

Versuch 243: Bestimmung der Boltzmannkonstante über die Untersuchung des Thermischen Rauschens

Yago Obispo Gerster

6. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation	1
1.1 Physikalische Grundlagen	1
1.2 Motivation	2
1.3 Thermisches Rauschen allgemein	2
1.4 Nyquist-Beziehung	3
1.5 Praktische Bestimmung der Boltzmannkonstante	3
2 Messprotokoll	5
3 Auswertung	9
3.1 Qualitative Beobachtungen	9
3.2 Frequenzgang des Eigenrauschen des Verstärkers und des Band-filters	10
3.3 Bestimmung der Boltzmannkonstante	12
4 Zusammenfassung und Diskussion	15
4.1 Diskussion	15
5 Quellen und Python Code	17

1 Einleitung und Motivation

1.1 Physikalische Grundlagen

Das Ziel des Versuches besteht darin, uns mit den Ursachen und den Eigenschaften des thermischen Rauschens zu beschäftigen und damit die Boltzmannkonstante zu berechnen. Insbesondere wird die Rauschspannung unter unterschiedlichen Widerständen, das Eigenrauschen eines Verstärkers und der Frequenzgang gemessen.

1.2 Motivation

In der Vergangenheit wurde bereits ein Versuch zur Bestimmung der Boltzmannkonstante über die Brownsche Molekularbewegung durchgeführt (mein Messprotokoll zu diesem Versuch habe ich in dem Quellenabschnitt verlinkt). Dabei haben wir mit einem Mikroskop den Weg eines Partikels in einer Latex-Lösung aufgezeichnet. Unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Partikel bei einem Stoss in eine bestimmte Richtung bewegt konstant gleich ist und der Annahme, dass sich die Partikel nicht gegenseitig beeinflussen, haben wir statistisch eine Formel für die Boltzmann-Konstante hergeleitet, für welche nur bekannte Größen, die Zeit und das mittlere Verschiebungsquadrat benötigt wurden.

Damit wurde die Boltzmann-Konstante zu

$$k_{223} = (102 \pm 10\%) \cdot 10^{-25} \frac{J}{K} \quad (1)$$

bestimmt. Dieser Wert wies eine absolute Abweichung von $35,6 \cdot 10^{-25} \frac{J}{K}$ vom Literaturwert auf, was in diesem Fall, trotz dem hoch gewählten Fehler einer 4σ -Abweichung entsprach.

Da diese Sigma-Abweichung über dem signifikanten Niveau liegt, wurden für diese einige systematische Fehler vorgeschlagen, da die statistischen Schwankungen nicht ausreichend die Abweichung erklären (siehe Diskussion des Protokolls 223 für mehr Details).

Diese Methode stellte sich also als besonders ungenau heraus, weshalb die Motivation dieses Versuches ist, über einen unterschiedlichen Ansatz ein genauereres Ergebnis zu erhalten.

1.3 Thermisches Rauschen allgemein

Bei jedem elektrischen Leiter, der eine Temperatur über $0K$ besitzt, kommt es zu *thermischen Rauschen*. Die Ursache dafür ist die *Brownsche Molekularbewegung* der Ladungsträger. Diese führen eine zufällige Bewegung durch, weshalb man in Leitern, welche nicht an eine externe Spannungsquelle angeschlossen sind, auch eine sogenannte *Rauschspannung* gemessen werden kann. Daher dass die Bewegung statistisch ungerichtet zufällig verläuft gilt für den Mittelwert der Rauschspannung U_r :

$$\langle U_r \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_r(t) dt = 0 \quad (2)$$

Da sich der Mittelwert also nicht eignet um die Rauschspannung zu beschreiben wird der *quadratische Effektivwert* betrachtet, welcher über

$$\langle U_r^2 \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_r^2(t) dt \quad (3)$$

definiert ist und im Allgemeinen nicht verschwindet.

Eine besondere Eigenschaft des thermischen Rauschspektrums ist, dass dieses alle Frequenzanteile in gleichem Mass enthält, weshalb dieses in Analogie zum Licht als *weisses Spektrum* bezeichnet wird.

1.4 Nyquist-Beziehung

Dabei kann man feststellen, dass der quadratische Effektivwert proportional zur Temperatur T , der Boltzmannkonstante k , dem ohmschen Widerstand R und der Bandbreite Δf ist:

$$\langle U_r^2 \rangle = 4kTR\Delta f \quad (4)$$

Diese Gleichung ist unter dem Namen *Nyquist-Beziehung* bekannt.

Die endliche Bandbreite Δf ist eine Eigenschaft der Messelektronik (Voltmeter, Verstärker, Filter). Damit kann nur der Effektivwert von Wechselspannungen innerhalb der Bandbreite mit einem geringen Fehler gemessen werden.

1.5 Praktische Bestimmung der Boltzmannkonstante

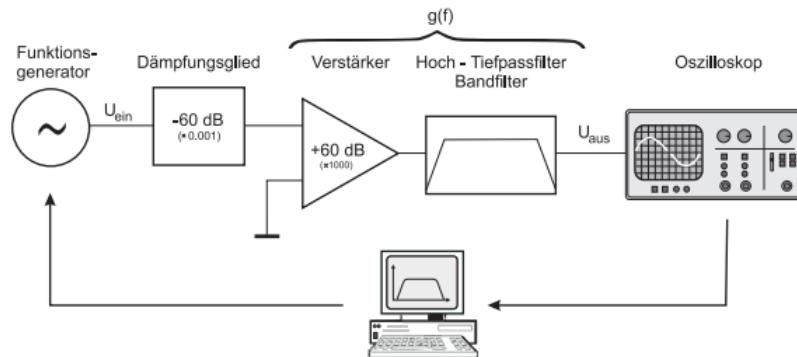


Abbildung 1: Versuchsaufbau

Mit der Nyquist-Beziehung (4) können wir also durch das Messen des quadrierten Effektivwertes, der Temperatur, des Widerstandes und der Bandbreite die Boltzmannkonstante bestimmen.

Dabei müssen wir beachten dass die Rauschspannungen sehr klein sind, weshalb ein Spannungsverstärker verwendet werden muss, der die Rauschspannung um das 1000-fache (60 dB) verstärkt und diese somit leichter messbar macht.

Der Nachteil des Einführens eines Verstärkers ist dass dieser wiederum auch aus Halbleitern und Widerständen aufgebaut ist, welche ein eigenes Rauschsignal besitzen und somit zum Gesamtrauschen beitragen. Daher dass die Mittelwerte

aus dem besprochenen statistischen Grund verschwindet, können die quadratischen Effektivwerte von Widerstand und Verstärker einfach addiert werden um den gesamten quadratischen Effektivwert zu erhalten:

$$\langle U_{R+V}^2 \rangle := \langle (U_R + U_V)^2 \rangle = \langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle + 2\langle U_R \rangle \langle U_V \rangle = \langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle \quad (5)$$

Das Verstärkerrauschen wird über eine Kurzschlussmessung bestimmt.

Weiterhin ergibt sich experimentell das Problem, dass die Bandbreite der Messapparatur bei hohen Frequenzen nicht scharf begrenzt ist und weiterhin bei niedrigen Frequenzen Störsignale (z.B. das 50Hz Netzbrummen) die Messung verfälschen. Deshalb schalten wir einen Hoch- und Tiefpassfilter hintereinander und können mit dem so erhaltenen *Bandfilter* die Bandbreite scharf einstellen. Um die Boltzmannkonstante zu bestimmen wird der Frequenzgang $g(f)$ aufgenommen:

$$g(f) = \frac{U_{aus}}{U_{RauschspannungWiderstand}} \Big|_f \quad (6)$$

Aus Nyquist (4) folgt:

$$d\langle U_{aus}^2 \rangle = g(f)^2 d\langle U_r^2 \rangle = 4kTRg(f)^2 df \quad (7)$$

Um den quadratischen Effektivwert der Ausgangsspannung zu erhalten integrieren wir noch über alle Frequenzen:

$$\langle U_{aus}^2 \rangle = 4kTR \int_0^{\infty} g(f)^2 df \quad (8)$$

Berücksichtigt man gemäss (5) das Verstärkerrauschen, so erhält man

$$\langle U_{aus}^2 \rangle = 4kTR \int_0^{\infty} g(f)^2 df + \langle U_V^2 \rangle \quad (9)$$

was man zu der für diesen Versuch entscheidenden Formel

$$k = \frac{\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle}{4kTR \int_0^{\infty} g(f)^2 df} \quad (10)$$

umformen kann.

Um den Frequenzgang zu messen wird ein Funktionsgenerator verwendet werden welcher eine Sinusspannung erzeugt. Damit der Verstärker dabei nicht in Sättigung geht, wird zwischen Funktionsgenerator und Verstärker ein Dämpfungsglied eingebaut, welches das Signal auf das 1000-fache ($D = 10^{-3}$) abschwächt. Der Funktionsgenerator liefert dabei eine konstante Eingangseffektivspannung

und mit dem Oszilloskop kann die Ausgangseffektivspannung gemessen werden.
Der Frequenzgang ergibt sich dann über

$$g(f) = \frac{\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}}{D \sqrt{\langle U_{ein}^2 \rangle}} \quad (11)$$

Das Integral über den Frequenzgang wird dabei numerisch in Python berechnet.
Der gesamte Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 skizziert.

2 Messprotokoll

Versuch 243: Bestimmung Boltzmannkonstante

Yago Obipo

12.03.29

Lennart Bederke

9-12

Betreuer: Michael Götzmann

Skizze 1: Versuchsaufbau



(1) Qualitative Beobachtungen

- Widerstand direkt am Eingang (Meinsch ohne Spannung): Größerer Widerstand \Rightarrow größere Frequenzgang: Größerer Widerstand \Rightarrow höherer Intensität
↳ aber weiterhin alle f vertreten
↳ weißes Rauschen

(2) Rauschspannung in Abhängigkeit von R mit Bandfilter

Tabelle 1: Rauschspannungswiderstand abhängigkeit

$R [\Omega]$	$U [mV]$	$\sigma [mV]$	Meßungen	$\Delta U [mV]$
5	2,3077	0,00935	707	0,0009
10	2,2833	0,021	715	0,0010
15	3,5331	0,0121	702	0,0012
20	4,0048	0,0145	703	0,0074
25	4,4408	0,0166	704	0,0076
30	4,8338	0,0184	718	0,0077

$\frac{\Delta R}{R} < 0,5\%$ Meßgenauigkeit Voltmeter: 0,3%

$$T = (22,2 \pm 0,3)^\circ\text{C}$$

(3) Moduls des Eigenvalues des Verstärkers mit Kurzschlußadaptator

Blitzze 2: Kurzschlußadaptator



$$U = 1,3278 \text{ mV}$$

$$\sigma = 0,00565 \text{ mV}$$

Meßungen: 705

$$\Delta U = 0,0006 \text{ mV}$$

(4) Messung Frequenzgang Verstärker und Bandfilter

$D = 0,007 \pm 0,2\%$ (Abschwächung)

Einstellung wie in Praktikumsblatt vorgegeben

b) Messdaten wurde abgespeichert

12.03.24

Sotzmann

3 Auswertung

3.1 Qualitative Beobachtungen

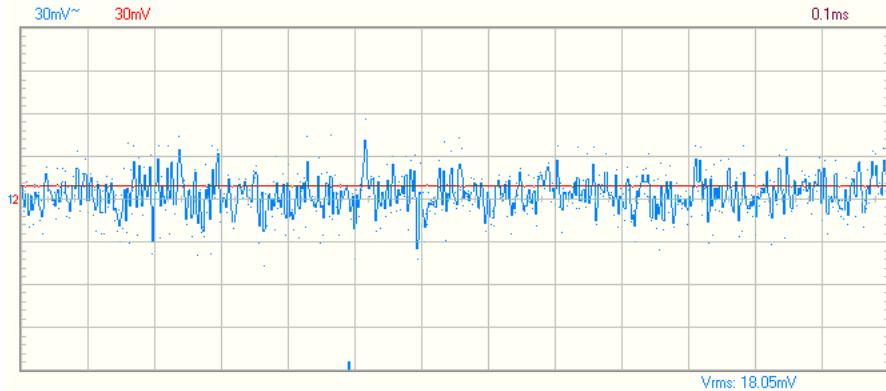


Abbildung 2: Gemessene Rauschspannung

Im ersten Versuchsschritt haben wir einige qualitativen Beobachtungen durchgeführt. Dazu haben wir den einstellbaren Widerstand direkt an den Eingang des Verstärkers geschlossen, ohne dabei eine äussere Spannung anzulegen. Obwohl keine äussere Spannung angelegt wurde, konnten wir tatsächlich eine Spannung messen (siehe die gemessene Rauschspannung in Abbildung 2), was die Theorie der Rauschspannung und der damit verbundenen Brownschen Molekularbewegung der Ladungsträger bestätigt.

Wurde der Widerstand erhöht, so konnten wir ebenfalls beobachten, dass die Rauschspannungsamplitude zunahm. Dies entspricht dabei auch unseren Erwartungen aus der Nyquist-Beziehung (4).

Dabei haben wir am Oszilloskop nicht nur das eigentliche Spannungssignal beobachtet, sondern auch den Frequenzgang und konnten dabei feststellen, dass bei allen Widerständen alle Frequenzen gleich stark enthalten sind, bei höheren Widerständen die Rauschamplitude jedoch wie erwartet zunahm, was weiter die Theorie des Weissrauschen bestätigt.

Wird der Frequenzbereich auf $3MHz$ erhöht, so konnten wir beobachten, dass der Frequenzgang abfällt, was eigentlich der Theorie des Weissen Rauschens zu widersprechen scheint. Dabei handelt es sich jedoch nicht um einen Widerspruch, da die Abnahme bei hohen Frequenzen durch die endliche Bandbreite des Verstärkers zustande kommt und nicht durch einen Fehler in der Theorie. Schaltet man einen Bandfilter hinzu, so beobachtet man steilere Kanten im Frequenzspektrum und dabei sowohl für zu niedrige als auch für zu hohe Frequenzen (siehe Kante für hohe Frequenzen in Abbildung 3).



Abbildung 3: Begrenzung durch einen Bandfilter

3.2 Frequenzgang des Eigenrauschen des Verstärkers und des Bandfilters

Da das Ziel dieses Versuches die Bestimmung der Boltzmannkonstante ist, müssen wir strategisch vorgehen und deshalb beginnen wir mit dem dritten Teil der Versuchsdurchführung, da wir diese Ergebnisse in den Folgeschritten benötigen werden.

Dabei wurde der Frequenzgang des Verstärkers mit Bandfilter aufgenommen, wobei wir am Eingang des Verstärkers weiterhin ein Dämpfungsglied mit einer Abschwächung von $D = 0,001 \pm 0,2\%$ befestigt haben. Beginnend bei einer Frequenz von 100Hz wurde in 20% Frequenzschritten bis 1MHz die Ausgangsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz aufgenommen. Die Eingangsspannung wurde dabei auf $1,72\text{Vrms}$ eingestellt.

Der Frequenzgang berechnet sich damit nach

$$g = \frac{U_{aus}}{DU_{ein}} \quad (12)$$

$$\Delta g = g \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta U_{aus}}{U_{aus}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U_{ein}}{U_{ein}}\right)^2} \quad (13)$$

Dabei wurde der Fehler für die Eingangs- und Ausgangsspannung in diesem Versuchsteil über einen relativen Fehler von 3% eingeschätzt.

Trägt man die Werte in ein doppellogarithmisches Diagramm ein, so erhalten wir den Verlauf in Abbildung 4. Dabei müssen wir beachten, dass wir uns bei sehr kleinen und sehr grossen Frequenzen in der Auflösungsgrenze des Oszilloskops befinden. Deshalb werden nur Werte ab der linear steigenden Flanke und bis zur linear fallenden Flanke berücksichtigt. Blendet man diese Werte in Python über eine Maske aus, so erhält man den Verlauf in Abbildung 5. Aus einer theoretischen Perspektive erwarten wir einen Frequenzgang, welcher durch den Frequenzgang eines Verstärkers und eines Hochpassfilters mit nachgeschaltetem

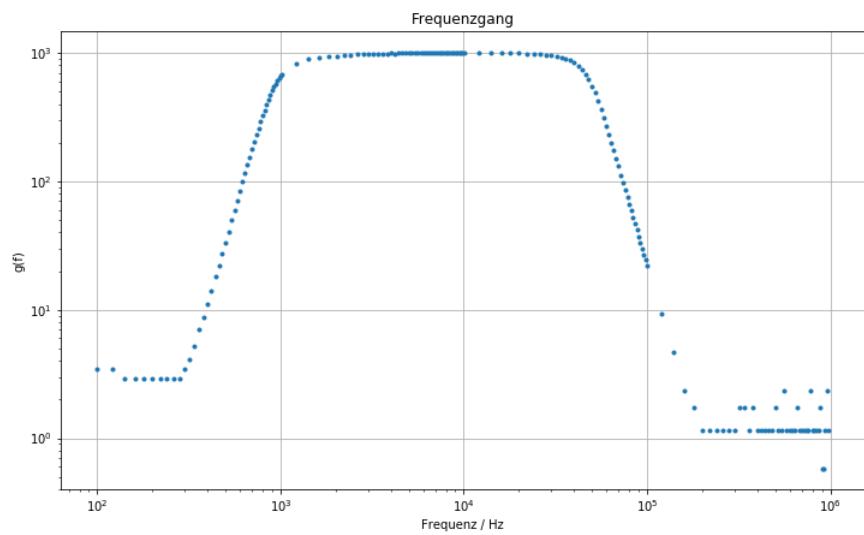


Abbildung 4: Gesamter Frequenzgang

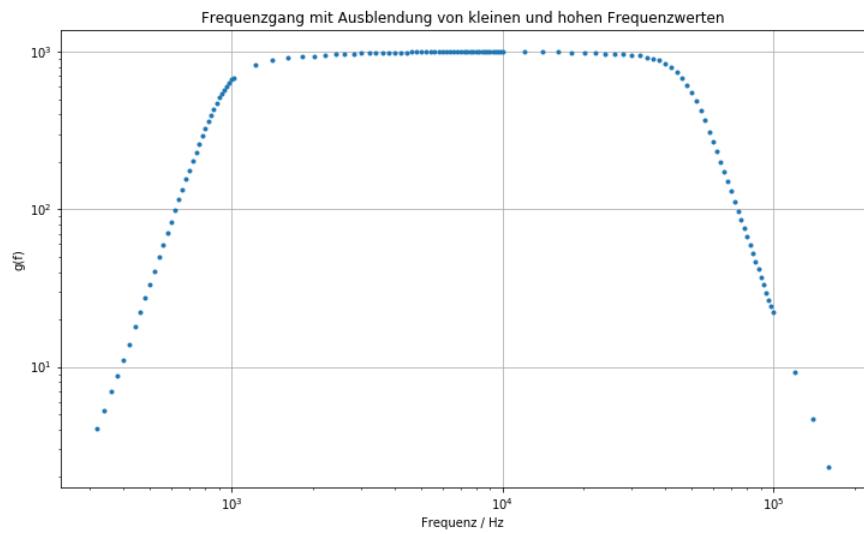


Abbildung 5: Ausblendung von niedrigen und hohen Frequenzwerten

Tiefpassfilter n-ter Ordnung charakterisiert ist:

$$g(f) = \frac{V}{\sqrt{1 + 1/(f/\Omega_1)^{2n_1}} \sqrt{1 + (f/\Omega_2)^{2n_2}}} \quad (14)$$

wobei V die Verstärkung, Ω_1 die Grenzfrequenz des Hochpassfilters und Ω_2 die des Tiefpassfilters und n_1 bzw. n_2 die jeweiligen Filterordnungen beschreiben. Diese Funktion kann den Messdaten angepasst werden, sodass wir nun den Verlauf in Abbildung 6 erhalten. Um die Boltzmannkonstante später berechnen zu

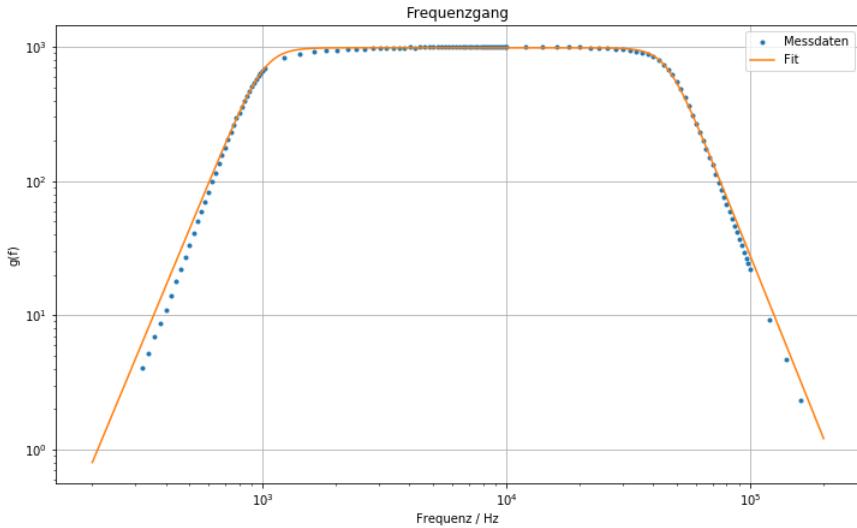


Abbildung 6: Frequenzgang Fit

können, muss das Integral

$$B = \int_0^{\infty} g(f)^2 df \quad (15)$$

berechnet werden. Dieses wird mit dem Python-Modul *Scipy-Integrate* numerisch berechnet (für genauere Details siehe Python-Code im Anhang). Als Ergebnis erhalten wir:

$$B = (4,40 \pm 0,09) \times 10^{10} Hz \quad (16)$$

3.3 Bestimmung der Boltzmannkonstante

Anschliessend widmen wir uns dem zweiten Schritt der Versuchsdurchführung. Hier haben wir die Rauschspannung für sechs Widerstände im Bereich von $5k\Omega$

bis $30k\Omega$ in Schritten von $5k\Omega$ aufgenommen, indem pro Messung 100 Einzelmessungen registriert wurden und davon der Mittelwert und sein Fehler notiert wurden. Mit der Standardabweichung und der Anzahl an Messungen, welche dem Messprogramm entnommen werden konnten, konnte der Fehler des Mittelwertes berechnet werden.

Weiter wurde das Eigenrauschen des Verstärkers bestimmt, indem wir den Verstärkereingang mit dem Kurzschlussstecker montiert haben.

Quadriert man nun die gemessenen Ausgangsspannungen und zieht die quadrierte Rauschspannung davon ab, so erwarten wir beim Auftragen gegen den Widerstand ein lineares Verhalten, welches durch den Ursprung geht, da für einen verschwindenden Widerstand keine Rauschspannung erwartet wird. Deshalb tragen wir diese Differenz gegen den Widerstand auf und passen eine Gerade an die Messwerte (siehe dazu Abbildung 7). Dabei wurde für den Fehler

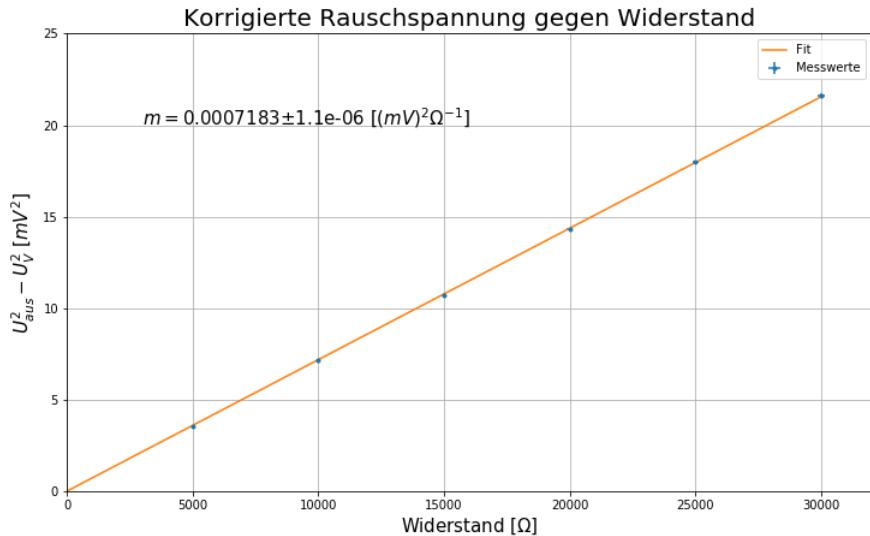


Abbildung 7: Differenz der Rauschspannungen gegen den Widerstand

der Differenz D nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung

$$\Delta D = 2\sqrt{(U_{aus}\Delta U_{aus})^2 + (U_V\Delta U_V)^2} \quad (17)$$

verwendet. Dieser ist jedoch so klein, sodass er sehr schwer erkennbar ist.

Per Augenmaß scheint der Fit sehr gut gelungen, um jedoch eine quantitative Aussage über die Güte der Anpassung machen zu können, wird der Fit mit der χ^2 -Methode in Tabelle 1 analysiert. Dafür wird zunächst die χ^2 -Summe

berechnet:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left(\frac{\text{Funktionswert}_i - \text{Messwert}_i}{\text{Fehler}_i} \right)^2 \quad (18)$$

weiter wird auch χ_{red} berechnet durch

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{\text{Freiheitsgrad}} \quad (19)$$

wobei der Freiheitsgrad sich aus der Anzahl der Messwerte abzüglich der Zahl der Fitparameter berechnet.

Auch die Fitwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit bei einer Wiederholungsmessung einen χ^2 -Wert zu erhalten der grösser oder gleich dem χ^2 Wert ist, wird berechnet. In der Diskussion wird diese Genauigkeit bewertet.

Grösse	Wert
χ^2	1,6
χ_{red}^2	0,3
Fitwahrscheinlichkeit	90%

Tabelle 1: Güte des Fits

Für die Steigung gilt:

$$m = 4kTB \quad (20)$$

Damit kann die Boltzmannkonstante bestimmt werden:

$$k = \frac{m}{4TB} \quad (21)$$

$$\Delta_{statistisch} k = k \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m} \right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2} \quad (22)$$

Für den systematischen Fehler muss der gemachte Fehler von B abgeschätzt werden. Dieser ist rein systematisch und besteht dabei aus einem Integrationsfehler, Fehler des Untergrunds, Fehler in der Genauigkeit der Messinstrumente und einem Fehler des Verstärkungsfaktors. Um uns "das Leben einfacher zu machen" (Zitat Praktikumsskript Seite 13 Versuch 243) kann ein systematischer Fehler von 2% für B angenommen werden. Damit gilt:

$$\Delta_{systematisch} k = k \cdot 0,02 \quad (23)$$

Dies führt uns letztendlich zu unserem erwünschten Ergebnis:

$$k = (1,3806 \pm 0,0025 \text{ stat.} \pm 0,028 \text{ syst.}) \times 10^{-23} \frac{J}{K} \quad (24)$$

Dabei war es sinnvoll die beiden unterschiedlichen Fehlerarten getrennt anzugeben, da wir dabei sehen können, dass der systematisch gemachte Fehler um eine Dezimalstelle kleiner ist, als der statistische und wir daraus somit schliessen können, dass wir für eine Verbesserung unserer Messung an diesen systematischen Abweichungen arbeiten müssen.

4 Zusammenfassung und Diskussion

Zusammenfassend haben wir uns in diesem Versuch mit dem thermischen Rauschen beschäftigt und haben dabei unter Ausnutzung, dass der quadratische Effektivwert proportional zur Boltzmannkonstante ist (nach der Nyquist-Beziehung (4)), die Boltzmannkonstante berechnet.

Dazu haben wir zunächst in einer qualitativen Beobachtung die Existenz dieser Rauschspannung und die damit verbundene Nyquist-Beziehung bestätigt und ebenfalls das weisse Rauschen verifiziert. Mit einem Bandfilter haben wir im Frequenzspektrum zwei steile Flanken einstellen können.

Daraufhin haben wir uns der quantitativen Ermittlung der Boltzmannkonstanten gewidmet.

Zuerst musste dafür der integrierte Frequenzgang bestimmt werden. Dafür haben wir die Ausgangsspannung des Verstärkers mit Bandfilter unter einem Sinusignal mit einer Frequenz zwischen 100Hz und 1MHz aufgenommen um daraus den Frequenzgang zu berechnen. Dabei wurde im Eingang des Verstärkers ein Dämpfungsglied mit $D = 0,001 \pm 0,2\%$ eingesetzt. Aufgrund der Auflösung des Oszilloskops wurden dabei sehr kleine und sehr grosse Frequenzen ausgeblendet und dem Verlauf der Messwerte wurde die theoretisch zu erwartende Funktion angepasst. Diese Funktion haben wir dann in Python mit numerischen Methoden integriert und als Ergebnis $B = (4,40 \pm 0,09) \times 10^{10}\text{Hz}$ erhalten.

Um nun damit die Boltzmannkonstante bestimmen zu können, wurde die Rauschspannung für unterschiedliche Widerstände zwischen $5\text{k}\Omega$ und $30\text{k}\Omega$ aufgenommen und das Eigenrauschen des Verstärkers bestimmt. Beide Spannungen wurden quadriert, die Differenz zwischen beiden gebildet und gegen den Widerstand grafisch aufgetragen. Über die Steigung der angepassten linearen Funktion $m = 0,0007183 \pm 1,1 \times 10^{-6} \frac{\text{mV}^2}{\Omega}$ konnte dann die Boltzmannkonstante bestimmt werden. Für diese wurde der statistische und systematische Fehler separat berechnet, sodass wir folgendes Endergebnis erhalten: $k = (1,3806 \pm 0,0025 \text{ stat.} \pm 0,028 \text{ syst.}) \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

4.1 Diskussion

Im folgenden werde ich die Ergebnisse des Versuches genauer untersuchen, deren Fehlerquellen kritisch kommentieren und einige Verbesserungsvorschläge der Durchführung präsentieren um diese zu minimieren.

Für die Sigma-Abweichung wird die übliche Formel von

$$\frac{|Wert1 - Wert2|}{\sqrt{Fehler1^2 + Fehler2^2}} \quad (25)$$

verwendet.

In Abbildung 7 wurde die quadrierte gemessene Ausgangsspannung abzüglich des quadrierten Eigenrauschen des Verstärkers gegen den Widerstand grafisch aufgetragen. Nach (10), erwarten wir aus einer theoretischen Sichtweise eine lineare Beziehung zwischen beiden. Deshalb haben wir in der Auswertung eine

Gerade an die Messwerte in Python angepasst. Dabei konnte man bereits an Abbildung 7 erkennen, dass die Anpassung sehr genau war. Über die χ^2 -Analyse wurde die Güte dieses Fits quantitativ untersucht und die Ergebnisse in Tabelle 1 angegeben. Dabei liegt die Fitwahrscheinlichkeit bei 90% und stellt damit einen guten Anpassungswert dar, insbesondere unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Fehlerbalken dabei sehr klein waren - was die in den Grundlagen besprochene Theorie bestätigt. Die Abweichung von einem "perfekten" Fit kann über statistische Schwankungen und Fehler beim Messen der Rauschspannungen gedeutet werden.

Für die Boltzmannkonstante haben wir ein Ergebnis von $k = (1,381 \pm 0,0025 \text{ stat.} \pm 0,028 \text{ syst.}) \times 10^{-23} \frac{J}{K}$ erhalten. Dabei wurde bereits betont, dass der systematische Fehler um eine Dezimalstelle grösser ist als der statistische Fehler, weshalb sich eine genauere Beschäftigung mit den systematischen Fehlerquellen lohnt (falls dieser kleiner gewesen sein sollte, würde es sich nur lohnen an systematischen Effekten zu arbeiten, wenn gleichzeitig die Anzahl an Messungen z.B. erhöht werden um den statistischen Fehler zu verringern).

Der Literaturwert der Boltzmannkonstante liegt nach der Quelle "BIPM - International System of Units" bei

$$k_{lit} = 1,380649 \times 10^{-23} \frac{J}{K} \quad (26)$$

Dabei besteht unter Berücksichtigung der durch unseren Fehler vorgegebenen signifikanten Stellen zwischen dem bestimmten Wert und dem Literaturwert eine absolute Abweichung von $4,9 \times 10^{-28} \frac{J}{K}$, was in unserem Fall einer $0,0018\sigma$ -Abweichung entspricht. Berücksichtigt man dabei die durchgeführte Rundung um das Ergebnis in Einklang mit den signifikanten Stellen zu bringen nicht und verwendet stattdessen die Python Werte, welche viele Nachkommastellen enthalten so verringert sich diese Abweichung sogar auf $3,08 \times 10^{-28} \frac{J}{K}$ und $0,0011\sigma$. Diese Abweichungen sind beeindruckend klein, was auf eine korrekte Versuchsdurchführung deutet und die Theorie inklusive der Nyquist-Beziehung bestätigt. Die Genauigkeit ist aus einer experimentellen Sicht vermutlich vor allem auf die Genauigkeit der Spannungsmessung zurückzuführen, da wir mit der Software jeweils das Ergebnis aus 100 Einzelmessungen bestimmen konnten. Aus einer theoretischen Sicht scheint weiterhin die Nyquist-Beziehung sehr genau die beobachtbare Physik zu beschreiben und keine signifikanten Näherungen aufzuweisen.

Als Verbesserungsvorschlag will ich dabei angeben, dass der Frequenzgang genauer bestimmt werden könnte. Betrachtet man Abbildung 4 so kann man die Auflösung des Oszilloskops erkennen. Dazu haben wir manuell für die Anpassung eine Maske in Python verwendet, welche nur die Werte ab der steigenden Flanke bis zur fallenden Flanke berücksichtigt. Ein Oszilloskop mit höherer Auflösung würde diesen Effekt reduzieren. Weiterhin kann man in Abbildung 4 erkennen, dass vor allem im Bereich hoher Frequenzen, von etwa 10^5 Hz ein paar mehr Messwerte für die Anpassung auf keinen Fall schaden würden.

Da der systematische Fehler jedoch von der Praktikumsanleitung vorgegeben wurde, ohne tiefere Details über die zugrundeliegenden Fehler zu erläutern,

müssten wir uns zur Minimierung dieses Fehlers mit diesen genauer auseinandersetzen und beispielsweise hinterfragen welches genaue numerische Verfahren Python ausnutzt um zu integrieren.

Obwohl der statistische Fehler deutlich kleiner ist, könnte dieser - falls in einem zukünftigen Versuch der systematische Fehler verringert wurde - natürlich durch eine grössere Anzahl an Messungen reduziert werden. So könnten beispielsweise bei der Messung der Rauschspannung 1000 anstatt 100 Einzelmessungen aufgenommen werden und die Messung nicht nur für 6 unterschiedliche Widerstände, sondern für mehr durchgeführt werden, sodass der lineare Fit auch genauer wird.

Insgesamt bin ich jedoch mit den Ergebnissen dieses Versuches zufrieden und dabei besonders stark von der Genauigkeit beeindruckt, mit welcher die Boltzmannkonstante bestimmt werden konnte. Vor allem wenn man diese Methode mit der Versuchsmethode des erwähnten bereits durchgeföhrten Versuches im PAP1 (Protokoll im Anhang) vergleicht, so wird einem klar, dass die Aufgabe der Experimentalphysik nicht alleine daran liegt, die Messapparate zu verfeinern, sondern vor allem auch darin einen guten Versuchsansatz zu wählen, da dieser letztendlich einen grossen Unterschied macht.

5 Quellen und Python Code

- PAP 2.2 Anleitung der Universität Heidelberg
- Eigenes Versuchsprotokoll V223: Messung der Boltzmannkonstanten (Bewertung mit ++)
- Literaturwert Boltzmannkonstante - BIPM International System of Units

March 31, 2024

1 Auswertung Versuch 243: Thermisches Rauschen und Messung der Boltzmannkonstante

1.1 Yago Obispo Gerster | mn304

```
[1]: #Importiere nützliche Module
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
import scipy.integrate as integrate
from scipy.stats import chi2
```

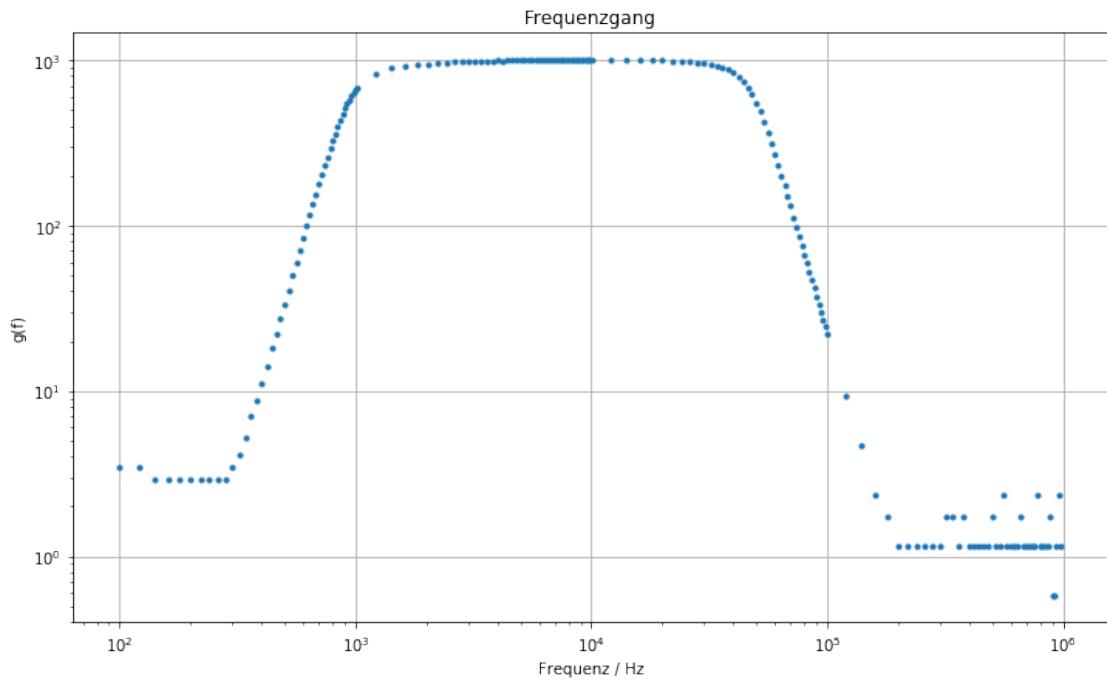
1.1.1 Importieren und grafische Datstellung des Frequenzganges

```
[2]: #Lade daten aus txt Datei, nur ersten beiden Spalten relevant: erste Spalte ↴ Frequenz und zweite Ausgangsspannung
f, U_aus = np.loadtxt("243/data/Aufgabe3.txt", skiprows=1, ↴ usecols=(0,1), unpack=True) #f in Hz und U_aus in mV
sig_U_aus = 0.03*U_aus

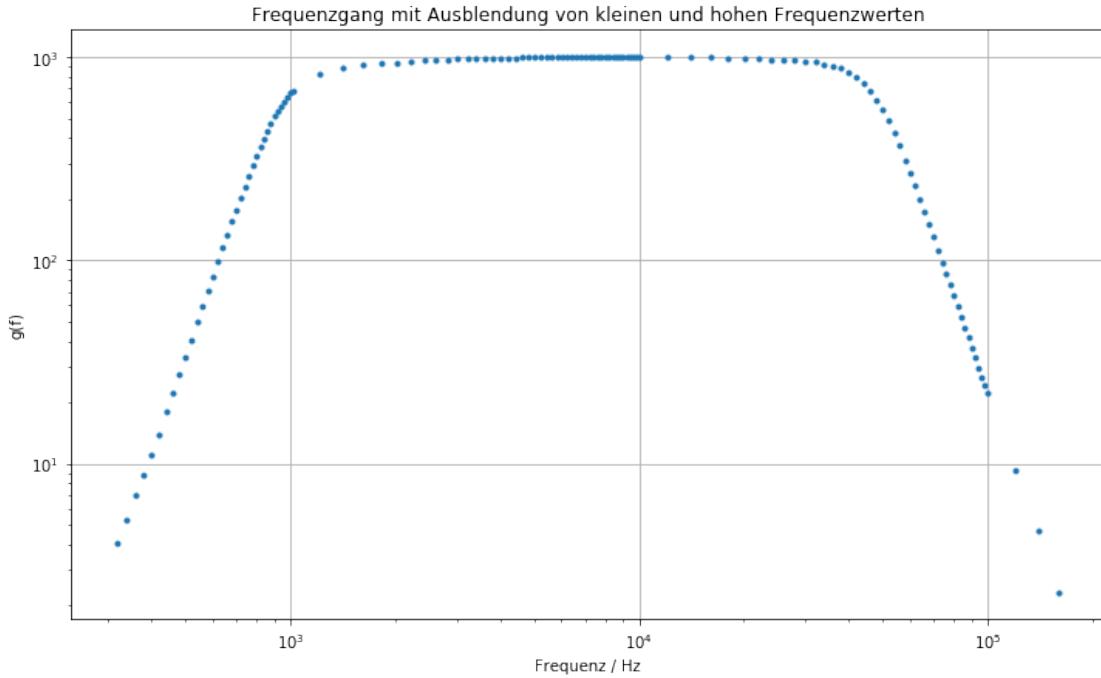
#Berechnung des Frequenzgangs g
D=1e-3 #Abschwächung Dämpfungsglied
sig_D = 0.002*D
U_ein= 1.72 #Vrms Eingestellte Eingangsspannung
sig_U_ein = 0.03*U_ein
g=U_aus/(U_ein * D) #Berechnung Frequenzgang
sig_g = g*np.sqrt((sig_U_aus/U_aus)**2 + (sig_U_ein/U_ein)**2 + (sig_D/D)**2)

#Auftragen von g über f in ein doppellogarithmisches Diagramm
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.loglog(f,g, linestyle="None", marker=".")
plt.xlabel("Frequenz / Hz")
plt.ylabel("g(f)")
plt.title("Frequenzgang")
plt.grid()
```

```
#Speichere das geplottete Bild  
plt.savefig("243/FrequenzgangKomplett.png")
```



```
[3] : #Ausblenden von kleinen und hohen Frequenzwerten da hier Auflösungsgrenze des  
    →Oszilloskops  
start = 11  
end = -41  
plt.figure(figsize=(12,7))  
plt.loglog(f[start:end],g[start:end], linestyle="None", marker=".")  
plt.xlabel("Frequenz / Hz")  
plt.ylabel("g(f)")  
plt.title("Frequenzgang mit Ausblendung von kleinen und hohen Frequenzwerten")  
plt.grid()  
plt.savefig("243/Ausblendung.png")
```



[4]: #Anpassung einer Funktion $g(f)$: Frequenzgang eines Verstärkers sowie eines
 ↪Hochpasses mit nachgeschaltenem Tiefpass n -ter Ordnung

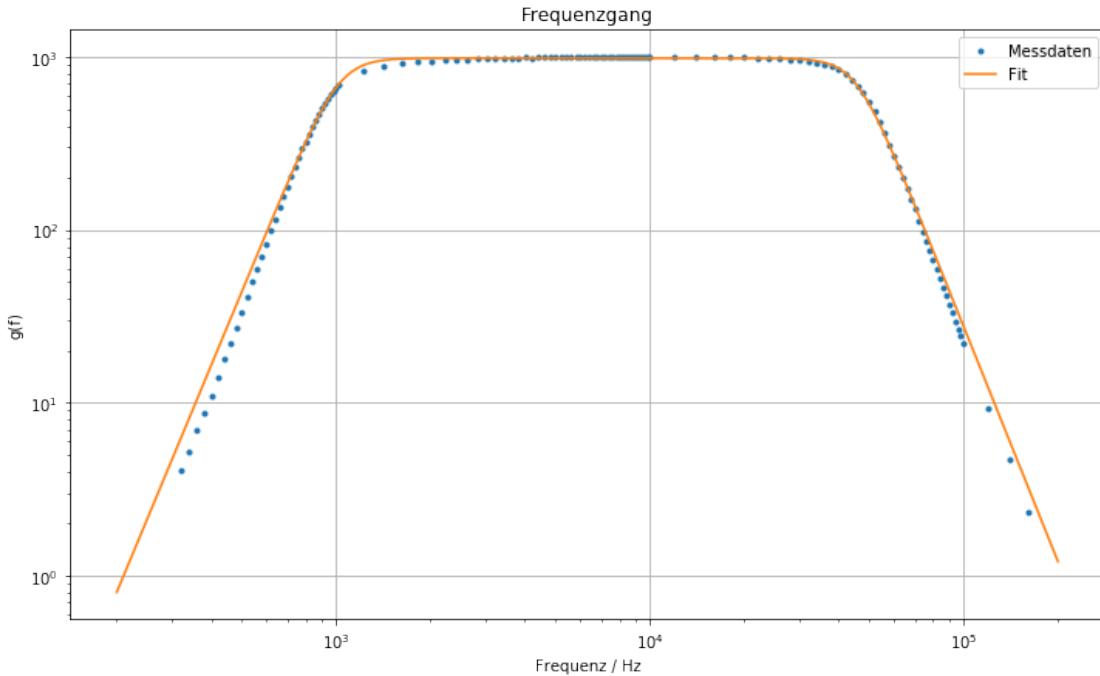
```

def fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return V/(np.sqrt(1+1/(f/W1)**(2*n1))*np.sqrt(1+(f/W2)**(2*n2)))

#Fit
p0 = [1000 , 1000 , 50000 , 5 , 5]
popt, pcov = curve_fit(fit_func, f[start:end] , g[start:end] ,p0)

#Plot
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.loglog(f[start:end],g[start:end] , linestyle="None" , marker=".".
  ↪" ,label="Messdaten")
x = np.linspace(2e2,2e5,10000)
plt.loglog(x, fit_func(x, *popt), label="Fit")
plt.xlabel("Frequenz / Hz")
plt.ylabel("g(f)")
plt.title("Frequenzgang")
plt.legend(loc="best")
plt.grid()
plt.savefig("243/FrequenzgangEingFit.png")

```



```
[5]: #Numerische Integration
def fit_func_square(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2)**2
B=integrate.quad(fit_func_square, f[start], f[end], args=tuple(popt))
print("Das Integral betraegt: {value:.4e}".format(value=B[0]))
print(B[0]*0.02/1e10)
```

Das Integral betraegt: 4.4040e+10
0.08807977808140138

1.1.2 Bestimmung der Boltzmannkonstante

```
[6]: #Speichere Messwerte der Rauschspannungswiderstandsabhängigkeit in Arrays
      ↵(Abschnitt 2 Messprotokoll)
R=np.array([5e3 , 10e3 , 15e3 , 20e3 , 25e3 , 30e3])
fehler_R = 0.005*R #maximaler Widerstandsfehler nach Praktikumsanleitung

U_aus=np.array([2.3077,2.9833,3.5331,4.0048,4.4408,4.8338])
fehler_system_U_aus = U_aus*0.003 #Messgenauigkeit des Voltmeters von 0,3%
fehler_U_aus=np.sqrt(np.array([0.0009,0.0010,0.0012,0.0014,0.0016,0.0017])**2 + ↵
      ↵fehler_system_U_aus**2)

#Messwert Eigenrauschen des Verstärkers (Abschnitt 3 Messprotokoll)
U_V = 1.3218
fehler_U_V = np.sqrt((0.0006*1e-3)**2 + (0.003*U_V)**2)
```

```

D=U_aus**2-U_V**2 #mV^2
fehler_D=2*np.sqrt((U_aus*fehler_U_aus)**2 + (U_V*fehler_U_V)**2) #Gaußsche Fehlerfortpflanzung

#Plot der Messwerte
plt.figure(figsize=(12,7))
plt.errorbar(R, D, xerr=fehler_R,yerr=fehler_D, fmt=". ",label="Messwerte")
plt.axis([0,32e3,0,25])
plt.grid()
plt.xlabel("Widerstand [Ω]",size=15)
plt.ylabel("U_aus^2 - U_V^2 [mV^2]",size=15)
plt.title("Korrigierte Rauschspannung gegen Widerstand",size=20)

#Anpassung einer linearen Funktion durch den Ursprung (da Rauschspannung bei R=0 verschwindet)
def linear(x,c):
    return c*x

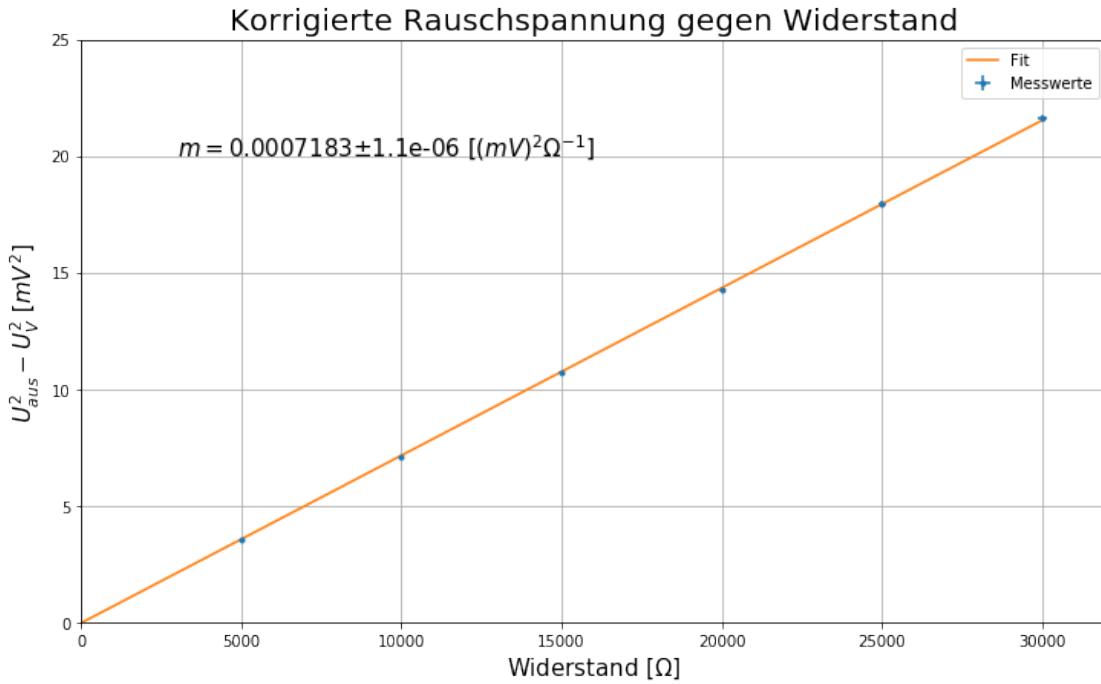
popt, pcov = curve_fit(linear, R, D)
x= np.linspace(0,30000,10000)
plt.plot(x,linear(x,*popt),label="Fit")
plt.legend(loc="best")

#Ausgabe der Steigung und des dazugehörigen Fehlers
m = popt[0] #mV^2/Ωm^-1
fehler_m = np.sqrt(pcov[0][0])
print("Steigung m: ",m,"+/-",fehler_m)

#Angabe der Steigung im Diagramm
plt.text(3000, 20,'$m =' + str(np.round(m, 7)) + '$\pm' + str(np.round(fehler_m, 7)) + ' [$(mV)^2 \backslash\Omega^{-1}]$',size=15)
plt.savefig("243/RauschWiderstand.png")

```

Steigung m: 0.0007183180524429703 +/- 1.0795073645807222e-06



```
[7]: #Güte des Fits mit Chi^2 Methode
chisquare=np.sum(((linear(R,*popt)-D)**2/fehler_D**2))
dof=5 #degrees of freedom, Freiheitsgrad; 6-1
chisquare_red=chisquare/dof
print(chisquare)
print(chisquare_red)

#Berechnung der Fitwahrscheinlichkeit
prob=round(1-chi2.cdf(chisquare,dof),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit="+str(prob)+"%")
```

1.571095691363911
0.3142191382727822
Wahrscheinlichkeit=90.0%

```
[8]: #Ermittlung der Boltzmannkonstanten: m=4kT
T = 273.15 + 22.2
fehler_T = 0.3

m = m*1e-6 #Konversion von mV^2 in V^2
fehler_m = fehler_m*1e-6

k = m/(4*T*B[0])
fehler_k = k*np.sqrt((fehler_m/m)**2 + (fehler_T/T)**2)
systematisch_k = k*0.02 #Systematischer Fehler B von 2%
```

```
print("Boltzmannkonstante k= ",k,"+/-",fehler_k,"stat. +/-",systematisch_k,"sys.  
→ J K^-1")
```

Boltzmannkonstante k= 1.3806182135896542e-23 +/- 2.5042995913932475e-26 stat.
+/- 2.7612364271793085e-25 sys. J K^-1

```
[9]: #Abweichung vom Literaturwert  
fehler = np.sqrt(feher_k**2 + systematisch_k**2)  
print(feher)  
sk = 1.3806e-23  
klit = 1.380649e-23  
print("Absolute Abweichung mit signifikanten Stellen ",np.abs(sk-klit))  
print("Absolute Abweichung unter Berücksichtigung aller Stellen ",np.  
→abs(k-klit))  
  
print("Sigma mit signifikanten Stellen ",np.abs(sk-klit)/fehler)  
print("Sigma unter Berücksichtigung aller signifikanter Stellen ",np.  
→abs(k-klit)/fehler)
```

2.7725695250464824e-25
Absolute Abweichung mit signifikanten Stellen 4.900000000021751e-28
Absolute Abweichung unter Berücksichtigung aller Stellen 3.078641034589377e-28
Sigma mit signifikanten Stellen 0.0017673136618421145
Sigma unter Berücksichtigung aller signifikanter Stellen 0.0011103927265945705