

Versuch 251: Statistik des radioaktiven Zerfalls

Yago Obispo Gerster

7. März 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	1
1.1	Physikalische Grundlagen	1
1.2	Geiger-Müller-Zählrohr	2
1.3	Radioaktive Zerfall	2
1.4	Binomialverteilung	3
1.5	Poisson-Verteilung	4
1.6	Gaussverteilung	5
1.7	Statistik und Messfehler	6
2	Messprotokoll	6
3	Auswertung	9
3.1	Messung der Zählrohrcharakteristik	9
3.2	Untersuchung des Plateauanstiegs	9
3.3	Statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls bei hohen Zählraten	12
3.4	Vergleich der Poisson- und Gaussverteilung bei sehr kleinen Zähl- raten	14
4	Zusammenfassung und Diskussion	16
4.1	Diskussion	17
5	Quellen und Python Code	19

1 Einleitung und Motivation

1.1 Physikalische Grundlagen

Das Ziel des Versuches besteht darin, uns mit der Nutzung von den wichtigsten statistischen Verteilungen vertraut zu machen und diese im Kontext des radioaktiven Zerfalls erkennen zu können. Insbesondere werden wir in diesem Versuch die Zählrohrcharakteristik messen, den Anstieg der Zählrate untersuchen und die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls bestätigen. Dabei werden die Messdaten mit der Poisson- und Gaussverteilung verglichen.

1.2 Geiger-Müller-Zählrohr

Um ionisierende Strahlung nachweisen zu können, kann ein sogenanntes *Geiger-Müller-Zählrohr* verwendet werden. Dieses besteht aus einem Kreismetallzylinder, welcher durch einen Draht durchquert wird (siehe Abbildung 1). Dabei

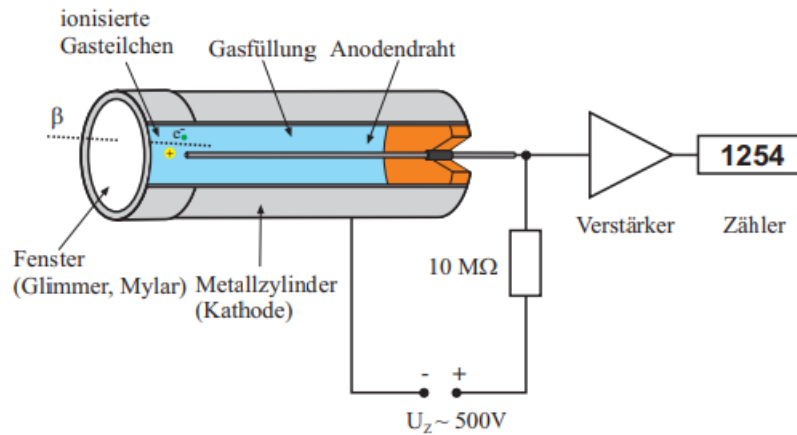


Abbildung 1: Aufbau Geiger-Müller Zählrohr (Quelle: Praktikumsskript)

kann eine beliebige Spannung zwischen Draht und Zylinder angelegt werden. Wenn ionisierende Strahlung in den Zylinder einfällt, so entstehen entlang der Flugbahn freie Elektronen die aufgrund der Spannung zwischen Draht und Zylinderoberfläche zur Anode beschleunigt werden und ein Impulsstrom messbar ist.

Die Anzahl der primär erzeugten Ladungsträger ist proportional zur Strahlungsenergie. Ist die Spannung jedoch zu klein, so erreicht nur ein Bruchteil der Elektronen den Anodendraht, da andere durch Rekombination verloren gehen. Bei sehr hohen Zählrohrspannungen hingegen, werden die Primärelektronen stark beschleunigt und sind damit in der Lage noch weitere Gasmoleküle über Stöße auf dem Weg zum Anodendraht zu ionisieren. Dadurch entstehen Sekundärelektronen, welche bei hinreichend grosser Energie wieder weitere Gasmoleküle ionisieren können, weshalb man auch sagt, das energetische Strahlung im Zählrohr eine *Elektronenlawine* erzeugt. Ein Löschgas im Zählrohr führt zum Abklingen der Gasentladung. Im *Plateaubereich* erzeugt jedes einfallende Teilchen ein gleich grosses Entladungssignal. Dabei wird also im Plateaubereich nicht die Energie der Strahlung gemessen sondern gezählt.

1.3 Radioaktive Zerfall

Atome gelten insgesamt als stabil. Jedoch kann auch ein Teil der Atome instabile Eigenschaften aufweisen und zerfallen. Dabei wird Strahlung in Form von α -Teilchen (Heliumkerne), β -Teilchen (Elektronen) oder γ -Strahlung (elek-

tromagnetische Wellen) abgegeben. Diese Klasse an Atomen bezeichnen wir als *radioaktive Atome*. Dabei ist es unmöglich über ein einzelnes Atom eine Aussage zu treffen, wann dieses genau zerfallen wird. Jedoch kann man über statistische Untersuchungen das Verhalten von grossen Mengen solcher Atomkerne untersuchen. Damit kann beispielsweise die *Halbwertszeit* ermittelt werden, welche beschreibt, wann in einer Menge von Atomkernen, die Hälfte der Kerne zerfallen ist. Diese kann in Bruchteilen von einer Sekunde bis zu über Millionen Jahren liegen und ist somit stark Isotopabhängig.

1.4 Binomialverteilung

Um den Zerfall statistisch beschreiben zu können, muss erst einmal die *Binomialverteilung* hergeleitet werden.

Ein Zerfall trete mit einer Wahrscheinlichkeit p bei einer Menge von n Atomkernen ein. Unter der Annahme, dass die Zerfälle der Atomkerne unabhängig voneinander stattfinden, beträgt die Wahrscheinlichkeit dass, zum Beispiel die ersten k Kerne zerfallen und die letzten $n - k$ nicht, genau

$$p^k(1 - p)^{n-k} \quad (1)$$

Dabei existieren $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n Atomkernen k auszuwählen, die zerfallen sollen. Somit ergibt sich also für die Wahrscheinlichkeit das k Atomkerne zerfallen:

$$B(k; n; p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (2)$$

Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Binomialverteilung. Sie ist diskret, da die Variable k nur natürliche Zahlenwerte annehmen kann und zweiparametrisch, da sie durch n und k eindeutig festgelegt ist.

Sie besitzt einige nützliche Eigenschaften:

$$\text{Normierung : } \sum_{k=0}^n B(k; n; p) = 1 \quad (3)$$

$$\text{Mittelwert : } \langle k \rangle = np \quad (4)$$

$$\text{Varianz : } \sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = np(1 - p) \quad (5)$$

$$\text{Standardabweichung : } \sigma = \sqrt{np(1 - p)} \quad (6)$$

Angewandt auf den radioaktiven Zerfall gilt für die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Beobachtungszeitraum t :

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (7)$$

Wobei λ die *Zerfallskonstante* ist und Isotopabhängig ist. Wenn diese klein ist, so kann die Wahrscheinlichkeit näherungsweise als konstant angenommen werden.

1.5 Poisson-Verteilung

Die Binomialverteilung besitzt den Nachteil, dass für grosse Mengen von Atomkernen n - welche verlangt werden um sinnvolle physikalische Aussagen treffen zu können - die Berechnung des Binomialkoeffizienten sehr aufwendig ist, da hierfür beispielsweise $n!$ berechnet werden muss. Aus praktischen Gründen nähert man die Binomialverteilung für $p \Rightarrow 0$ und $n \Rightarrow \infty$ und der Forderung dass der Mittelwert $\mu = np$ endlich bleibt und erhält daraus die Poissonverteilung.

Zur Herleitung drücken wir die Binomialverteilung über die Beziehung $\mu = np \Leftrightarrow p = \frac{\mu}{n}$ wie folgt aus:

$$B(k; n; \mu) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \quad (8)$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \quad (9)$$

$$= \left(\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}\right) \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} \frac{\mu^k}{k!} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \quad (10)$$

Betrachten wir den Grenzfalle, so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} = \frac{n^k}{n^k} = 1 \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} = 1 \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu} \quad (13)$$

Hierbei wurde bei der Grenzfallebetrachtung verwendet, dass $\mu = np$ endlich ist. Das Ergebnis ist somit die Poissonverteilung:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad (14)$$

Wie man erkennen kann ist diese eine einparametrische (nur von μ bestimmte), diskrete Verteilung mit den Eigenschaften:

$$\text{Normierung : } \sum_{k=0}^{\infty} P(k; \mu) = 1 \quad (15)$$

$$\text{Mittelwert : } \langle k \rangle = np = \mu \quad (16)$$

$$\text{Varianz : } \sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \mu \quad (17)$$

$$\text{Standardabweichung : } \sigma = \sqrt{\mu} \quad (18)$$

Für kleine Mittelwerte nimmt die Verteilung somit einen antisymmetrischen Charakter und für grössere Mittelwerte einen symmetrischeren Charakter an. Für grosse Werte für n und kleine für p nähert sich die Poisson-Verteilung der Binomialverteilung an, wie man in Abbildung 2 gut erkennen kann.

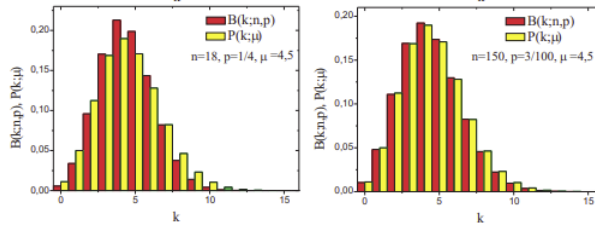


Abbildung 2: Binomial- vs. Poissonverteilung (Quelle Praktikumsskript 251 S5)

1.6 Gaussverteilung

Für grosse Mittelwerte ($\mu > 30$) kann die Poisson-Verteilung weiterhin zur Gaussverteilung genähert werden.

Zur Herleitung verwenden wir für die Fakultät die Stirling-Formel (da k gross):

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \frac{k^k}{e^k} \quad (19)$$

Weiter werden wir in einem Schritt der Herleitung eine Taylorentwicklung von $\ln(1+x)$ zu quadratischer Ordnung benötigen

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} \quad (20)$$

und die Tatsache dass $\frac{\mu-k}{k} \ll 1$ bzw. $k + \frac{1}{2} \approx k$ für grosse k . Unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}} \quad (21)$$

$$= \left(\frac{\mu}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \quad (22)$$

$$= \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{\ln\left(\left(1+\frac{\mu-k}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}\right)} \quad (23)$$

$$= \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{\mu-k}{k}\right)} \quad (24)$$

$$= \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mu-k}{k} - \frac{(\mu-k)^2}{2k^2}\right)} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{\left(-\frac{(\mu-k)^2}{2k}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{\left(-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}\right)} \quad (26)$$

Im letzten Schritt wurde k durch μ mit der Begründung $\frac{\mu-k}{k} \ll 1$ im Nenner ersetzt. Die allgemeine Form der Gauss-Verteilung ist

$$G(k; \mu; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}} \quad (27)$$

Diese ist eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den Eigenschaften

$$\text{Normierung : } \int_{-\infty}^{\infty} G(k; \mu; \sigma) dk = 1 \quad (28)$$

$$\text{Mittelwert : } \langle k \rangle = \mu \quad (29)$$

$$\text{Varianz : } \sigma^2 \quad (30)$$

$$\text{Standardabweichung : } \sigma \quad (31)$$

Um die Standardabweichung einer Gaussverteilung abzuschätzen kann folgender Trick verwendet werden:

$$FWHM \approx 2,4\sigma \quad (32)$$

wobei *FWHM* für *full width at half maximum* steht, also voller Breite der Kurve auf halber Höhe.

1.7 Statistik und Messfehler

In der Praxis ist der Mittelwert einer Verteilung μ nicht bekannt, sondern nur das Ergebnis einer (sehr grossen) Messreihe k . Dabei soll $G(\mu; k)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, dass die Messreihe bei gemessenem k den Mittelwert μ besitzt.

Daher dass k und μ bei grossen Versuchsreihen nicht stark voneinander abweichen sollten kann die Näherungsformel

$$\sigma = \sqrt{k} \quad (33)$$

für die Standardabweichung verwendet werden. Dieses Ergebnis wird üblicherweise in der Form

$$k \pm \sqrt{k} \quad (34)$$

angegeben und wird so gelesen: **Es wurden k Atomkernzerfälle registriert, weshalb der Mittelwert mit 68% Wahrscheinlichkeit im Bereich $k \pm \sqrt{k}$ liegen muss.**

Die 68% entsprechen näherungsweise der Wahrscheinlichkeit bei einem gaussverteilten System in einer Abweichung von maximal 1σ vom Mittelwert aus zu messen. Dieser Wert wurde über

$$P_\sigma = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} G(k; \mu; \sigma) dk \quad (35)$$

berechnet.

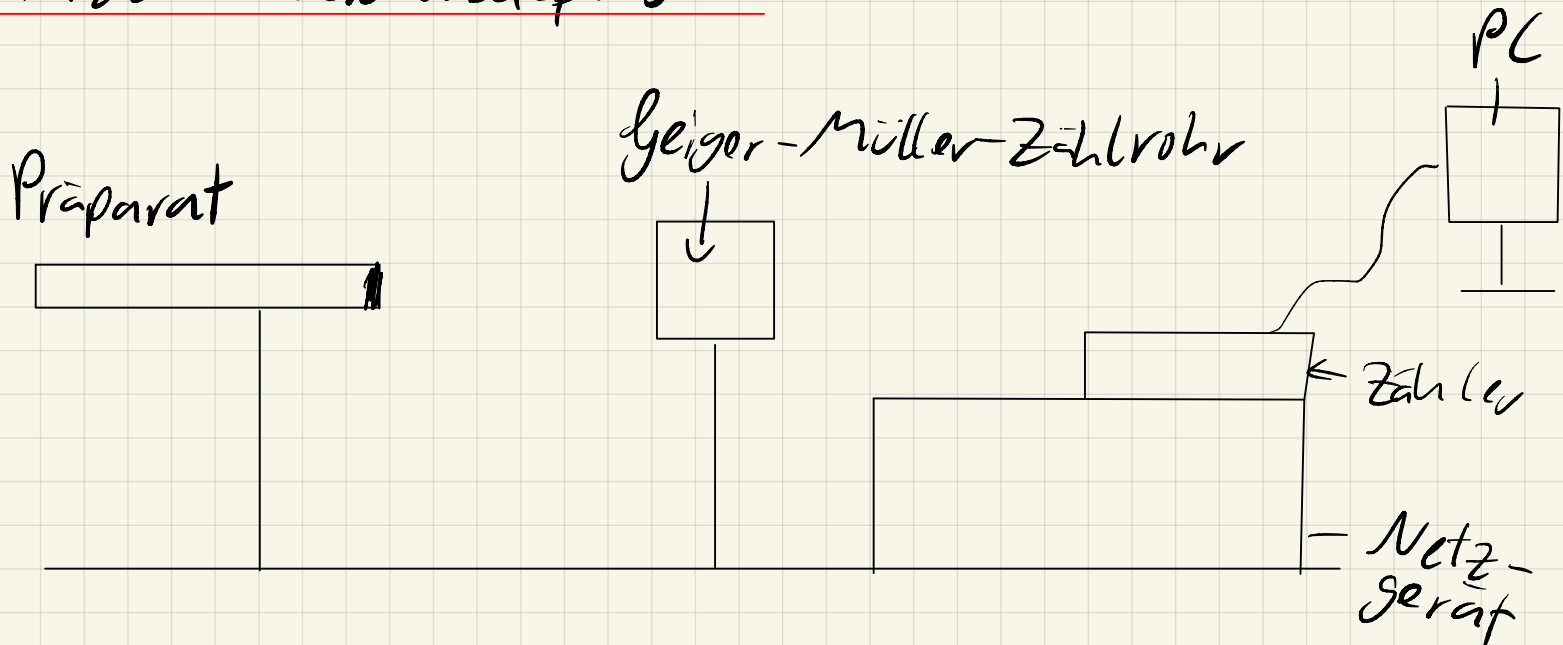
2 Messprotokoll

Versuch 257: Statistik des radioaktiven Zerfalls

Lennart Bederke
Yago Obispo Gerster

Lynn Bühl
19. Feb. 9. - 12

Skizze Versuchsaufbau:



(1) Messung Zählrohrcharakteristik 30,

Tabelle 1: Zählrohrcharakteristik

$U [V]$	43	45,5	48	50,5	53	55,5	58	$\times 10$
Zählrate [Anzahl]	2007	2092	2022	2106	1993	2084	2112	

Einsatzspannung: 43 V

$\rightarrow U_0 = 55,5 V$

Spannungsfehler $\Delta U = 0,5 \times 10 V = 5 V$

Zählratenfehler: statistisch \sqrt{N}

(2) Plateauanstieg

Tabelle 2: Zählrate bei V_0 und $V_0 + 100V$

Zeit	60 s	180 s
V_0	4065	72276
$V_0 + 100V$	4182	72507

(3)+(4) Messung bei hoher und bei kleiner Zählrate

(3) Totzeit: 0,5 s ; 2000 Messungen

maximal 140-150 Zerfälle pro Sekunde

(4) Totzeit: 0,1 s ; 5000 Messungen

maximal 40-50 Zerfälle pro Sekunde

↳ digitale Speicherung der Messdaten

L. Bühl

3 Auswertung

3.1 Messung der Zählrohrcharakteristik

In diesem Versuch haben wir den radioaktiven Zerfall wie im Messprotokoll skizziert mit einem Geigenmüller-Zählrohr gemessen. Bei einem Kernzerfall wird Strahlung ausgesendet, welche von diesem detektiert werden kann.

Im ersten Schritt soll die Zählrohrcharakteristik mit Hilfe des internen Zählers bestimmt werden, d.h. die Anzahl an Ereignissen pro Spannung. Wir erhalten den Verlauf in Abbildung 3. Dabei wurde an die Messwerte eine Gerade an-

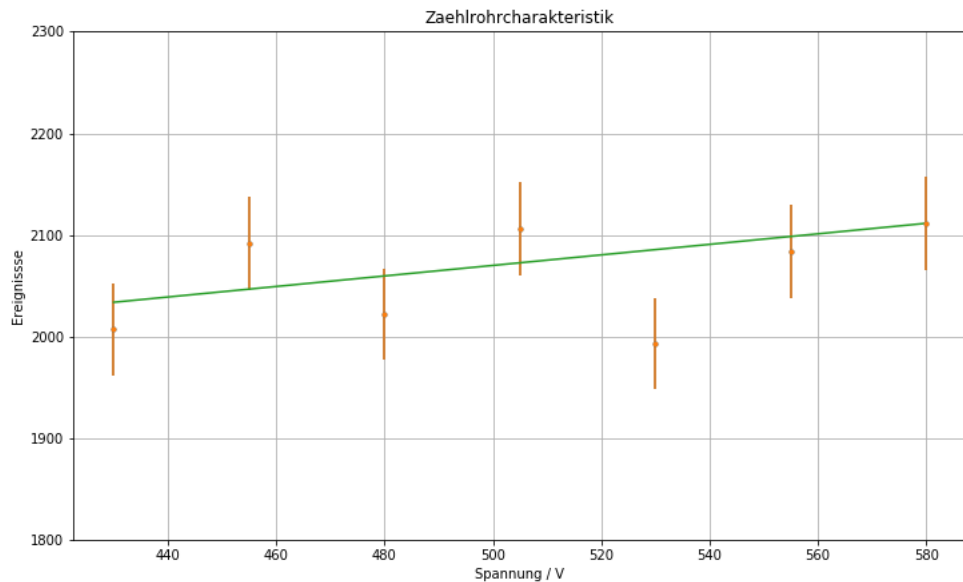


Abbildung 3: Zählrohrcharakteristik

gefittet und der fünfte Wert der Messreihe wurde für die Interpolation dieser Geraden ausgeblendet, da dieser von den restlichen abweicht.

Dabei interessieren wir uns in diesem Versuch für die Mitte des gemessenen Plateaubereichs, dessen Spannungswert als U_0 bezeichnet wird. Die Mitte liegt bei uns bei einer Spannung von

$$U_0 = (555 \pm 5)V \quad (36)$$

3.2 Untersuchung des Plateauanstiegs

Im nächsten Schritt wird das Präparat möglichst dicht an das Zählrohr gebracht und die Zählrate wird bei den Spannungen U_0 und $U_0 + 100V$ gemessen. Dabei

wird für jede Spannungsmessung einmal in einem Zeitraum von $1min$ und einmal von $3min$ gemessen.

Dabei bezeichnen $N(U_0)$ und $N(U_0 + 100V)$ die Anzahl an Ereignissen bei den respektiven Spannungen. Der Anstieg beträgt im Falle von $1min$

$$N(U_0 + 100V) - N(U_0) = 117 \pm 91 \quad (37)$$

und im Falle von $3min$:

$$N(U_0 + 100V) - N(U_0) = 231 \pm 157 \quad (38)$$

Der Fehler wurde aus der Wurzel der Summe der Werte abgeschätzt. Dieser ist entsprechend gross, da die Differenz von zwei grossen nah beieinander liegenden Zahlen gebildet wurde, was zu kleinen Werten mit grossen Fehlern führt.

Steng genommen entspricht der erste Wert der Zählrate, da diese beschreibt, wie viele Ereignisse in einer Minute registriert worden sind.

Für den prozentualen Anstieg der Zählrate pro $100V$ erhalten wir:

$$1min : d = \frac{N(U_0 + 100V) - N(U_0)}{N(U_0)} = (2,9 \pm 1,9)\% \quad (39)$$

$$3min : d = \frac{N(U_0 + 100V) - N(U_0)}{N(U_0)} = (1,9 \pm 1,3)\% \quad (40)$$

$$\Delta d = d \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta(N(U_0 + 100V) - N(U_0))}{N(U_0 + 100V) - N(U_0)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta N(U_0)}{N(U_0)}\right)^2} \quad (41)$$

Um zu beurteilen ob die Anstiege bei 1 bzw. $3min$ signifikant sind, wird

$$\Delta = k_1 - k_2 \pm \sqrt{k_1 + k_2} \quad (42)$$

betrachtet. Wenn Δ um weniger als $3\sigma_\Delta$ -Abweichungen mit $\sigma_\Delta = \sqrt{k_1 + k_2}$ von der Null abweicht, ist die Differenz nicht signifikant.

In unserem Fall erhalten wir für die Messung mit $1min$ eine $1,3\sigma_\Delta$ Abweichung und im Falle der $3min$ eine $1,5\sigma_\Delta$ -Abweichung. In beiden Fällen ist die Abweichung entsprechend nicht signifikant.

Des Weiteren soll die Messzeit bestimmt werden, nach der der Plateuanstieg auf 1% bekannt ist. Da dieser Fehler von 1% prozentual angegeben wurde, ist es sinnvoll, den prozentualen Anstieg zu betrachten, d.h. $\frac{N(U_0+100V)-N(U_0)}{N(U_0)}$. Wenn in der Aufgabe gefordert wird, dass der Plateuanstieg auf 1% bekannt ist, dann ist damit gemeint dass der Fehler des prozentualen Anstiegs 1% betragen soll. Wir haben bereits in (39) und (40) berechnet, dass für $1min$ der Fehler des prozentualen Anstiegs $1,9\%$ beträgt und für $3min$ $1,3\%$. Beide Werte liegen oberhalb des gesuchten Fehlers für den Anstieg (1%). Dabei sehen wir jedoch an (39) und (40) dass je grösser die Messzeit, umso kleiner der prozentuale Anstiegsfehler, was auch Sinn ergibt.

Um also die Zeit zu bestimmen, nach der der Plateuanstieg auf 1% bekannt

ist, muss man ausnutzen, dass die Zählrate eine lineare Funktion in der Zeit ist:

$$N_{U_0}(t) = a \cdot t \quad (43)$$

$$N_{U_0+100V}(t) = b \cdot t \quad (44)$$

Verwendet man beispielsweise die Messdaten aus dem Messprotokoll (Tabelle 2), so kann man durch Einsetzen in die Gleichung die Werte für a und b bestimmen.

$$N_{U_0}(3min) = 12276 \quad (45)$$

$$N_{U_0+100V}(3min) = 12507 \quad (46)$$

$$\Leftrightarrow 12276 = a \cdot 180s \quad (47)$$

$$12507 = b \cdot 180s \quad (48)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{12276}{180} \frac{1}{s} \quad (49)$$

$$b = \frac{12507}{180} \frac{1}{s} \quad (50)$$

Der prozentuale Anstieg hat den Fehler aus (41). Berücksichtigt man die Linearität so kann man eine Formel für den Fehler in Abhängigkeit von a und b herleiten.

$$\Delta d = d \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta(N(U_0 + 100V) - N(U_0))}{(N(U_0 + 100V) - N(U_0))}\right)^2 + \left(\frac{\Delta N(U_0)}{N(U_0)}\right)^2} \quad (51)$$

$$= d \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{N(U_0 + 100V) + N(U_0)}}{(N(U_0 + 100V) - N(U_0))}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{N(U_0)}}{N(U_0)}\right)^2} \quad (52)$$

$$= \frac{b - a}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{bt + at}}{(bt - at)}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{at}}{at}\right)^2} \quad (53)$$

$$= \frac{b - a}{a} \sqrt{\frac{a + b}{(b - a)^2} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}} \quad (54)$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass der statistische Fehler der Zählraten als die Wurzel dieser berechnet werden kann.

Nun können wir obere Gleichung nach der Zeit umstellen:

$$t = \left(\frac{b - a}{a \Delta d}\right)^2 \left(\frac{a + b}{(b - a)^2} + \frac{1}{a}\right) \quad (55)$$

Verwendet man nun für den Fehler des prozentualen Anstiegs die gewollten $\Delta d = 1\%$, so kommt man auf das Ergebnis:

$$t = 296,07s = 4,93min \quad (56)$$

Das Ergebnis macht insofern Sinn, dass es grösser als die vorher bestimmten $3min$ ist, wo der prozentuale Anstiegsfehler noch grösser war.

Weiterhin stellen wir uns die Frage, welche prozentuale Variation der Zählrate bei einer Spannungserhöhung um 100V möglich bei einem Vertrauensniveau von $1\sigma_{\Delta}$ und $2\sigma_{\Delta}$ möglich ist.

Bei einem Vertrauensniveau von $1\sigma = 68\%$ wäre für 1min eine prozentuale Variation des Anstiegs zwischen $(2,9 - 1,9)\% = 1,0\%$ und $(2,9 + 1,9)\% = 4,8\%$ möglich. Für 3min wäre eine Variation von $(1,9 - 1,3) = 0,6\%$ bis $(1,9 + 1,3)\% = 3,2\%$ möglich.

Bei einem Vertrauensniveau von $\sigma = 95\%$ kann für 1min der Anstieg zwischen $(2,9 - 2 \cdot 1,9) = -0,9\%$ und $(2,9 + 2 \cdot 1,9) = 6,7\%$ variiert werden und für 3min zwischen $(1,9 - 2 \cdot 1,3) = -0,7\%$ und $(1,9 + 2 \cdot 1,3) = 4,5\%$.

3.3 Statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls bei hohen Zählraten

Im zweiten Versuchsschritt wurden 2000 Messungen unter einer Totzeit von 0,5s durchgeführt, wobei das Präparat so nah dran an das Geiger-Müller-Zählrohr gebracht wurde, sodass maximal 140 – 150 Zerfälle pro Sekunde messbar waren - da bei einer höheren Anzahl an Zerfällen die Totzeit die Statistik verfälschen könnte. Dabei ist die mittlere Ereigniszahl während dieses Versuchsteils relativ hoch.

Wir erhalten die in Abbildung 4 erkennbare Verteilung. An diese Verteilung

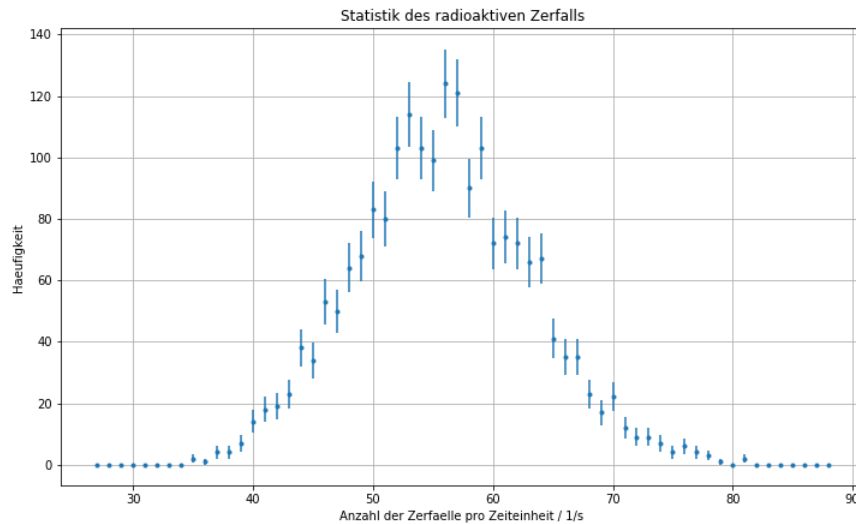


Abbildung 4: Statistische Häufigkeit der Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit

soll anschliessend eine Poisson- und eine Gaußkurve angepasst werden. Dabei funktioniert der Fit nur, wenn die Fehler gaußverteilt sind, was in etwa erfüllt

ist wenn die Häufigkeit mindestens 10 ist. Deshalb verwende ich in Python eine Maske, welche nur die Messwerte mit einer Mindesthäufigkeit von 10 für den Fit berücksichtigt.

Wir erhalten folgenden Verlauf (Abbildung 5). Dabei erhalte ich für die Fitpa-

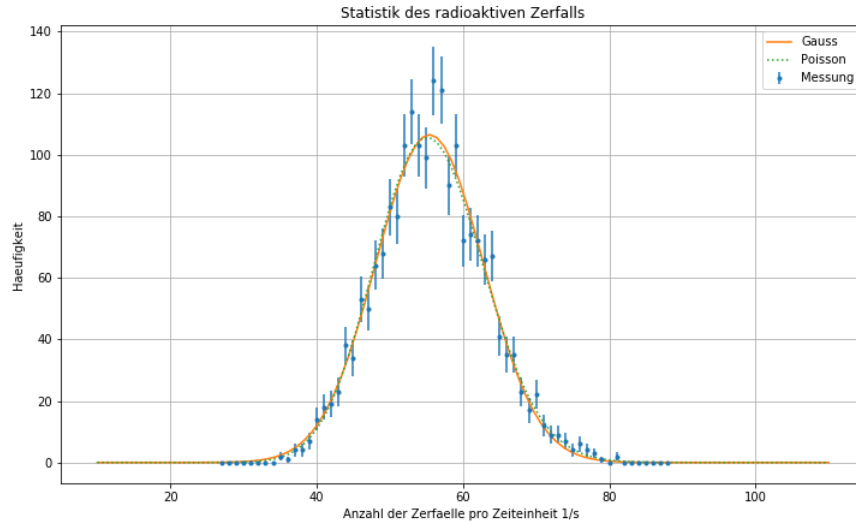


Abbildung 5: Anfiten Poisson vs. Gauss

rameter:

Fit	Gauss	Poisson
A	1971 ± 46	1973 ± 45
μ [Anzahl/s]	$55,43 \pm 0,19$	$55,61 \pm 0,19$
σ [Anzahl/s]	$7,38 \pm 0,17$	kein σ in Formel

Tabelle 1: Fitparameter

Dabei will ich hierbei betonen, dass man bereits per Augenmass erkennen kann, dass die Gauss- und die Poissonverteilung nahezu identisch zueinander sind und nicht signifikant voneinander abweichen. Dies liegt daran, dass die Gaussverteilung, wie in den Grundlagen hergeleitet, nur eine Näherung der Poissonverteilung ist. Dabei wurde die Näherung verwendet dass der Mittelwert gross war. Dabei bezeichnet man in der Regel Verteilungen mit $\mu > 30$ als geeignet um durch eine Gaussverteilung genähert werden zu können. Dies ist in diesem Fall auf jeden Fall gegeben, da der Mittelwert nach den Fitparametern zwischen 55 und 56 liegt.

Die Güte dieses Fits wird anschliessend quantitativ mit der χ^2 -Methode genauer

untersucht.

Dafür wird zunächst die χ^2 -Summe berechnet:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left(\frac{Funktionswert_i - Messwert_i}{Fehler_i} \right)^2 \quad (57)$$

weiter wird auch χ_{red} berechnet durch

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{Freiheitsgrad} \quad (58)$$

wobei der Freiheitsgrad sich aus der Anzahl der Messwerte abzüglich der Zahl der Fitparameter berechnet.

Auch die Fitwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit bei einer Wiederholungsmessung einen χ^2 -Wert zu erhalten der grösser oder gleich dem χ^2 Wert ist.

Alle Werte für hohe Zählraten werden in folgender Tabelle angegeben.

Dabei kann man an dieser Tabelle erkennen, dass beide Fits akzeptabel sind

Verteilung	Gauss	Poisson
χ^2	25,3	26,5
χ_{red}^2	0,87	0,88
Fitwahrscheinlichkeit	66%	65%

Tabelle 2: Güte des Fits hohe Zählraten

und die Gütewerte sowohl beim Gauss- als auch beim Poissonfit sehr wenig voneinander abweichen, d.h. gleich gut die Theorie des radioaktiven Zerfalls beschreiben.

Die Ergebnisse der χ^2 -Analyse werden in der Diskussion tiefgründiger kommentiert.

3.4 Vergleich der Poisson- und Gaussverteilung bei sehr kleinen Zählraten

Im dritten Versuchsschritt wurden 5000 Messungen unter einer Torzeit von 0,1s durchgeführt. Die mittlere Ereigniszahl ist während dieses Versuchsteils klein. Wir erhalten folgende Verteilung der Ereignisanzahl pro Sekunde (Abbildung 6). An diese Verteilung wird erneut eine Gauss- bzw. Poissonverteilung angefitet. Dabei wird für die Ordinate eine logarithmische Skalierung gewählt um die Unterschiede zwischen Gauss und Poisson besser erkennen zu können.

Wir erhalten den Verlauf in Abbildung 7. Für die Fitparameter erhalten wir: An der Anpassung der Verteilungen kann man bereits mit blossen Auge erkennen, dass die Gaussverteilung stark von der Poissonverteilung abweicht - vor allem für grosse Zählraten vergrössert sich die Abweichung. Der Grund hierfür ist dass die Gaussverteilung nur für grosse Mittelwerte eine gute Näherung der Poissonverteilung beschreibt. In diesem Fall liegt der Mittelwert jedoch zwischen

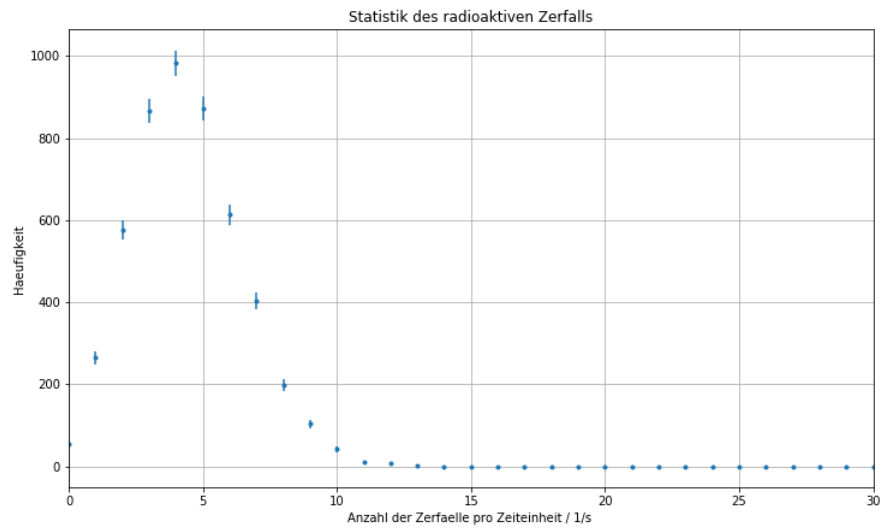


Abbildung 6: Verteilung der Ereigniszahl pro Sekunde

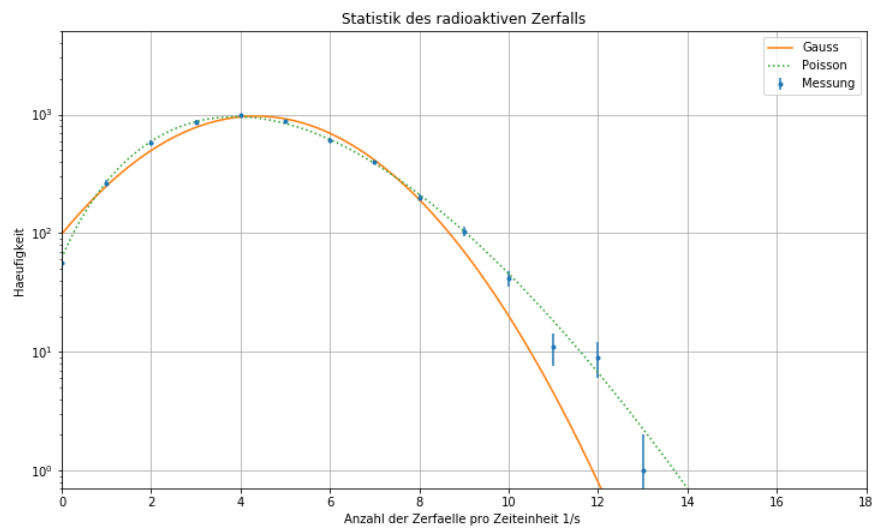


Abbildung 7: Anfiten Poisson- und Gausskurve

Fit	Gauss	Poisson
A	4937 ± 71	4992 ± 71
μ [Anzahl/s]	$4,34 \pm 0,03$	$4,395 \pm 0,029$
σ [Anzahl/s]	$2,031 \pm 0,023$	kein σ in Formel

Tabelle 3: Fitparameter für kleine Zählraten

4 und 5 was deutlich kleiner als die in den Grundlagen besprochene Grenze von 30 ist. Die Verteilung ist etwas asymmetrischer und deshalb eignet sich nicht die Anpassung durch eine verschobene symmetrische Gaussfunktion. Die Güte dieses Fits kann wieder anhand der χ^2 -Methode genauer untersucht werden.

Bereits per Augenmass kann erkannt werden, dass die Gaussfunktion die Daten

Verteilung	Gauss	Poisson
χ^2	101	10
χ^2_{red}	10	0,93
Fitwahrscheinlichkeit	0,0%	51,0%

Tabelle 4: Güte des Fits kleine Zählraten

nicht richtig beschreibt und die Anpassung entsprechend auch schlecht ist. Die Poisson-Verteilung beschreibt den Zerfall dabei deutlich genauer. Die Gründe der Abweichung werden in der Diskussion tiefgreifender kommentiert.

4 Zusammenfassung und Diskussion

Zusammenfassend haben wir uns in diesem Versuch mit der Statistik des radioaktiven Zerfalls beschäftigt und insbesondere den Zusammenhang zwischen der Poisson- und Gaussverteilung am Zerfallsbeispiel genauer kennengelernt.

Im ersten Schritt wurde die Zählrohrcharakteristik mit einem internen Zähler bestimmt und graphisch dargestellt. Damit konnte die Mitte des gemessenen Plateaubereichs bestimmt werden zu $U_0 = (555 \pm 5)V$.

Daraufhin wurde der Plateuanstieg untersucht und wir haben festgestellt dass der Plateuanstieg bei einem Spannungsunterschied von 100V nicht signifikant war, da dieser unterhalb von 3σ -Abweichungen lag. Weiterhin haben wir rechnerisch ermittelt, dass man 100,41h messen müsste, um den Plateuanstieg auf 1% Genauigkeit kennen zu können. Dabei ist eine prozentuale Variation der Zählrate von 1,6% bei einer Spannungserhöhung von 100V bei einem Vertrauensniveau von 1_Δ bzw. 3,2% bei $2\sigma_\Delta$ möglich.

Dann wurden die beiden Hauptmessreihen durchgeführt. Bei der ersten wurden 2000 Messungen mit Torzeit 0,5s durchgeführt, wobei die mittlere Zählrate hoch war und bei der zweiten wurden 5000 Messungen mit Torzeit 0,1s durchgeführt, wobei die mittlere Zählrate niedrig war. Dabei konnten wir nach der Anpassung einer Gauss- bzw. Poissonkurve an die Messwerte feststellen, dass

diese im ersten Fall gut übereinstimmten, im zweiten Fall jedoch stark voneinander abwichen, was sich über die Natur der Gaussverteilung als Näherung der Poissonverteilung für grosse Mittelwerte erklären lies.

4.1 Diskussion

Am Anfang des Versuches wurde die Zählrohrcharakteristik im Plateaubereich ermittelt. Durch den linearen Teil wurde eine Gerade gefittet. An der Anpassung kann man gut erkennen, dass die Steigung sehr gering ist, was ebenfalls unseren Erwartungen vom Plateaubereich entsprach. Die Steigung ist jedoch von 0 verschieden, da im Geigemüllerzählrohr Inhomogenitäten im elektrischen Feld auftreten.

Dabei haben wir in diesem Versuchsteil beweisen können, dass die Totzeit des Zählrohrs keinen Einfluss auf unsere Ergebnisse hat, da die Anzahl an Ereignissen klein genug gewählt wurde, die Anstiege sehr gering sind und wir berechnet haben, dass nach bereits 296,97s die relative Steigung auf 1% bekannt ist, weshalb wir mit hoher Sicherheit nicht die Totzeit einbeziehen müssen.

Weiterhin ist uns in diesem Versuchsteil bei der Berechnung der Zeit die man messen müsste um die Steigung auf 1% zu kennen klargeworden, dass die Annahme des Fehlers \sqrt{N} den Nachteil mitsichbringt, dass man zwar schnell ein in etwa genaues Ergebnis erhalten kann, ein sehr genaues Ergebnis jedoch deutlich höhere Zeiten erfordert. Dies liegt daran, dass die Zeit die gewartet werden muss proportional zu $\frac{1}{\Delta d^2}$ ist (vergleiche mit (55)), wobei Δd der prozentuale Fehler ist, den man bereit ist zu machen.

Bei den gemachten Poisson- bzw. Gaussfits wurden bereits die Fitwahrscheinlichkeiten mit der χ^2 -Methode berechnet. Diese werden anschliessend weiter interpretiert.

Zuerst betrachte ich die Werte in Tabelle 2, bei welcher der Fit einer Gauss- bzw. Poissonkurve an die Verteilung für hohe Zählraten berechnet wurde.

Die Fitwahrscheinlichkeit, die ein Mass für den Zusammenhang zwischen den Messdaten und dem Fit beschreibt, ist somit in beiden Fällen ziemlich gut und ebenfalls für beide ähnlich, da diese nur eine absolute Abweichung von 1% voneinander aufweisen. Sowohl Poisson- als auch Gauss beschreiben somit in guter Näherung die Messdaten. Dies bestätigt die vorherig aufgestellten Erklärungen anhand der Eigenschaften der Gaussfunktion als Näherung der Poissonverteilung, welche für grosse Erwartungswerte gut miteinander übereinstimmen.

Um eine Erklärung dafür zu geben, warum die Wahrscheinlichkeit nun nicht 100% für beide Verteilungen beträgt, muss zunächst berücksichtigt werden, dass die Messwerte logischerweise nicht genau auf der Fitlinie liegen, da es zu statistischen Schwankungen kommen kann. Diese Schwankungen könnten dadurch verringert werden, indem eine grössere Anzahl an Messungen durchgeführt werden könnte, da dadurch die statistischen Schwankungen minimal wären. Des Weiteren ist zu beachten, dass einige Messwerte mit einer Häufigkeit unter 10 ausgeblendet wurden, da sonst der Fit nicht konvergieren würde und diese somit keinen Beitrag zur Statistik hatten, obwohl sie reale Messwerte darstellten.

Die Güte des Fits bei einer kleinen Ereigniszahl kann Tabelle 4 entnommen werden.

Dabei können wir beobachten, dass die Poisson-Verteilung wieder gut den Messdaten angepasst werden konnte, da die Fitwahrscheinlichkeit von 51% hier ziemlich gut ist. Hingegen besitzt die Gaussverteilung eine Fitwahrscheinlichkeit von 0%, da diese stark von den Messdaten abweicht.

Zur Beschreibung kleiner Zählraten eignet sich somit nur die Poissonverteilung und die Näherung zur Gaussverteilung sollte nicht gemacht werden, da der Erwartungswert zu klein ist. Dies bestätigt wiederum vorherige Aussagen.

Insgesamt hat mir der Versuch viel Spass gemacht, da wir nicht nur zuerst aus einer theoretischen mathematischen Sichtweise die Gaussverteilung aus der Poissonverteilung hergeleitet haben, sondern anschliessend auch experimentell die Unterschiede zwischen beiden am anschaulichen Beispiel des radioaktiven Zerfalls beobachten und somit eine Intuition dafür gewinnen konnten.

5 Quellen und Python Code

- PAP 2.1 Anleitung der Universität Heidelberg

V251Statistik

February 20, 2024

0.0.1 Auswertung zum Versuch 251: Statistik des radioaktiven Zerfalls

0.1 Yago Obispo Gerster | mn304

```
[1]: %matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#Zaehlrohrspannung:
U=np.array([430,455,480,505,530,555,580])
sig_U = 5*np.ones(len(U))
#gezaehlte Ereignisse
N=np.array([2007,2092,2022,2106,1993,2084,2112])
Fehler_N=np.sqrt(N)

plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=".")
plt.xlabel('Spannung / V')
plt.ylabel('Ereignisse')
plt.grid()
plt.title('Zaehlrohrcharakteristik')

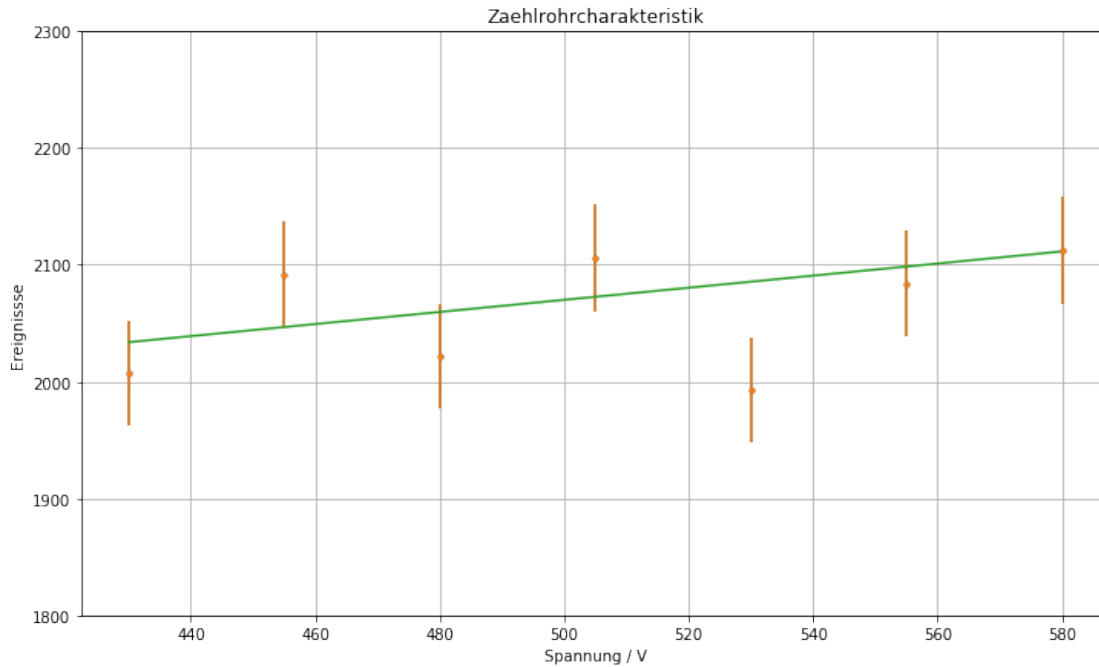
#Anfitten einer Geraden
from scipy.optimize import curve_fit

def linear(x,a,b):
    return a*x+b

#Entferne 5ten Wert, welcher Abweichung von den anderen aufweist
maske_5_Wert = np.array([True,True,True,True,False,True,True])

popt, pcov=curve_fit(linear, U[maske_5_Wert], N[maske_5_Wert])
plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=".")
plt.xlabel('Spannung / V')
plt.ylabel('Ereignisse')
plt.ylim(1800,2300)
plt.title('Zaehlrohrcharakteristik')
plt.plot(U, linear(U,*popt))
```

```
plt.savefig("Versuch251/Zaehlrrohrcharakteristik.png", format="png")
```



```
[2]: #Aufgabe 2: Plateubereich des Zählrohres
#Anzahl der Ereignisse bei 1 bzw. 3 min
N_U_0 = np.array([4065,12276])
N_U_100 = np.array([4182,12507])

sig_N_U_0 = np.sqrt(N_U_0)
sig_N_U_100 = np.sqrt(N_U_100)

#Anstiege: Absolut und prozentual
anstieg_abs = N_U_100-N_U_0
anstieg_pro = (anstieg_abs)/N_U_0

#Fehler einer Differenz über Näherungsformel als Wurzel
sig_anstieg_abs = np.sqrt(sig_N_U_0**2 + sig_N_U_100**2)
sig_anstieg_pro = anstieg_pro*np.sqrt((sig_anstieg_abs/anstieg_abs)**2 +
    ↳ (sig_N_U_0/N_U_0)**2)

print("Anstieg absolut: ",np.round(anstieg_abs,0),"+/-",np.
    ↳ round(sig_anstieg_abs))
print("Prozentualer Anstieg: ",np.round(anstieg_pro,3),"+/-",np.
    ↳ round(sig_anstieg_pro,3))
```

Anstieg absolut: [117 231] +/- [91. 157.]

Prozentualer Anstieg: [0.029 0.019] +/- [0.022 0.013]

```
[3]: #Ist der absolute Anstieg signifikant
sigma_anstieg = anstieg_abs/sig_anstieg_abs
print(np.round(sigma_anstieg,1))
for i in range(len(sigma_anstieg)):
    print("Die {0}-Messungsabweichung ist signifikant? {1}".
    ↪format(i,sigma_anstieg[i]>3))
```

[1.3 1.5]

Die 0-Messungsabweichung ist signifikant? False

Die 1-Messungsabweichung ist signifikant? False

```
[4]: #Messzeit für 1% Genauigkeit
a = 12276/180
b = 12507/180
t = ((a-b)/(a*0.01))**2 * ((a+b)/((b-a)**2) + 1/a ) #s
print("Die benötigte Zeit um den Plateauanstieg auf 1% genau zu kennen ist ",
    ↪np.round(t,2), "s")
print("Die benötigte Zeit um den Plateauanstieg auf 1% genau zu kennen ist ", t/
    ↪60, " min")
```

Die benötigte Zeit um den Plateauanstieg auf 1% genau zu kennen ist 296.07 s

Die benötigte Zeit um den Plateauanstieg auf 1% genau zu kennen ist

4.934436196184709 min

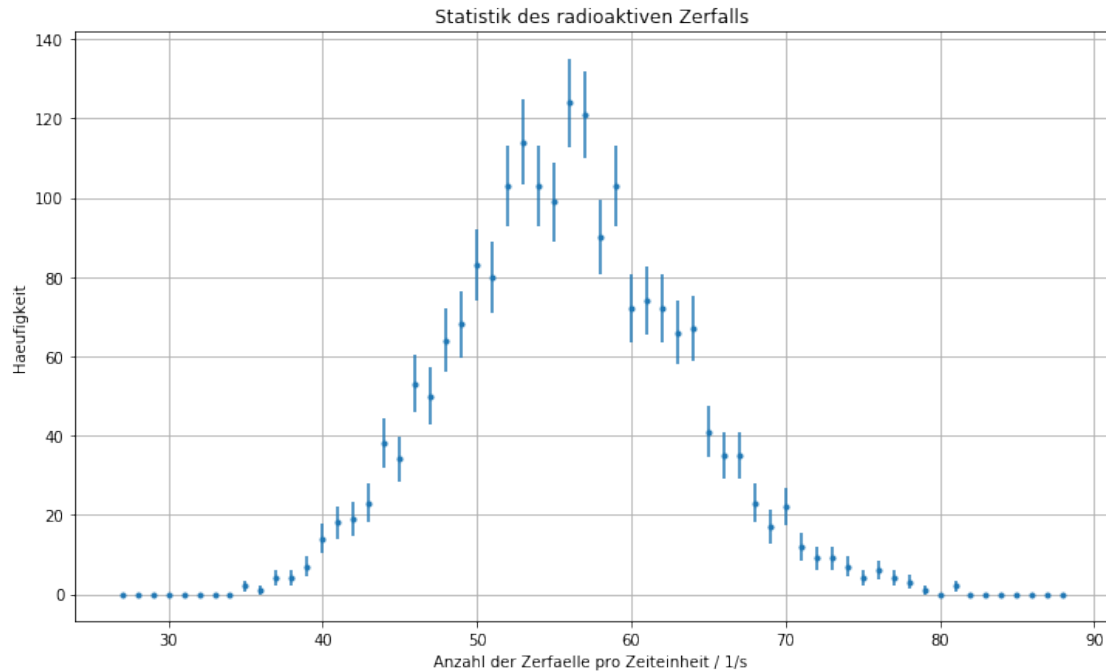
```
[5]: #Variation der Zählrate
var_1_sigma = np.sqrt(N_U_0)/N_U_0
var_2_sigma = 2*var_1_sigma
print(var_1_sigma*100)
print(var_2_sigma*100)
```

[1.56844656 0.9025506]

[3.13689311 1.8051012]

```
[6]: #Aufgabe 3:Auswertung der Daten mit hoher mittlerer Energiezahl
anzahl, haeufigkeit=np.loadtxt('data_aufgabe2.txt', unpack=True,
    ↪skiprows=4,delimiter=",")
fehler=np.sqrt(haeufigkeit)

plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, fehler, fmt=".")
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit / 1/s ')
plt.ylabel('Haeufigkeit')
plt.grid()
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
plt.savefig("Versuch251/Haupt10hneFit.png", format="png")
```



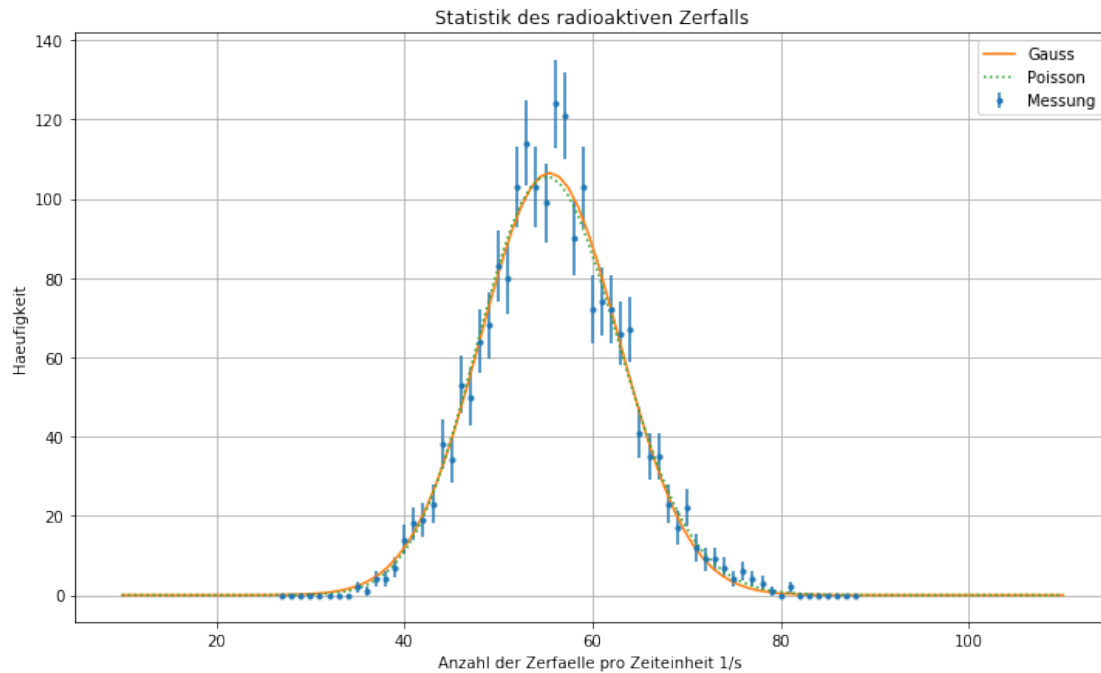
```
[7]: #Anfitten einer Gaussfunktion
from numpy import exp, pi, sqrt
def gaussian(x, A, mu, sig): #A: Flaeche der Gaussfunktion
    return A/(sqrt(2*pi)*sig)*exp(-(x-mu)**2/2/sig**2)

#Fit wobei Messwerte bei sehr kleinen und sehr grossen Raten ausgeblendet
→werden damit funktioniert
popt, pcov=curve_fit(gaussian,anzahl[haeufigkeit>9],
→haeufigkeit[haeufigkeit>9],p0=[2000,55.74,7.
→43],sigma=fehler[haeufigkeit>9],absolute_sigma=True)

#Anfitten einer Poisson-Verteilung
from scipy.special import gamma
def poisson(x, A_p, mu_p):
    return A_p*exp(-mu_p)*mu_p**x/gamma(x+1)
popt_p, pcov_p = curve_fit(poisson,
→anzahl[haeufigkeit>9],haeufigkeit[haeufigkeit>9], p0=[2000, 55.
→74],sigma=fehler[haeufigkeit>9], absolute_sigma=True)

#Plot der Fits
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(anzahl,haeufigkeit,fehler, fmt=".",label='Messung')
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit 1/s ')
plt.ylabel('Haeufigkeit')
plt.grid()
```

```
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
x=np.linspace(10,110, 100)
plt.plot(x, gaussian(x,*popt), label='Gauss')
plt.plot(x, poisson(x,*popt_p), label='Poisson',linestyle=':')
plt.legend()
plt.savefig("Versuch251/poisson_vs_gaussian.png", format="png")
```



```
[8]: #Ausgabe der Fitparameter
print("Gaussfit:")
print("A=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
print("mu=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))
print("sig=",popt[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[2][2]))
print("Poissonfit:")
print("A_p=",popt_p[0], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[0][0]))
print("mu_p=",popt_p[1], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[1][1]))
```

Gaussfit:

A= 1970.9644558152634 , Standardfehler= 45.745936814939014

mu= 55.43469006481231 , Standardfehler= 0.18533172869306294

sig= 7.38214848282578 , Standardfehler= 0.1714470240270478

Poissonfit:

A_p= 1972.993814058541 , Standardfehler= 45.1505860225006

mu_p= 55.60817797341244 , Standardfehler= 0.1870456887807685

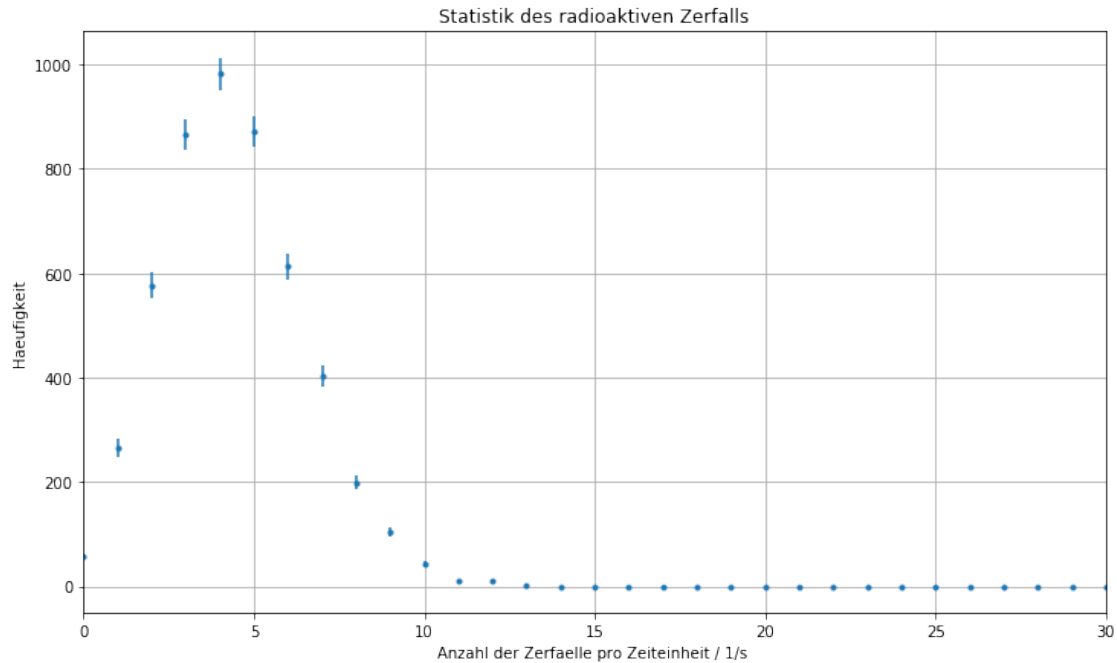

```
[9]: #Güte des Fits mit Chi-Quadrat-Methode
#Gauss:
chi2_g=np.sum((gaussian(anzahl[haeufigkeit>9],*popt)
↳-haeufigkeit[haeufigkeit>9])**2/fehler[haeufigkeit>9]**2)
dof_g=len(anzahl[haeufigkeit>9])-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red_g=chi2_g/dof_g
print("chi2_g=", chi2_g)
print("chi2_red_g=",chi2_red_g)
#Poisson:
chi2_p=np.sum((poisson(anzahl[haeufigkeit>9],*popt_p)
↳-haeufigkeit[haeufigkeit>9])**2/fehler[haeufigkeit>9]**2)
dof_p=len(anzahl[haeufigkeit>9])-2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p=chi2_p/dof_p
print("chi2_p=", chi2_p)
print("chi2_red_p=",chi2_red_p)

#Fitwahrscheinlichkeit
from scipy.stats import chi2
#Gauss:
prob_g=round(1-chi2.cdf(chi2_g,dof_g),2)*100
#Poisson:
prob_p=round(1-chi2.cdf(chi2_p,dof_p),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit Gauss=", prob_g,"%")
print("Wahrscheinlichkeit Poisson=", prob_p,"%")
```

```
chi2_g= 25.332785544013568
chi2_red_g= 0.8735443291039161
chi2_p= 26.488912435112645
chi2_red_p= 0.8829637478370882
Wahrscheinlichkeit Gauss= 66.0 %
Wahrscheinlichkeit Poisson= 65.0 %
```

```
[10]: #Aufgabe 4: Auswertung Daten mit kleiner mittlerer Ereigniszahl
anzahl, haeufigkeit=np.loadtxt('data_aufgabe3.txt', unpack=True,
↳skiprows=4,delimiter=",")
fehler=np.sqrt(haeufigkeit)

plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, fehler, fmt=".")
plt.xlabel('Anzahl der Zerfalle pro Zeiteinheit / 1/s ')
plt.ylabel('Haeufigkeit')
#plt.yscale('log')
plt.grid()
plt.xlim(0,30)
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
plt.savefig("Versuch251/Haupt20hneFit.png", format="png")
```



```
[11]: #Gauss
h=4
popt, pcov=curve_fit(gaussian,anzahl[haeufigkeit>h],
    ↳haeufigkeit[haeufigkeit>h],p0=[5000,4.4,2.
    ↳05],sigma=fehler[haeufigkeit>h],absolute_sigma=True)

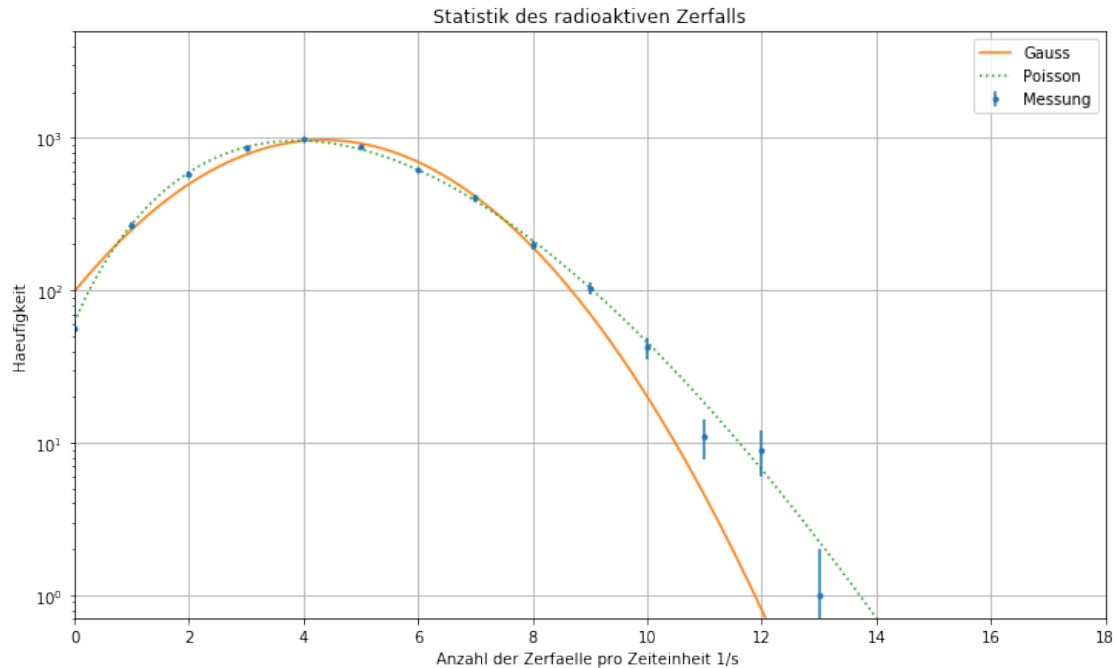
#Anfitten einer Poisson-Verteilung
popt_p, pcov_p = curve_fit(poisson,
    ↳anzahl[haeufigkeit>h],haeufigkeit[haeufigkeit>h], p0=[5000,4.
    ↳4],sigma=fehler[haeufigkeit>h], absolute_sigma=True)

#Plot der Fits
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(anzahl,haeufigkeit,fehler, fmt=".",label='Messung')
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit 1/s ')
plt.ylabel('Haeufigkeit')
plt.yscale("log")
plt.xlim(0,18)
plt.ylim(0,5000)
plt.grid()
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
x=np.linspace(0,30,1000)
plt.plot(x, gaussian(x,*popt), label='Gauss')
plt.plot(x, poisson(x,*popt_p), label='Poisson',linestyle=':')
plt.legend()
```

```
plt.savefig("Versuch251/poisson_vs_gaussian2.png", format="png")
```

/usr/lib/python3/dist-packages/matplotlib/pyplot.py:1479: UserWarning: Attempted to set non-positive bottom ylim on a log-scaled axis.
Invalid limit will be ignored.

```
ret = ax.set_ylim(*args, **kwargs)
```



```
[12]: #Ausgabe der Fitparameter
print("Gaussfit:")
print("A=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
print("mu=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))
print("sig=",popt[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[2][2]))
print("Poissonfit:")
print("A_p=",popt_p[0], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[0][0]))
print("mu_p=",popt_p[1], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[1][1]))
```

Gaussfit:

A= 4937.255016952303 , Standardfehler= 70.63160570987952

mu= 4.344965453361488 , Standardfehler= 0.02992645087331189

sig= 2.0313811920832063 , Standardfehler= 0.023463291184605273

Poissonfit:

A_p= 4992.059164465156 , Standardfehler= 70.67780139336578

mu_p= 4.3951470854792225 , Standardfehler= 0.029233726880325422

```
[13]: #Güte des Fits mit Chi-Quadrat-Methode
#Gauss:
chi2_g=np.sum((gaussian(anzahl[haeufigkeit>h],*popt)
↳-haeufigkeit[haeufigkeit>h])**2/fehler[haeufigkeit>h]**2)
dof_g=len(anzahl[haeufigkeit>h])-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red_g=chi2_g/dof_g
print("chi2_g=", chi2_g)
print("chi2_red_g=",chi2_red_g)
#Poisson:
chi2_p=np.sum((poisson(anzahl[haeufigkeit>h],*popt_p)
↳-haeufigkeit[haeufigkeit>h])**2/fehler[haeufigkeit>h]**2)
dof_p=len(anzahl[haeufigkeit>h])-2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p=chi2_p/dof_p
print("chi2_p=", chi2_p)
print("chi2_red_p=",chi2_red_p)

#Fitwahrscheinlichkeit
from scipy.stats import chi2
#Gauss:
prob_g=round(1-chi2.cdf(chi2_g,dof_g),2)*100
#Poisson:
prob_p=round(1-chi2.cdf(chi2_p,dof_p),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit Gauss=", prob_g,"%")
print("Wahrscheinlichkeit Poisson=", prob_p,"%")
```

```
chi2_g= 101.31807401498472
chi2_red_g= 10.131807401498472
chi2_p= 10.192952130385228
chi2_red_p= 0.9266320118532025
Wahrscheinlichkeit Gauss= 0.0 %
Wahrscheinlichkeit Poisson= 51.0 %
```