

Versuch 23: Strom- und Spannungsmessung mit einem Drehspulinstrument und Kompensator

Yago Obispo Gerster

1. März 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation	1
1.1 Ziel	1
1.2 Physikalische Grundlagen	2
1.2.1 Grundlegendes	2
1.2.2 Ideale vs. reale Spannungsquelle	2
1.2.3 Drehspulinstrument	3
1.2.4 Kompensator	3
1.2.5 Messbereichserweiterung	4
2 Kommentiertes Messprotokoll mit Durchführung	5
3 Auswertung	14
3.1 Eichung des Kompensators	14
3.2 Drehspulinstrument als Voltmeter	15
3.2.1 Fehler bei Erweiterung des Messbereiches	15
3.2.2 Spannungsteiler: Maschenregel erfüllt?	15
3.2.3 Spannungsteiler: Berechnung der Widerstände	17
3.3 Quellspannung vs. Klemmenspannung einer Batterie	18
3.4 Leistung mit Lastwiderstand maximieren	21
4 Zusammenfassung und Diskussion	21
4.0.1 Zusammenfassung	21
4.0.2 Diskussion der Ergebnisse	22

1 Einleitung und Motivation

1.1 Ziel

Der Ziel des Versuchs ist den Umgang mit Strom- und Spannungsmessgeräten - insbesondere Drehspulinstrumente und Kompensatoren - zu erlernen und die Möglichkeit, den Messbereich über Widerstände zu erweitern, verstanden zu

haben. Zusätzlich werden wir die Quellenspannung und den Innenwiderstand einer Batterie bestimmen.

1.2 Physikalische Grundlagen

1.2.1 Grundlegendes

Das Ohmsche Gesetz, was einen linearen Zusammenhang zwischen der Spannung U und der Stromstärke I über einen Widerstand R herstellt:

$$U = R \cdot I \quad (1)$$

zählt zusammen mit den Kirchhoffschen Gesetzen zu den wichtigsten Gesetzen der Elektronik. Die erste Kirchhoffsche Regel, die Knotenregel, besagt dass die Summe aller eingehenden Ströme in einem Knoten (im Betrag) gleich der Summe aller ausgehenden Ströme sein muss - aufgrund der Ladungserhaltung. Die zweite, die Maschenregel, besagt, dass die Summe der Quellenspannung immer genauso gross wie die Summe aller Teilspannungen einer Masche (geschlossene Schleife) ist. Siehe Abbildung 1. Beide können aus den Maxwell-Gleichungen

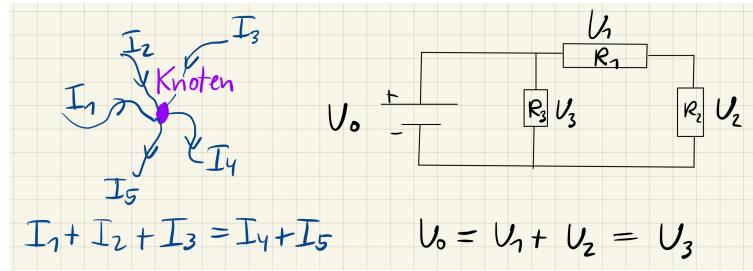


Abbildung 1: Kirchhoffsche Gesetze

hergeleitet werden.

1.2.2 Ideale vs. reale Spannungsquelle

Ideale Spannungsquellen sind diejenigen, die keinen inneren Widerstand besitzen. Die Klemmenspannung U_{Klemme} gleicht der Quellenspannung U_{Quelle} und ist somit unabhängig vom entnommenen Strom.

In der Praxis weisen die Spannungsquellen jedoch einen inneren Widerstand auf, wodurch die Klemmenspannung abhängig vom entnommenen Strom wird. Eine reale Spannungsquelle kann als Serienschaltung einer idealen Spannungsquelle und einem inneren Widerstand R_i modelliert werden (Abbildung 2). Es gilt nach der Maschenregel und dem Ohmschen Gesetz:

$$U_{Klemme} = U_{Quelle} - R_i \cdot I \quad (2)$$

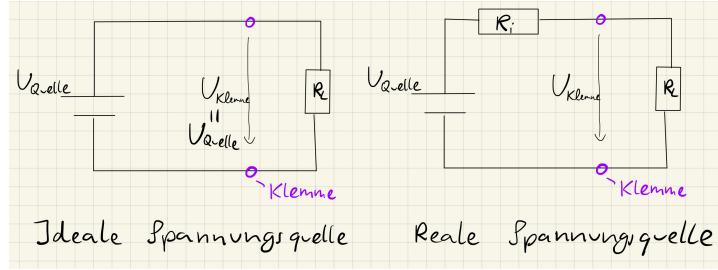


Abbildung 2: Spannungsquellen

Schliesst man an den Klemmen einen Lastwiderstand R_L als Belastung an, so ergibt sich:

$$R_L \cdot I = U_{Quelle} - R_i \cdot I \Leftrightarrow I = \frac{U_{Quelle}}{R_L + R_i} \quad (3)$$

$$\Rightarrow U_{Klemme} = R_L \cdot I = R_L \cdot \frac{U_{Quelle}}{R_L + R_i} \quad (4)$$

Trotz dem inneren Widerstand in der Praxis, kann man diesen für $R_i \ll R_L$ nach obiger Formel vernachlässigen.

1.2.3 Drehspulinstrument

Ein Drehspulinstrument ist ein Zeigermessgerät, bei welchem der Ausschlag proportional zum gemessenen Strom ist. Es funktioniert mit einer drehbaren Spule, welche sich im Feld eines Permanentmagneten befindet. Fließt ein Strom durch sie, dann wirkt aufgrund der Lorentzkraft ein Drehmoment, sodass die Spule soweit ausgelenkt wird, bis die Rückstellfeder das Drehmoment vollständig kompensiert. Der Ablenkwinkel α ist somit proportional zur Windungszahl n und zum Strom I : $\alpha \propto n \cdot I$.

Bei sehr kleinen Strömen müsste nach dieser Relation also die Windungszahl sehr gross sein und das rückwirkende Drehmoment der Feder klein, weshalb man in der Praxis für kleine Ströme oft statt einem Drehspulinstrument ein Amperemeter verwendet.

Wichtig bei der Strommessung ist, dass der Strom durch das Messgerät fließt (sonst keine Lorentzkraft), weshalb das Drehspulinstrument in Serie geschalten werden muss. Es existiert auch ein innerer Widerstand R_{iD} . Aus (3) wird also:

$$I = \frac{U_{Quelle}}{R_L + R_i + R_{iD}} \quad (5)$$

Der Innenwiderstand bei der Strommessung sollte möglichst gering sein.

1.2.4 Kompensator

Ein Kompensator ist ein Spannungsmessgerät, dessen Funktionsweise, wie der Name schon verrät, über Kompensation geht. Eine unbekannte Spannung U_x

wird an eine bekannte, einstellbare Spannung U_e gelegt. Zwischen beiden Spannungen befindet sich ein Strommessgerät. Die einstellbare Spannung wird über ein sogenanntes *Drehpotentiometer* solange verändert, bis zwischen den beiden Spannungen kein Strom mehr fließt (*Kompensation*). Anhand einer Skala am Drehpotentiometer kann die gesuchte Spannung bestimmt werden. Dazu muss der Kompensator am Anfang geeicht werden. Als U_x werden dafür 2,5V angelegt und das Drehpotentiometer auf 500 Skalenteile gedreht (insgesamt besitzt es 1000 Skalenteile). Mithilfe eines *Eichreglers* (einer Art zweiten Potentiometers) wird die Gegenspannung eingestellt sodass der Strom verschwindet.

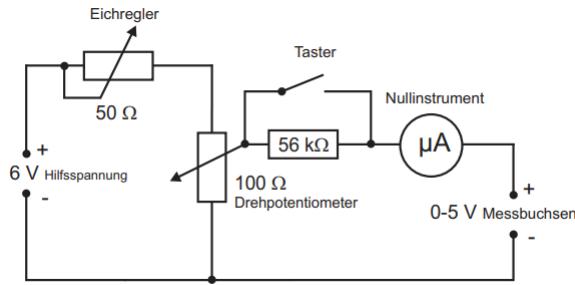


Abbildung 3: Kompensatoraufbau

Somit können jetzt bei einer Messung die Skalenteile in Spannungen übersetzt werden. Z.B. entsprechen 1000 Skalenteile $\rightarrow 5V$ und 250 Skalenteile $\rightarrow 1,25V$.

Spannungsmessgeräte werden immer parallel geschaltet. Auch diese weisen einen inneren Widerstand R_{iK} auf. Die Spannung aus Formel (4) wird zu:

$$U = R_L \frac{U_{Quelle}}{\frac{R_i R_L}{R_{iK}} + R_i + R_L} \quad (6)$$

Nach obiger Formel sollte der Innenwiderstand eines Spannungsmessgerätes also möglichst gross sein damit der erste Term im Nenner gegen Null geht. Es sollte gelten: $R_{iK} \gg R_i R_L$. Da beim Kompensator bei der Spannungsmessung kein Strom mehr fließt, besitzt dieser einen hohen Innenwiderstand und beeinflusst somit die Schaltung minimal.

1.2.5 Messbereichserweiterung

Es kann passieren, dass eine zu messende Grösse grösser als der mögliche Messbereich des Geräts ist. Also wenn z.B. der Ausschlag eines Drehpotentiometers maximal ist, obwohl er eigentlich noch deutlich grösser sein könnte oder die 1000 Skalenteile beim Kompensator erreicht werden, obwohl noch ein Strom fließt.

In solchen Fällen wird der Messbereich mit einem Widerstand R_p erweitert. Betrachten wir die beiden Fälle: Strom- und Spannungsmessung.

Der Messbereich eines Strommessgeräts solle um einen Faktor f erweitert werden. Der dafür nötige Widerstand muss parallel zum Gerät geschalten werden, damit ein Strom von $(f - 1)I_0$ über diesen Widerstand fliesst und ein Strom I über das Messgerät. Dabei ist I_0 der Maximalbereich und R_{iA} der Innenwiderstand des Geräts. Nach der Maschenregel:

$$R_{iA} \cdot I_0 = R_p(f - 1)I_0 \Rightarrow R_p = \frac{R_i}{f - 1} \quad (7)$$

Mit obiger Formel kann also die nötige Grösse des Zusatzwiderstandes bestimmt werden.

Wenn der Messbereich eines Spannungsmessgerätes um den Faktor f erweitert werden soll, dann muss R_p in Serie zum Spannungsmessgerät geschalten werden damit an ihm die Spannung $(f - 1)U_0$ anliegt und am Messgerät U_0 . U_0 sei dabei der Maximalbereich des Geräts und R_{iV} der Innenwiderstand. Nach der Knotenregel und Ohm muss der Zusatzwiderstand folgende Grösse haben:

$$\frac{U_0}{R_{iV}} = \frac{(f - 1)U_0}{R_p} \Rightarrow R_p = R_{iV}(f - 1) \quad (8)$$

2 Kommentiertes Messprotokoll mit Durchführung

Fehler

- Spannungsquelle Netzteil: $\pm 0,02\%$
- Kompensator:
 - Linearitätsfehler Kompensationsregler: $0,25\%$
 - Fehler der Skala: $0,5$ Skt
- Drehspulinstrument:
 - Innenwiderstand: $\pm 1\%$
 - Fehler Strommessung: 1%
 - Ablesefehler $\pm 0,25$ f mA

$$\Rightarrow \Delta I = \sqrt{(0,07 \cdot I)^2 + (0,25f)^2} \text{ mA}$$

- Dekadenwiderstand:

Bereich $0,1\Omega \rightarrow \pm 1\%$

$1\Omega \rightarrow \pm 0,5\%$

$10\Omega \rightarrow \pm 0,2\%$

Die Fehler aller relevanten Größen werden in der Auswertung berechnet und erläutert

Messprotokoll 06.09.2023 Betreuer:
Zum Versuch 23 09 - 12 Uhr Kristian Köhler

Strom und Spannungsmessung

Yag. Obispo Gerster

Juan Bueno Fontanilla

Messaufbau:

- 6 V Netzteil mit zusätzlicher Präzisionsspannungsquelle ($2,5V \pm 0,02\%$)
- Kompensator - Linearitätsfehler Kompensationsregler $0,25\%$
- Milliampermeter (Drehspulinstrument)
- Schiebewiderstand (100Ω) \rightarrow Fehler $R_i \pm 1\%$
- 3 Dekadenwiderstände
- Batterie
- Taster
- Steckblatt mit zwei Widerständen

Durchführung:

(1) Eichung des Kompensators

Zuerst wird die Hilfspannung von $6V \pm 0,02\%$, die dem Netzteil entnommen wird an die linken Buchsen angeschlossen.
(Pluspol: rotes Kabel, Minuspol: blaues Kabel)

Dann wird die Eichspannung von $2,5 \text{ V} \pm 0,02\%$ die ebenfalls aus dem Netzteil kommt an die beiden rechten Buchsen angelegt.

Der Kompensationsregler wird auf 500 Sh.t. eingestellt. Der Eichregler wird solange verstellt bis der gemessene Strom am Mikroamperemeter anzeigt, dass kein Strom mehr fließt.

Über den Taster kann der Ausschlag vergrößert werden, wodurch man den Eichregler genau einstellen kann.

Beachte: Amperemeterzeiger zeigt in der Ruheposition einen Strom von

$-10 \mu\text{A}$ an.

Man benötigt 671 Sh.t. am Eichregler damit die Spannung vollständig kompensiert wird.

(2) Drehspulinstrument als Voltmeter

2.1: Messung der Spannung einer Batterie

Unser Drehspulinstrument besitzt die Aufschrift $397 \Omega \pm 1\%$ die bedeutet, dass bei einer Spannung von

$$V = R \cdot I = (397 \Omega \cdot 10^{-2} A) \\ = 3,97 V$$

der Ausschlag des Zeigers maximal ist. Da wir vermuten, dass die Batterie eine höhere Spannung besitzt, muss der Messbereich angepasst werden.

Wir wollen, dass die maximal messbare Spannung bei $5 V$ liegt. Dazu wird ein Widerstand von

$$R_p = (f-1) R_i = \left(\frac{5 V}{3,97 V} - 1 \right) \cdot 397 \Omega$$

$$= 103 \Omega$$

in Serie zum Spannungsmessgerät geschaltet. Dies erreichen wir durch die 3 Dekadenwiderstände.

Der Gesamtwiderstand R_g ist also:

$$R_g = R_i + R_p = 397 \Omega + 103 \Omega = 500 \Omega$$

Ein Strom von $7,7\text{mA}$ wurde gemessen.

2.2: Messung bei einem Stromkreis
Folgender Stromkreis wird aufgebaut
Schaltplan:

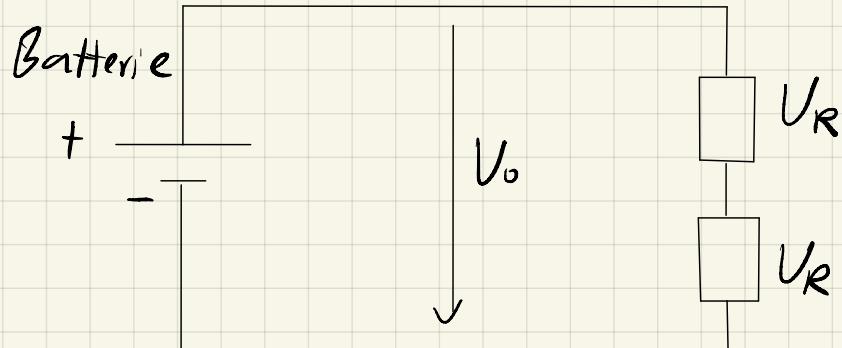


Abbildung 2.1: Schaltplan Aufgabe 2

Dazu verwenden wir das Steckbrett und die zwei Widerstände mit der Aufschrift D. Zwei Kabel an den Enden der Widerstände gehen zur Batterie und zwei an das Drehsplintinstrument mit den in Serie geschalteten Dekaderädern. Wir messen einen Strom von $7,8\text{mA}$ für beide Widerstände. Für die Spannungsmessung von nur einem Widerstand messen wir $2,75\text{mV}$. Das gleiche messen wir am zweiten Widerstand.

Dieselbe Spannungsmessung wird nun mit dem Kompensator wiederholt. Dafür entfernen wir die Dehadenwiderstände und das Drehsplitinstrument und befestigen die rechten Bürsenanschlüsse des Kompensators.

Für die Spannungsmessung an beiden Widerständen werden 872 Spt für die Spannungskompensation benötigt. Für die Messung an einem Widerstand wird für beide Widerstände 407 Spt jeweils für die Kompensation verwendet.

(3) Strom- und Spannungsmessung einer Batterie zur Bestimmung des Innenwiderstands

Der Messbereich des Drehspulinstrumentes soll auf 200 mA erweitert werden. D.h.

$$f = \frac{200 \text{ mA}}{10 \text{ mA}} = 20$$
$$\Rightarrow R_p = \frac{R_i}{f-1} = \frac{39752}{19} = 20,9 \Omega$$

Ein Widerstand von $20,9 \Omega$ wird parallel zum Strommessergerät geschaltet. An die Batterie wird ein Schieberwiderstand als Verbraucher angeschlossen.

Mit dem Kompensator wird die Spannung gemessen und mit dem Drehspulinstrument der Strom.

Ein Taster wird so in die Schaltung eingebaut, sodass nur Strom fließt wenn dieser gedrückt wurde.

In Tabelle 2.2 können die gemessenen Strom- und Spannungswerte für unterschiedliche Verbraucherwiderstände

abgelesen werden.

Anzahl	Strom I	Kompensator
1	255 mA	772 Sh
2	1,65 mA	769 Sh
3	2 mA	763 Sh
4	8 mA	660 Sh
5	5,05 mA	702 Sh.
6	3,7 mA	733 Sh
7	2,3 mA	747 Sh
8	6,6 mA	680 Sh
9	4 mA	718 Sh

Tabelle 2.2 : Spannungs- und Strommessung
einer Batterie mit
Verbraucher

6.9

✓✓

3 Auswertung

3.1 Eichung des Kompensators

Der Kompensator wurde nach der Beschreibung in Abschnitt 1 des Versuchsprotokolls erfolgreich mit einer Hilfsspannung von 6V und einer Eichspannung von 2,5V geeicht. Dazu wurde, wie beschrieben, der Taster verwendet, um den Ausschlag des Strommessgerätes zu vergrössern. Das funktioniert daher, dass im Kompensator ohne das Drücken des Tasters, er einen Widerstand von $56k\Omega$ annimmt. Beim Drücken wird dieser Widerstand jedoch überbrückt und deshalb fliesst ein grösserer Strom bzw. der Ausschlag am Strommessgerät ist grösser. Der Amperemeterzeiger des Kompensators war weiterhin etwas beschädigt, weshalb dieser in der Ruheposition einen Strom von $-10\mu A$ anzeigt. Bei der Kompensation haben wir also nicht geprüft, wann er Null angezeigt hat, sondern den genannten Wert. Ausserdem konnte man durch betätigen des Tasters anhand der Stärke des Ausschlags dies ebenfalls erkennen.

Um in den nächsten Schritten mit dem Kompensator Spannungen U_x mit der Referenzspannung U_e messen zu können muss also die Anzahl an nötigen Skalenteile am Drehpotentiometer k , damit kein Strom mehr fliesst, abgelesen werden und in folgende Formel eingesetzt werden:

$$U_x = \frac{k}{500Skt} \cdot U_e \quad (9)$$

Nach der Versuchsanleitung hat die Referenzspannung einen Fehler von 0,02% und der Kompensator einen Linearitätsfehler von 0,25%. Weiterhin muss ein Ablesefehler von 0,5Skt berücksichtigt werden. Für die Fehler ΔU_e , Δk gilt also:

$$\Delta U_e = U_e \cdot 0,0002 \quad (10)$$

$$\Delta k = k \cdot 0,0025 + 0,5Skt \quad (11)$$

Insgesamt erhalten wir nach dem Gaußschen Fortpflanzungsgesetz einen Fehler von:

$$\Delta U_x = \sqrt{\left(\frac{\partial U_x}{\partial k} \Delta k\right)^2 + \left(\frac{\partial U_x}{\partial U_e} \Delta U_e\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{U_e}{500Skt} \Delta k\right)^2 + \left(\frac{k}{500Skt} \Delta U_e\right)^2} \quad (12)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2,5V}{500Skt} (k \cdot 0,0025 + 0,5Skt)\right)^2 + \left(\frac{k}{500Skt} 2,5V \cdot 0,0002\right)^2} \quad (13)$$

$$= \sqrt{\left(1,25 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{k}{Skt} + 2,5 \cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(\frac{k}{Skt} \cdot 10^{-6}\right)^2} V \quad (14)$$

3.2 Drehspulinstrument als Voltmeter

3.2.1 Fehler bei Erweiterung des Messbereiches

Im zweiten Teil des Versuchs wurde das Drehspulinstrument zur Messung von Spannung verwendet. Das Drehspulinstrument selber misst nur einen Strom. Da der Innenwiderstand jedoch bekannt ist, kann über das Ohmsche Gesetz auch die Spannung bestimmt werden.

Die genaue Beschreibung der Messbereichserweiterung befindet sich, inklusive Rechnung in Abschnitt 2.2.1 des Messprotokolls. Das Ergebnis ist, dass ein Widerstand von 103Ω in Serie geschaltet werden muss, sodass der Gesamtwiderstand von Spannungsquelle und Extra-Widerstand bei 500Ω liegt.

Zunächst soll der Fehler des Gesamtwiderstandes abgeschätzt werden. Der Innenwiderstand $R_i = 397\Omega$ am Drehspulinstrument hat einen Fehler von $\pm 1\%$. D.h.:

$$\sigma_I = 397\Omega \cdot 0,01 = 4\Omega \quad (15)$$

Der Extrawiderstand zur Messbereichserweiterung $R_p = 103\Omega$ wird über die drei Dekadenwiderstände eingestellt. Das Gerät weist für die unterschiedlichen Regler (von $0,1\Omega$, 1Ω und 10Ω) andere Fehler auf:

$$\text{Bereich } 0,1\Omega \rightarrow \pm 1\% \quad (16)$$

$$\text{Bereich } 1\Omega \rightarrow \pm 0,5\% \quad (17)$$

$$\text{Bereich } 10\Omega \rightarrow \pm 0,2\% \quad (18)$$

Der Fehler von R_p entspricht also:

$$\sigma_{R_p} = \sqrt{(100\Omega \times 0,002)^2 + (3\Omega \times 0,005)^2} = 0,20\Omega \quad (19)$$

Der Fehler des Gesamtwiderstandes ergibt:

$$\sigma_{R_{Gesamt}} = \sqrt{(\sigma_I)^2 + (\sigma_{R_p})^2} = 4\Omega \quad (20)$$

Das führt letztendlich zu einem Gesamtwiderstand von:

$$R_{Gesamt} = (500 \pm 4)\Omega \quad (21)$$

Mithilfe dieses Aufbaus können nun Spannungen bis zu $5V$ gemessen werden.

3.2.2 Spannungsteiler: Maschenregel erfüllt?

Im Anschluss wird ein Spannungsteiler wie in Abschnitt 2.2.2 des Messprotokolls beschrieben, aufgebaut. Dabei wurden zwei Widerstände mit dem Buchstaben D verwendet.

Die Klemmspannung der Batterie U_0 und die Spannung, die an den beiden Widerständen abfällt $U_A = U_B$ soll anschliessend einmal mit dem Drehspulinstrument bestimmt werden und einmal mit dem Kompensator. Dabei wird

geprüft, ob die Maschenregel jeweils erfüllt wird.

Für die Klemmspannung mit dem Drehspulinstrument messen wir einen Strom von $7,8mA$. Nach dem Ohmschen Gesetz:

$$U_0 = 500\Omega \cdot 7,8 \times 10^{-3} A = 3,9V \quad (22)$$

Der Fehler von U_0 setzt sich nach dem Gaußschen Fortpflanzungsgesetz aus dem Fehler des Innenwiderstandes und dem Fehler des Drehspulinstrumentes zusammen. Der Fehler des Innenwiderstandes wurde in Formel (20) ermittelt. Der Fehler des Drehspulinstrumentes besteht aus dem Fehler des Geräts selbst von 1% und zum anderen aus einem Ablesefehler von $0,25mA = 0,25 \cdot \frac{5}{3,97}mA = 0,31mA$. D.h. insgesamt gilt: $\Delta I = \sqrt{(0,01 \cdot I)^2 + (0,25mA)^2}$. Damit gilt für den Fehler von U_0 :

$$\sigma_{U_0} = \sqrt{(I\Delta R)^2 + (R\Delta I)^2} \quad (23)$$

$$= \sqrt{(7,8 \times 10^{-3} A \cdot 3,975\Omega)^2 + (500\Omega \cdot \sqrt{(0,01 \cdot 7,8 \cdot 10^{-3} A)^2 + (0,25 \cdot \frac{5}{3,97} \cdot 10^{-3} A)^2})^2} \quad (24)$$

$$= 0,17V \quad (25)$$

Für die Spannungsmessung an den einzelnen Widerständen messen wir $2,15mA$ für beide Widerstände. Die abfallende Spannung ist jeweils:

$$U_A = U_B = 500\Omega \cdot 2,15 \times 10^{-3} A = 1,075V \quad (26)$$

Mit einem Fehler von:

$$\sigma_{U_A} = \sigma_{U_B} = \sqrt{(I\Delta R)^2 + (R\Delta I)^2} \quad (27)$$

$$= \sqrt{(2,15 \cdot 10^{-3} A \cdot 3,975\Omega)^2 + (500\Omega \cdot \sqrt{(0,01 \cdot 2,15 \cdot 10^{-3} A)^2 + (0,25 \cdot \frac{5}{3,97} \cdot 10^{-3} A)^2})^2} \quad (28)$$

$$= 0,16V \quad (29)$$

Nach der Maschenregel muss die Summe aller Teilspannungen an den Widerständen gleich der Klemmspannung sein. D.h. es müsste gelten:

$$U_0 = U_A + U_B = 2 \cdot U_A \quad (30)$$

$$3,9V = 2,15V \not\approx \quad (31)$$

Letztere Gleichung stellt einen Widerspruch da. Selbst unter Berücksichtigung der Fehler kann die Gleichung nicht erfüllt werden. Der Eindruck wird erweckt, dass die Maschenregel also bei der Messung mit einem Drehspulinstrument nicht erfüllt ist.

Dieselbe Messung wird am Kompensator wiederholt. Für die Klemmspannung der Batterie erhalten wir $812Skt$ für die Kompensation, d.h.:

$$U_0 = \frac{812Skt}{500Skt} \cdot 2,5V = 4,06V \quad (32)$$

Mit einem Fehler nach Formel (14):

$$\sigma_{U_0} = 0,013V \quad (33)$$

Für den Spannungsabfall an jeweils einem Widerstand benötigen wir $407Skt$.

$$U_A = U_B = \frac{407Skt}{500Skt} \cdot 2,5V = 2,035V \quad (34)$$

$$\sigma_{U_A} = \sigma_{U_B} = 0,008V \quad (35)$$

Überprüfen der Maschenregel ergibt:

$$U_0 = U_A + U_B \quad (36)$$

$$4,06V \approx 2 \cdot 2,035V = 4,07V \quad (37)$$

Die Maschenregel scheint also bei der Messung mit einem Kompensator (unter Berücksichtigung der Messfehler) erfüllt zu sein.

Auf diesen überraschenden Befund werde ich in der Diskussion genauer eingehen.

3.2.3 Spannungsteiler: Berechnung der Widerstände

Der Wert der einzelnen Widerstände (D), R_A und R_B sollen bestimmt werden. Wir wissen das beide Widerstände gleich gross sind, haben bereits die Spannung die jeweils an einem Widerstand abfällt mit dem Drehspulinstrument bestimmt $U_A = U_B = 1,075V$ und der Strom der durch das Drehspulinstrument fliesst $I_D = 2,15mA$. Anhand der Kirchhoffschen Gesetze wird nun die Grösse der Widerstände hergeleitet:

Nach dem Ohmschen Gesetz kann man U_A über:

$$U_A = R_A \cdot I_A \quad (38)$$

berechnen. Nach der Knotenregel teilt sich der Gesamtstrom I_0 vor dem ersten Widerstand auf die beiden Teilströme I_A durch den ersten Widerstand und I_D durch das Drehspulinstrument auf. D.h.:

$$U_A = R_A \cdot (I_0 - I_D) \quad (39)$$

I_0 kann nach Ohm als $I_0 = \frac{U_B}{R_B}$ geschrieben werden. Und da wir wissen das $R_B = R_A$ und nach Maschenregel $U_A + U_B = U_0$ folgt:

$$U_A = R_A \cdot \left(\frac{U_0 - U_A}{R_A} - I_D \right) \quad (40)$$

$$= U_0 - U_A - R_A I_D \quad (41)$$

$$\Leftrightarrow R_A = \frac{U_0 - 2U_A}{I_D} \quad (42)$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$R_A = R_B = 813,95\Omega \quad (43)$$

Der Fehler der Widerstände soll hier gemäss Praktikumsanleitung vernachlässigt werden.

3.3 Quellspannung vs. Klemmenspannung einer Batterie

Der Messbereich des Drehspulinstrumentes soll auf $200mA$ erweitert werden. Die Rechnung in Abschnitt 2.3 des Messprotokolls liefert einen nötigen Widerstand von $R_p = 20,9\Omega$ der parallel zum Strommessgerät geschalten werden muss. Für den Widerstand R_p muss ein Fehler von

$$\sigma_{R_p} = \sqrt{(2 \cdot 10\Omega \cdot 0,002)^2 + (9 \cdot 0,1\Omega \cdot 0,01)^2} \quad (44)$$

$$= 0,04\Omega \quad (45)$$

berücksichtigt werden. Dieser entsteht analog zu Gleichung (19) durch den Fehler der Dekadenwiderstände.

An die Batterie wird ein Schiebewiderstand als Verbraucher angeschlossen, welcher den Strom zwischen 0 und $200mA$ anpasst. Die Klemmenspannung wird mithilfe des Kompensators für unterschiedliche Belastungen aufgenommen. Der Strom wird mit dem Drehspulinstrument gemessen. Wir erhalten die Werte aus Abschnitt 2.3 (Messprotokoll), welche in Tabelle 1 mit dem zugehörigen Fehler notiert wurden. Für die Umrechnung von Skalenteile in Volt, wurde Formel (9) verwendet. Für den Fehler der Spannung wird der in (14) hergeleitete Fehler für die Messung beim Kompensator verwendet. Für den Fehler des Stroms mit dem Drehspulinstrument wird wieder $\Delta I = \sqrt{(0,01 \cdot I)^2 + (0,25 \cdot 20mA)^2}$ verwendet.

Um den Innenwiderstand R_i und die Quellspannung U_q der Batterie zu bestim-

Messung	Spannung U in [V]	Fehler $\Delta U[V]$	Strom I in [mA]	Fehler $\Delta I[mA]$
1	3,86	0,012	31	5,0
2	3,845	0,012	33	5,0
3	3,815	0,012	40	5,0
4	3,3	0,011	160	5,2
5	3,51	0,011	101	5,1
6	3,665	0,012	62	5,0
7	3,735	0,012	46	5,0
8	3,4	0,011	132	5,2
9	3,59	0,011	80	5,1

Tabelle 1: Klemmenspannung und Strom

men, werden die Werte aus Tabelle 1 grafisch in Abbildung 4 dargestellt und eine Ausgleichsgerade wird eingezeichnet. Wie nach Gleichung (2) ($U_{Klemme} = U_{Quelle} - R_i \cdot I$) erwartet, sollte ein linear abfallender Zusammenhang zwischen Spannung und Strom herschen. Der Innenwiderstand entspricht also genau der Steigung der Ausgleichsgerade, da $\frac{\partial U_{Klemme}}{\partial I} = -R_i$. Im Diagramm wird ein gut erkennbares Steigungsdreieck gewählt. Wir erhalten für den Betrag der Spannung:

$$R_i = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{3,915V - 3,25V}{158 \cdot 10^{-3}A} = 4,21\Omega \quad (46)$$

Weiterhin wurde eine Fehlergerade eingezeichnet, dessen Steigung:

$$\frac{0,775V}{156 \cdot 10^{-3}A} = 4,97\Omega \quad (47)$$

beträgt. Der Fehler des Innenwiderstands ergibt sich aus der Differenz beider Steigungen, nämlich $0,76\Omega$. Es gilt also für den Innenwiderstand der Batterie:

$$R_i = (4,2 \pm 0,8)\Omega \quad (48)$$

Die Quellspannung der Batterie entspricht nach (??) bei $I = 0A$ der Klemmenspannung. Anhand des Diagramms kann die Klemmenspannung bei $I = 0A$ anhand des y-Achsen-Schnittpunktes der Ausgleichsgerade abgelesen werden: $U_q = 3,96V$. Der Fehler der Quellspannung entspricht der Differenz des y-Achsen-Schnittpunktes der Fehlergeraden mit dem der Ausgleichsgeraden: $\Delta U_q = 4,025V - 3,96V = 0,065V$. Insgesamt also:

$$U_{Quelle} = (3,96 \pm 0,07)V \quad (49)$$

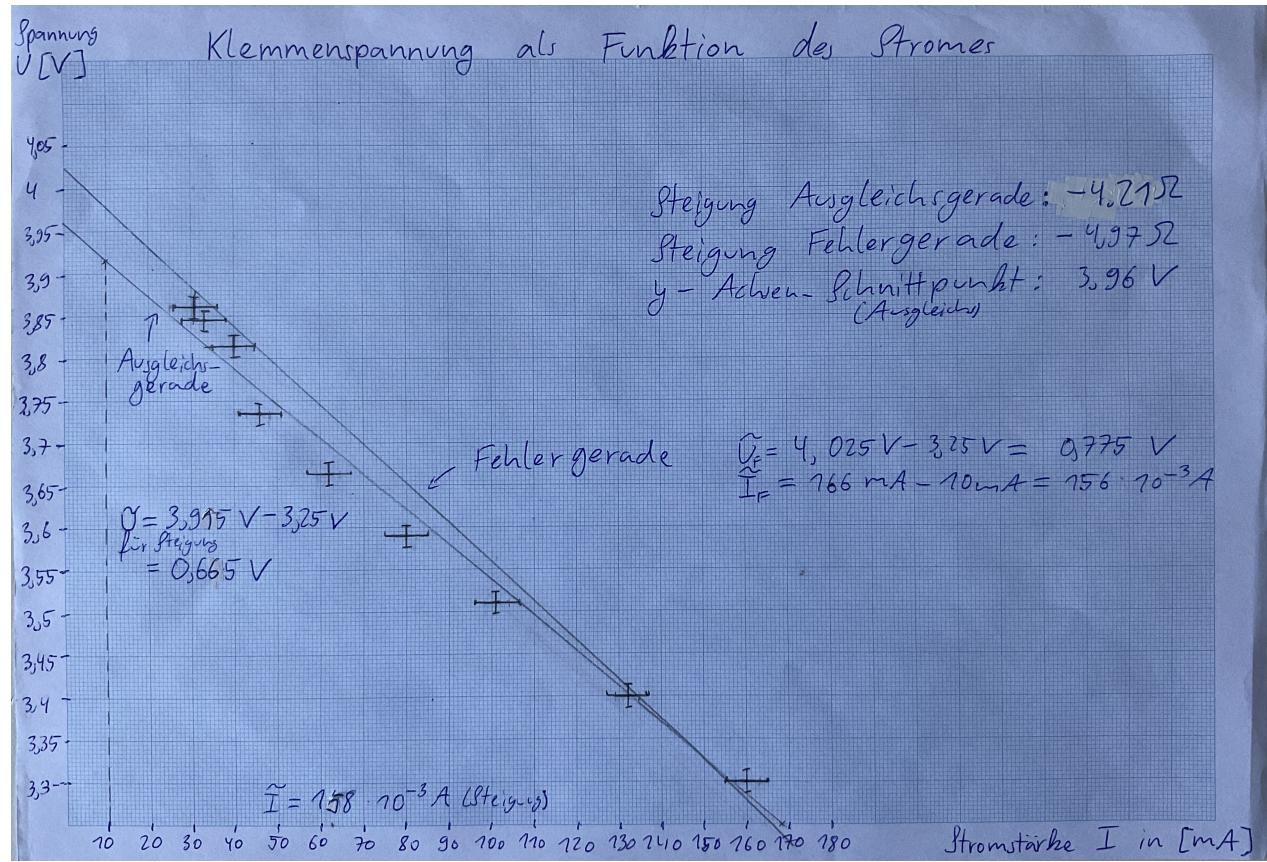


Abbildung 4: Klemmenspannung einer Batterie als Funktion des Stroms

3.4 Leistung mit Lastwiderstand maximieren

Zuletzt soll noch untersucht werden, für welchen Lastwiderstand R_L die Leistung $P(R_L)$ maximal wird.

Nach Formel (3) und (4) aus den Grundlagen gilt:

$$I = \frac{U_{Quelle}}{R_L + R_i} \quad (50)$$

$$U_{Klemme} = R_L \cdot \frac{U_{Quelle}}{R_L + R_i} \quad (51)$$

Daraus ergibt sich für die Leistung:

$$P = U_{Klemme} \cdot I = R_L \cdot \frac{U_{Quelle}^2}{(R_L + R_i)^2} \quad (52)$$

Nun haben wir unseren Ausdruck $P(R_L)$ der maximiert werden soll. Die Ableitung nach dem Lastwiderstand wird gleich Null gesetzt:

$$P'(R_L) = -2U_{Quelle}^2 \frac{R_L}{(R_i + R_L)^3} + \frac{U_{Quelle}^2}{(R_i + R_L)^2} = 0 \quad (53)$$

$$2 \frac{R_L}{R_i + R_L} = 1 \quad (54)$$

$$R_L = \frac{R_i + R_L}{2} \quad (55)$$

$$R_L = R_i \quad (56)$$

Da die Ableitung in Formel (53) streng monoton fallend ist, muss an der ermittelten Stelle für R_L ein Maximum vorliegen. Die Leistung ist also genau dann maximal, wenn der Lastwiderstand dem inneren Widerstand der Spannungsquelle entspricht!

Für die Klemmenspannung gilt dann nach (52):

$$U_{Klemme} = R_i \cdot \frac{U_{Quelle}}{R_i + R_i} = \frac{U_{Quelle}}{2} \quad (57)$$

Bei diesem Versuch also $U_{Klemme} = \frac{3,96V}{2} = 1,98V$

4 Zusammenfassung und Diskussion

4.0.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch haben wir den Umgang mit Strom- und Spannungsmessgeräten erlernt.

Dabei haben wir uns zuerst mit einem Kompensator beschäftigt, diesen mit einer Referenzspannung von 2,5V auf 500Skt geeicht und seinen Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl an Skalenteilen bestimmt.

Anschliessend haben wir ein Drehspulinstrument als Spannungsmessgerät eingesetzt, wofür wir zuerst den Messbereich von $3,97V$ auf $5V$ erweitert haben. Dafür wurde ein Zusatzwiderstand von $(103 \pm 0,20)\Omega$ in Serie geschaltet. Damit haben wir an einem Spannungsteiler die Spannung an 2 in Reihe geschalteten Widerständen gemessen und haben festgestellt, dass eine Messung der Spannung mit dem Kompensator zu anderen Ergebnissen führte. Insbesondere schien die Maschenregel beim Drehspulinstrument nicht zu gelten, beim Kompensator jedoch schon.

Für den letzten Teil des Versuches haben wir den Messbereich des Drehspulinstrumentes auf $200mA$ durch einen parallel geschalteten Widerstand mit $20,90 \pm 0,04\Omega$ erweitert. Die Klemmspannung einer Batterie wurde in Abhängigkeit des Stroms mit einem Kompensator und einem Drehspulinstrument gemessen und die Werte in einem Diagramm aufgetragen, was einen linear fallenden Zusammenhang lieferte. Anhand des Diagramms wurde der Innenwiderstand $R_i = 4,21 \pm 0,76\Omega$ und die Quellspannung der Batterie $U_q = 3,960 \pm 0,065V$ bestimmt. Zuletzt haben wir rechnerisch herausgefunden, dass die Spannung der Batterie maximal ist, wenn der Lastwiderstand genau dem Innenwiderstand entspricht. Für unsere Batterie war die dazugehörige Spannung $U_{Klemme} = 1,98V$.

4.0.2 Diskussion der Ergebnisse

Noch haben wir nicht geklärt, warum die Messung der Spannung mit dem Drehspulinstrument beim Spannungsteiler unterschiedliche Werte zur Messung mit einem Kompensator liefert hat. Insbesondere steht auch noch die Frage offen, ob dies nicht einen Widerspruch zur Maschenregel (2. Kirchhoffsche Gesetz) darstellt.

Die Abweichung von der nach der Maschenregel erwartete Spannung beträgt beim Drehspulinstrument:

$$\frac{|U_0 - 2 \cdot U_A|}{\sqrt{(\sigma_{U_0})^2 + (2\sigma_{U_A})^2}} = \frac{3,9V - 2 \cdot 1,075V}{\sqrt{(0,17V)^2 + (2 \cdot 0,16V)^2}} = 4,8 \quad (58)$$

Die Abweichung vom erwarteten Wert nach der Maschenregel beträgt also beim Drehspulinstrument $4,8\sigma$ -Abweichungen. Für den Kompensator:

$$\frac{4,06V - 2 \cdot 2,035V}{\sqrt{(0,013V)^2 + (2 \cdot 0,008V)^2}} = 0,5 \quad (59)$$

Die Abweichung vom erwarteten Wert nach der Maschenregel beim Kompensator beträgt also nur $0,5\sigma$ -Abweichungen. Dies ist umso überraschender wenn man sich klar macht, dass wir für den Kompensator einen viel kleineren Fehler als für das Drehspulinstrument berechnet haben, was nach der Formel für die σ -Abweichung eigentlich einen grösseren Wert liefert.

Wir haben also festgestellt, dass sich der Kompensator viel besser für die Spannungsmessung eignet.

Der Grund dafür ist folgender: Wie in Abschnitt 1.2.3 und 1.2.4 der Grundlagen bereits erwähnt, wird die Spannung immer in Parallelschaltung gemessen,

weshalb der Innere Widerstand des Spannungsmessgeräts möglichst gross sein muss, damit dieser die Schaltung fast nicht beeinflusst. Bei Strommessgeräten, die immer in Serie geschaltet werden müssen ist dies andersherum. Der Innenwiderstand sollte möglichst klein sein um die Schaltung so wenig wie möglich zu beeinflussen.

Das Drehspulinstrument ist nunmal ein Strommessgerät, dass wir in diesem Fall als Spannungsmessgerät verwendet haben. Jedoch hat es einen sehr geringen Innenwiderstand, weshalb sehr viel Strom durch unser Spannungsmessgerät fliesst und die Messung verfälscht wird.

Der Kompensator hingegen ist a priori als Spannungsmessgerät gedacht, weshalb sein Innenwiderstand (der für den Nullstrom nötig ist) enorm ist.

Auf der Batterie, anhand der wir im letzten Versuchsteil die Quellspannung bestimmt haben, stand, dass diese eine Spannung von $4,5V$ habe. Unser Ergebnis von $3,96 \pm 0,065V$ weist somit eine $8,3\sigma$ -fache Abweichung von den Angaben des Herstellers. Dies ist darauf zurückzuführen, dass diese Batterie vermutlich bereits von anderen Personen beim Experimentieren verwendet wurde und dies vermutlich einen Einfluss auf die Spannung der Batterie gehabt hat.

Somit haben wir in diesem Versuch die Grundlagen der Strom- und Spannungsmessung gelernt, die Funktionsweise eines Kompensators bzw. Drehspulinstruments kennengelernt und können einschätzen in welchen Situationen für eine Messung welches Messgerät adäquat ist.