

Versuch 223: Messung der Boltzmannkonstanten

Yago Obispo Gerster

1. März 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation	1
1.1 Physikalische Grundlagen	1
1.1.1 Brownsche Bewegung	1
1.1.2 Random Walk	2
1.1.3 Verallgemeinerung auf 2 Dimensionen	3
2 Messprotokoll	4
3 Auswertung	8
3.1 Veranschaulichung der Bewegung eines Partikels	8
3.2 Mittleres Verschiebungsquadrat	8
3.3 Kontrollverteilung der Partikelverschiebung	10
3.4 Kumulative Verteilung der Verschiebungsquadrate	11
4 Zusammenfassung und Diskussion	12
4.1 Diskussion	12
5 Quellen und Python-Code	14

1 Einleitung und Motivation

Das Ziel des Versuches ist die Bestimmung der Boltzmannkonstante. Dazu werden wir die Brownsche Molekularbewegung und die damit verbundene statistische Beschreibung von dieser genauer untersuchen.

1.1 Physikalische Grundlagen

1.1.1 Brownsche Bewegung

Bereits 1827 fiel dem Botaniker Robert Brown auf, wie Blütenpollen in einem Glas Wasser seltsame und scheinbar zufällige Zickzackbewegungen in einem Wasserglas durchführten. Erst Jahre später gelang Albert Einstein eine quantitative Erklärung des beobachteten Phänomens. Die zufällige Bewegung der

Teilchen im Wasser deutete er dadurch, dass diese von vielen winzigen anderen Teilchen umgeben waren, welche Stöße auf die Blütenpollen ausübten.

Diese sogenannte *Brownsche Molekularbewegung* galt somit zur Zeit der Veröffentlichung als ein wichtiger Beweis für die Existenz von Atomen und Molekülen.

1.1.2 Random Walk

Die Brownsche Molekularbewegung kann anhand des Random-Walk-Modells beschrieben werden. Dazu betrachten wir erst ein Partikel, was sich in einer Dimension mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p nach links oder rechts um eine Sprungweite δ bewegen kann (siehe Abbildung 1). Weiterhin nehmen wir an,

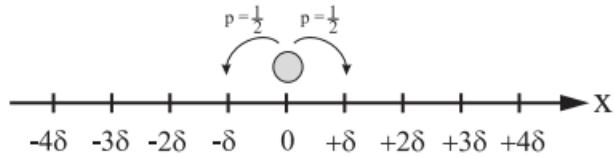


Abbildung 1: 1D Random-Walk (Quelle: Praktikumsskript V223 S3)

dass das Partikel alle τ Sekunden einen Stoß erfährt und innerhalb einer Zeit t es also zu insgesamt $n = t/\tau$ Stößen kommt und das im Falle einer Betrachtung mehrerer Teilchen, sich diese nicht untereinander in jeglicher Art beeinflussen. Zunächst soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden dass sich ein Teilchen nach n Stößen an der Position $x = m\delta$ befindet.

Dafür muss es $\frac{n+m}{2}$ -Male in positive und $\frac{n-m}{2}$ -Male in negative Richtung gesprungen sein. Damit sich das Partikel an der durch m ausgezeichneten Position befindet, gibt es also

$$\binom{n}{\frac{n+m}{2}} = \binom{n}{n - \frac{n+m}{2}} = \binom{n}{\frac{n-m}{2}} \quad (1)$$

$$= \frac{n!}{(\frac{n+m}{2})!(\frac{n-m}{2})!} \quad (2)$$

unterschiedliche Wege. Die binomialverteilte Wahrscheinlichkeit, dass sich das Partikel bei $x = m\delta$ befindet, bei einer Stoßwahrscheinlichkeit nach rechts von p ergibt sich also zu:

$$P(m; n) = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} (1-p)^{\frac{n-m}{2}} \quad (3)$$

Da per Annahme die Wahrscheinlichkeit in beide Richtungen gleich ist, muss $p = \frac{1}{2}$ gelten:

$$P(m; n) = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (4)$$

Da $n = t/\tau$ sehr gross ist, da τ typischerweise sehr klein ist, ist die Stirling-Näherung hier sinnvoll, mit der wir unser Ergebnis wie folgt vereinfachen können:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (5)$$

$$P(m; n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}} \quad (6)$$

Da m und n nur schwer messbar sind, kann diese Wahrscheinlichkeitsverteilung mit x und t substituiert werden, sodass wir

$$P(x; t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (7)$$

erhalten, wobei wir D als $D = \frac{\delta^2}{2\tau}$ definiert haben. D heisst *Diffusionskoeffizient* und beschreibt anschaulich die Beweglichkeit eines Partikels im Medium. $P(x; t)$ hat die Form einer Gaussverteilung, welche allgemein die Form

$$G(x, \langle x \rangle, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$

hat. Mit dem Mittelwert $\langle x \rangle$ und der Standardabweichung σ .

Daher dass (7) symmetrisch zu $x = 0$ ist, gilt für die mittlere Verrückung

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x; t) dx = 0 \quad (9)$$

Da somit $\langle x \rangle$ nicht dazu geeignet ist, um die Brownsche Bewegung zu beschreiben, wird $\langle x^2 \rangle$ betrachtet:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x; t) dx = 2Dt = \sigma^2 \quad (10)$$

Somit haben wir herausgefunden, dass der mittlere Abstand des Partikels zum Ursprungsort ($\sqrt{\langle x^2 \rangle}$) mit der Quadratwurzel der Zeit zunimmt:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad (Einstein - Smoluchowski - Gleichung) \quad (11)$$

1.1.3 Verallgemeinerung auf 2 Dimensionen

Bisher wurde nur der 1D-Fall betrachtet. Im heutigen Versuch werden wir aber mit einer Flüssigkeit auf einer dünnen Schicht arbeiten, weshalb wir näherungsweise 2 Freiheitsgrade berücksichtigen müssen.

Das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle r^2 \rangle$ ergibt sich zu:

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle = 4Dt \quad (12)$$

Der Diffusionskoeffizient D ist gegeben durch $D = \frac{kT}{f}$, wobei k die Boltzmannkonstante, T die Temperatur der Flüssigkeit und f der Reibungskoeffizient ist. Nach dem Stokeschen Gesetz gilt für kugelförmige Partikel mit Radius a in einer Flüssigkeit mit Viskosität η :

$$f = 6\pi\eta a \quad (13)$$

Damit folgt mit (12):

$$D = \frac{kT}{f} = \frac{kT}{6\pi\eta a} \quad (14)$$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4kTt}{6\pi\eta a} \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \langle r^2 \rangle \quad (16)$$

Dabei ist (16) die zentrale Formel dieses Versuchs. Mithilfe von ihr können wir durch Messung des mittleren Verschiebungsquadrates und unter der Voraussetzung das T , η und a bekannt sind, die Boltzmannkonstante bestimmen.

2 Messprotokoll

Juan Bueno Fontanilla

Yago Obispo Geister

13. Nov.

15:57

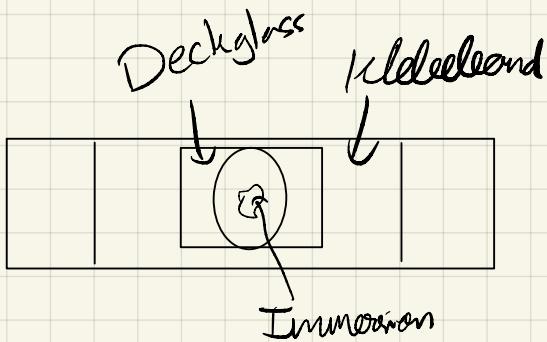
Messprotokoll

Versuch 223: Brownsche Bewegung

1 Probepräparation:

↳ Wir machen einen kreisförmigen Loch auf einem Stück doppelseitiges Klebeband und kleben dieses auf einem Objektträger. Wir spritzen 250 µl einer Latex-Wasser-Lösung (SiO_2 -Partikel) auf dem Objektträger im Loch. Das Präparat decken wir mit einem Deckglas und wir spritzen ein Tropfen Immersionsöl auf die Decke.

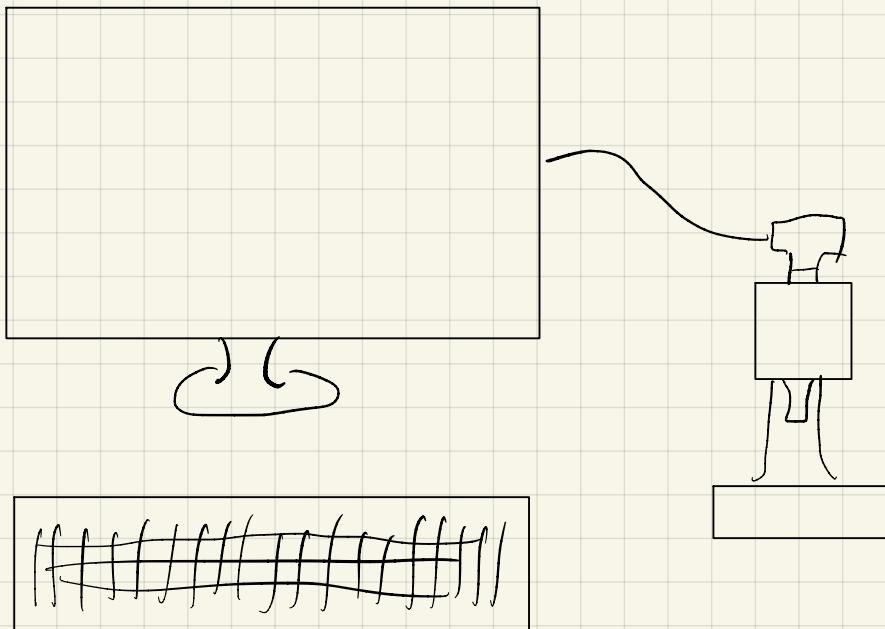
↳ Daraus erhalten wir die Wasser-Latex-Lösung verdunstelt.



Skizze 1: Probe

2. Aufnahme einer Bildfolge

Wir justieren das Mikroskop mit Hilfe des Betreibers, (100/1.25 Oil). Licht lassen nur minimal, um das Präparat nicht zu erwärmen. Das Mikroskop hat eine Kamera, die mit einem Computer verbunden ist, das Bild wird am Bildschirm angezeigt, an einem Python Programm. Wir nehmen 200 Fotos in einer Zeitperiode, (1 Foto pro Sekunde).



Skizze 2: Mikroskop mit PC

3. Eichung des Abbildungsmaßstabs

Mit einem Objektivmikrometer eichen wir nach den Hauptab. Pixel - Maße

↳ Dazu betrachten wir den Tachrometer und messen mit dem Programm die Entfernung in Pixels 20 μm .

4. Vermessung Partikelposition

Mit dem Cursor im Programm wählen wir die Partikelposition bei jedem Bild. Das Programm misst direkt die Position dann.

Messungen

$$T_R = 21,9 \pm 0,5^\circ\text{C}$$

$$\varnothing = 755 \pm 30 \text{ nm} \Rightarrow r = 377,5 \pm 15 \text{ nm}$$

✓ - Woffel

3 Auswertung

3.1 Veranschaulichung der Bewegung eines Partikels

Im Versuch wurde wie im Messprotokoll beschrieben, eine Latex-Wasser-Lösung verwendet und mit einem Mikroskop und der zur Verfügung gestellten Software wurde der Weg eines einzelnen gut sichtbaren Partikels registriert.

Dazu habe ich mit Python einen Scatter-Plot erstellt, welcher die Daten der Text-Datei, die mit der im Praktikum zur Verfügung gestellten Software erzeugt wurde, graphisch darstellt. Die einzelnen Punkte veranschaulichen die Positionen des Partikels zu unterschiedlichen Zeiten und aufeinanderfolgende Punkte wurden miteinander verbunden.

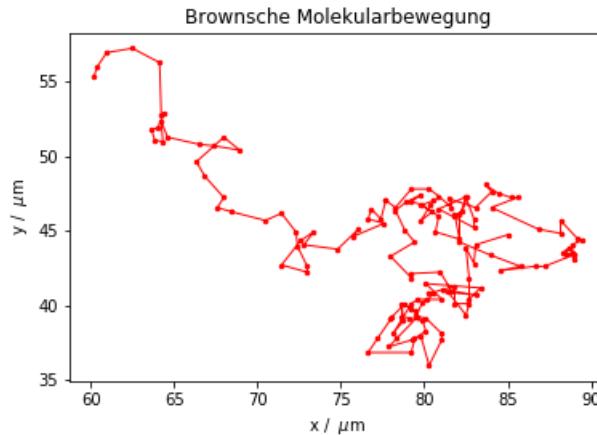


Abbildung 2: Veranschaulichung Brownsche Bewegung

3.2 Mittleres Verschiebungsquadrat

Anschliessend wollen wir mit Formel (16) die Boltzmannkonstante bestimmen. Dafür müssen wir zunächst das mittlere Verschiebungsquadrat berechnen.

Dazu ist es nach (12) notwendig, dass wir die Verschiebungen in x- und y-Richtung gemäss

$$dx_i = x_{i+1} - x_i \quad (17)$$

$$dy_i = y_{i+1} - y_i \quad (18)$$

für alle Messwerte berechnen und jeweils quadratisch aufzaddieren, um das Verschiebungsquadrat zu erhalten. In Python implementieren wir dies, indem wir für alle dx_i bzw. dy_i jeweils ein Array erstellen und dann beide Arrays quadratisch zusammenaddieren. Dann bilden wir den Mittelwert vom entstandenen

Array, was uns das mittlere Verschiebungsquadrat liefert:

$$\langle r^2 \rangle = (1, 77 \pm 0, 16) \cdot 10^{-12} m^2 \quad (19)$$

Als Fehler wurde dabei der Standardfehler des Mittelwertes: $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ verwendet, wobei σ die Standardabweichung und N die Anzahl an Verschiebungsquadraten ist.

Die mittlere Zeit dt wurde zu $dt = 1,0\text{s}$ gemessen. Formel (16) benötigt weiterhin noch die temperaturabhängige Viskosität von Wasser. Während des Versuchs herrschte eine Temperatur von $T = (21,9 \pm 0,5)^\circ\text{C}$. Auf Seite 12 des Praktikumsskriptes wurde eine Tabelle zur Verfügung gestellt, welche jeder Temperatur eine Viskosität zuordnet. Dabei wurde der Fehler grafisch mit einem Fehlerbalken abgeschätzt:

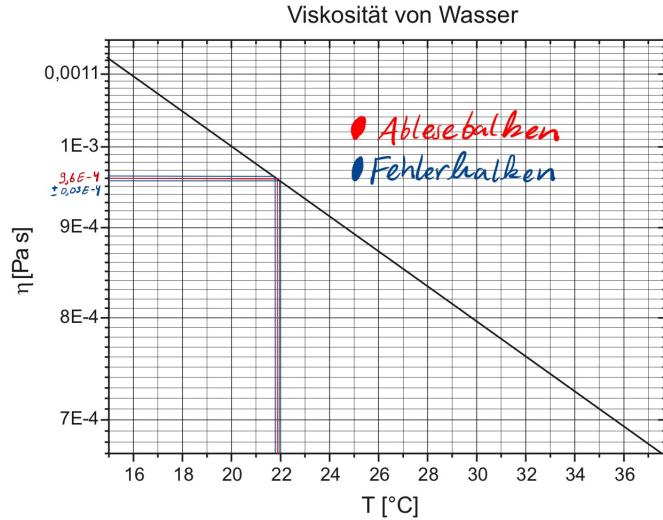


Abbildung 3: Viskosität von Wasser (Quelle: Praktikumsskript s12)

$$\eta = (9,6 \pm 0,03) \cdot 10^{-4} \text{ Pas} \quad (20)$$

Für die Berechnung des Diffusionskoeffizienten kann Formel (12) verwendet werden:

$$D = \frac{\langle r^2 \rangle}{4t} \quad (21)$$

$$\Delta D = \frac{\Delta \langle r^2 \rangle}{4t} \quad (22)$$

$$D = (0,44 \pm 0,04) \cdot 10^{-12} \frac{m^2}{s} \quad (23)$$

Für die Berechnung der Boltzmannkonstante wird (16) verwendet:

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \langle r^2 \rangle \quad (24)$$

$$\Delta k = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \langle r^2 \rangle}{\langle r^2 \rangle}\right)^2} \quad (25)$$

Damit erhalte ich:

$$k = (102 \pm 10) \cdot 10^{-25} \frac{J}{K}$$

(26)

Die beiden Ergebnisse werden in der Diskussion genauer analysiert und mit Literaturwerten verglichen.

3.3 Kontrollverteilung der Partikelverschiebung

Wie bereits in den Grundlagen hergeleitet, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen nach der Zeit t in einem Bereich zwischen x und $x + \Delta x$ gefunden wird, gaussverteilt (vergleiche Formel (7) mit der allgemeinen Gaussverteilung (8)). Dieses theoretische Ergebniss wollen wir anschliessend experimentell überprüfen. Dazu werden die gemessenen Partikelverschiebungen in einem Histogramm eingetragen. Unsere theoretische Vorhersage, dass die Partikelverschiebungen

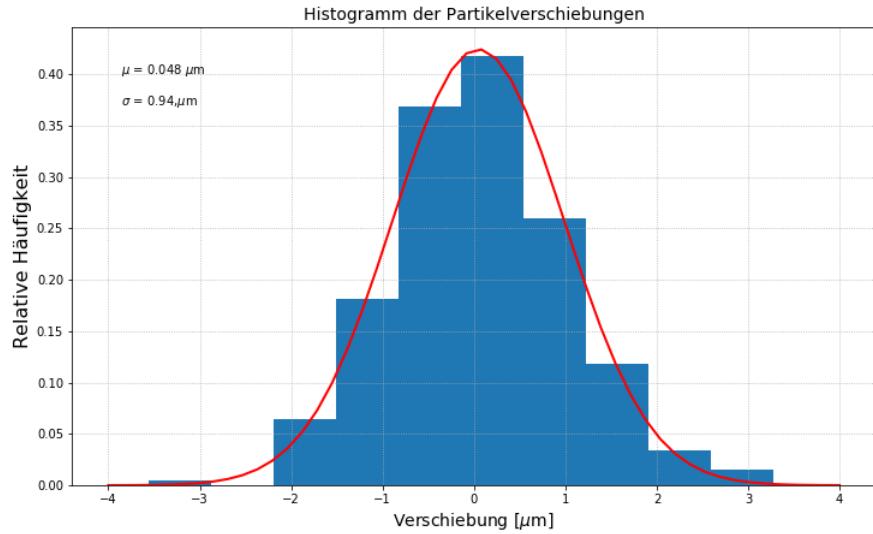


Abbildung 4: Kontrollverteilung

gaussverteilt sind, wurde in diesem Fall also experimentell bestätigt.

3.4 Kumulative Verteilung der Verschiebungsquadrat

In den Grundlagen haben wir festgestellt, dass das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle r^2 \rangle$ proportional zur Zeit ist. Wir erwarten also zwischen der kummulativen Verschiebung und der Zeit einen linearen Zusammenhang.

Plotten wir diesen mit Python, so erhalten wir näherungsweise tatsächlich einen linearen Zusammenhang: Über die Steigung des Diagramms kann schnell der

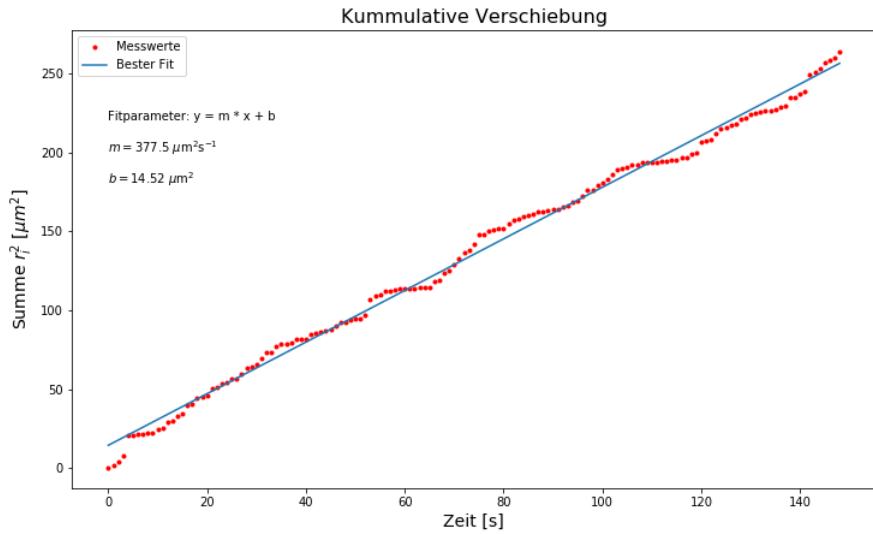


Abbildung 5: Kummulative Verschiebung (linear)

Diffusionskoeffizient bestimmt werden. Es gilt nämlich der Zusammenhang:

$$\langle r^2 \rangle = 4Dt \quad (27)$$

Wenn wir die Steigung durch 4 teilen, erhalten wir also automatisch den Diffusionskoeffizienten D_2 . Die Boltzmannkonstante kann über

$$k_2 = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \langle r^2 \rangle = \frac{6\pi\eta a}{T} D_2 \quad (28)$$

ermittelt werden. Dies liefert

$$D_2 = (0,4083 \pm 0,0025) \cdot 10^{-12} \frac{m^2}{s} \quad (29)$$

$$k_2 = (95 \pm 4) \cdot 10^{-25} \frac{J}{K} \quad (30)$$

Beide Ergebnisse werden in der Diskussion analysiert und mit den anderen Messwerten verglichen.

4 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Versuch haben wir uns mit der Brownschen Molekularbewegung und mit deren statistischen Beschreibung beschäftigt. Dabei haben wir über einige Annahmen, unter anderem, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Partikel bei einem Stoss in eine der beiden Richtungen um einen konstanten Betrag bewegt gleich ist und dass sich die Partikel nicht gegenseitig beeinflussen, eine Formel für die Boltzmann-Konstante hergeleitet, für welche nur bekannte Größen, das mittlere Verschiebungsquadrat und die Zeit benötigt wurden.

Mit einem Mikroskop haben wir den Weg eines Partikels in einer Latex-Lösung aufgezeichnet und diesen in Python grafisch dargestellt. Daraufhin haben wir das mittlere Verschiebungsquadrat berechnet, indem wir die x- bzw. y-Verschiebungen gemessen, quadratisch aufaddiert und den Mittelwert gebildet haben.

Mit dem Verschiebungsquadrat und der Viskosität des Wassers, welche uns aufgrund der Zimmertemperatur bekannt war, konnten wir dann den Diffusionskoeffizienten zu $D = (0,44 \pm 0,04) \cdot 10^{-12} \frac{m^2}{s}$ bestimmen. Die Boltzmannkonstante wurde ebenfalls zu $k = (102 \pm 10) \cdot 10^{-25} \frac{J}{K}$ ermittelt.

Des Weiteren haben wir die theoretische Überlegung, dass die Bereichsaufenthaltswahrscheinlichkeit des Partikels gaussverteilt war durch eine Kontrollverteilung bestätigt.

Zuletzt haben wir die kummulative Verschiebung gegen die Zeit grafisch aufgetragen und einen linearen Zusammenhang festgestellt. Über die Steigung des Diagramms konnten wir die Diffusionskonstante zu $D_2 = (0,4083 \pm 0,0025) \cdot 10^{-12} \frac{m^2}{s}$ und die Boltzmannkonstante zu $k_2 = (95 \pm 4) \cdot 10^{-25} \frac{J}{K}$ berechnen.

4.1 Diskussion

Im Versuch wurden zwei unterschiedliche Ansätze verfolgt, um die Diffusions- bzw. Boltzmannkonstante zu bestimmen. Der erste bestand aus einer Messung des Verschiebungsquadrates und Bestimmung der Viskosität und der zweite war ein grafischer Ansatz, bei welchem wir über die Steigung der kummulativen Verschiebung gegen die Zeit zuerst den Diffusionskoeffizient und damit dann die Boltzmannkonstante bestimmt haben.

Im Anschluss werden die Ergebnisse von beiden Methoden genauer analysiert, miteinander verglichen und im Fall der Boltzmannkonstante auch mit dem Literaturwert verglichen. Weiterhin werden Verbesserungsvorschläge vorgestellt, wie der Versuch verbessert werden könnte.

Wenn wir die Ergebnisse der ersten und zweiten Methode miteinander vergleichen, dann erhalten wir einen absoluten Unterschied von $0,03 \cdot 10^{-12} \frac{m^2}{s}$ zwischen den beiden Diffusionskonstanten, welcher relativ gering ist. Dies kann entsprechend auch an der Sigma-Abweichung zwischen beiden erkannt werden, welche bei $0,9\sigma$ liegt und somit unterhalb der Signifikanzgrenze.

Auch bei einem Vergleich der Boltzmannkonstanten stellen wir fest, dass diese nur eine absolute Abweichung von $8 \cdot 10^{-25} \frac{J}{K}$ zueinander aufweisen was einer $0,7\sigma$ -Abweichung entspricht.

In beiden Fällen liegt die Abweichung also unter einem Sigma-Bereich, was in diesem Fall auch Sinn ergibt, da beide Versuchsteile teilweise von genau den gleichen Faktoren abhängig sind. Zum Beispiel spielte die Viskosität des Wassers, der Radius der Partikel und die Raumtemperatur für beide Teile eine entscheidende Rolle und war gleich.

Der relative Fehler der Diffusionskonstante bei Methode 1 liegt bei 9% und der Boltzmannkonstante bei 10%. Bei Methode 2 lag er für D_2 bei 0,6% und für die Boltzmannkonstante bei 4,2%. Der relative Fehler ist also für beide Größen bei der zweiten Methode geringer als bei der ersten. Dies liegt vor allem daran, dass bei der zweiten Methode nur der Fehler des Geradenfits miteinfließt, welcher mithilfe von Python erstellt wurde, sodass der graphische Fehler beim Messen der Steigung minimal war. Da man D_2 durch teilen der Steigung durch 4 erhielt, liegt der relative Fehler von D_2 entsprechend unter 1%. Bei der ersten Methode hingegen, fliest für D noch der Fehler des mittleren Verschiebungsquadrates ein, weshalb der relative Fehler hier grösser ist. Der Fehler der Boltzmannkonstanten ist bei der zweiten Methode kleiner, da hier das mittlere Verschiebungsquadrat in der Formel durch D_2 ersetzt wurde (welches mit geringem Fehler behaftet war, wie besprochen), wobei bei der ersten Methode der Fehler des Verschiebungsquadrates miteinfloss.

Zunächst muss noch untersucht werden, wie stark die Boltzmannkonstante vom Literaturwert abweicht.

Der Literaturwert der Boltzmannkonstanten liegt bei:

$$k_{\text{Literatur}} = 138,0649 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \quad (31)$$

Nach der Quelle BIPM (International System of Units SI).

Die Fehler für die Boltzmannkonstante werden tabellarisch aufgelistet: Dabei

M.	Boltzmann [$10^{-25} \frac{J}{K}$]	Relat. Fehler	Abs. Abw. vom Lit. [$10^{-25} \frac{J}{K}$]	σ -Abw. Lit.
Methode 1	102	10%	35,6	4
Methode 2	95	4%	43,5	11

Tabelle 1: Fehler für die Boltzmannkonstanten

stellen wir für beide Methoden signifikante Abweichungen vom Literaturwert fest, welche sich nicht allein durch statistische Fehler erklären lassen können, sondern denen ein systematischer Fehler zugrunde liegen muss. Erstmals ist anzumerken, dass der Fehler der zweiten Methode aus den bereits angesprochenen Gründen sehr gering ist und deshalb die Sigma-Abweichung bei der zweiten Methode sehr hoch. Der bei Methode 2 begonnene Fehler für D_2 müsste grösser gewählt werden, da neben dem Geradenfit auch der Messfehler des mittleren Verschiebungsquadrates eine Rolle spielt. Damit wäre die Sigma-Abweichung auch kleiner.

Als entscheidender Faktor für die grosse Abweichung will ich hier weiterhin den

Fehler bei der Temperaturmessung angeben. Diese spielt nämlich bei Formel (16) eine zentrale Rolle. Die Temperatur hätte ein wenig geringer sein können als gemessen, was sich doppelt so stark auf (16) auswirken würde, da diese in der Formel zum einen direkt im Nenner auftaucht und zum anderen eine kleinere Temperatur auch eine grössere Wasserviskosität bedeutet, welche im Zähler steht (die Viskosität von Wasser ist streng monoton fallend mit der Temperatur). Da die Temperaturmessung also eine so entscheidende Rolle spielt, sollte auch entsprechend ein genaueres Messgerät verwendet werden um diese präzise messen zu können.

Weiterhin muss man noch Faktoren wie die Genauigkeit der Messsoftware betrachten. Beim Versuch musste ich manuell auf allen gemachten Partikelbildern, mit dem Cursor angeben, an welcher Position sich das Partikel befand. Manchmal verschwamm das Partikel jedoch etwas und war nicht gut erkennbar, weshalb der Cursor nicht immer genau die Mitte treffen konnte. Zur Verbesserung dieses Aspektes könnte ein Mikroskop mit höherer Auflösung verwendet werden.

Die Partikel waren ausserdem nur näherungsweise kugelförmig, was wir jedoch bei der Verwendung von Stokescher Reibung angenommen haben und weshalb die Messergebnisse auch leicht verfälscht werden könnten. Ein genaueres Mikroskop würde es erlauben ein Partikel auszuwählen, welches tatsächlich eine (fast-)perfekt runde Form besitzt.

Das Präparat war dabei sehr dünn und hätte deshalb leicht auch etwas Luft enthalten können, welche einen Einfluss auf die mittlere Verrückung der Partikel gehabt haben könnte. Die Vorbereitung einer Probe mit einer grösseren Fläche hätte diesen unerwünschten Effekt reduziert.

Insgesamt hat mir der Versuch viel Spass bereitet und ich fand ihn besonders hilfreich um die theoretischen Konzepte aus der Vorlesung - insbesondere die Brownsche Molekularbewegung und die damit verbundene statistische Beschreibung - auch im Experiment einmal zu beobachten und anzuwenden.

Ich finde es erstaunlich wie immer noch zu den Zeiten Einsteins, die Erläuterung der Brownschen Molekularbewegung als ein wichtiger Beleg für die Existenz von kleinen Strukturen wie Atomen und Molekülen galt und die Wissenschaft erheblich vorangetrieben hat.

5 Quellen und Python-Code

- PAP 2.1 Anleitung der Universität Heidelberg
- BIPM: International System of Units - Boltzmannkonstante

Auswertung zum Versuch 223 Boltzmannkonstante über Brownsche Bewegung

December 27, 2023

0.1 Yago Obispo Gerster | mn304@stud.uni-heidelberg.de

```
[1]: import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
import numpy as np
from scipy.stats import norm
from scipy.optimize import curve_fit
```

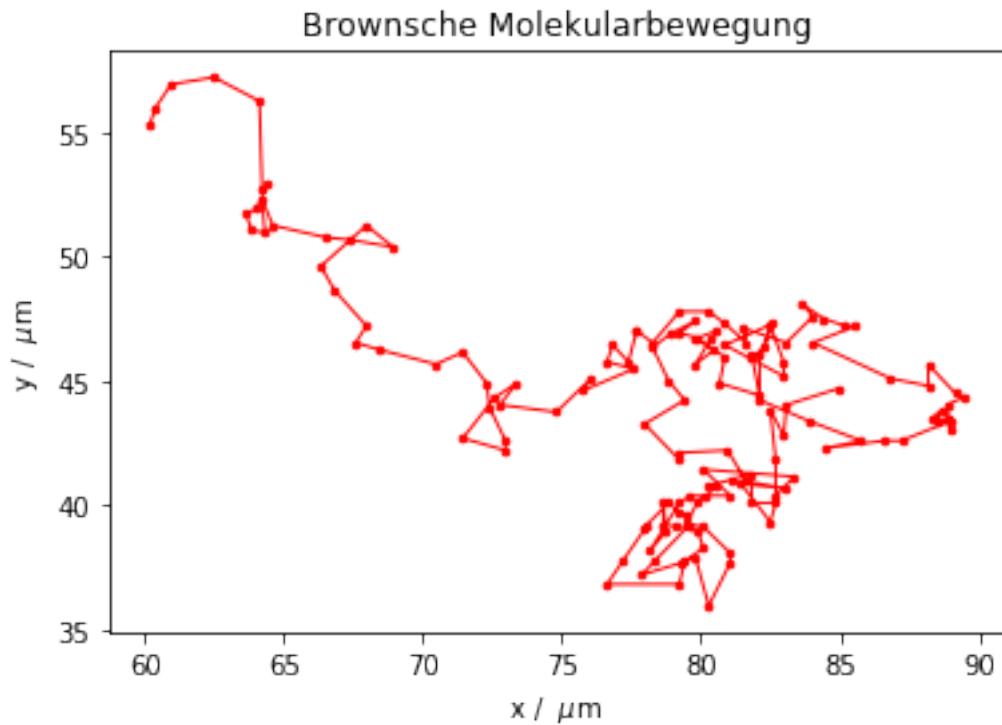
```
[2]: def comma_to_float(valstr):
    return float(valstr.decode("utf-8"))
```

```
[3]: t,x,y = np.loadtxt("position_data.txt", delimiter=",",
                      dtype="float", unpack=True)
```

0.1.1 Aufgabe 1: Grafische Darstellung der Messdaten

```
[4]: plt.plot(x, y, marker='.', markersize=5, color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('x / \u00b5m')
plt.ylabel('y / \u00b5m')
plt.title('Brownsche Molekularbewegung')

plt.savefig('Bewegung.png', format='png')
plt.show()
```



0.1.2 Aufgabe 2: Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates und dessen Fehler

```
[5]: dt=np.array([])
dx=np.array([])
dy=np.array([])
i=0
while i < len(t)-1:
    dt=np.append(dt,t[i+1]-t[i])
    dx=np.append(dx,x[i+1]-x[i])
    dy=np.append(dy,y[i+1]-y[i])
    i = i + 1
r_squared=dx**2+dy**2
```

```
[6]: r_squared_mean=np.mean(r_squared)
print("r_squared_mean= ",r_squared_mean)
r_squared_mean_std=np.std(r_squared)/np.sqrt(len(r_squared))
print("r_squared_mean_std= ",r_squared_mean_std)
dt_mean=np.mean(dt)
dt_mean_std = np.std(dt)/np.sqrt(len(dt))
print("dt_mean= ", dt_mean)
```

r_squared_mean= 1.7700422569127514

```
r_squared_mean_std= 0.15984689564699409
dt_mean= 1.0
```

```
[7]: #Diffusionskonstante bestimmen
diff_konst = r_squared_mean/(4*dt_mean)
diff_err = r_squared_mean_std/(4*dt_mean)

print("Diffusionskonstante: ",diff_konst)
print("Diff.Fehler: ",diff_err)
```

```
Diffusionskonstante: 0.44251056422818785
Diff.Fehler: 0.03996172391174852
```

```
[8]: #Boltzmannkonstante bestimmen
eta = 9.6 #e-4 Pa s
eta_err = 0.03 #e-4 #Pa s
a = 377.5 #e-9 #m
a_err = 15 #e-9 #m
T = 295.05 #K
T_err = 0.5 #K

k = 6*np.pi*eta*a*r_squared_mean/(4*T*dt_mean)
k_err = k*np.sqrt((eta_err/eta)**2 + (a_err/a)**2 +(T_err/T)**2 + (r_squared_mean_std/r_squared_mean)**2)
print("Boltzmannkonstante: ",k)
print("Fehler Boltzmann: ",k_err)
```

```
Boltzmannkonstante: 102.45126764168175
Fehler Boltzmann: 10.11461163408255
```

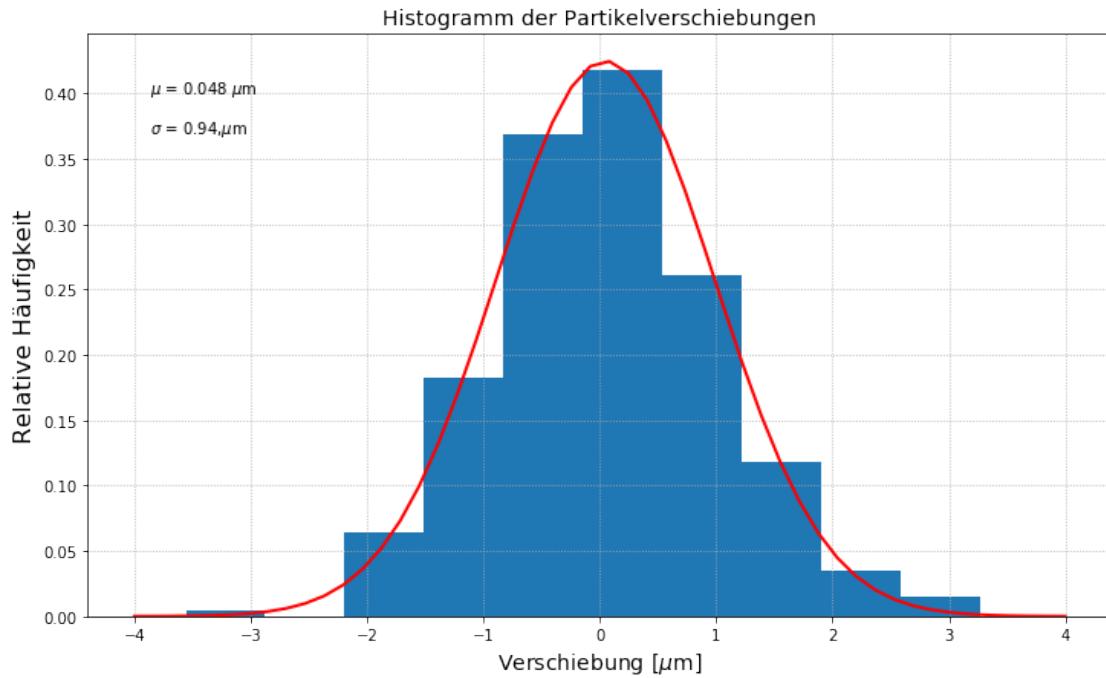
0.1.3 Aufgabe 3: Kontrollverteilung

```
[9]: all_data=np.append(dx,dy)
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.title('Histogramm der Partikelverschiebungen', size = 14)
plt.xlabel('Verschiebung [$\mu m$]', size = 14)
plt.ylabel('Relative Häufigkeit', size = 16)
plt.grid(linestyle = 'dotted')
plt.hist(all_data, density=True)

mu=np.mean(all_data)
sigma=np.std(all_data)
gauss = norm.pdf(np.linspace(-4,4), mu , sigma)

plt.text(-3.9, 0.4, ' $\mu$ = ' + str(np.round(mu,3)) + ' $\mu m$')
plt.text(-3.9, 0.37, ' $\sigma$ = ' + str(np.round(sigma,3)) + ' $\mu m$')
plt.plot(np.linspace(-4,4), gauß, 'r-', linewidth=2)
```

```
plt.savefig('Kontrollverteilung.png', format='png')
plt.show()
```

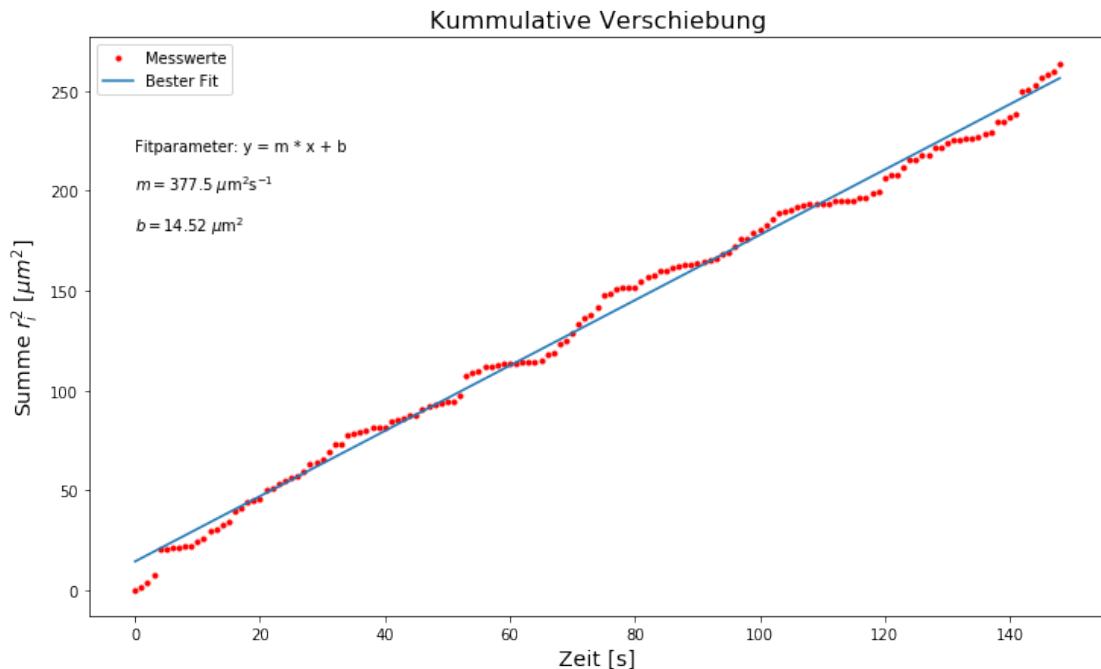


0.1.4 Aufgabe 4: Kumulative Verteilung der Verschiebungsquadrate

```
[10]: r_kumm = np.cumsum(r_squared)
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.plot(t[:-1], r_kumm, marker = '.', color = 'red', linewidth = 0,
label = 'Messwerte')
plt.xlabel('Zeit [s]', size = 14)
plt.ylabel('Summe  $r_i^2 \cdot [\mu\text{m}^2]$ ', size = 14)
plt.title('Kumulative Verschiebung', size = 16)

def linear(x, m, b):
    return m * x + b
popt, pcov = curve_fit(linear, t[:-1], r_kumm)
plt.plot(t[:-1], linear(t[:-1], *popt), label = 'Bester Fit')
m = popt[0]
sig_m = np.sqrt(pcov[0][0])
b = popt[1]
sig_b = np.sqrt(pcov[1][1])
plt.text(0, 220, 'Fitparameter:  $y = m \cdot x + b$ ')
plt.text(0, 200, ' $m = $' + str(np.round(a, 2)) + ' \cdot \mu\text{m}^2 \cdot s^{-1}$ ')
plt.text(0, 180, ' $b = $' + str(np.round(b, 2)) + ' \cdot \mu\text{m}^2$ ')
plt.legend(loc = 'best')
```

```
plt.savefig('Kummulativ.png')
```



```
[11]: #Berechnung der Boltzmann und Diffusionskonstanten aus der Steigung
```

```
D_2 = m / 4 # 10^-12 m^2 s^-1
sig_D_2 = sig_m / 4 # 10^-12 m^2 s^-1
print('D_2 =', D_2)
print("D_2 Fehler =", sig_D_2)

k_2 = 6 * np.pi * eta * a * D_2 / T
sig_k_2 = k_2 * np.sqrt((T_err / T) ** 2 + (eta_err / eta) ** 2 + (a_err / a) ** 2 + (sig_D_2 / D_2) ** 2)
print('k_2 =', k_2)
print("Fehler k_2: ", sig_k_2)
```

```
D_2 = 0.4083449417417587
D_2 Fehler = 0.0024959781450796317
k_2 = 94.54114838925908
Fehler k_2:  3.8156194435474164
```

0.1.5 Berechnung der Fehler und Abweichungen für Diskussion

```
[12]: def literaturwert_Fehler(bezeichnung,X,X_err,X_lit,X_lit_err):
    print("Fehler für ",bezeichnung)
    print("Absolute Abweichung vom Literaturwert: ",np.abs(X-X_lit))
    print("Relativer Fehler: ",X_err/X *100)
```

```

    print("Sigma-Abweichung zum Literaturwert: ",np.abs(X-X_lit)/(np.
    ↪sqrt(X_err**2+X_lit_err**2)))
    print("\n")

def vergleich(bezeichnung,X,X_err,Y,Y_err):
    print("Fehler für ",bezeichnung)
    print("Absolute Abweichung voneinander: ",np.abs(X-Y))
    print("Sigma-Abweichung: ",np.abs(X-Y)/(np.sqrt(X_err**2+Y_err**2)))
    print("\n")

```

[13]:

```

#Vergleich der beiden Diffusionskonstanten mit beiden Methoden
vergleich("Diffusionskonstante",diff_konst,diff_err,D_2,sig_D_2)

#Vergleich der beiden Boltzmannkonstanten mit beiden Methoden
vergleich("Boltzmannkonstante",k,k_err,k_2,sig_k_2)

#Vergleich der Boltzmannkonstanten mit dem Literaturwert
k_lit = 138.0649
k_lit_err= 0
literaturwert_Fehler("Boltzmannkonstante über Methode 1 zum Lit:
    ↪",k,k_err,k_lit,k_lit_err)
literaturwert_Fehler("Boltzmannkonstante über Methode 2 zum Lit:
    ↪",k_2,sig_k_2,k_lit,k_lit_err)

```

Fehler für Diffusionskonstante
 Absolute Abweichung voneinander: 0.034165622486429126
 Sigma-Abweichung: 0.853295874702882

Fehler für Boltzmannkonstante
 Absolute Abweichung voneinander: 7.910119252422675
 Sigma-Abweichung: 0.7317151756056909

Fehler für Boltzmannkonstante über Methode 1 zum Lit:
 Absolute Abweichung vom Literaturwert: 35.61363235831824
 Relativer Fehler: 9.872607598627187
 Sigma-Abweichung zum Literaturwert: 3.521008383387979

Fehler für Boltzmannkonstante über Methode 2 zum Lit:
 Absolute Abweichung vom Literaturwert: 43.523751610740916
 Relativer Fehler: 4.035935154751001
 Sigma-Abweichung zum Literaturwert: 11.406732839760478