

Versuch 31: Optische Abbildung

Yago Obispo Gerster

29. Februar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation	1
1.1 Physikalische Grundlagen	2
1.1.1 Reale vs. virtuelle Bilder	2
1.1.2 Reflexions- und Brechungsgesetz von Snellius	2
1.1.3 Geometrische Konstruktion des Bildes	3
1.1.4 Abbildungsgleichung und Besselverfahren	4
1.1.5 Linsenfehler	5
1.1.6 Mikroskop	5
2 Messprotokoll	7
3 Auswertung	16
3.1 Fehlerabschätzung	16
3.2 Brennweite mit Abbildungsgleichung bestimmen	16
3.3 Grafische Bestimmung der Brennweite	17
3.4 Brennweite nach Bessel-Verfahren	20
3.5 Linsenfehler	20
3.6 Mikroskop	21
3.6.1 Gitterkonstante	21
3.6.2 Auflösung	22
4 Zusammenfassung und Diskussion	22
4.1 Diskussion der Ergebnisse	23

1 Einleitung und Motivation

Optische Linsen besitzen weitgehende praktische Anwendungen. Diese werden für Mikroskope, alltägliche Brillen, Handykameras aber auch oft in der Forschung - wie z.B. in der Astronomie oder Teilchenphysik - verwendet.

Ziel des heutigen Versuches ist es, uns mit der Funktionsweise von Linsensystemen vertraut zu machen und die Brennweite einer Linse über zwei unterschiedliche Methoden (Abbildungsgleichung und Besselverfahren) zu bestimmen. Die

Besselmethode soll anschliessend verwendet werden um die Linsensfehler - die sphärische und chromatische Aberration - genauer zu untersuchen. Zuletzt werden wir uns mit dem Aufbau eines Mikroskops beschäftigen.

1.1 Physikalische Grundlagen

1.1.1 Reale vs. virtuelle Bilder

Wenn sich aus einem Gegenstand ausgehende Lichtbündel nach dem Durchlauf durch ein optisches System (Linsen, Spiegel usw.) in einem Punkt treffen (im *Bildpunkt*) so spricht man von einer *optischen Abbildung*.

Wenn sich die Lichtstrahlen hinter dem optischen System schneiden, dann spricht man von einem *reellen Bild*. Solche Bilder können auf einem Schirm aufgefangen und dargestellt werden. Ein Beispiel für ein reelles Bild ist in Abbildung 1 links (Planspiegel) dargestellt.

Wenn die Lichtstrahlen jedoch hinter dem optischen System divergieren und sich nicht schneiden, dann kann man gedanklich den Verlauf der Lichtstrahlen rückläufig verlängern, sodass sich diese in einem virtuellen Punkt schneiden. Hierbei spricht man von einem *virtuellen Bild*, also einem Bild dass man selber nicht auf einem Schirm darstellen kann. Als Beispiel dient das Bild einer Samellinse (Abbildung 1 rechts).

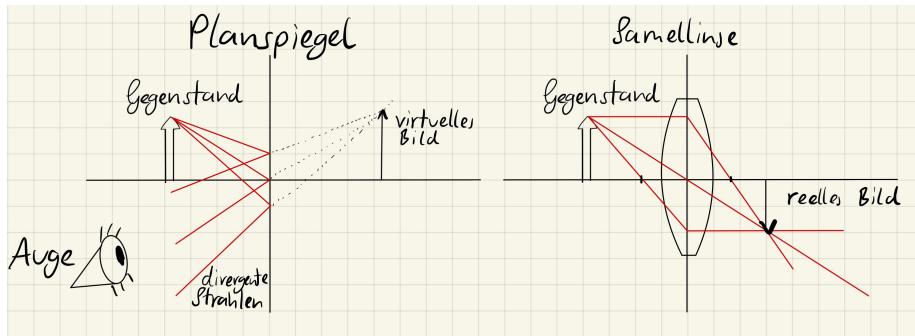


Abbildung 1: Vergleich reales und virtuelles Bild bei Planspiegel und Samellinse

1.1.2 Reflexions- und Brechungsgesetz von Snellius

Nach dem Fermatschen Prinzip verläuft Licht zwischen zwei festen Punkten so, sodass seine Laufzeit extremal wird. Daraus lässt sich das Reflexionsgesetz, nach dem der Winkel des einfallenden Lichtstrahls gleich dem Winkel des reflektierten Lichtstrahls ist, und das Snelliussche Brechungsgesetz beim Übergang zwischen zwei optischen Medien herleiten.

Ändert ein Lichtstrahl seinen Weg von einem optischen Medium mit Brechungsindex n_1 unter einem Winkel zum Lot der Grenzfläche von θ_1 in ein anderes optische Medium mit Brechungsindex n_2 , so gilt für einen Brechungswinkel θ_2

folgender Zusammenhang:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad (1)$$

Im Spezialfall, dass unser optisches System aus sphärischen Grenzflächen mit Radius r besteht, kann man mithilfe von Formel (1) gezeigt werden, dass achsennahe parallele Lichtstrahlen so gebrochen werden, sodass alle auf der optischen Achse auf einen Punkt treffen (*Brennpunkt*). Dieser befindet sich unter einem Abstand f von der Grenzfläche, der als *Brennweite* bezeichnet wird. Es gilt:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \frac{1}{r} \quad (2)$$

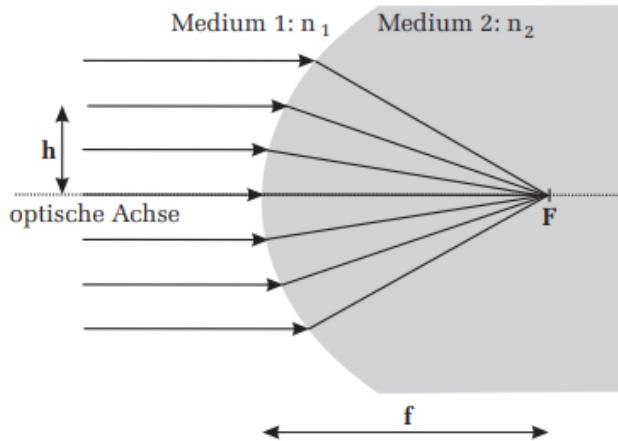


Abbildung 2: Brechung paralleler Lichtstrahlen an sphärischen Grenzflächen

1.1.3 Geometrische Konstruktion des Bildes

Um das Bild eines optischen Systems zu konstruieren, kann ein geometrischer Ansatz verwendet werden.

Dazu zeichnet man 3 Lichtstrahlen ausgehend vom Gegenstandspunkt ein:

1. Parallelstrahl: Zeichne einen zur horizontalen Achse parallelen Strahl. Dieser wird zum Brennpunkt gebrochen.
2. Mittelpunktstrahl: Zeichne einen Strahl der durch den Mittelpunkt der Linse geht. Dieser wird nicht gebrochen.
3. Brennpunktstrahl: Zeichne einen Strahl der durch den Brennpunkt geht. Dieser wird als Parallelstrahl gebrochen.

Der Schnittpunkt der drei Strahlen ergibt das Bild. Dabei dient einer der Strahlen nur zur Kontrolle, da für den Schnittpunkt theoretisch nur 2 Strahlen ausreichend sind.

In Abbildung 1 rechts wurde dieses Verfahren bei einer Samellinse einmal durchgeführt.

1.1.4 Abbildungsgleichung und Besselverfahren

Für optische sphärische dünne Linsen, also lichtdurchlässige Objekte, mit beidseitig sphärischer Grenzfläche, gilt die *Abbildungsgleichung*:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (3)$$

Hier ist g die Gegenstandsweite, also der Abstand des Gegenstandes von der Mittelebene der Linse und b die Bildweite, also der Abstand des Bildes von der Mittelebene.

Das Verhältnis der Bildgrösse B und Gegenstandsgrösse G , wird als Abbildungsmassstab β bezeichnet.

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (4)$$

Um die Brennweite einer Linse zu bestimmen kann natürlich die Bildweite b und Gegenstandsweite g gemessen werden und in die Abbildungsgleichung (3) eingesetzt werden. Problematisch dabei ist jedoch, dass die Abstände absolut gemessen werden, was bedeutet, dass die Linse exakt zentriert montiert sein muss. Ausserdem müssen die Abstände bei realen dicken Linsen von den Hauptebenen der Linse aus bestimmt werden, dessen Lage primär erst einmal unbekannt ist. Deshalb verwendet man in der Praxis oft die *Bessel-Methode*. Diese nutzt die Tatsache aus, dass bei einem konstanten Abstand L zwischen Gegenstand und Bild, der grösser als das Vierfache der Brennweite ist - $L > 4f$ - genau zwei Einstellungen der Linse ein scharfes Bild liefern. Dazu wird die Linse solange verschoben bis das schärfste Bild auf einem Schirm erkannt werden kann. Misst man den Abstand d zwischen diesen beiden Stellungen, so kann man mit

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \quad (5)$$

die Brennweite bestimmen.

Diese Formel wird im Anschluss bewiesen. Es gilt $L = g + b$ und sei $d = b_1 - b_2$ wobei b_1 und b_2 jeweils die Abstände vom Gegenstand aus sind. Aus der

Abbildungsgleichung (3) folgt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow f = \frac{gb}{g+b} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow f(g+b) = gb \Leftrightarrow fL = (L-b)b = Lb - b^2 \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow b^2 - Lb + fL = 0 \quad (8)$$

$$\Rightarrow_{p-Q-Formel} b_{1/2} = \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2 - 4fL}{4}} \quad (9)$$

Gleichung (9) impliziert: wenn $b_{1/2} \in \mathbb{R}$ sein sollen, dann muss $L > 4f$ gelten.

$$d = b_1 - b_2 = \frac{L + \sqrt{L^2 - 4fL}}{2} + \frac{L - \sqrt{L^2 - 4fL}}{2} = \sqrt{L^2 - 4fL} \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow d^2 = L^2 - 4fL \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \quad (12)$$

□

1.1.5 Linsenfehler

Die Genauigkeit der Bessel-Methode erlaubt es uns weiterhin, Linsenfehler genauer zu untersuchen. Dabei können bei optischen Linsen zwei Arten von Fehlern entstehen: *sphärische Aberrationen* und *chromatische Aberrationen*.

Bei achsenfernern Strahlen kommt es zur sphärischen Aberration. Diese werden nämlich nicht alle gleich fokussiert und besitzen somit auch unterschiedliche Brennweiten. Als Lösung für diesen Fehler kann man mithilfe einer Lochblende nur achsennahe Strahlen durchlassen. Da man dabei jedoch viele andere Lichtstrahlen abblendet, geschieht dies auf Kosten der Lichtstärke. Hilfreicher sind deshalb *asphärische Linsen*, bei denen alle Strahlen auf einen Brennpunkt fokussiert werden. Deren Herstellung ist jedoch meist sehr aufwendig.

Der zweite Fehler, die chromatische Aberration, entsteht aufgrund von Dispersion. Unterschiedliche Farben d.h. unterschiedliche Wellenlängen, besitzen bei der Brechung einen unterschiedlichen Brechungsindex. Dadurch werden einige Strahlen stärker gebrochen als andere und es kommt wieder zu Abweichungen vom Brennpunkt. Dieser Fehler kann mithilfe von *Achromaten* - Linsensysteme die den Farbfehler ausgleichen können - minimiert werden.

1.1.6 Mikroskop

Im letzten Versuchsteil werden wir ein simples Mikroskop mit dem Aufbau in Abbildung 3 untersuchen. Mit einem Mikroskop kann der *Sehwinkel* α , der über

$$\alpha = \arctan \left(\frac{G}{f} \right) \quad (13)$$

definiert ist, vergrössert werden, sodass ein grösseres Bild an der Netzhaut des Beobachters entsteht.

Um den Sehwinkel natürlich zu vergrössern, würden wir einen Gegenstand einfach näher an unser Auge bringen. Wir können den Gegenstand jedoch nicht beliebig nah vor unseren Augen halten, da das menschliche Auge ab einem bestimmten Abstand den Gegenstand nicht mehr fokussieren kann. Dieser wird als die deutliche Sehweite $s_0 = 25\text{cm}$ definiert. Für den maximalen Sehwinkel α_0 gilt also:

$$\alpha_0 = \arctan \left(\frac{G}{s_0} \right) \quad (14)$$

Um dieses Problem zu umgehen werden also Mikroskope verwendet. Diese bestehen aus zwei Samellinsen, die als *Okular* und *Objektiv* bezeichnet werden. Der Gegenstand wird mit dem Objektiv zuerst vergrössert als Zwischenbild ab-

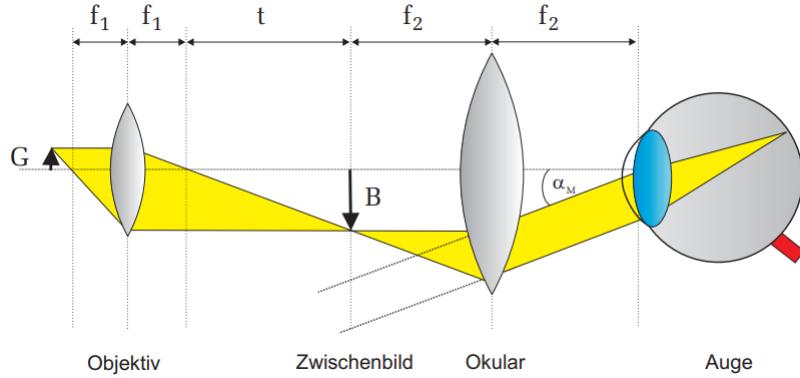


Abbildung 3: Aufbau Mikroskop

gebildet wird. Das Okular verwendet man dann als eine Art Lupe um dieses Zwischenbild zu sehen.

Auch beim Mikroskop ist die Vergrösserung durch die Auflösung des Geräts beschränkt. In kleinen Grössenordnungen kommt es nämlich zu Beugungseffekten. Dabei definiert man als Auflösungsvermögen den kleinstmöglichen Abstand zwischen zwei Beugungspunkten, bei welchem die beiden noch voneinander unterschieden werden können. Das Rayleigh-Kriterium besagt, dass zwei Objekte voneinander unterschieden werden können, wenn ihr Abstand grösser ist als die Hälfte des Durchmessers ihrer Beugungsmaxima.

Es gilt:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda f}{D} = 1,22 \frac{\lambda}{2nsina} \quad (15)$$

Dabei charakterisiert G_{min} das Auflösungsvermögen, λ die Wellenlänge, die Spaltbreite D , n den Brechungsindex des Mediums zwischen dem Objekt und dem Objektiv und der Öffnungswinkel α .

2 Messprotokoll

9.00 - 12 Uhr

12.09.2023

Betreuerin: Alicia Schneider

Versuch 31: Optische Abbildungen

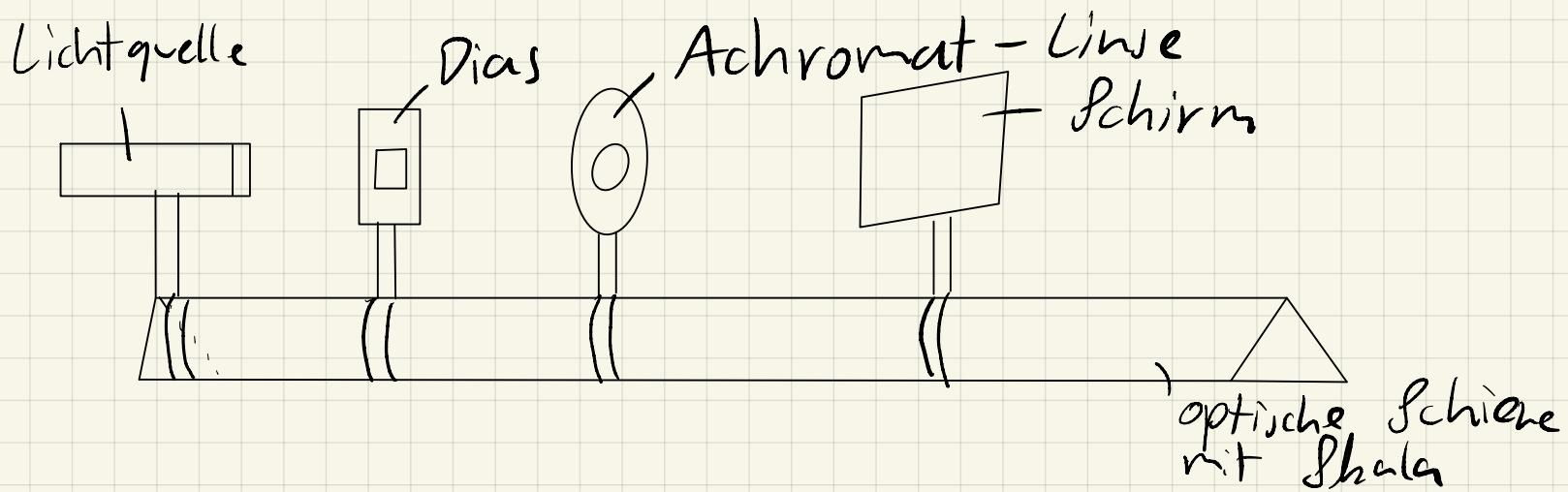
Yago Obispo Gerster

Juan Bueno Fontanilla

(1) Brennweite und charakteristische Größen b, g, B, G bei
weissem Licht

Versuchsaufbau:

- Optische Schiene
- Lampe mit Kondensor
- Achromat - Linse
- Schirm
- Dias mit Teststrukturen sowie ein Kreuzgitter



Skizze 2.1: Versuchsaufbau des ersten
Teils

Die Bildweite b , Gegenstandsweite g wird bestimmt, um im Anschluss die Brennweite f zu bestimmen. Anschließend wird nur die Position an der Skala b' und g' abgelesen.

Messung	b [cm]	g [cm]	Schirm [cm]
1	24,25	37,45	80
2	24,25	36,7	89,3
3	24,25	49,65	66,5

$$\text{Abbildungsgleichung: } \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{b}{gb} + \frac{g}{gb} = \frac{b+g}{gb}$$

$$\Rightarrow f = \frac{gb}{b+g}$$

Der Fehler:

$$\Delta b = \Delta g = \sqrt{(0,4)^2 + (0,4)^2} = 0,57 \text{ cm}$$

$$b_1 = 13,20 \text{ cm} \quad g_1 = 42,55 \text{ cm}$$

$$b_2 = 12,45 \text{ cm} \quad g_2 = 52,60 \text{ cm}$$

$$b_3 = 25,40 \text{ cm} \quad g_3 = 16,85 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = 10,07 \text{ cm} \\ f_2 = 10,07 \text{ cm} \\ f_3 = 10,73 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{f} = 10,09 \text{ cm}}$$

(Fehler
in Agwerte)

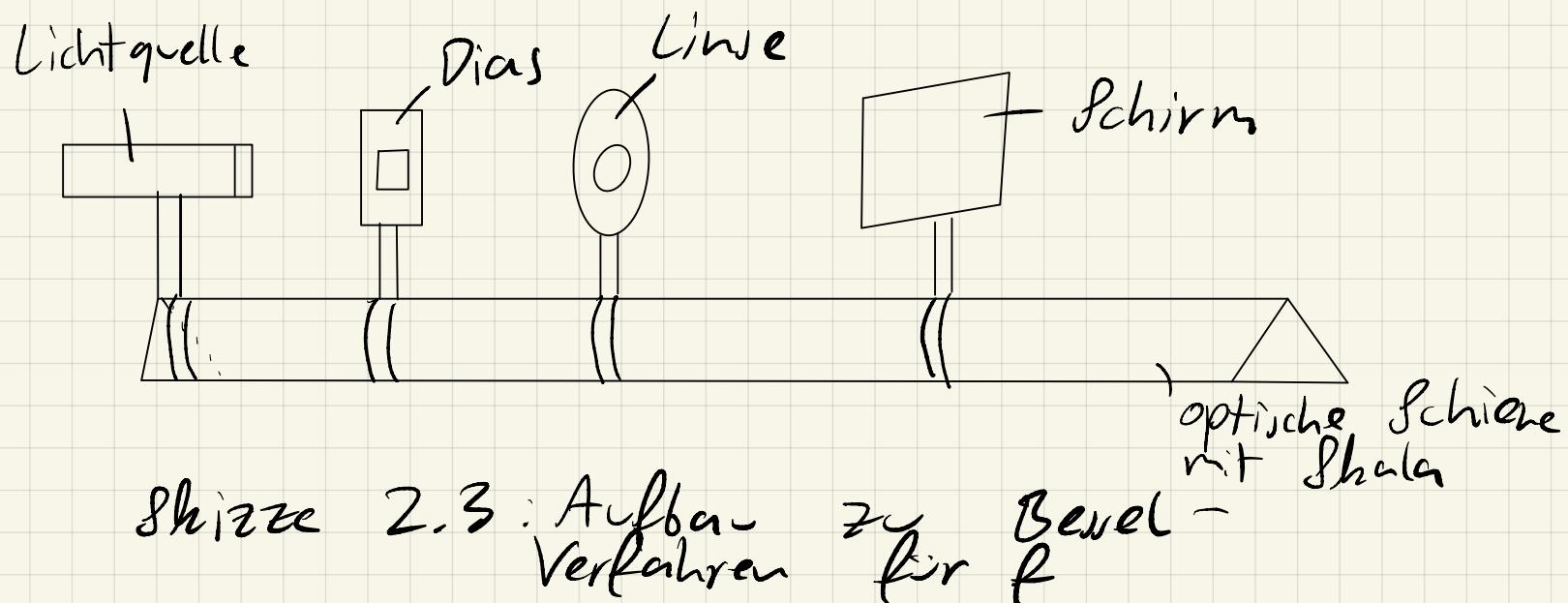
	$g[\text{cm}]$	$6[\text{cm}]$	$b[\text{cm}]$	$B[\text{cm}]$	Art	Richtung
$f > g$	5,00 7,00 9,00	0,80	nicht messbar	nicht messbar	Virtuell	aufrichtet
$f = g$	10,09 10,09 10,09	0,80	nicht messbar	nicht messbar	beide von beiden \rightarrow liegt im	-
$2f > g > f$	13,00 16,00 18,00	44,75 27,70 23,30	2,70 1,30 1,00	reelles Bild	umgedreht	
$g = 2f$	20,78	0,80	20,72	0,78	reelles Bild	umgedreht
$\infty > g > 2f$	22,00 23,50 33,15	18,50 17,60 14,60	0,68 0,57 0,34	reelles Bild	umgedreht	

Tabelle 2.2: Messung von $6, b, B$, Art und Richtung des Bildes für unterschiedliche Gegenstandsweiten g

(2) Bestimmung Brennweite f mit Bessel-Verfahren

Versuchsaufbau:

- Optische Schiene
- Lampe mit Kondensor
- Linse $L1$ mit $f = 12 \text{ cm}$
- Schirm
- Dias mit Teststrukturen sowie ein Kreuzgitter



$$L = 65 \text{ cm} = 5,42 \cdot f$$

$$f = 12 \text{ cm}$$

$$d_1 = (68,60 - 36,70) \text{ cm} = 32,07 \text{ cm}$$

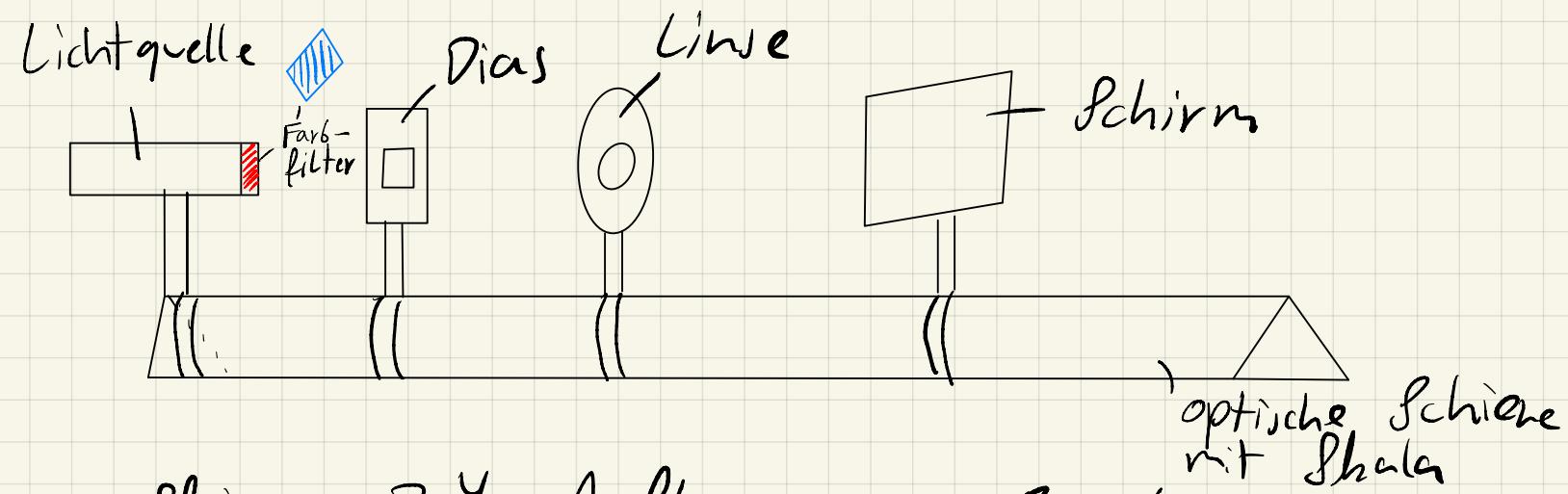
$$d_2 = (68,65 - 36,70) \text{ cm} = 31,95 \text{ cm}$$

$$d_3 = (68,75 - 36,60) \text{ cm} = 32,15 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \bar{d} = 32,06 \text{ cm}$$

(3) Achromatische Aberration mit Bevel und Versuchsaufbau:

- Zusätzlich: Farbfilter: Rot- und Blaufilter



Skizze 2.4: Aufbau zu Bevel-Verfahren für f bei rotem Farbfilter

$$L = 65 \text{ cm} \quad f = 12 \text{ cm}$$

Rotfilter:

$$d_1 = (68,60 - 36,79) \text{ cm} = 31,81 \text{ cm}$$

$$d_2 = (68,70 - 36,75) \text{ cm} = 31,95 \text{ cm}$$

$$d_3 = (68,72 - 36,77) \text{ cm} = 31,95 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \bar{d}_{\text{rot}} = 31,90 \text{ cm}$$

Blaufilter:

$$d_1 = (68,90 - 36,51) \text{ cm} = 32,39 \text{ cm}$$

$$d_2 = (68,90 - 36,50) \text{ cm} = 32,40 \text{ cm}$$

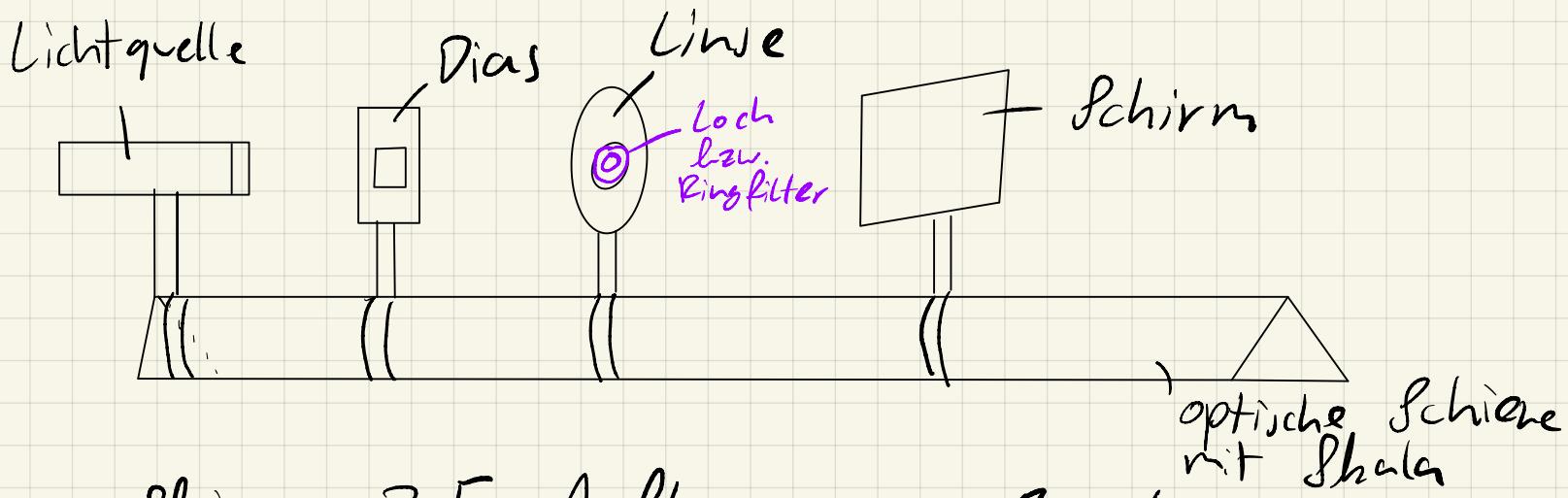
$$d_3 = (69,00 - 36,52) \text{ cm} = 32,48 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow d_{\text{Blau}} = 32,42 \text{ cm}$$

(4) Vergleich von f bei Ring- und Lochfilter

Versuchsaufbau:

- Zusätzlich: Loch- und Ringfilter



Skizze 2.5: Aufbau zu Bevel-Verfahren zum Vergleich f bei Loch- und Ringfilter

Lochfilter:

$$d_{\text{Loch}} = (68,45 - 36,9) \text{ cm} = 32,55 \text{ cm}$$

Ringfilter:

$$d_{\text{Ring}} = (69,00 - 36,4) \text{ cm} = 32,6 \text{ cm}$$

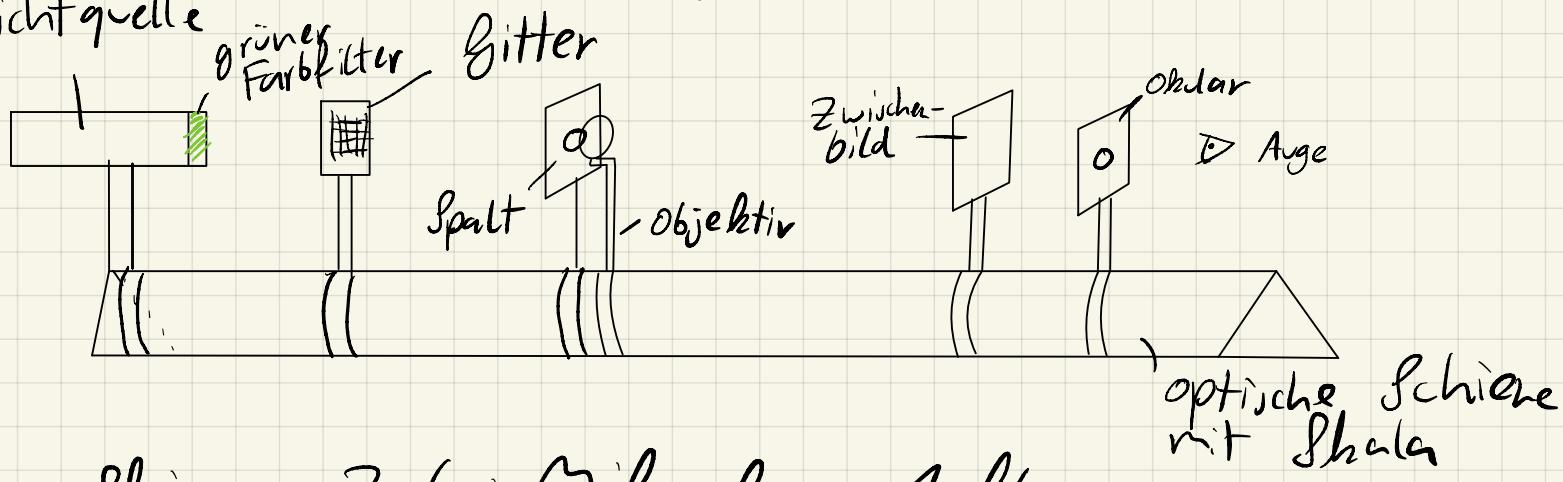
Qualitativ: $d_{\text{Ring}} > d_{\text{Loch}} \Rightarrow f_{\text{Ring}} < f_{\text{Loch}}$

(5) Mikroskop

Versuchsaufbau

- Optische Schiene
- Lampe mit Kondensor und grünem Farbfilter
- Dia mit Kreuzgitter
- Spalt mit den Schneiden zum Objektiv
- Objektiv
- Schirm für Zwischenbild
- Okular

Lichtquelle



Skizze 2.6: Mikroskop-Aufbau

Bildweite $b = 25 \text{ cm}$

Brennweite $f_1 = 4,4 \text{ cm}$

Brennweite $f_2 = 5 \text{ cm}$

70 Quadrate pro 5 mm

Breite bei der die vertikalen Striche des Gitters verschwinden:

0,2 fkt; 0,25 fkt; 0,2 fkt (bei grün)

0,275 fkt (bei blau)

0,34 fkt (bei rot)

Fehler:

- Ablesefehler an Schienenskala: 0,2 cm und vom Scharfstellen (0,4 cm wenn menschlich) Ablesen am Schirm)
- Fehler ΔB nur von Dia da genau 8 Quadrate $\Rightarrow \frac{\Delta B}{B} = 1\%$
- Ablesefehler am Schirm $\frac{\Delta B}{B} = 70\%$
- Ablesefehler Skalenteile Mikroskop 0,03 ^{Split}
- $\Delta d = \sqrt{(0,4)^2 + (0,4)^2} = 0,57$

Afle

3 Auswertung

3.1 Fehlerabschätzung

Bevor ich mit der Auswertung des Versuchs beginne, möchte ich kurz die gemachte Fehlerabschätzung präsentieren und kommentieren.

Für den Fehler der gemessenen Werte an der Schienenskala werden $0,2\text{cm}$ für den Fall verwendet, dass wir nicht an einem Schirm eine Scharfstellung einstellen mussten. Müssen wir jedoch gleichzeitig beobachten, wann das Bild auf dem Schirm scharf ist, verwenden wir einen Fehler von $0,4\text{cm}$. Dieser beinhaltet somit unseren Fehler beim Ablesen der Skala und beim Erkennen des scharfen Bildes. Der Fehler von $0,4\text{cm}$ wird im Falle zweier beweglicher Geräte für beide einzeln verwendet, obwohl nur an einem die Scharfstellung erfolgt ist. Diese Werte haben wir bestimmt, indem wir die Geräte auf der Skala ein wenig so verschoben haben, sodass wir immer noch behaupteten das Bild wäre scharf. Für Größen die aus Differenzen von Skalenwerten berechnet werden gilt der Fehler $\sqrt{0,4^2 + 0,4^2}\text{cm} = 0,57\text{cm}$.

Der Fehler der Gegenstandsgrösse stammt nur vom Ablesen mit dem Dias. Dieser wurde auf einen relativen Fehler von $\frac{\Delta G}{G} = 1\%$ geschätzt. Der Ablesefehler der Bildgrösse am Schirm wurde auf $\frac{\Delta B}{B} = 10\%$ geschätzt, da es uns sehr schwierig fiel, beim Messen nicht den Aufbau leicht in Bewegung zu versetzen und somit etwas zu verändern.

Beim Mikroskop wurde für die Bestimmung der Spaltbreite ein Ablesefehler von $0,03\text{mm}$ pro Messung als plausibel eingestuft und für die Bildgrösse B ein absoluter Fehler von $0,25\text{mm}$.

3.2 Brennweite mit Abbildungsgleichung bestimmen

Im ersten Teil des Versuches wurde ein Dias, eine achromat Linse und ein Schirm auf die Schiene montiert. Um die Brennweite f der Linse zu bestimmen, haben wir die Bildweite b und Gegenstandsweite g bestimmt. Die Messung wurde drei Male durchgeführt. Daraus wurden dann drei einzelne Brennweiten mit der Abbildungsgleichung (3) bestimmt und daraus der Mittelwert gebildet. Dies ergibt:

$$\bar{f} = 10,09\text{cm} \quad (16)$$

Für den Fehler muss das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz verwendet werden. Für den Fehler eines einzelnen f 's gilt:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{b^2}{(g+b)^2} \Delta g\right)^2 + \left(\frac{g^2}{(g+b)^2} \Delta b\right)^2} \quad (17)$$

$$\Rightarrow f_1 = (10,1 \pm 0,3)\text{cm} \quad (18)$$

$$f_2 = (10,1 \pm 0,4)\text{cm} \quad (19)$$

$$f_3 = (10,13 \pm 0,23)\text{cm} \quad (20)$$

Für den Mittelwert gilt der Fehler:

$$\Delta \bar{f} = \frac{\sqrt{\Delta f_1^2 + \Delta f_2^2 + \Delta f_3^2}}{3} \quad (21)$$

$$\Rightarrow \bar{f} = (10,09 \pm 0,18) \text{ cm} \quad (22)$$

3.3 Grafische Bestimmung der Brennweite

Anschliessend wurde die Gegenstandsweite variiert und die Gegenstandsgrösse, Bildweite, Bildgrösse, Art und Richtung der Abbildung gemessen und in einer Tabelle eingetragen (siehe Tabelle 2.2 des Messprotokolls). Die Ergebnisse werden anhand von Abbildung 4 ausgewertet. Diese Ergebnisse sollen anschliessend

Nr	g	b [cm]	Art	Richtung	β (Abb. umgedreht)
1	$\infty > g > 2f$	$f < b < 2f$	reell	umgedreht	< 1
2	$g = 2f$	$b \approx 2f$	reell	umgedreht	$= 1$
3	$2f > g > f$	$\infty > b > 2f$	reell	umgedreht	> 1
4	$g = f$	nicht messbar (ℓ fest im g_0)		—	—
5	$f > g$	nicht messbar	virtuell	aufrecht	—

Abbildung 4: Auswertung der Ergebnisse in Aufgabe 2

genauer untersucht werden. Dazu wird die Abbildung für jeden einzelnen Fall grafisch nach den in den Grundlagen besprochenen Regeln konstruiert. Anhand von Abbildung 5 werden die Verhältnisse aus Abbildung 4 verifiziert. Das Bild ist umgekehrt und reell da die Strahlen nicht nach hinten verlängert werden müssen um das Bild zu erzeugen. Der Abbildungsmassstab stimmt auch mit der Tabelle überein. Gleiches gilt für die anderen Fälle.

Die Strahlen bei Nummer 4 schneiden sich nicht, weshalb auch kein Bild erzeugt wird, was erklärt, warum wir auf dem Schirm nie ein scharfes Bild sehen konnten (es wird im Unendlichen scharf).

Somit wurden alle Verhältnisse verifiziert.

Die Brennweite soll grafisch ermittelt werden. Die verwendete Methode basiert auf der Darstellung der Beziehung von g und b auf Millimeterpapier. Die Wertepaare aus Tabelle 2.2 des Messprotokolls werden auf die Achsen aufgetragen

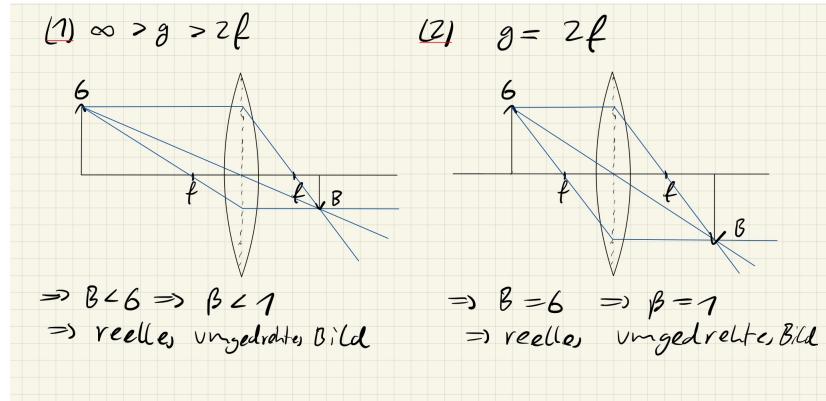


Abbildung 5: Fall 1 und 2

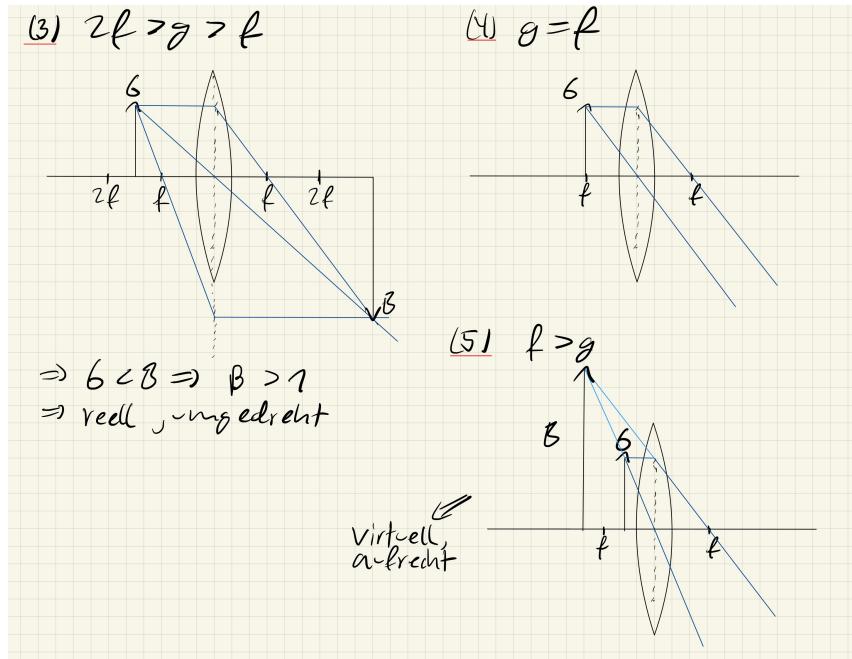
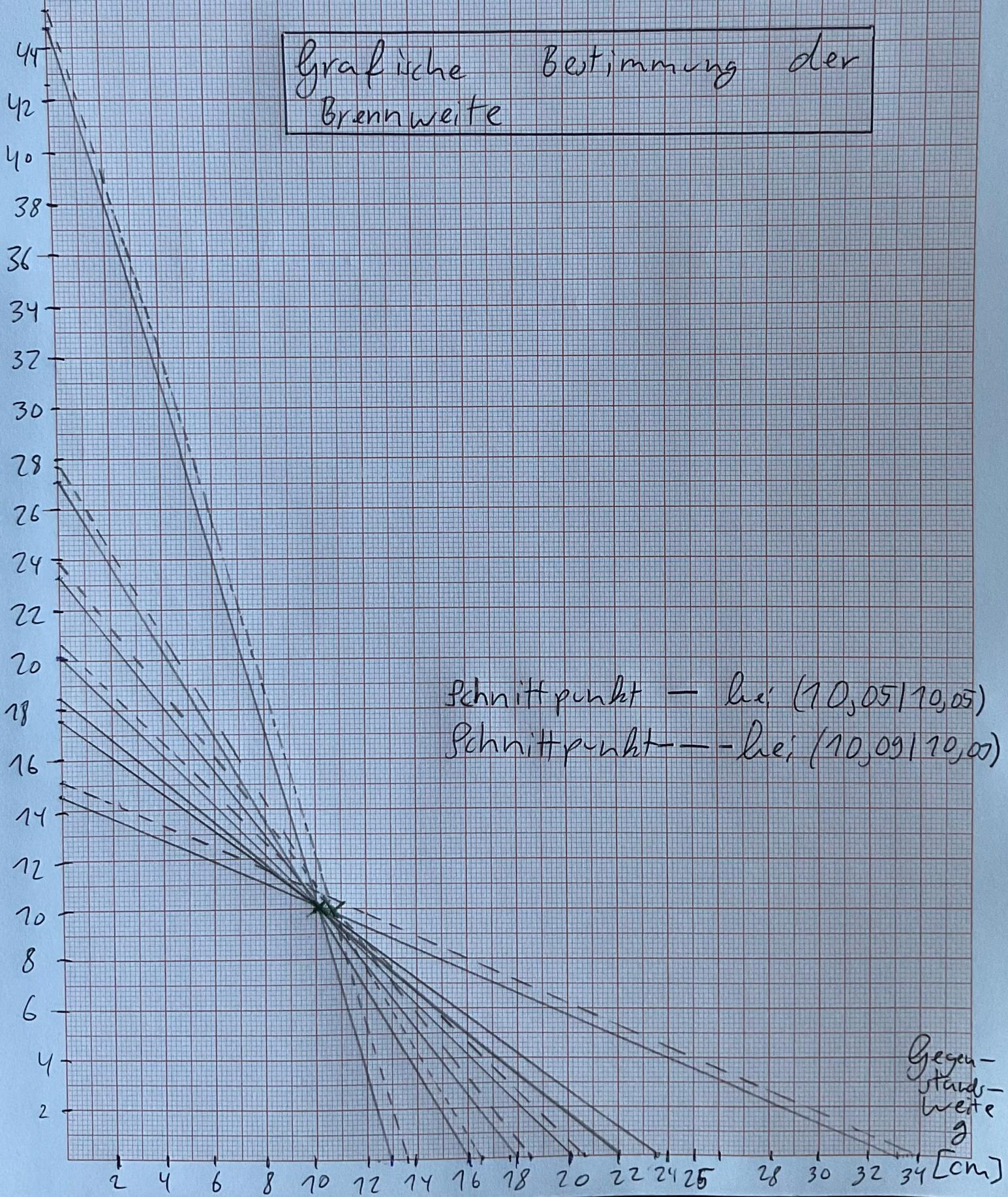


Abbildung 6: Fall 3, 4 und 5

und über eine Gerade miteinander verbunden. Macht man dies für alle Wertepaare, so erhält man ein Geradenbündel, welches sich an genau einem Punkt schneidet. Der Schnittpunkt entspricht der Brennweite. Weiterhin wurden gestrichelte Fehlergeraden eingezeichnet, welche um $0,57\text{cm}$ (siehe Fehlerabschätzungsabschnitt) von den x bzw. y-Achsenabschnitten der eigentlichen Werte entfernt sind. Über deren Schnittpunkt wird der Fehler abgeschätzt:

Bildweite b
[cm]

Grafische Bestimmung der
Brennweite



Somit gilt für die Brennweite:

$$f = (10,05 \pm 0,04)cm \quad (23)$$

3.4 Brennweite nach Bessel-Verfahren

Als ein genaueres Verfahren zur Bestimmung der Brennweite soll die Bessel-Methode verwendet werden. Zwischen den Scharstellungen gibt es einen Abstand d , welcher mit dem Fehler $\Delta d = \sqrt{0,4^2 + 0,4^2}cm = 0,57cm$ behaftet ist. Es wurden 3 Abstandswerte gemessen und deren Mittelwert \bar{d} wurde berechnet. Für den Fehler gilt nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung: $\frac{1}{3}\sqrt{3 \cdot \Delta d^2}$. Wir erhalten:

$$\bar{d} = (32,1 \pm 0,4)cm \quad (24)$$

Der Abstand Gegenstand zu Bild wurde bei $L = (65,00 \pm 0,28)cm$ eingestellt (Fehler ergibt sich aus $\sqrt{0,2^2 + 0,2^2}$).

Damit ergibt sich aus Gleichung (5):

$$f = 12,30cm \quad (25)$$

Für den Fehler ergibt sich nach Gauss:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{d}{2L}\Delta d\right)^2 + \left(\left(1 + \frac{d^2}{L^2}\right)\frac{\Delta L}{4}\right)^2} \quad (26)$$

Damit folgt:

$$f = (12,30 \pm 0,14)cm \quad (27)$$

3.5 Linsenfehler

Im nächsten Versuchsteil wurden Farbfilter (rot und blau) vor die Lichtquelle gesteckt, um die Linsenfehler genauer zu untersuchen.

Zuerst wurde die chromatische Aberration untersucht. Mit dem Bessel-Verfahren erhalten wir:

$$d_{rot} = (31,9 \pm 0,4)cm \quad (28)$$

$$d_{blau} = (32,4 \pm 0,4)cm \quad (29)$$

Für die Brennweiten ergibt sich:

$$f_{rot} = (12,34 \pm 0,14)cm \quad (30)$$

$$f_{blau} = (12,21 \pm 0,14)cm \quad (31)$$

Wir haben also experimentell gezeigt, dass die beiden Brennweiten nicht miteinander übereinstimmen und das es somit zu chromatischer Aberration kommen musste, d.h. unterschiedliche Wellenlängen besitzen aufgrund von Dispersion

unterschiedliche Brechzahlen und werden unterschiedlich stark gebrochen. Da blau eine kürzere Wellenlänge besitzt als rot, wird blau stärker an der Linse gebrochen und die Brennweite von blau ist somit kleiner. Der Abstand d wird grösser wenn f kleiner wird.

Nun soll die sphärische Aberration der Linse untersucht werden, indem eine Lochblende und eine Ringblende vor die Linse gestellt werden. Wir erhalten mit dem Bessel-Verfahren:

$$d_{Loch} = (31,6 \pm 0,4) \text{ cm} \quad (32)$$

$$d_{Ring} = (32,6 \pm 0,4) \text{ cm} \quad (33)$$

$$f_{Loch} = (12,42 \pm 0,14) \text{ cm} \quad (34)$$

$$f_{Ring} = (12,16 \pm 0,14) \text{ cm} \quad (35)$$

Der Abstand d ist bei der Ringblende grösser. Die Brennweite der Lochblende ist somit etwas grösser als die Brennweite der Ringblende. Dies liegt daran, dass bei der Lochblende nur achsennahe Lichtstrahlen durchgelassen werden und bei der Ringblende nur achsenferne Lichtstrahlen. Anhand dieses Beispiels konnte man die sphärische Aberration schön erkennen.

3.6 Mikroskop

3.6.1 Gitterkonstante

Zuletzt wird der Versuchsaufbau zu einem Mikroskop umgebaut. Ein Objekt mit einem sehr kleinen Gitter soll damit untersucht werden. Dafür soll die Gitterkonstante G - also die Grösse eines Kästchens - ermittelt werden. Dazu wird für mit (3) und $\frac{b}{g} = \frac{B}{G} G$ folgende Formel hergeleitet:

$$\frac{b}{g} = \frac{B}{G} \Leftrightarrow \frac{1}{g} = \frac{B}{Gb} \quad (36)$$

$$\Rightarrow \text{Abbildungsgleichung} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{B}{Gb} = \frac{G+B}{Gb} \quad (37)$$

$$\Leftrightarrow G = \frac{Bf}{b-f} \quad (38)$$

Es wurden 10 Quadrate pro 5mm am Gitter gemessen. Dies entspricht $B = (0,5 \pm 0,25) \text{ mm}$ wobei der Ablesefehler berücksichtigt wurde. Weiterhin ist die Brennweite des Objektivs $f = f_1 = 4,4 \text{ cm}$ und die Bildweite $b = (25 \pm 0,4) \text{ cm}$. Damit gilt:

$$G = 0,11 \text{ mm} \quad (39)$$

Für den Fehler wird

$$\Delta G = \sqrt{\left(\frac{G}{B} \Delta B\right)^2 + \left(\frac{B}{(b-f)^2}\right)^2 \cdot (f \Delta b)^2} \quad (40)$$

benutzt. Insgesamt:

$$G = (0,11 \pm 0,05) \text{ mm} \quad (41)$$

3.6.2 Auflösung

Zusätzlich sind wir am Auflösungsvermögen des Mikroskops interessiert. Also an dem Mindestabstand G_{min} bei dem zwei unterschiedliche Objekte mit dem Mikroskop noch voneinander unterschieden werden können. Nach der Praktikumsanleitung gilt der Zusammenhang:

$$G_{min} = 1,22 \frac{\lambda f_1}{D} \quad (42)$$

Dabei ist λ die Wellenlänge und D die Spaltbreite. Die Spaltbreite wurde bestimmt, indem beobachtet wurde, wann die vertikalen Striche auf dem Gitter verschwinden. Dies geschieht bei grünem Licht der Wellenlänge $\lambda = 550\text{nm}$ bei $D = (0,22 \pm 0,03)\text{mm}$. Für die Auflösung gilt dann unter Berücksichtigung des Fehlers $\Delta G_{min} = \frac{G_{min}}{D} \Delta D$:

$$G_{min} = (0,130 \pm 0,020)\text{mm} \quad (43)$$

Das Auflösungsvermögen kann auch über den Öffnungswinkel ermittelt werden. Dafür nutzen wir die Tatsache aus, dass der Öffnungswinkel α sehr klein sein muss und somit die Kleinwinkel Näherung $\alpha = \sin\alpha = \tan\alpha$ gilt. Nach Praktikumsanleitung gilt weiterhin die Beziehung $\tan\alpha = \frac{D}{2f}$. Es ergibt sich:

$$\alpha = (0,0025 \pm 0,0003) = (0,140 \pm 0,020)^\circ \quad (44)$$

Wobei für den Fehler $\Delta\alpha = \frac{\alpha}{D} \Delta D$ verwendet wurde.

Das Auflösungsvermögen kann nach Praktikumsanleitung dann nach $G_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{2\alpha}$ bestimmt werden:

$$G_{min} = (0,13 \pm 0,03)\text{mm} \quad (45)$$

Das Ergebnis stimmt mit Gleichung (43) überein.

4 Zusammenfassung und Diskussion

Zusammenfassend haben wir in diesem Versuch den Umgang mit optischen Linsensystemen erlernt. Dabei waren wir vor allem an der Bestimmung der Brennweite von Linsen interessiert. Um diese zu ermitteln haben sich unterschiedliche Methoden als möglich herausgestellt. Die erste erfolgte durch eine Messung der Bild- und Gegenstandsweite und der Abbildungsgleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$. Für die achromat Linse wurde eine Brennweite von $(10,09 \pm 0,18)\text{cm}$ so bestimmt.

Daraufhin haben wir die Brennweite grafisch bestimmt, indem wir mehrere Paare von Gegenstands- und Bildweiten gemessen haben, diese auf die x bzw. y Achse auf Millimeterpapier eingetragen und durch eine Gerade verbunden haben. Der Schnittpunkt lieferte eine Brennweite von $(10,05 \pm 0,04)\text{cm}$.

Ausserdem wurde die Brennweite mit dem Besselverfahren untersucht. Dabei wurden die beiden Stellen der Linse gemessen, die ein scharfes Bild lieferten

und deren Abstand benutzt um f zu berechnen. Hier hat sich herausgestellt: $f = (12,30 \pm 0,14)cm$. Um den chromatischen Fehler zu untersuchen wurde wieder mit dem Besselverfahren die Brennweite von rotem und blauem Licht bestimmt: $f_{rot} = (12,34 \pm 0,14)cm$ und $f_{blau} = (12,21 \pm 0,14)cm$. Somit wurde die Theorie, dass rotes Licht an Linsen schwächer gebrochen wird als blaues, bestätigt.

Auch der sphärische Fehler wurde mit einer Ring- und Lochblende untersucht: $f_{Ring} = (12,16 \pm 0,14)cm$ und $f_{Loch} = (12,42 \pm 0,14)cm$. Achsenfernere Strahlen werden also stärker gebrochen als achsennahe.

Zum Schluss wurde ein Linsensystem aufgebaut, welches dem Aufbau eines Mikroskops gleicht. Die Gitterkonstante eines Gitters wurde damit zu $G = (0,11 \pm 0,05)mm$ berechnet und das Auflösungsvermögen über zwei unterschiedliche Herangehenweisen (einmal mit Öffnungswinkel und einmal ohne) zu $G_{min} = (0,13 \pm 0,02)mm$ und $G_{minffnungswinkel} = (0,13 \pm 0,03)mm$ berechnet.

4.1 Diskussion der Ergebnisse

Erstaunlicherweise stimmen die Brennweiten bei der Abbildungsgleichung und bei der grafischen Bestimmung sehr gut überein. Diese weisen nur eine:

$$\frac{10,09 - 10,05}{\sqrt{0,04^2 + 0,18^2}} = 0,22 \quad (46)$$

σ Abweichung voneinander auf. Deshalb könnte man vermuten, dass die bestimmte Brennweite richtig sein muss. Da die grafische Methode den kleinsten Fehler liefert, sollte diese am effektivsten sein. Die Besselmethode, welche in der Praktikumsanleitung als genauere Methode dargestellt wird, lieferte hingegen eine Brennweite die etwas von beiden letzteren abweicht. Die absolute Abweichung beträgt zum Wert der Abbildungsgleichung $2,21cm$. Dies kann man dadurch erklären, dass wir einen relativ hohen Fehler für die Messung an der Schiene (von $0,4cm$ beim Scharfstellen) verwendet haben. Bei der Abbildungsgleichung müssen relativ wenige absolute Größen bestimmt werden, während man bei der Bessel-Methode die Länge L und zwei Male einen Abstandsunterschied messen muss um auf d zu kommen. Hätten wir einen etwas kleineren Fehler angenommen, hätte sich die Besselmethode als genauer herausgestellt.

Wir haben ausserdem durch den Vergleich der Brennweiten für rotes und blaues Licht behauptet, dass der Unterschied aufgrund von chromatischer Aberration entstanden sei, was in diesem Fall gerechtfertigt ist, da die Brennweite von rotem Licht grösser als die von blauem ist. Jedoch ist die Abweichung beider Werte voneinander absolut betrachtet nur $0,13cm$. Um eine grössere absolute Abweichung zu erreichen müsste der Wellenlängenunterschied der beiden verwendeten Lichter grösser sein. Das sichtbare Spektrum ist jedoch im Vergleich zum gesamten Lichtspektrum relativ klein, weshalb die Grenzen Blau-Rot des sichtbaren Spektrums nur kleine Wellenlängenunterschiede aufweisen. Die Verwendung von anderen Wellenlängen könnte also dazu führen, dass man die chromatische Aberration besser beobachten kann und man sichergehen kann, dass die Abweichung

aufgrund von chromatischer Aberration stattgefunden hat und nicht wegen statistischen Effekten. Gleichzeitig wäre der Nachteil davon, dass wir dieses Licht nicht sehen könnten (die Versuchsapparatur müsste geändert werden damit die Scharfstellung z.B. automatisch über Sensoren erfolgt).

Insgesamt empfand ich den Versuch als sehr lehrreich, da wir unser theoretisches Wissen über optische Systeme auf konkrete Systeme im Experiment anwenden konnten.