

正运动学分析

正运动学分析

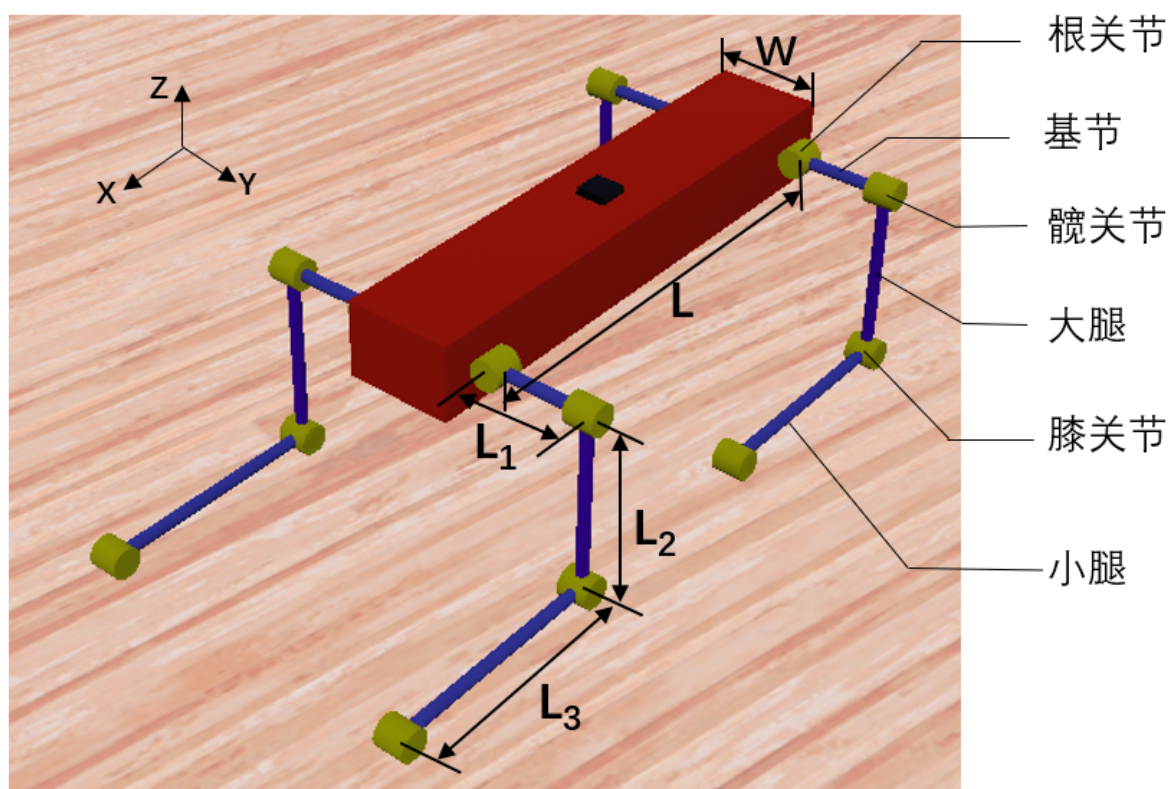
1.1 运动学参数

1.2 单腿正运动学建模

本章涉及到四足机器人的建模分析方面的内容。通过对四足机器人单腿建立数学模型，解决单腿运动学正解与反解的问题

1.1 运动学参数

为了便于整机设计与建模分析，在仿真软件Webots中，按照传统的四足机器人的外形结构建立了仿真模型。如下图所示。



上图机器人仿真模型中，四足机器人每条腿具有三个自由度，由上自下依次是根关节（控制肩部）、髋关节（控制大腿）和膝关节（控制小腿）。根关节与髋关节之间的连杆定义为基节，髋关节与膝关节之间的连杆定义为大腿，膝关节与足端之间的连杆定义为小腿。四条腿的结构外形和尺寸参数完全一致，机器人参数如图所示。

符号	说明	值（mm）
L	左右根关节中心间距	45
W	前后根关节中心间距	150
L_1	基节长度	31.6
L_2	大腿长度	60
L_3	小腿长度	75

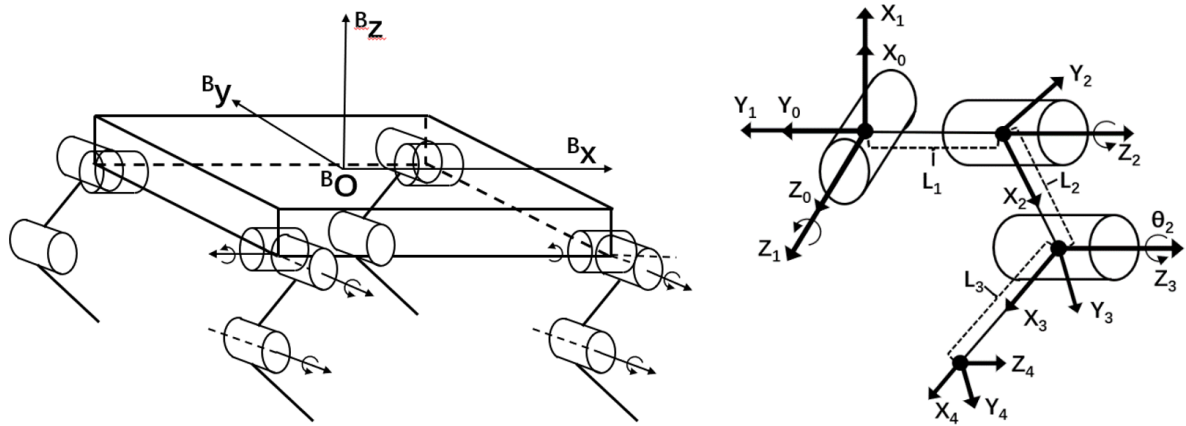
1.2 单腿正运动学建模

运动学分析是四足机器人自由步态规划的基础，分为运动学正解和运动学逆解。机器人学中运动学正解是指，给定机械臂关节角度、连杆长度等参数，求解末端的位置和姿态；运动学逆解是指，给定机械臂末端的位置和姿态，求解机械臂对应的各关节运动参数。

四足机器人常用的运动学建模方法有D-H方法、李代数方法等。

D-H方法是Denavit和Hartenberg提出的一种用于机器人运动学求解的通用方法。D-H方法的思路为：在机器臂的所有连杆上都建立一个坐标系，运用变换矩阵来描述相邻两连杆之间的空间变换关系，能够应用于任意自由度串联机构的正向运动学场景，但是当自由度过多时，运用D-H方法求解运动学逆解，会出现解不唯一和无法获得逆运动学解析解的问题。不过由于此款机器狗单腿只有三个自由度，所以可以使用D-H方法进行运动学建模。

由于四足机器人的四条腿结构完全对称，所以只对单腿进行运动学建模即可。本文以左前腿为例，如下图所示，首先分别建立整机坐标系与单腿连杆坐标系，然后对单腿进行正运动学求解。



左前腿连杆坐标系的参数，如下图所示。

坐标系序号	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	关节变量
1	0	0	0	θ_0
2	0	$\pi/2$	L_1	θ_1
3	L_2	0	0	θ_2
4	L_3	0	0	0

其中，连杆长度 a_{i-1} 表示的是两关节轴线之间的距离，即从 z_{i-1} 和 z_i 之间的公垂线长度；连杆扭角 α_{i-1} 表示的是两关节轴线间的夹角，即从 z_{i-1} 到 z_i 绕 x_{i-1} 旋转的角度；连杆距离 d_i 表示的是 x_{i-1} 到 x_i 沿 z_i 的距离；连杆转角表示的是从到沿旋转的角度。相邻两个连杆坐标系 $\{i\}$ 和 $\{i-1\}$ 之间的空间关系用变换矩阵 ${}^{i-1}_iT$ 进行描述。是由以下四个子变换得到的：绕 x_{i-1} 轴旋转 α_{i-1} ；沿 x_{i-1} 轴平移 a_{i-1} ；绕 z_i 轴旋转 θ_i ；沿 z_i 轴平移 d_i ；可以得到相邻连杆坐标系之间的变换矩阵 ${}^{i-1}_iT$ 的表达式：

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}_iT &= \text{Rot}(x, \alpha_{i-1}) \cdot \text{Trans}(x, a_{i-1}) \cdot \text{Rot}(z, \theta_i) \cdot \text{Trans}(z, d_i) \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-1)
 \end{aligned}$$

将上图坐标系的参数，代入式(2-1)中，可得两个相邻坐标系之间的变换矩阵，如下：

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_i & 0 & L_2 \\ s\theta_3 & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

$${}^B_0T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L/2 \\ 0 & -1 & 0 & W/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

由式(2-2)到式(2-6)，可以得到足端坐标系{O4}相对于本体坐标系{B}的变换矩阵：

$$\begin{aligned}
{}^B_4T &= {}^B_0T \cdot {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T \\
&= \begin{bmatrix} S_{23} & c_{23} & 0 & L/2 + L_2S_2 - L_3S_{23} \\ -S_1c_{23} & S_1S_{23} & c_1 & W/2 + L_1c_1 + L_2S_1c_2 - L_3S_1c_{23} \\ c_1c_{23} & -c_1S_{23} & S_1 & L_1S_1 + L_2c_1c_2 - L_3c_1c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-7)
\end{aligned}$$

可以将 B_4T 分解为转动部分和移动部分，如下式所示：

$${}^B_4T = \begin{bmatrix} & R & \begin{matrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

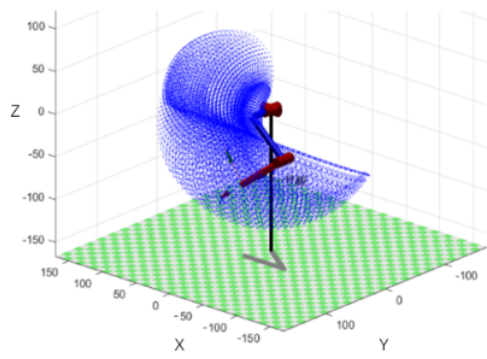
$$R = \begin{bmatrix} S_{23} & c_{23} & 0 \\ -S_1c_{23} & S_1S_{23} & c_1 \\ c_1c_{23} & -c_1S_{23} & S_1 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

$$P = \begin{bmatrix} {}^BP_x \\ {}^BP_y \\ {}^BP_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L/2 + L_2s_2 - L_3s_{23} \\ W/2 + L_1c_1 + L_2s_1c_2 - L_3s_1c_{23} \\ L_1s_1 + L_2c_1c_2 - L_3c_1c_{23} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

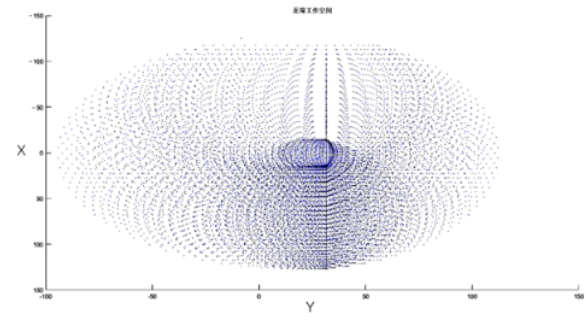
式（2-8）中 R 代表足端坐标系相对本体坐标系的姿态，在平面自由步态规划问题中不考虑足端姿态， P 代表足端在本体坐标系中的位置。式(2-10)即为四足机器人左前腿的运动学正解，若已知该腿的三个关节角度，带入式中可得足端相对于坐标系中的位置。

已知根关节角度范围为 $[-50^\circ, 90^\circ]$ ，髌关节角度范围为 $[-90^\circ, 80^\circ]$ ，膝关节角度范围为 $[-60^\circ, 45^\circ]$ 。利用matlab中的 robotics toolbox 创建四足机器人的单腿模型，在限制范围内，遍历各个关节角度，得到足端工作空间,如

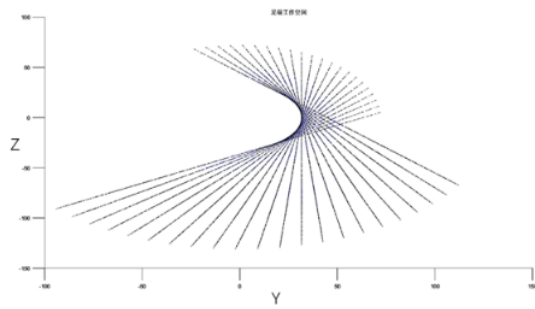
图2-3所示。



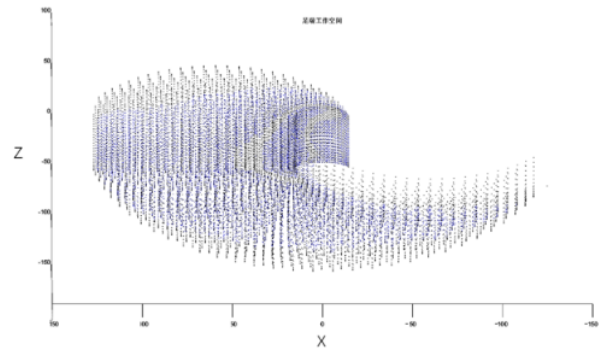
a) workspace 三维视图



b) workspace 在 XY 平面的投影



c) workspace 在 YZ 平面视图



d) workspace 在 XZ 平面的投影