

Algorytmy i Struktury danych (2025)

Lista zadań 1

1. Tablica T zawiera 1024 różnych liczb całkowitych. Ile co najwyżej potrzeba porównań, by sprawdzić, czy liczba całkowita x występuje w tablicy T? Rozważ dwa przypadki:
(a) gdy tablica nie jest posortowana (b) gdy jest posortowana rosnąco.
2. TwoSum. W tablicy T jest n różnych liczb. Dla podanej liczby x należy sprawdzić, czy jest ona sumą dwóch różnych elementów tablicy. Jeśli tablica jest nieuporządkowana potrzebnych jest co najwyżej $(n^2 - n)/2$ sprawdzeń. Dlaczego? Udowodnij, że dla tablicy posortowanej rosnąco wystarczy $n - 1$ sprawdzeń.
3. Napisz funkcję, która wypisze n początkowych liczb Fibonacciego wykonując nie więcej niż n dodawań.
4. Udowodnij, że rekurencyjna wersja funkcji Fibonacciego oblicza $F(n)$ wykonując co najmniej $F(n) - 1$ dodawań. Ile razy dłużej potrwa obliczenie $F(100)$ za pomocą rekurencji niż iteracji jeśli wiadomo, że $F(100) = 354\ 224\ 848\ 179\ 261\ 915\ 075$?
5. W punkcie odbioru przesyłek firmy A, wszystkie listy wrzucane są do jednego dużego pudła. W punkcie firmy B przesyłki umieszcza się na długiej półce wstawiając nowo przybyłe tak, by były uporządkowane wg numeru zlecenia. W firmie C przesyłki wrzuca się do pudełek oznaczonych numerami 00 do 99 patrząc na dwie ostatnie cyfry numeru zlecenia. Jaką średnią ilość sprawdzeń numeru przesyłki musi wykonać pracownik firmy A,B,C by wydać klientowi jego przesyłkę, jeśli przeciętna ilość przesyłek oczekujących na odbiór wynosi 500?
6. Dana jest funkcja `double f(double)` ciągła, taka że $f(a) < 0 < f(b)$. Napisz funkcję `double miejsce_zerowe(double (*f)(double), double a, double b)`, która znajdzie miejsce zerowe funkcji f w przedziale (a, b) , czyli taki $x \in (a, b)$, że $f(x) = 0$. Wykorzystaj metodę bisekcji, czyli wyznaczaj znak funkcji w środku przedziału i stopniowo zawężaj przedział poszukiwań. Aby uzyskać maksymalną dokładność, warunkiem zakończenia pętli uczyni wykrycie sytuacji, że środek przedziału pokrywa się z jednym z jego końców. Sprawdź, ile kroków wykonuje pętla.
Zastosuj swoją funkcję do znalezienia miejsc zerowych funkcji:
 - (a) $f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}$ w przedziale $(0, 2)$
 - (b) $g(x) = \sin(x)$ w przedziałach $(-4, -1)$ oraz $(4, 8)$
 - (c) $h(x) = x^2 - 2$ w przedziałach $(0, 15)$ oraz $(-15, 0)$
7. Jak ustawić 2 liczby rosnąco za pomocą 1 porównania? 3 liczby za pomocą 3 porównań? 4 za pomocą 5 porównań? 5 za pomocą 7 porównań? 6 liczb za pomocą 10 porównań?
8. Schemat Hoernera. Przez odpowiednie wyłączenia x przed nawias, pokaż za pomocą indukcji matematycznej, że wystarczy **dokładnie** n mnożeń, aby wyliczyć wartość wielomianu stopnia n :

$$W(x) = a_n x^n + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

9. Potęgowanie macierzy. Dana jest funkcja `Macierz iloczyn(Macierz A, Macierz B)`; Można przy jej pomocy obliczyć $C = A^2$. Wywołując ją dwukrotnie można obliczyć $(A^2)^2 = A^4$ lub $A^2 A = A^3$. Trzykrotne wywołanie umożliwia obliczenie A^5 , A^6 lub A^8 .
(a) Udowodnij za pomocą indukcji matematycznej, że A^n można wyliczyć przy użyciu nie więcej niż $2 \log_2 n$ wywołań funkcji `iloczyn`. (b) Napisz na kartce funkcję rekurencyjną `Macierz potega(Macierz A, int n)` obliczającą A^n dla $n > 0$ używając w sumie nie więcej niż $2 \log_2 n$ wywołań funkcji `iloczyn`.