen eine bedeutende Rolle, da wir manuell nur die Längenmessung für die Abstände der unterschiedlichen Kopplungsbefestigungspunkte durchführen mussten. Für die Längenmessung wird ein absoluter Fehler von  $0,1\text{cm}$  angenommen.

Die Fehler der Software entstehen vor allem dadurch, dass diese einen Gaußfit im Frequenzspektrum an teilweise unstetige Kurven durchführt. Vor allem die Peaks dieser unstetigen Kurven sind für uns von grossem Interesse. Ich bin mit dem Cursor die einzelnen Bilder durchgegangen und habe festgestellt, dass der Fehler der Software im Falle der symmetrischen und asymmetrischen Kopplung bei einer Frequenz von etwa  $0,005\text{Hz}$  liegt, was einer Kreisfrequenz von  $2\pi \cdot 0,005\text{Hz} = \frac{\pi}{100}\text{rad/s}$  entspricht. Für den Schwebungsfall sind die Peaks der einzelnen Frequenzen deutlich schmäler, weshalb wir vermuten, dass der Fehler hier nicht so gross ist und die Standardabweichung von jedem Peak als Fehler verwendet wurde.

### 4.2 Beobachtete Schwingungen und Frequenzspektren

Nachdem der Nullabgleich der beiden Pendel geprüft wurde, sodass in der Ruhelage der Pendel ein Winkel von  $0^\circ$  von der Software angezeigt wurde, beginnen wir mit dem Versuch.

Im Fall der symmetrischen Kopplung haben wir die in Abbildung 3 dargestellte Schwingung beobachtet. Hieran sehen wir, dass unsere theoretischen Berechnungen in (17) korrekt sind, da wir eine ungestörte harmonische Kosinus bzw. Sinusschwingung beobachten.

Mit der Computer-Software konnte eine Fouriertransformation durchgeführt werden, sodass wir ein Frequenzspektrum erhalten. Diese sind für die drei unterschiedlich starken Kopplungen in Abbildung 8, Abbildung 9 und Abbildung 10 dargestellt. Anhand dieser Grafiken können wir erkennen, dass die Feder keinen Einfluss auf die Pendelschwingung hat, was daran liegt, dass diese während der symmetrischen Schwingung weder gedehnt noch komprimiert wird und somit im Idealfall diese keine Wirkung auf die Pendel hat.

Bei der asymmetrischen Schwingung (Abbildung 7) hingegen sind Unterschiede bei verschiedenen Kopplungsstärken erkennbar. Anhand des Schwingungsbildes kann man die in Gleichung (20) vorhergesagte gegenphasige Beziehung gut erkennen. Die Frequenzen werden mit stärkerer Kopplung grösser und die Graphen verschieben sich somit im Frequenzbereich entsprechend nach rechts.

Im letzten Kopplungsfall, der Schwebungskopplung, wurde der Schwingungsverlauf in Abbildung 11 beobachtet. Er entspricht dem erwarteten Schwingungsverlauf mit einer Einhüllenden welche die Oszillation der Energie beschreibt.

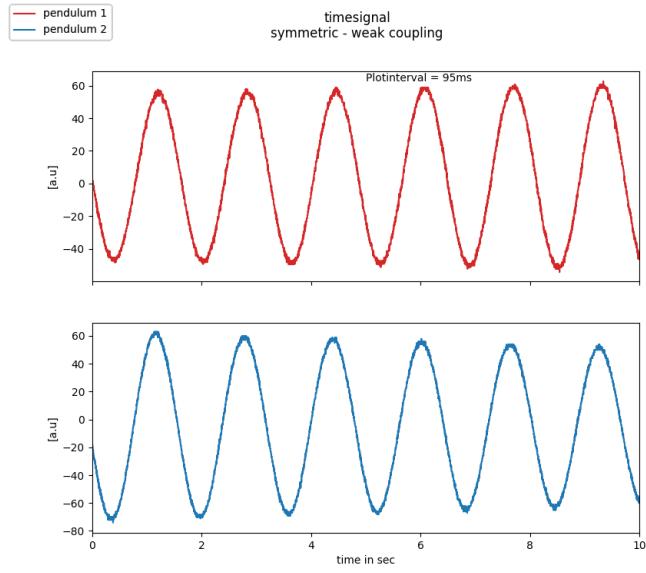


Abbildung 3: Symmetrische Schwingung (schwache Kopplung)

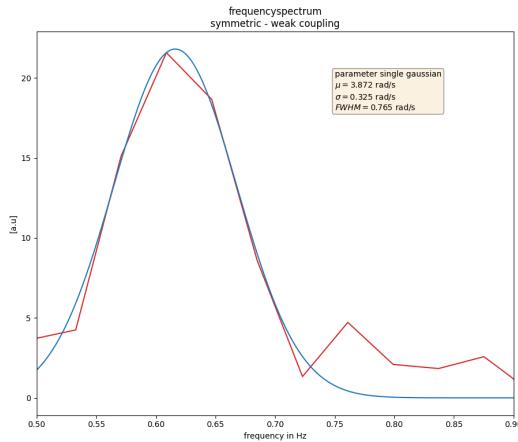


Abbildung 4: Symmetrische Schwingung (schwache Kopplung)

Die Frequenzspektren sind in Abbildung 12, Abbildung 13 und Abbildung 14 dargestellt. Im Frequenzbereich beobachten wir nun nicht nur noch ein Peak, sondern zwei, daher dass eine Schwebungsschwingung vorliegt. Diese Peaks wandern weiter auseinander desto stärker die Kopplung ist.

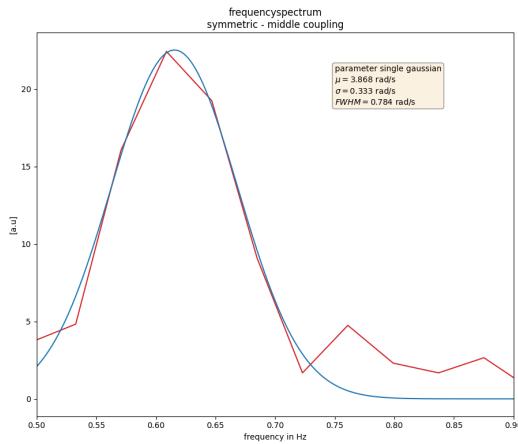


Abbildung 5: Symmetrische Schwingung (mittlere Kopplung)

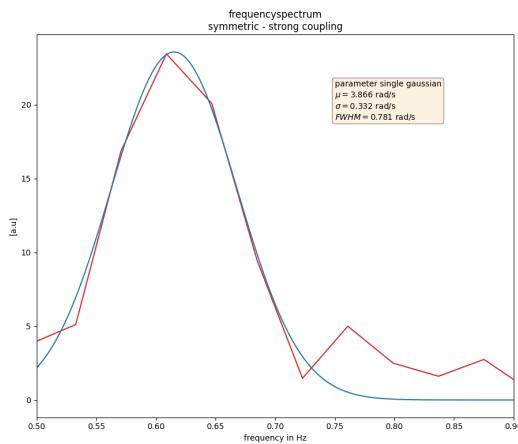


Abbildung 6: Symmetrische Schwingung (starke Kopplung)

### 4.3 Bestimmung der Frequenzen

Als erstes werden die Frequenzen der reinen ( $\omega_1, \omega_2$ ) und der gemischten Schwingungsformen ( $\omega_I, \omega_{II}$ ) berechnet. Für die gemischten Schwingungsformen kann zum einen ein experimenteller Ansatz gewählt werden, bei welchem die beiden Frequenzen der Schwebungsschwingung für die Berechnung verwendet werden oder ein halbtheoretischer Ansatz, bei welchem die symmetrische Frequenz als  $\omega_1$  und die asymmetrische als  $\omega_2$  verwendet werden. Wir erwarten dabei das beide übereinstimmen sollten.

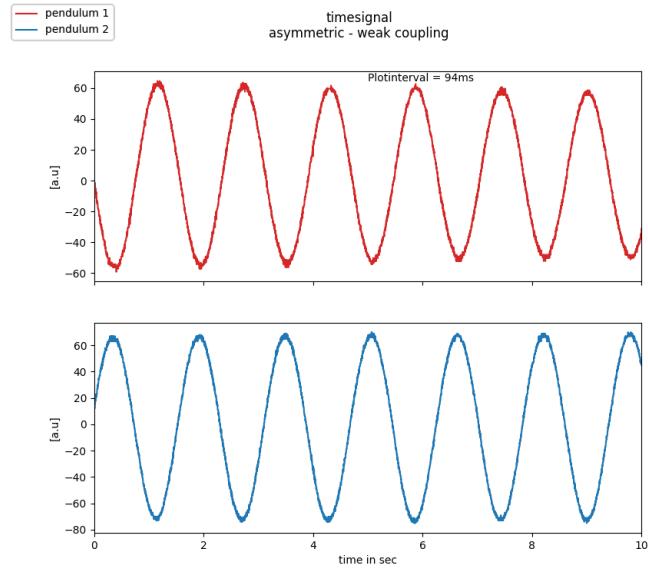


Abbildung 7: Asymmetrische Schwingung (schwache Kopplung)

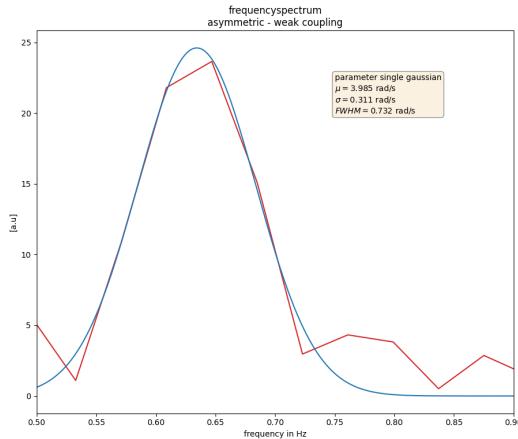


Abbildung 8: Asymmetrische Schwingung (schwache Kopplung)

Für  $\omega_I$  und  $\omega_{II}$  gilt:

$$\omega_I = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (25)$$

$$\Delta\omega_I = \frac{\sqrt{\Delta\omega_1^2 + \Delta\omega_2^2}}{2} \quad (26)$$

$$\omega_{II} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \quad (27)$$

$$\Delta\omega_{II} = \frac{\sqrt{\Delta\omega_1^2 + \Delta\omega_2^2}}{14} \quad (28)$$

$$(29)$$

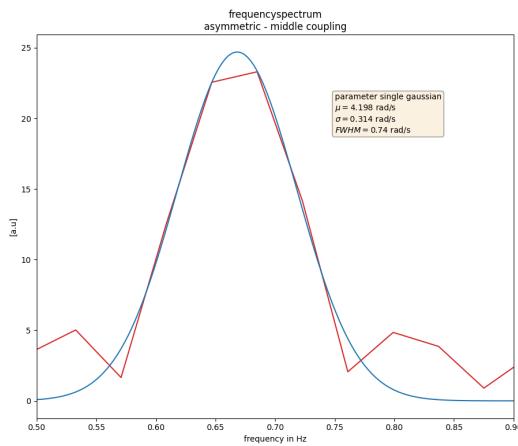


Abbildung 9: Asymmetrische Schwingung (mittlere Kopplung)

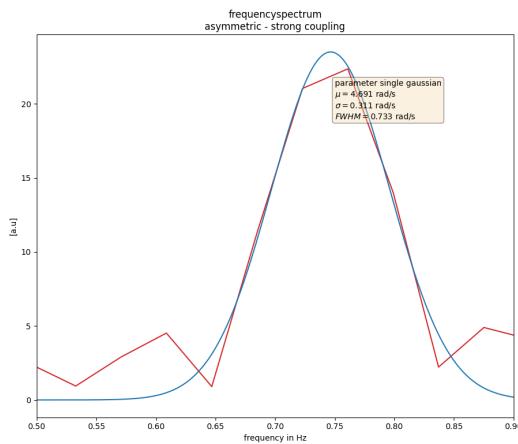


Abbildung 10: Asymmetrische Schwingung (starke Kopplung)

Diese können sowohl experimentell - also anhand der in der Fouriertransformation des gemessenen Signalverlaufs bei der Schwebung - über  $\omega_1$  und  $\omega_2$  bestimmt werden, als auch theoretisch mit den Werten der vorherigen Schwingungen. Alle berechnete Frequenzen sind in Tabelle 1 angegeben

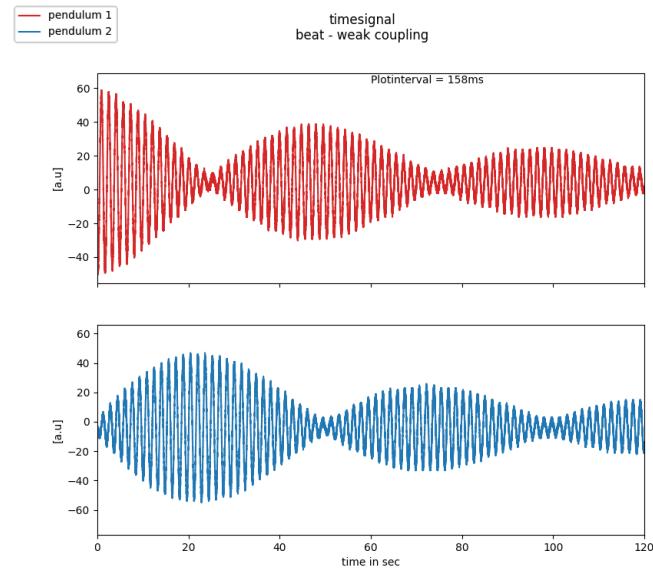


Abbildung 11: Schwebung (schwache Kopplung)

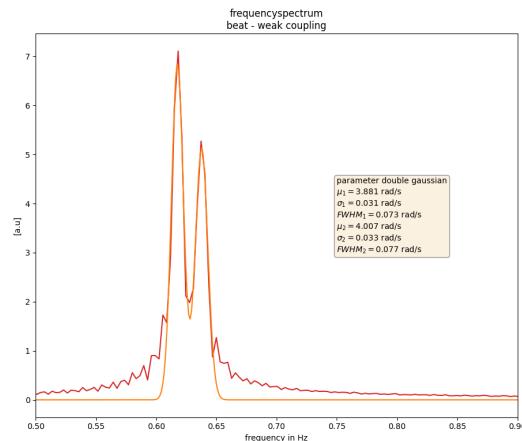


Abbildung 12: Schwebungs-Schwingung (schwache Kopplung)

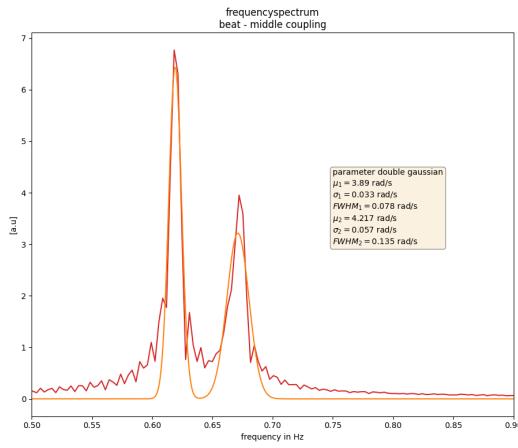


Abbildung 13: Schwebungs-Schwingung (mittlere Kopplung)

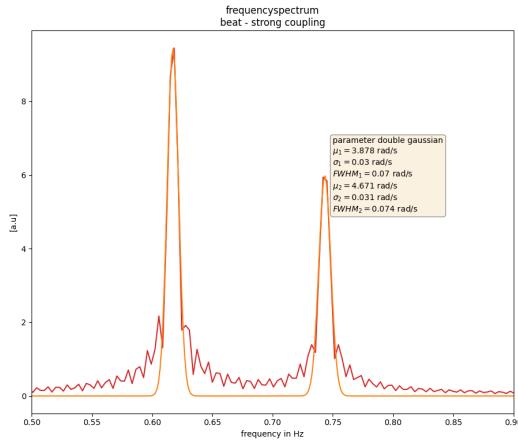


Abbildung 14: Schwebungs-Schwingung (starke Kopplung)

#### 4.4 Kopplungsgrade

Anschliessend werden die Kopplungsgrade nach Formel (24) und unter der Annahme schwacher Kopplungen ( $D \gg D'$ ) bestimmt:

$$\kappa \approx \frac{w_2^2 - w_1^2}{2w_1^2} \quad (30)$$

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{w_2 \Delta w_2}{w_1^2}\right)^2 + \left(\frac{w_2^2 \Delta w_1}{w_1^3}\right)^2} \quad (31)$$

Kopplungsart	Schwache	Mittlere	Starke
Symmetrisch [rad/s]	$3,87 \pm 0,03$	$3,87 \pm 0,03$	$3,87 \pm 0,03$
Asymmetrisch [rad/s]	$3,99 \pm 0,03$	$4,20 \pm 0,03$	$4,69 \pm 0,03$
Schwebung (experimentell) $\omega_1$ [rad/s]	$3,88 \pm 0,03$	$3,89 \pm 0,03$	$3,88 \pm 0,03$
$\omega_2$ [rad/s]	$4,01 \pm 0,03$	$4,22 \pm 0,06$	$4,67 \pm 0,03$
$\omega_I$ [rad/s]	$3,944 \pm 0,023$	$4,05 \pm 0,03$	$4,274 \pm 0,022$
$\omega_{II}$ [rad/s]	$0,063 \pm 0,023$	$0,16 \pm 0,03$	$0,397 \pm 0,022$
Schwebung (theoretisch) $\omega_I$ [rad/s]	$3,928 \pm 0,022$	$4,033 \pm 0,022$	$4,278 \pm 0,022$
$\omega_{II}$ [rad/s]	$0,056 \pm 0,022$	$0,165 \pm 0,022$	$0,412 \pm 0,022$

Tabelle 1: Reine und gemischte Frequenzen

Diese können sowohl über die Frequenzen der symmetrischen und asymmetrischen Schwingung, als auch über die Frequenzen des symmetrischen bzw. asymmetrischen Anteils der Schwebungsschwingung bestimmt werden. Letztere werden mit  $Sc$  indexiert.

Für die Kopplungsgrade bei unterschiedlich starken Kopplungen (wobei 1 die schwache, 2 die mittlere und 3 die starke Kopplung bezeichnen soll) erhalten wir:

$$\kappa_1 = 0,03 \pm 0,012 \quad (32)$$

$$\kappa_2 = 0,09 \pm 0,013 \quad (33)$$

$$\kappa_3 = 0,24 \pm 0,016 \quad (34)$$

bzw.

$$\kappa_{1Sc} = 0,033 \pm 0,012 \quad (35)$$

$$\kappa_{2Sc} = 0,088 \pm 0,019 \quad (36)$$

$$\kappa_{3Sc} = 0,225 \pm 0,015 \quad (37)$$

Daher dass wir den Kopplungsgrad über  $\kappa = \frac{D'}{D}$  definiert haben und  $D'$  proportional zum Quadrat der Länge vom Aufhängepunkt der Feder zur Pendelachse ist, entsprechen die Verhältnisse zweier Kopplungsgrade genau dem Quadrat des Verhältnisses der Koppellängen. Mathematisch ausgedrückt

$$Sei \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (38)$$

$$\Rightarrow \frac{\kappa_i}{\kappa_j} = \frac{l_i^2}{l_j^2} \quad (39)$$

Anschliessend wollen wir beide Seiten separat berechnen, da wir während des Versuches auch die Längenmessung durchgeführt haben, und miteinander vergleichen.

Für die Fehler der jeweiligen Seiten gilt:

$$\Delta \frac{\kappa_i}{\kappa_j} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \kappa_i}{\kappa_j}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \kappa_j \kappa_i}{\kappa_j^2}\right)^2} \quad (40)$$

$$\Delta \frac{l_i^2}{l_j^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l_i l_i 2}{l_j^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_j 2l_i^2}{l_j^3}\right)^2} \quad (41)$$

Die Ergebnisse für beide Seiten der Gleichung werden in der Diskussion mit-

i,j	$\frac{\kappa_i}{\kappa_j}$	$\frac{l_i^2}{l_j^2}$
1,2	$0,333 \pm 0,143$	$0,369 \pm 0,007$
1,3	$0,125 \pm 0,051$	$0,146 \pm 0,007$
2,3	$0,38 \pm 0,06$	$0,396 \pm 0,007$

Tabelle 2: Vergleich der beiden Seiten

einander verglichen.

## 5 Zusammenfassung und Diskussion

Zusammenfassend haben wir uns in diesem Versuch mit gekoppelten Schwingungen am Beispiel eines Pendels beschäftigt und dabei insbesondere die drei Kopplungsarten - symmetrisch, antisymmetrisch und Schwebung - genauer untersucht. Für jede der drei Schwingungen haben wir zuerst das Frequenzspektrum betrachtet. Dabei ist uns aufgefallen, dass dieses bei der symmetrischen Kopplung für beliebig starke Kopplungen immer gleich bleibt, während die Kopplungsstärke im Fall der asymmetrischen Schwingung schon einen Einfluss auf die Verschiebung des Peaks in Frequenzrichtung hat. Auch bei der Schwebung wurde beobachtet wie die Kopplungsstärke einen Einfluss auf den Abstand der beiden Frequenzpeaks im Frequenzbereich hat.

Im nächsten Schritt wurden alle relevanten reinen und gemischten Frequenzen berechnet (die Ergebnisse sind in Tabelle 1 aufgelistet).

Weiterhin wurden die Kopplungsgrade unter der Annahme schwacher Kopplung bestimmt. Diese wurden sowohl über die Frequenzen der symmetrischen und asymmetrischen Schwingung als auch über den symmetrischen bzw. antisymmetrischen Anteil der Schwebungsschwingung bestimmt. Für die Kopplungsgrade des ersten Falls haben wir  $\kappa_1 = 0,03 \pm 0,012$ ,  $\kappa_2 = 0,09 \pm 0,013$  und  $\kappa_3 = 0,24 \pm 0,016$  erhalten. Beim zweiten  $\kappa_{1Sc} = 0,033 \pm 0,012$ ,  $\kappa_{2Sc} = 0,088 \pm 0,019$  und  $\kappa_{3Sc} = 0,225 \pm 0,015$ .

Zuletzt haben wir festgestellt, dass das Verhältnis zweier Kopplungsgrade genau dem Quadrat des Verhältnisses der Koppellängen entspricht und haben dieses überprüft indem wir explizit beide Verhältnisse berechnet haben. Diese sind in Tabelle 2 angegeben.

## 5.1 Diskussion der Ergebnisse

Im Anschluss werde ich die Ergebnisse des Versuches miteinander vergleichen, die Fehlerquellen kritisch untersuchen und einige Vorschläge präsentieren um diese Fehlerquellen zu reduzieren.

Für die Sigma-Abweichung wird folgende Formel verwendet:

$$\frac{|Wert1 - Wert2|}{\sqrt{Fehler1^2 + Fehler2^2}} \quad (42)$$

An erster Stelle werden die experimentell und halbtheoretisch bestimmten Frequenzen  $\omega_I$  und  $\omega_{II}$  miteinander verglichen. Eine von Ihnen beschreibt die Schwingungsfrequenz eines einzelnen Pendels und die andere die Oszillation der Energie, da diese im Schwebungsfall alternierend von einem Pendel auf das andere übertragen wird.

Für  $\omega_I$  kommt es zu einer absoluten Abweichung von  $0,016\text{rad/s}$  bzw.  $0,017\text{rad/s}$  bzw.  $0,004\text{rad/s}$  (für unterschiedliche Kopplungen; aufsteigend) was in diesem Fall einer Sigma-Abweichung von  $0,5\sigma$  bzw.  $0,5\sigma$  bzw.  $0,13\sigma$  entspricht und somit keine signifikante Abweichung darstellt. Für  $\omega_{II}$  kommt es zu einer absoluten Abweichung von  $0,007\text{rad/s}$  bzw.  $0,005$  bzw.  $0,015$  was einer Sigma-Abweichung von  $0,22\sigma$  bzw.  $0,13\sigma$  bzw.  $0,5\sigma$ . Daher das alle Sigma-Abweichungen unter 1 liegen, kommen wir zu dem Schluss, dass die theoretischen Werte mit den experimentellen übereinstimmen. Die geringen Abweichungen kommen wahrscheinlich durch Reibungseffekte welche im Falle der symmetrischen bzw. asymmetrischen und Schwebungsschwingung unterschiedlich gewesen sein können wegen unterschiedlichen Geschwindigkeiten, zustande, welche im gesamten Versuch unberücksichtigt geblieben sind.

Weiterhin ist zu beachten das es uns etwas schwer fiel, die Pendel in einer Ebene schwingen zu lassen. Mehrmals musste eine Messung unterbrochen werden da wir gemerkt haben dass das Pendel auch eine unerwünschte senkrechte Schwingung durchführte, welche die Messdaten verfälschte. Dieser Aspekt könnte verbessert werden, indem die Bewegungsfreiheit der Pendel auf eine Ebene stärker eingeschränkt wird.

Bei der Berechnung der Kopplungsgrade wurden auch einmal die Frequenzen der symmetrischen und asymmetrischen Schwingung verwendet und einmal des asymmetrischen und symmetrischen Anteils der Schwebungsschwingung. In Tabelle 3 werden diese miteinander verglichen. Die Sigma-Abweichungen liegen

Kopplungsgrad	Symm. und Asymm.	Schwebung	Abs. Abw.	Sigma Abw.
$\kappa_1$	$0,03 \pm 0,012$	$0,033 \pm 0,012$	0.003	0.18
$\kappa_2$	$0,09 \pm 0,013$	$0,088 \pm 0,019$	0.002	0.09
$\kappa_3$	$0,24 \pm 0,016$	$0,225 \pm 0,015$	0.015	0.7

Tabelle 3: Kopplungsgrade Vergleich

hierbei wieder alle unter  $1\sigma$  weshalb man darauf schliessen kann, dass beide Kopplungsgrade übereinstimmen müssen.

Des Weiteren hatte sich herausgestellt, dass das Verhältnis zweier Kopplungsgrade - wegen der Proportionalität zum Längenquadrat - genau dem Verhältnis zweier Längenquadrate entspricht. In Tabelle 4 werden die Abweichungen zwischen den beiden Verhältnissen betrachtet. Hier liegen die Sigma-Abweichungen

i,j	$\frac{\kappa_i}{\kappa_j}$	$\frac{l_i^2}{l_j^2}$	Abs. Abw.	Sig. Abw.
1,2	$0,333 \pm 0,143$	$0,369 \pm 0,007$	0,036	0,25
1,3	$0,125 \pm 0,051$	$0,146 \pm 0,007$	0,021	0,4
2,3	$0,38 \pm 0,06$	$0,396 \pm 0,007$	0,016	0,26

Tabelle 4: Vergleich der beiden Seiten der Gleichung

wieder weit unter  $1\sigma$  und unsere theoretische Vorhersage, dass der Kopplungsgrad proportional zum Längenquadrat ist wurde damit bestätigt. Insgesamt hat mir der Versuch viel Spass bereitet und ich empfand ihn als nützlich um die Konzepte von der vergangenen Theoretischen Physik Vorlesung zu harmonischen Oszillatoren zu visualisieren und zu wiederholen.

## 6 Quellen

- PAP 2.1 Anleitung der Universität Heidelberg