

Versuch 213: Kreisel

Yago Obispo Gerster

1. März 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation	1
1.1 Physikalische Grundlagen	2
1.1.1 Kreisel allgemein	2
1.1.2 Nutationsbewegung beim freien, symmetrischen Kreisel . .	2
1.1.3 Experimentelle Beobachtung der Drehachse	3
1.1.4 Präzessionsbewegung beim schweren, symmetrischen Kreisel	4
2 Messprotokoll	4
3 Auswertung	11
3.1 Fehlerabschätzung	11
3.2 Beobachtungen des Vorversuchs	12
3.3 Bestimmung der Dämpfungskonstante und Halbwertszeit	12
3.4 Vergleich der Präzessionszeiten	13
3.5 Bestimmung des Trägheitsmomentes I_z des Kreisels	14
3.6 Umlauf der momentanen Drehachse um die Figurennachse . . .	16
3.7 Grafischer Ansatz zur Bestimmung von I_x	16
4 Zusammenfassung und Diskussion	17
4.1 Diskussion	18
5 Quellen und Python-Code	20

1 Einleitung und Motivation

Das Ziel des Versuches ist die Untersuchung der Nutations- bzw. Präzessionsbewegung bei einem Kreisel, die Analyse von Reibungseffekten darauf und die Bestimmung des Trägheitsmomentes des Kreisels.

1.1 Physikalische Grundlagen

1.1.1 Kreisel allgemein

Bei der Betrachtung von drehenden physikalischen Systemen ist oft die Näherung des Systems als ein *Kreisel* besonders sinnvoll. Dabei definieren wir als Kreisel allgemein einen starren Körper welcher um einen festen Punkt rotiert. Ein Kreisel besitzt allgemein 3 wichtige Achsen mit denen wir uns im Laufe des Versuches noch weiter beschäftigen werden.

Die erste ist die sogenannte *Figurenachse* \vec{F} . Sie ist die Symmetriearchse des Körpers.

Die zweite ist die *Drehimpulsachse* \vec{L} , welche durch die Richtung des Drehimpulses charakterisiert ist.

Die dritte Achse ist die Drehachse \vec{w} , welche durch die Drehung des Kreisels festgelegt wird.

1.1.2 Nutationsbewegung beim freien, symmetrischen Kreisel

Im Falle eines kräftefreien, symmetrischen Kreisels, welcher also im Schwerpunkt gelagert ist und bei welchem zwei Hauptträgheitsmomente gleich gross sind, übt die Gewichtskraft kein Drehmoment auf den Kreisel aus, weshalb der Drehimpuls in Betrag und Richtung erhalten ist.

Man kann beispielsweise mit einem Motor den Kreisel in Drehung versetzen, sodass dieser mit einer Frequenz von $\vec{\omega}_F$ um die Figurenachse rotiert.

Mit einem leichten Schlag kann man den Kreisel weiter in eine Art Taumelbewegung, die sogenannte *Nutationsbewegung* um die Drehimpulsachse mit $\vec{\omega}_N$ versetzen. Die Nutationsbewegung ist dadurch charakterisiert dass nicht mehr alle drei Achsen aufeinanderfallen, sondern dass die Figurenachse auf einem Kegelmantel mit ω_n um die Drehimpulsachse rotiert (siehe Abbildung 1). Die Figurenachse, Drehimpulsachse und Drehachse liegen dabei immer in einer Ebene.

Die dadurch entstehende Drehbewegung ist also eine Überlagerung der Eigen-drehung und der Nutation:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_F + \vec{\omega}_N \quad (1)$$

Anschaulich liegt ω auf der Berührlinie des Raum- und Körperrotationskegels (siehe Abbildung 1).

Der Drehimpuls und $\vec{\omega}$ lassen sich in die x- und z-Komponente zerlegen. Aus geometrischen Überlegungen (Abbildung 2) erhalten wir:

$$w_x = w_N \sin \theta \quad (2)$$

Aus $L_x = L \sin \theta = I_x \omega_x$ folgt

$$w_N = \frac{L}{I_x} \quad (3)$$

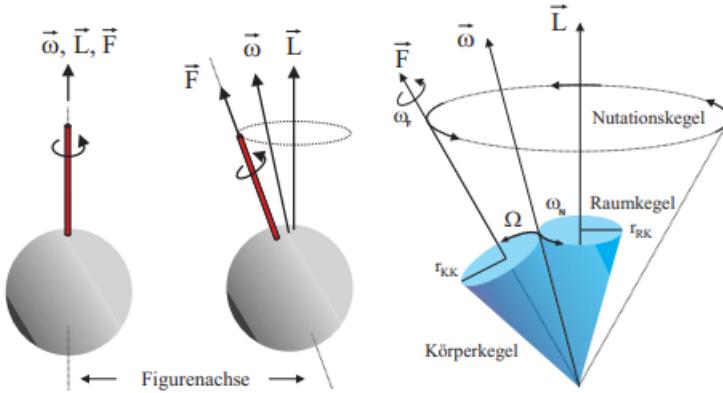


Abbildung 1: Veranschaulichung der drei Drehachsen bei der Nutation

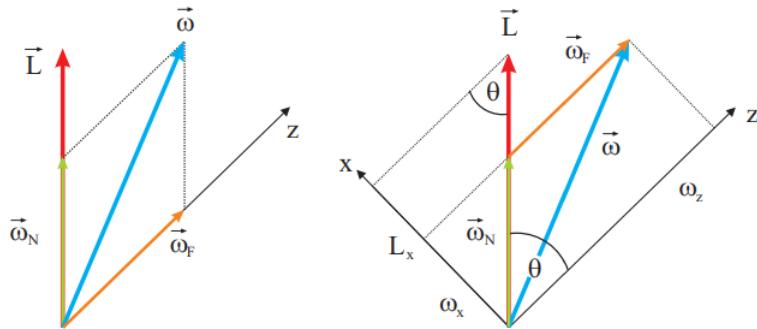


Abbildung 2: Geometrische Überlegung zur Herleitung von ω_N

Bei sehr schwachen Nutationsbewegungen (kleinem θ) kann eine Näherung verwendet werden:

$$L \approx I_z \omega \approx I_z \omega_F \quad (4)$$

$$\Rightarrow \omega_N \approx \frac{I_z}{I_x} \omega_F \quad (5)$$

1.1.3 Experimentelle Beobachtung der Drehachse

Um die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ bei der Nutation zu beobachten, wird folgender Trick angewandt: man befestigt eine Farbscheibe an den Kreisel mit unterschiedlichen Farben. In dem Schnittpunkt der momentanen Drehachse mit der Scheibe, steht die Farbscheibe kurzfristig still und man kann die unverfälschte Farbe eines Segments erkennen.

Da sich $\vec{\omega}$ auf dem Körperkegel bewegt, kann man sehen, wie die unterschiedlichen Farben der Scheibe nacheinander durchlaufen werden.

Der Farbwechsel hat eine Winkelgeschwindigkeit Ω welche sich über den Radius des Körperkegels r_{KK} und den des Raumkegels r_{RK} und die Nutationsfrequenz gemäss

$$\Omega = \omega_N \cdot \frac{r_{RK}}{r_{KK}} \quad (6)$$

berechnen lässt. Alternativ kann Ω auch über die Trägheitsmomente und Eigenfrequenz w_F ermittelt werden:

$$\Omega = \frac{I_x - I_z}{I_x} \omega_F \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow I_x - I_z = \frac{I_z}{\omega_F/\Omega - 1} \quad (8)$$

1.1.4 Präzessionsbewegung beim schweren, symmetrischen Kreisel

Der schwere, symmetrische Kreisel ist dadurch gekennzeichnet, dass der Unterstützungspunkt nicht mehr der Schwerpunkt sein muss, sondern ein beliebiger Punkt auf der Figurennachse. Praktisch realisieren wir in diesem Versuch den schweren Kreisel indem wir einige Zusatzgewichte an den Stab hängen und damit den Schwerpunkt verschieben.

Die Gewichtskraft erzeugt ein Drehmoment \vec{M}

$$\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g} \quad (9)$$

wobei \vec{l} vom Unterstützungspunkt zur Zusatzmasse zeigt, m die Masse der Zusatzgewichte und \vec{g} die Erdbeschleunigung ist.

Daher dass das Drehmoment orthogonal zum Drehimpuls zeigt, ändert sich nicht der Betrag des Drehimpulses, sondern nur die Richtung, welche sich in Richtung von \vec{M} verändert. Damit bewegt sich der Drehimpulsvektor auf einem Kegelmantel um die z-Richtung. Dies heisst *Präzession*. Die Präzessionsfrequenz ω_P kann man sich über folgende geometrische Überlegung herleiten:

$$\omega_P = \frac{d\phi}{dt} = \frac{dL}{L \sin \alpha dt} \quad (10)$$

$$L = I_z w_F \quad (11)$$

$$\Rightarrow \omega_P = \frac{mgl}{I_z w_F} \quad (12)$$

Interessant dabei ist, dass die letzte Formel nur vom Betrag des Drehimpulses und des Drehmomentes abhängig ist und nicht von der räumlichen Orientierung.

2 Messprotokoll

14-17

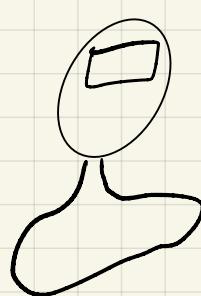
23. Okt.

Versuchsprotokoll: 213 Kreisel

Betreuer: Jonah Lux

Yago Obinpo Gerter und Juan Bueno Fontanilla

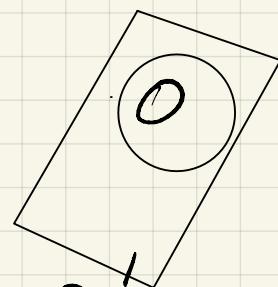
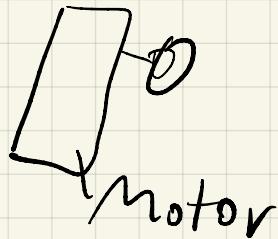
Skizze:



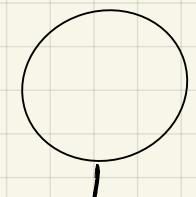
- Stopp - Stahlkugel mit Aluminium-
stab



- Luftkreisel



Stroboskop



farbige
Kreis Scheibe

Skizze 1: Versuchsaufbau

1. (a) Die Scheibe wird so auf dem Stab befestigt sodass Kreisel kräftefrei (Stab geht nicht mehr nach oben)
(s. Wenn der Stab zur Seite gedrückt wird findet immer noch nur die Eigenrotation statt und keine Nutation oder Präzession)

(b) Farbige Kreisscheibe auf Kreisel bei Nutation:

- Am unteren Stabende: Farbwechsel
- Kreisscheibe farbig verwickelt nur in einem Kreisbereich nahe Zentrum erkennt man horizontal rot/gelb/grün konstante Farben

(c) Scheibe mit konzentrischen Kreisen mit verschobenen Mittelpunkten

- Bei Eigendrehung um Figurenachse: Kreismittelpunkt verschiebt sich in Zentren Scheibe mit Mittelpunkt in der Mitten
- Stab rotiert um Mittelpunkt der Drehimpuls und mit Gewicht oben.
- Nutation vergrößert sich

(d) Ohne Kreisscheibe oder Gewicht rotieren ls Präzession entgegen der Eigendrehrichtung und nach oben (Wdh. der Rotation für beide Richtungen)

Mit Kreisscheiben und Gewichten rotieren ls Präzession und nach unten Eigendrehrichtung

(2) Dämpfung über Eigenfrequenzmessung

Min	Frequenz [min^{-1}]
0	680
2	624,4
4	574,9
6	533,2
8	497,9
10	444,3
12	409,9

Tabelle 1: Bestimmung Dämpfung

(3) Präzisionsmessung

Ein Gewicht bei 20 cm

Winkel ($^{\circ}$)

90

T_p

1' 09" 48

45

1' 08" 61

30

1' 09" 90

Tabelle 2

(4) 15 cm ein Gewicht

Frequenz [min ⁻¹]	T _p [s]
250	46'07
350	1'04'37
700	2'01'81
500	1'37'74

20 cm Tabelle 3 ein Gewicht

Frequenz [min ⁻¹]	T _p [s]
250	35'37
350	49'50
500	1'77'77
700	1'38"54

25 cm zwei Gewichte

Frequenz [min ⁻¹]	T _p [s]
250	23'95
350	33"32
500	47'90
700	1'05"48

Tabelle 5

20 cm	zwei	Gewicht
Frequenz [Hz ⁻¹]		T _p [s]
250		18" 12
350		25" 50
500		36" 29
700		50" 01

Tabelle 6

(Y)

a) Im Uhrzeigersinn Eigenrotation
Rot - Grün - Gelb

b

Frequenz [min⁻¹]

10 Rot - Grün - Gelb

300

32" 82

350

27" 06

400

29" 48

500

18" 76

600

16" 53

Tabelle 7

w_F [n_{Lu}⁻¹]

w_N [n_{Lu}⁻¹]

852

820

752

710

610

570

657

620

455

425

Tabelle 8

Fehlerabschätzung

Zeitmessung:

$$\Delta t = 0,07 \text{ s} \quad (\text{Auflösung})$$

$$\Delta t = 0,2 \text{ s} \quad (\text{Reaktionszeit})$$

$$\Delta t = 0,5 \text{ s} \quad (\text{Reaktion Präzision})$$

$$\Delta t = 0,3 \text{ s} \quad (\text{Reaktion Rot-Gruß-Gelb})$$

Stroop-Loop (analog)

$$5 \text{ min}^{-1} \quad (\text{Auflösung})$$

$$70 \text{ min}^{-1} \quad (\text{Reaktionsfehler})$$

Stroop-Loop (digital)

2%

D. Kue

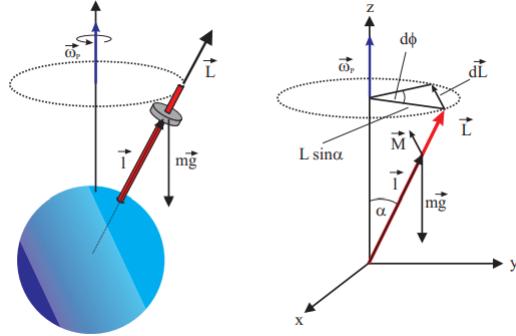


Abbildung 3: Geometrische Herleitung der Präzessionsfrequenz

3 Auswertung

3.1 Fehlerabschätzung

Bevor ich mit der Auswertung des Versuchs beginne will ich zuerst die angenommenen Fehler präsentieren.

Für die Zeitmessung gilt ein Fehler von $0,01\text{s}$ wegen der Auflösung. Hinzu kommt der menschliche Reaktionsfehler, den wir hier als $0,2\text{s}$ eingeschätzt haben. Insgesamt also $\sqrt{0,01^2 + 0,2^2} = 0,2\text{s}$ Fehler. Bei der Präzession und beim Beobachten des Rot-Grün-Gelb-Wechsels werden zusätzliche Reaktionsfehler von $0,5\text{s}$ bzw. $0,3\text{s}$ berücksichtigt, da bei der Präzession nur schwer erkennbar war, in welchem genauen Moment die Stabspitze durch unsere festgelegte Markierung für eine volle Umdrehung durchquerte und beim Farbwechsel vermutlich die Farbe etwas vor dem menschlichen Erkennen gewechselt hatte. Für die Präzession ergibt sich damit ein Gesamtfehler von $\sqrt{0,2^2 + 0,5^2} = 0,54\text{s}$ und bei dem Farbwechsel $\sqrt{0,2^2 + 0,3^2} = 0,36\text{s}$.

Für den Fehler der Frequenzmessung mit dem Stroposkop unterscheiden wir zwischen den Messungen, die wir mit dem digitalen Stroposkop durchgeführt haben und denjenigen, welche wir mit dem analogen Stroposkop gemacht haben. Für das digitale wird ein absoluter Fehler von 5min^{-1} angenommen. Während des Versuches haben wir dazwischen geschwankt, diesen absoluten Fehler zu wählen oder einen relativen von 2%, im Nachhinein erschien mir jedoch der absolute Fehler sinnvoller - unter Betrachtung unserer Messdaten. Für das analoge Stroposkop welches wir im letzten Versuchsschritt verwendet haben, wird ein Fehler von 5min^{-1} für die Auflösungsfähigkeit des Geräts und ein Fehler von 10min^{-1} für die menschliche Reaktion, was insgesamt einem Fehler von $\sqrt{10^2 + 5^2} = 11\text{min}^{-1}$ entspricht.

3.2 Beobachtungen des Vorversuchs

Als erstes wurde ein Vorversuch durchgeführt, welcher uns qualitativ die Phänomene demonstrieren soll, die wir später in der Auswertung genauer untersuchen werden.

Im ersten Teil des Vorversuchs wird die Scheibe mit den Farbsektoren auf den Kreisel gelegt, sodass der Kreisel kräftefrei wird, d.h. der Stab bewegt sich beim Auslenken nicht mehr von alleine nach oben. Nachdem der Kreisel in Drehung versetzt wurde, wird der Metallring am Stabende zur Seite gedrückt. Dabei konnte man eine Gegenkraft des Kreisels spüren, welcher ja, im kräftefreien Fall alle seine Achsen gleich vertikal gerichtet halten möchte. Im Versuch konnte jedoch keine Nutations- oder Präzessionsbewegung festgestellt werden, was daran liegt, dass der Kreisel mit Vorsicht langsam zur Seite gedrückt wurde und nicht angestossen.

Im zweiten Schritt haben wir dem Stab einen leichten seitlichen Stoß erteilt, sodass der Kreisel in Nutation versetzt wurde. An der montierten farbigen Kreisscheibe konnten wir beobachten, wie ein Punkt in der Nähe des Stabes eine unvermischte, reine Farbe getragen hat. Dieser befand sich immer auf einem Kreis auf der Scheibe und verrät uns, wo sich die momentane Drehachse befindet.

Im dritten Schritt haben wir die Scheibe mit konzentrischen Kreisen mit verschiedenen Mittelpunkten auf den Kreisel befestigt. Bei einer Eigendrehung um die Figurennachse rückte dabei der Mittelpunkt der verschobenen Kreise ins Zentrum. Bei einer Nutationsbewegung befindet sich der Mittelpunkt der Kreise nicht mehr in der Scheibenmitte. Er markiert den Punkt, an welchem die Drehimpulsachse die Scheibe schneidet. Beim Anfestigen von einigen Gewichten am Stabende können wir beobachten, wie die Nutationsbewegung verstärkt wirkt und eine leichte Präzessionsbewegung beginnt, was dadurch zustande kommt, dass wir mit den Gewichten den Schwerpunkt verschieben und somit nicht mehr den Fall eines kräftefreien Kreisels betrachten müssen, sondern denjenigen bei welchem ein Drehmoment ausgeübt wird.

Zuletzt wurde noch beobachtet, was geschieht, wenn der Schwerpunkt des Kreisels verschoben wird. Ohne Farbscheibe oder Gewichte liegt dieser unterhalb der Kugelmitte. Im Versuch konnten wir beobachten, wie die Präzession entgegen der Eigendrehrichtung erfolgte. Befestigte man Gewichte am Stab, d.h. verschob man den Schwerpunkt in die obere Kugelmitte, so erfolgte die Präzession in die Eigendrehrichtung des Kreisels.

3.3 Bestimmung der Dämpfungskonstante und Halbwertszeit

Nun wollen wir die Dämpfung des Kreisels quantitativ bestimmen. Dazu wurde über 12 Minuten alle 2 Minuten die Frequenz gemessen. Dabei nehmen wir ein exponentielles Abklingen der Frequenz w an:

$$w(t) = w_0 e^{-\delta t} \quad (13)$$

Wobei δ die zu bestimmende Dämpfungskonstante ist. Wenn wir die gemessene Frequenz also gegen die Zeit auf halblogarithmischem Papier auftragen, so liefert uns der Betrag der Steigung genau die Dämpfungskonstante. Diese wurde

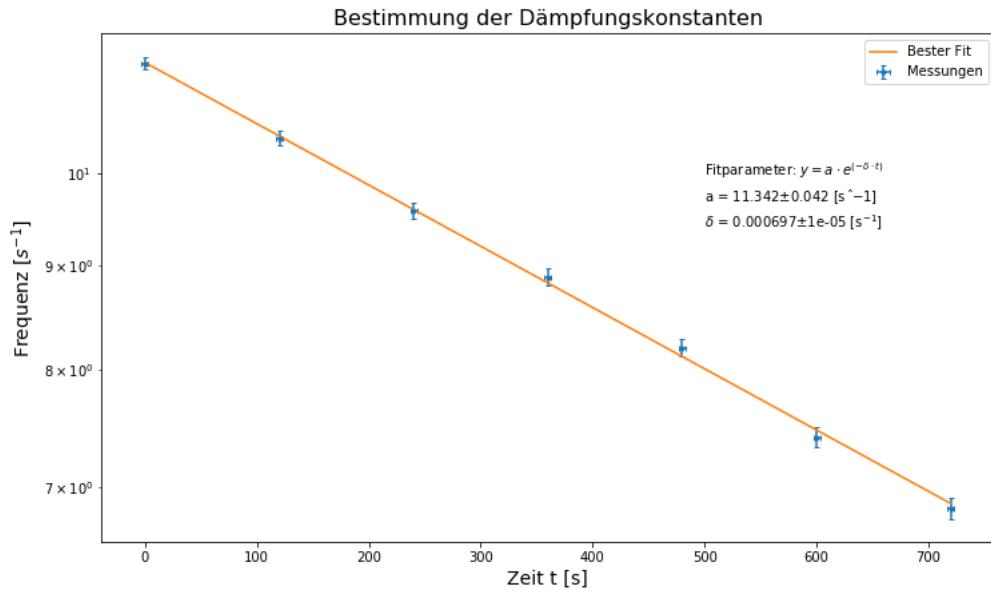


Abbildung 4: Grafische Bestimmung der Dämpfungskonstanten

grafisch zu

$$\delta = (6,97 \pm 0,10) \cdot 10^{-4} \frac{1}{s} \quad (14)$$

ermittelt. Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ der Rotationsfrequenz kann dann mit

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\delta} \quad (15)$$

berechnet werden. Wir erhalten:

$$T_{1/2} = (994 \pm 15)s \quad (16)$$

3.4 Vergleich der Präzessionszeiten

Im dritten Versuchsschritt haben wir die Winkelabhängigkeit der Präzession untersucht. Dazu haben wir im Abstand von 20cm zur Kugelmitte ein Zusatzgewicht am Kreisel angebracht und bei ungefähr gleicher Drehgeschwindigkeit den Kreisel nutationsfrei unter 3 unterschiedlichen Winkeln losgelassen.

\bar{w}_F	1	2	3	4
Eins bei 15	25.77	35.85	70.32	50.75
Eins bei 20	25.86	36.02	51.10	70.86
Zwei bei 15	25.96	36.23	51.50	71.68
Zwei bei 20	26.02	36.32	51.71	72.05

Tabelle 1: Mittlere Eigenfrequenzen in der Einheit [$\frac{1}{s}$]

Wie man an Tabelle 2 des Messprotokolls unschwer erkennen kann, stimmen die gemessenen Periodendauern näherungsweise miteinander überein. Die absolute Abweichung zwischen den beiden ersten Winkeln ist $0,9s$, zwischen der ersten und dritten $0,4s$ und zwischen dem zweiten und dritten $1,3s$. Diese Unterschiede lassen sich durch statistische sowie systematische Fehler (erkennen, wann eine volle Umdrehung gemacht wurde) erklären und sind somit nicht signifikant. Hier wurde also wiederum bestätigt, dass die Präzessionszeiten unabhängig vom Winkel sind.

3.5 Bestimmung des Trägheitsmomentes I_z des Kreisels

In diesem Abschnitt soll das Trägheitsmoment des Kreisels entlang der z-Achse berechnet werden.

Dazu wurde die Anfangseigenfrequenz und die Präzessionszeiten für unterschiedliche Versuchsanordnungen gemessen: einmal mit einem Gewicht bei $15cm$, einmal mit einem Gewicht bei $20cm$, einmal mit zwei Gewichten bei $15cm$ und einmal mit zwei bei $20cm$.

Da wir bereits gezeigt haben, dass die Eigendrehung mit einer Dämpfung einhergeht, muss diese berücksichtigt werden. Zunächst soll die mittlere Eigenfrequenz \bar{w}_F über

$$\bar{w}_F = \frac{w_A + w_E}{2} \quad (17)$$

$$\Delta\bar{w}_F = \frac{\sqrt{\Delta w_A^2 + \Delta w_E^2}}{2} \quad (18)$$

bestimmt werden, wobei w_A die gemessene Anfangsfrequenz ist und man die Endfrequenz w_E über

$$w_E = w_A \cdot e^{-\delta T} \quad (19)$$

bestimmen kann, wobei T die Präzessionsperiodendauer beschreibt. Dabei habe ich bei der Berechnung festgestellt, dass der Fehler für \bar{w}_F immer $\Delta\bar{w}_F = 0.25\frac{1}{s}$ beträgt. Anschliessend wird die Präzessionsdauer in Abhängigkeit von der mittleren Eigenfrequenz geplottet (siehe Abbildung 5). Nach Formel (12) kann das Trägheitsmoment I_{zi} mithilfe der Steigung s_i dieser Geraden berechnet werden

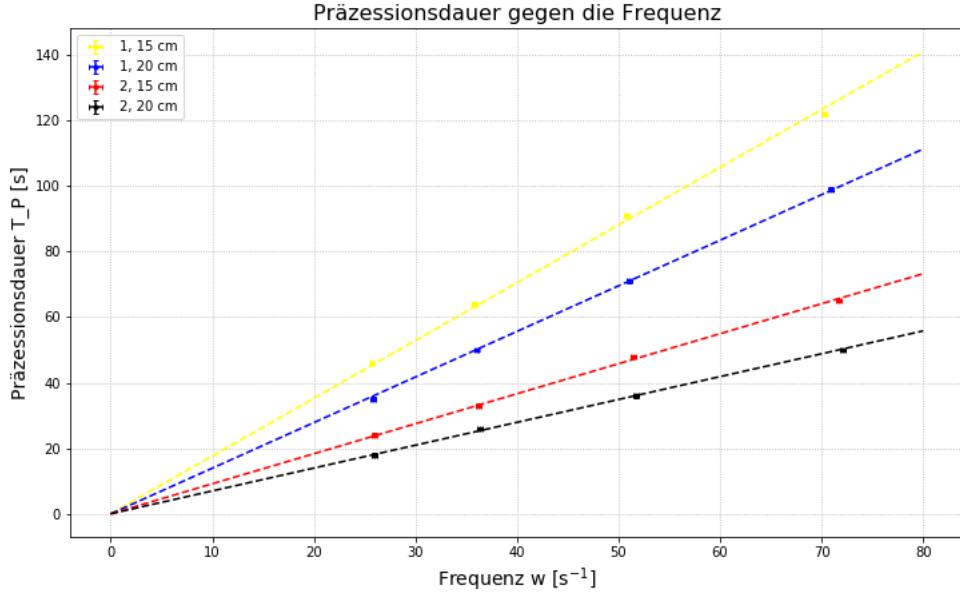


Abbildung 5: Präzessionsdauer in Abhängigkeit von Eigenfrequenz

$\overline{w_F}$	Steigung [s 2]	Trägheitsmoment [10 $^{-3}kgm^2$]
Eins bei 15	$1,762 \pm 0,016$	$4,06 \pm 0,09$
Eins bei 20	$1,391 \pm 0,006$	$3,21 \pm 0,07$
Zwei bei 15	$0,915 \pm 0,006$	$5,63 \pm 0,09$
Zwei bei 20	$0,697 \pm 0,004$	$4,29 \pm 0,07$

Tabelle 2: Geradensteigungen und berechnete Trägheitsmomente

über

$$I_{zi} = \frac{s_i m g l}{2\pi} \quad (20)$$

$$\Delta I_{zi} = I_{zi} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta s_i}{s_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2} \quad (21)$$

Das zusätzliche Trägheitsmoment der einzelnen Gewichtsstücke darf dabei nach Praktikumsanleitung ignoriert werden. Der Längenfehler wird bei $\Delta l = 0,003m$ abgeschätzt.

Die Steigungen werden grafisch abgelesen und die Trägheitsmomente für jeden Fall berechnet (siehe Tabelle 2). Bildet man den Mittelwert mit dem entsprechenden Standardfehler des Mittelwertes, so erwartet man, das Trägheitsmo-

ment einer Kugel.

$$I_z = (4,3 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2 \quad (22)$$

3.6 Umlauf der momentanen Drehachse um die Figurenachse

Während des Versuches konnten wir beobachten, dass die Nutationsfrequenz w_N kleiner war, als die Eigenfrequenz w_F . Die Farbpalette drehte sich im Uhrzeigersinn, was einem "Rot-Grün-Gelb" Farbwechsel zuordnungsbar war. Entsprechend gilt nach der Gleichung (5) aus den Grundlagen:

$$w_N < w_F \Rightarrow I_x > I_z \quad (23)$$

Während der Versuchsdurchführung wurde weiterhin die Zeit t für insgesamt 10 Farbwechsel gemessen. Somit erhalten wir die Umlauffrequenz der momentanen Drehachse

$$\Omega = \frac{2\pi \cdot 10}{t} \quad (24)$$

Trägt man die Umlauffrequenz der momentanen Drehachse gegen die Eigenfrequenz grafisch auf, so erhält man den Graphen in Abbildung 6. Die Steigung der Geraden entspricht dabei genau $\frac{\Omega}{w_F}$, was eine Grösse ist, die für unsere Formel (8) von grosser Bedeutung ist. Damit können wir nämlich mit unserem davor ermittelten I_z nun I_x berechnen.

Wir erhalten:

$$I_x = (0,0046 \pm 0,0005) \text{kgm}^2 \quad (25)$$

3.7 Grafischer Ansatz zur Bestimmung von I_x

Eine weitere Möglichkeit, das Trägheitsmoment I_x zu ermitteln, ist grafisch die Nutationsfrequenz über die w_F aufzutragen und dann die Steigung s zu bestimmen. Diese entspricht nach Gleichung (5) nämlich genau:

$$s = \frac{I_z}{I_x} \quad (26)$$

Mit dem bereits bestimmten I_z lässt sich dann I_x ermitteln.

$$I_x = \frac{I_z}{s} \quad (27)$$

$$\Delta I_x = I_x \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I_z}{I_z}\right)^2} \quad (28)$$

Daraus erhalten wir

$$I_x = (0,0046 \pm 0,0005) \text{kgm}^2 \quad (29)$$

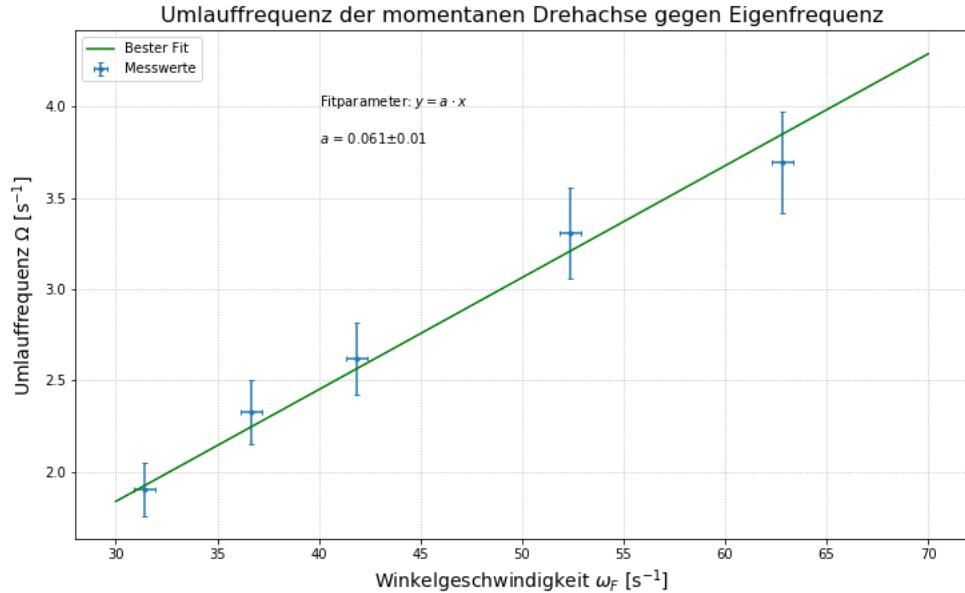


Abbildung 6: Umlauffrequenz gegen Eigenfrequenz

4 Zusammenfassung und Diskussion

Zusammenfassend haben wir uns in diesem Versuch mit den unterschiedlichen Bewegungsarten eines Kreisels beschäftigt. In einem Vorversuch haben wir uns mit diesen zuerst qualitativ vertraut gemacht. Hier haben wir für den kräftefreien Kreisel seine charakteristische Nutationsbewegung beobachtet und für den schweren Kreisel die Präzessionsbewegung. Dabei haben wir festgestellt dass die Präzessionsrichtung bei Verschiebung des Schwerpunktes in die obere Kugelmitte in Richtung der Eigendrehrichtung verläuft und bei Verschiebung in die untere Kugelmitte in die entgegengesetzte.

Im zweiten Schritt haben wir 12 Minuten lang alle 2min die Frequenz der Eigendrehung gemessen um damit die Dämpfungskonstante zu bestimmen $\delta = (6,97 \pm 0,10) \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$. Daraus konnten wir dann schnell die Halbwertszeit zu $T_{1/2} = (994 \pm 15)s$ berechnen.

Im dritten Versuchsschritt haben wir die Präzessionsdauer auf eine mögliche Winkelabhängigkeit untersucht und haben festgestellt das diese Bewegung unabhängig vom Winkel verläuft.

Daraufhin haben wir die Trägheitsmomente des Kreisels über unterschiedliche Verfahrensweisen bestimmt:

Zuerst haben wir das Trägheitsmoment entlang der z-Achse berechnet, indem wir die Anfangsfrequenz und die Präzessionszeiten gemessen haben. Mithilfe der

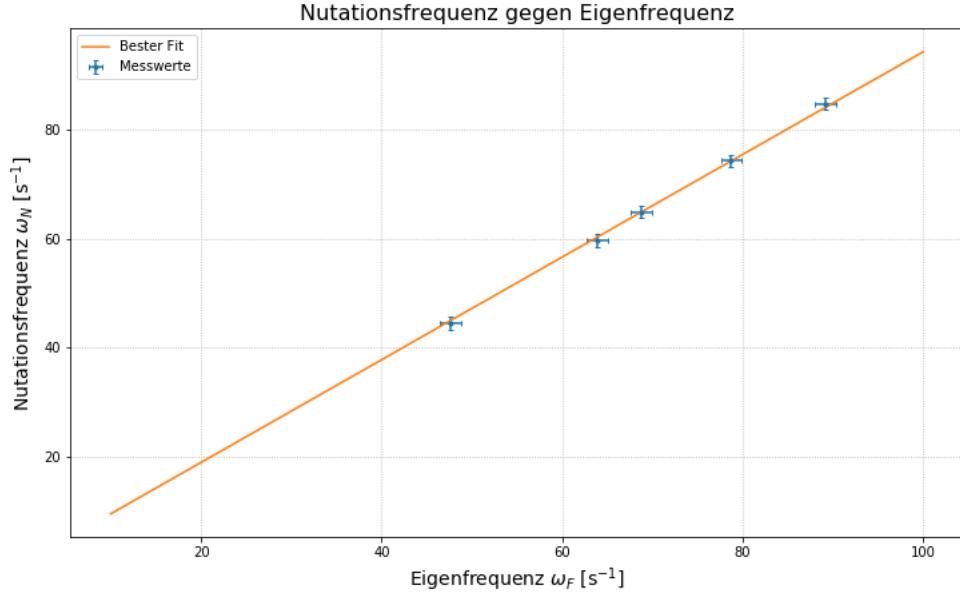


Abbildung 7: Nutationsfrequenz gegen Eigenfrequenz

bereits bestimmten Dämpfung haben wir die mittlere Frequenz bestimmt und damit die Präzessionsdauer gegen die mittlere Frequenz grafisch aufgetragen. Über die Steigung haben wir $I_z = (4,3 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2$ erhalten.

Zuletzt wollten wir das Trägheitsmoment entlang der x-Achse bestimmen. Dazu haben wir zuerst die Umlauffrequenz gegen die Eigenfrequenz grafisch aufgetragen und über die Steigung sind wir zu $I_x = (0,0046 \pm 0,0005) \text{kgm}^2$ gelangt. Eine zweite Methode um das Trägheitsmoment zu bestimmen war die Nutationsfrequenz gegen die Eigenfrequenz grafisch aufzutragen, was uns jedoch zum selben Ergebnis $I_x = (0,0046 \pm 0,0005) \text{kgm}^2$ wie mit der Methode davor geführt hat.

4.1 Diskussion

Anschliessend werde ich einige der ermittelten Ergebnisse diskutieren und einige Verbesserungsvorschläge liefern, mit denen die gemachten Fehler reduziert werden können und die Genauigkeit des Ergebnisses erhöht werden kann.

Für die σ -Abweichung wird die bekannte Formel

$$\frac{|Wert1 - Wert2|}{\sqrt{(Fehler1)^2 + (Fehler2)^2}} \quad (30)$$

verwendet.

Die Bestimmung der Dämpfungskonstante erfolgt über eine Messung der Frequenz alle 2min für 12min lang. Dabei ist der abgeschätzte relative Fehler der Dämpfungskonstante $1,4\%$ was relativ gering ist. Dies liegt vor allem daran, dass die Messwerte mit Python auf halblogarithmischem Papier gezeichnet werden konnten und die Interpolation der Ausgleichsgeraden sehr genau von der Python `curvefit()` Methode über die Least-Squares-Methode berechnet werden konnte. Der grafische Fehler war damit minimal. Um die Genauigkeit des Ergebnisses zu erhöhen müsste man die Messzeit von 12min erhöhen um damit mehr Messpunkte grafisch auftragen zu können. Dabei könnte man auch einen stärkeren Motor für die Anregung des Kreisels verwenden um diesen auf eine hohe Eigenfrequenz zu bringen, sodass dieser am Ende des Versuches nicht stillsteht oder durch andere Nebeneffekte bei einer schwachen Drehung beeinflusst wird. Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse wurde zu $I_z = (4,3 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2$ bestimmt. Um diesen Wert auf Richtigkeit zu prüfen werde ich zunächst das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel berechnen. Nach Angaben des Praktikumsskripts hatte der Kreisel eine Masse von $m = 4,164\text{kg}$ und einen Radius von $r = 5,08\text{cm}$. Für das Trägheitsmoment der Kugel gilt:

$$I_{zKug} = \frac{2}{5}mr^2 \quad (31)$$

$$= 0,004298314\text{kgm}^2 \quad (32)$$

Vergleicht man diesen mit dem im Versuch ermittelten Wert, so kann man feststellen, das beide unter Berücksichtigung der signifikanten Stellen exakt miteinander übereinstimmen. Beide weisen eine vernachlässigbar kleine σ -Abweichung voneinander auf. Dementsprechend hätte man im Nachhinein den Fehler bei unserer Messung kleiner abgeschätzt haben können. Die Abweichung ist nämlich so gering, da in den Fehler lediglich der Fehler bei der Steigungsmessung und der Längenfehler eine Rolle gespielt hat. Der Fehler der Steigungsmessung wird wie bereits beschrieben bereits durch Python minimal gehalten. Der Längenfehler könnte durch genauere Markierungen verringert werden.

Zum Schluss haben wir das Trägheitsmoment entlang der x-Achse ermittelt zu $I_x = (0,0046 \pm 0,0005)\text{kgm}^2$. Beide gewählten Methoden ergaben uns das gleiche Ergebnis. An dem Ergebnis können wir ebenfalls erkennen, dass dieses grösser als das Trägheitsmoment in z-Richtung ist, was mit unseren Überlegungen übereinstimmt. Das beide Grössen exakt (auch beim Fehler) miteinander übereinstimmen liegt wahrscheinlich daran, dass für beide Methoden ähnliche Grössen eine Rolle gespielt haben, wie beispielsweise die Eigenfrequenz w_F . Um hier unsere Ergebnisse zu verbessern, könnten wir anstatt den 5 gemessenen Frequenzen, 10 oder mehr Messen, sodass die Interpolation einer Geraden genauer erfolgen kann. Im Versuch hatten wir dies aufgrund Zeitmangels und Hinweis des Tutors nur für 5 Frequenzen durchführt.

Insgesamt hat mir der Versuch viel Spass gemacht und ich fand ihn sehr lehrreich, da wir die Inhalte die wir teilweise in der theoretischen Physik Vorlesung behandelt hatten, nun anschaulich beobachten und Anwenden konnten. Ebenfalls ist uns die Komplexität der genauen Beschreibung eines Kreisels durch explizite Formeln nocheinmal visuell klargeworden.

5 Quellen und Python-Code

- PAP 2.1 Anleitung der Universität Heidelberg

March 1, 2024

1 Auswertung Versuch 213 Kreisel

1.0.1 Yago Obispo Gerster | mn304

```
[1]: import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
%matplotlib inline
import numpy as np
from numpy import exp, sqrt, log, pi
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.stats import chi2
from scipy import odr
from scipy.integrate import quad
from scipy.signal import find_peaks

def ergebnis(name, G, sig_G, komma, einheit):
    print(name + ' =', np.round(G, komma), '+/-', np.round(sig_G, komma), einheit)

def fitparameter(name, G, sig_G, komma, einheit):
    return name + ' = ' + str(np.round(G, komma)) + '$\pm$' + str(np.
    round(sig_G, komma)) + einheit

def ergebnis_large(name, G, sig_G, komma, einheit):
    print(name + ' =', np.round(G, komma))
    print('+/-'.rjust(len(name) + 2), np.round(sig_G, komma), einheit)
```

Aufgabe 1:

[2]: #Nichts

Aufgabe 2:

```
[3]: # Messwerte
t = np.array([0, 2, 4, 6, 8, 10, 12]) * 60 # s
sig_t = np.ones(len(t)) * 3
f = np.array([680, 624.4, 574.9, 533.2, 491.9, 444.3, 409.9]) / 60 # s^-1
sig_f = 5 / 60

# Fit
```

```

def expo(t, a, delta):
    return a * exp(- t * delta)
popt_1, pcov_1 = curve_fit(expo, t, f, sigma = sig_t, p0 = [0, 0])
a = popt_1[0]
sig_a = sqrt(pcov_1[0, 0])
delta = popt_1[1]
sig_delta = sqrt(pcov_1[1, 1])
x = np.linspace(0, 12 * 60, 100)

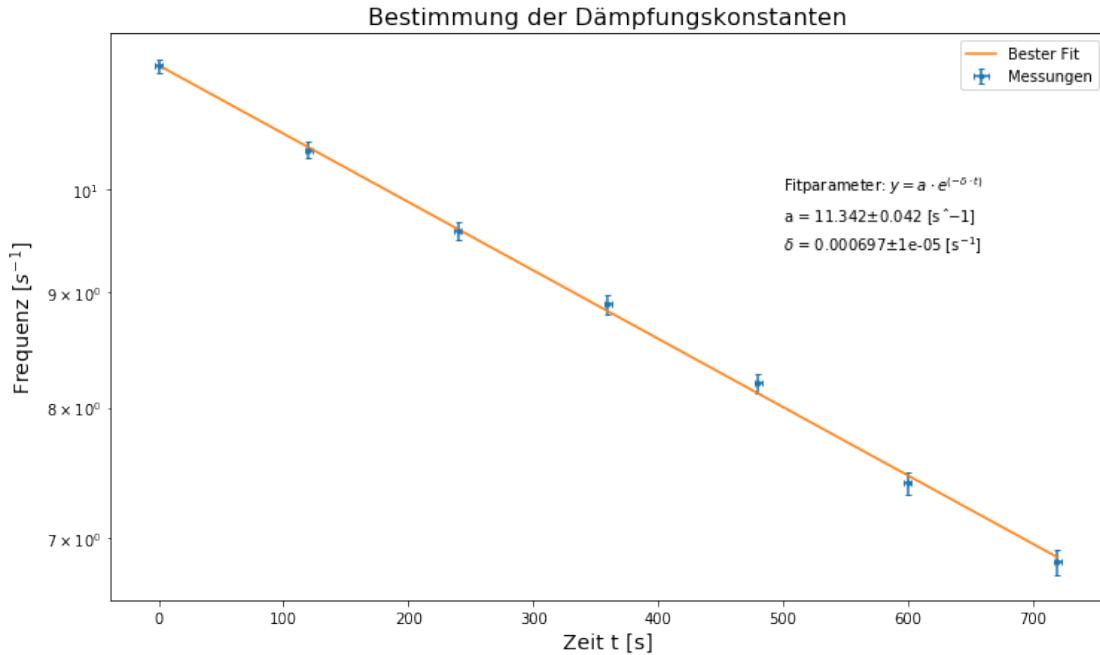
# Plot
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.errorbar(t, f, xerr = sig_t, yerr = sig_f, fmt = '.', capsize = 2, label = 'Messungen')
plt.plot(x, expo(x, *popt_1), label = 'Bester Fit')

# Fitparameter
plt.text(500, exp(2.3), 'Fitparameter:  $y = a \cdot e^{(-\delta \cdot t)}$ ')
plt.text(500, exp(2.27), fitparameter('a', a, sig_a, 3, '[s^{-1}]))')
plt.text(500, exp(2.24), fitparameter('delta', delta, sig_delta, 6, '[s^{-1}]))')
plt.title('Bestimmung der Dämpfungskonstanten', size = 16)
plt.xlabel('Zeit t [s]', size = 14)
plt.ylabel('Frequenz [s^{-1}]', size = 14)
plt.yscale('log')
plt.legend(loc = 'best')
plt.savefig('Dämpfung.png')

# Dämpfungskonstante
ergebnis('Dämpfungskonstante delta', delta, sig_delta, 7, '[s^{-1}])')
# Halbwertszeit
T_12 = log(2) / delta
sig_T_12 = log(2) * sig_delta / (delta ** 2)
ergebnis('Halbwertszeit T', T_12, sig_T_12, 0, '[s]')

```

Dämpfungskonstante delta = 0.000697 +/- 1.02e-05 [s^{-1}]
 Halbwertszeit T = 994.0 +/- 15.0 [s]



```
[4]: def literaturwert_Fehler(bezeichnung,X,X_err,X_lit,X_lit_err):
    print("Fehler für ",bezeichnung)
    print("Absolute Abweichung vom Literaturwert: ",np.abs(X-X_lit))
    print("Relativer Fehler: ",X_err/X *100)
    print("Sigma-Abweichung zum Literaturwert: ",np.abs(X-X_lit)/(np.
    ↪sqrt(X_err**2+X_lit_err**2)))
    print("\n")

def vergleich(bezeichnung,X,X_err,Y,Y_err):
    print("Fehler für ",bezeichnung)
    print("Absolute Abweichung voneinander: ",np.abs(X-Y))
    print("Sigma-Abweichung: ",np.abs(X-Y)/(np.sqrt(X_err**2+Y_err**2)))
    print("\n")

T1 = 1*60+9.48
T2 = 1*60+8.61
T3 = 1*60+9.9
fehler = 0.54
vergleich("T12",T1,fehler,T2,fehler)
vergleich("T13",T1,fehler,T3,fehler)
vergleich("T23",T2,fehler,T3,fehler)
```

Fehler für T12
 Absolute Abweichung voneinander: 0.8700000000000045
 Sigma-Abweichung: 1.1392275919116657

Fehler für T13
 Absolute Abweichung voneinander: 0.4200000000000017
 Sigma-Abweichung: 0.5499719409228725

Fehler für T23
 Absolute Abweichung voneinander: 1.2900000000000063
 Sigma-Abweichung: 1.6891995328345382

Aufgabe 3:

```
[5]: # Messwerte aus Aufgabenstellung 3b
f_3b = np.array([np.array([250, 350, 700, 500]), # 1 x 15 cm
np.array([250, 350, 500, 700]), # 1 x 20 cm
np.array([250, 350, 500, 700]), # 2 x 15 cm
np.array([250, 350, 500, 700])]) / 60 # 2 x 20 cm
w_3b = 2 * pi * f_3b # s^-1
sig_w_3b = 2 * pi * 2 / 60 * np.ones(len(w_3b))
T_P_3b = np.array([np.array([46, 64, 122, 91]),
np.array([35, 50, 71, 99]),
np.array([24, 33, 48, 65]),
np.array([18, 26, 36, 50])])
sig_T_P = 0.54
# Endwert w_E
def w_E(w_A, T):
    return w_A * exp(-delta * T)
def sig_w_E(w_A, sig_w_A, T, sig_T):
    return sqrt((sig_w_A * exp(-delta * T)) ** 2 + (w_A * T * sig_delta * exp(-
    delta * T)) ** 2 + (w_A * delta * sig_T * exp(- delta * T)) ** 2)
w_3b_E = w_E(w_3b, T_P_3b)
sig_w_3b_E = sig_w_E(w_3b, sig_w_3b, T_P_3b, sig_T_P)

# Mittleres w_F
w_F_mean = (w_3b + w_3b_E) / 2 #Arithmetischer Mittelwert für mittlere
#Eigenfrequenz
sig_w_F_mean = sqrt((sig_w_3b ** 2 + sig_w_3b_E)) / 2

# Ausgabe der Mittelwerte
print('Mittelwerte: w_F_mean')
for i in range(len(w_3b)):
    ergebnis_large('w_F_mean_' + str(i), w_F_mean[i], sig_w_F_mean[i], 4, '[
    [s^-1]\n')

# Fit
def line(x, a):
    return a * x
```

```

x = np.linspace(0, 80, 200)
popt_3b = np.array([])
pcov_3b = np.array([])
for i in range(len(w_3b)):
    popt_i, pcov_i = curve_fit(line, w_F_mean[i], T_P_3b[i], sigma_w_F_mean[i], p0 = [0])
    popt_3b = np.append(popt_3b, popt_i)
    pcov_3b = np.append(pcov_3b, pcov_i)

# Vorbereitung für Plot
name = np.array(['1, 15 cm', '1, 20 cm', '2, 15 cm', '2, 20 cm'])
col = np.array(['yellow', 'blue', 'red', 'black'])

# Plot
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.title('Präzessionsdauer gegen die Frequenz', size = 16)
for i in range(len(w_3b)):
    plt.errorbar(w_F_mean[i], T_P_3b[i], xerr = sig_w_F_mean[i], yerr = sig_T_P, fmt = '.', capsiz
    e = 2, label = name[i], color = col[i])
    plt.plot(x, line(x, popt_3b[i]), #label = 'Bester Fit: ' + name[i],
    color = col[i], linestyle = '--')
    ergebnis('Steigung ' + name[i] + ': s_0 = ' + str(i),
    popt_3b[i], sqrt(pcov_3b[i]), 3, '[s^2]')

plt.grid(linestyle = 'dotted')
plt.xlabel('Frequenz w [s^-1]', size = 14)
plt.ylabel('Präzessionsdauer T_P [s]', size = 14)
plt.legend(loc = 'best')
plt.savefig('PrazEig.png')

```

Mittelwerte: w_F_mean

w_F_mean_0 = [25.7669 35.8524 70.316 50.7509]
 +/- [0.2486 0.2479 0.2526 0.2483] [s^-1]

w_F_mean_1 = [25.8645 36.0243 51.0958 70.86]
 +/- [0.2493 0.2487 0.2487 0.2514] [s^-1]

w_F_mean_2 = [25.9628 36.2352 51.4985 71.6804]
 +/- [0.2501 0.2497 0.2494 0.2505] [s^-1]

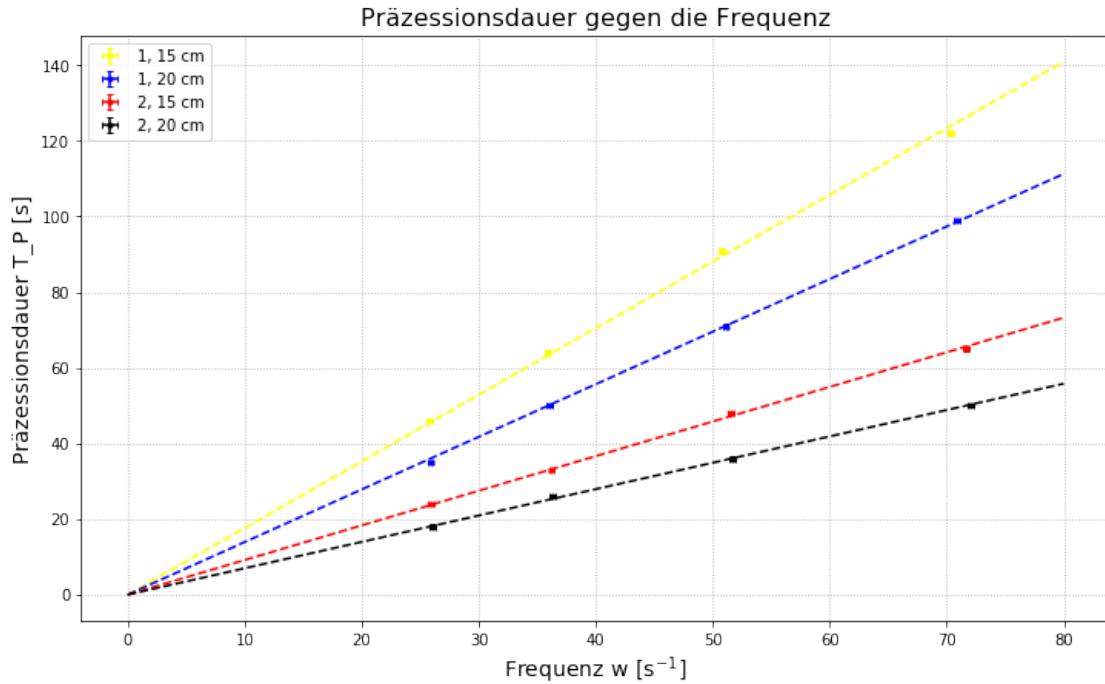
w_F_mean_3 = [26.0167 36.3228 51.7111 72.0485]
 +/- [0.2505 0.2501 0.2499 0.2505] [s^-1]

Steigung 1, 15 cm: s_0 = 1.762 +/- 0.016 [s^2]

Steigung 1, 20 cm: s_1 = 1.391 +/- 0.006 [s^2]

Steigung 2, 15 cm: s_2 = 0.915 +/- 0.006 [s^2]

Steigung 2, 20 cm: s_3 = 0.697 +/- 0.004 [s^2]



Aufgabe 4:

```
[6]: # Trägheitsmoment
m_g = 0.00985 # kg
g = 9.81 # m s^-2
l = np.array([0.15, 0.15, 0.2, 0.2]) # m
sig_l = 0.002
m = np.array([1, 1, 2, 2]) * m_g
I_z = m * g * l / (2 * pi) * popt_3b
sig_I_z = I_z * sqrt((sig_l / l) ** 2 + (sqrt(pcov_3b) / popt_3b) ** 2)
ergebnis('I_z', I_z, sig_I_z, 5, '[kg m^2]')
I_z_mean = np.mean(I_z)
sig_I_z_mean = 1 / sqrt(len(I_z) - 1) * np.std(I_z)
# Trägheitsmoment des Kreisels
ergebnis('I_z_mean', I_z_mean, sig_I_z_mean, 4, '[kg m^2]')
```

```
I_z = [0.00406 0.00321 0.00563 0.00429]
+/- [7.e-05 5.e-05 7.e-05 5.e-05] [kg m^2]
I_z_mean = 0.0043 +/- 0.0005 [kg m^2]
```

```
[7]: # Messwerte
f_4 = np.array([300, 350, 400, 500, 600]) / 60 # s^-1
mask = np.ones(len(f_4), dtype = bool) # Problematische Messungen entfernen
f_4 = f_4[mask, ...]
w_4 = 2 * pi * f_4
```

```

sig_w_4 = 2 * pi * 5 / 60
Omega_10 = np.array([33, 27, 24, 19, 17]) / 10 # s
#(Umlaufdauer, falsch benannt aber jetzt zu sp"at)
Omega_10 = Omega_10[mask, ...]
sig_Omega_10 = 0.36 / 10
Omega = 2 * pi / Omega_10
sig_Omega = sqrt(2 * pi * sig_Omega_10 / Omega_10 ** 2)

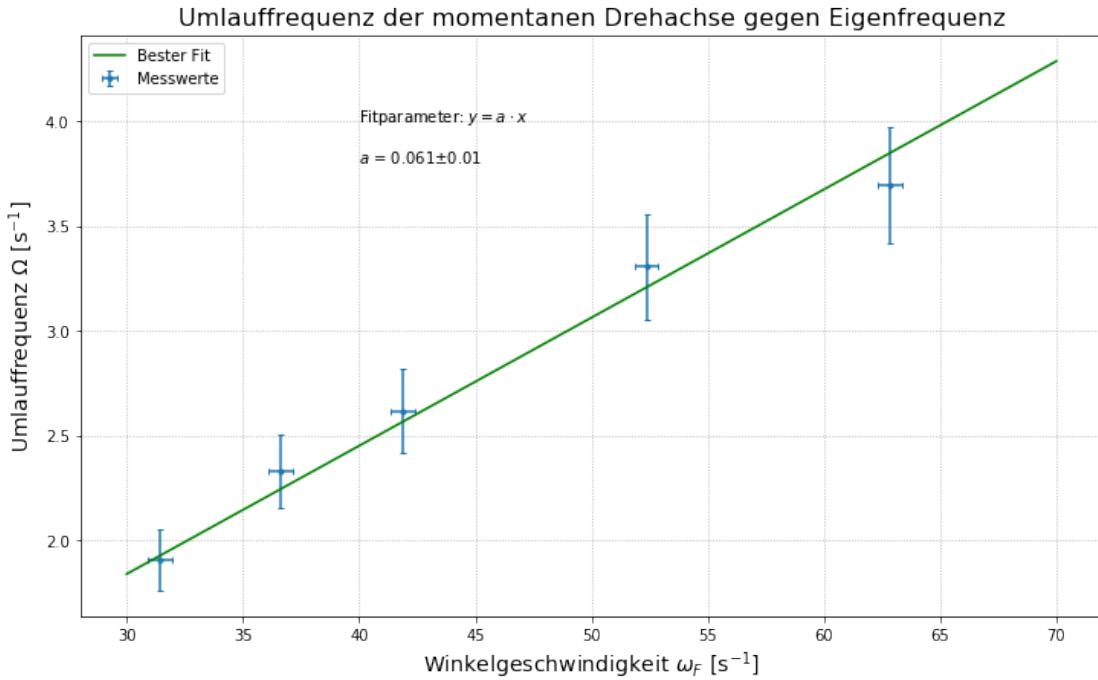
# Fit
popt_4b, pcov_4b = curve_fit(line, w_4, Omega, absolute_sigma = True, p0 = [0])
a_4 = popt_4b[0]
sig_a_4 = sqrt(pcov_4b[0, 0])
x = np.linspace(30, 70, 100)

# Plot
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.errorbar(w_4, Omega, xerr = sig_w_4, yerr = sig_Omega, fmt = '.', capsize = 2, label = 'Messwerte')
plt.plot(x, line(x, *popt_4b), label = 'Bester Fit', color="green")
plt.text(40, 4, 'Fitparameter: $y = a \cdot x$')
plt.text(40, 3.8, fitparameter('$a$', a_4, sig_a_4, 3, ''))
plt.title('Umlauffrequenz der momentanen Drehachse gegen Eigenfrequenz', size=16)
plt.grid(linestyle = 'dotted')
plt.xlabel('Winkelgeschwindigkeit $\omega_F$ [s$^{-1}$]', size = 14)
plt.ylabel('Umlauffrequenz $\Omega$ [s$^{-1}$]', size = 14)
plt.legend(loc = 'best')
plt.savefig('ww.png')

# Trägheitsmoment
I_x4 = I_z_mean * (1 + 1 / (1 / a_4 - 1))
sig_I_x4 = sqrt( (sig_I_z_mean * (1 + 1 / (1 / a_4 - 1))) ** 2 + (I_z_mean * sig_a_4 / ((1 / a_4 - 1) ** 2 * a_4 ** 2)) ** 2)
ergebnis('I_x4', I_x4, sig_I_x4, 5, '[kg m^2]')

```

I_x4 = 0.00458 +/- 0.00054 [kg m^2]



Aufgabe 5:

```
[8]: # Messwerte
f_F5 = np.array([852, 752, 610, 657, 455]) / 60 # s^-1
f_N5 = np.array([810, 710, 570, 620, 425]) / 60 # s^-1

sig_f_5 = 11 / 60

w_F5 = 2 * pi * f_F5

w_N5 = 2 * pi * f_N5

sig_w_5 = 2 * pi * sig_f_5

# Fit
popt_5, pcov_5 = curve_fit(line, w_F5, w_N5, absolute_sigma = True)

a_5 = popt_5[0]
sig_a_5 = sqrt(pcov_5[0, 0])
x = np.linspace(10, 100, 100)
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.title('Nutationsfrequenz gegen Eigenfrequenz', size = 16)
plt.xlabel('Eigenfrequenz $\omega_F$ [s$^{-1}$]', size = 14)
plt.ylabel('Nutationsfrequenz $\omega_N$ [s$^{-1}$]', size = 14)
plt.grid(linestyle = 'dotted')
```

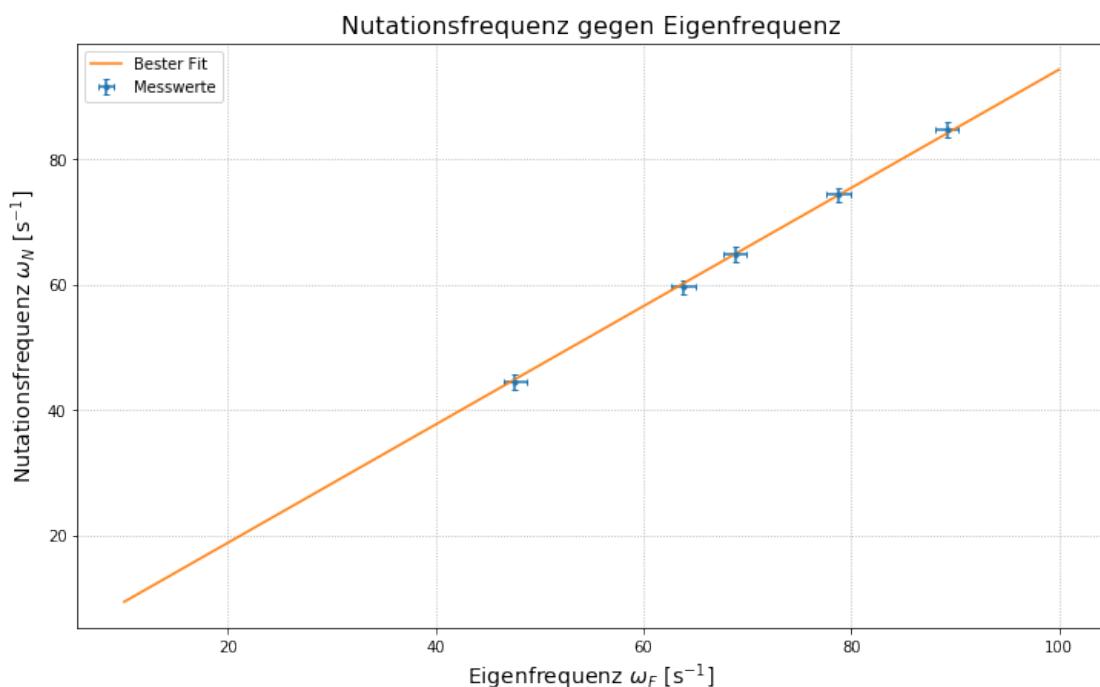
```

plt.errorbar(w_F5, w_N5, xerr = sig_w_5, yerr = sig_w_5, fmt = 'o', capsize = 2, u
              ↳label = 'Messwerte')
plt.plot(x, line(x, *popt_5), label = 'Bester Fit')
plt.legend(loc = 'best')
plt.savefig('letzt.png')
# Trägheitsmomente
I_x5 = I_z_mean / a_5
sig_I_x5 = sqrt( (sig_I_z_mean / a_5) ** 2 + (I_z_mean * sig_a_5 / a_5**2)**2)

ergebnis('I_x5', I_x5, sig_I_x5, 5, '')

```

$I_x5 = 0.00455 \pm 0.00053$



```

[9]: def literaturwert_Fehler(bezeichnung,X,X_err,X_lit,X_lit_err):
    print("Fehler für ",bezeichnung)
    print("Absolute Abweichung vom Literaturwert: ",np.abs(X-X_lit))
    print("Relativer Fehler: ",X_err/X *100)
    print("Sigma-Abweichung zum Literaturwert: ",np.abs(X-X_lit)/(np.
        ↳sqrt(X_err**2+X_lit_err**2)))
    print("\n")

def vergleich(bezeichnung,X,X_err,Y,Y_err):
    print("Fehler für ",bezeichnung)
    print("Absolute Abweichung voneinander: ",np.abs(X-Y))

```

```
print("Sigma-Abweichung: ",np.abs(X-Y)/(np.sqrt(X_err**2+Y_err**2)))
print("\n")
```