Sürekli Rastgele Değişkenler ve Özellikleri

IST 108 Olasılık ve İstatistik

Bahar 2016

Yrd. Doç. Dr. Ferhat Dikbıyık

Sürekli Rastgele Değişkenler

- Bir rastgele değişken, sayısız miktarda muhtemel değerler alabilir. Örneğin bir trenin belirli bir istasyona varış zamanı veya bir transistorun yaşam süresi gibi. Bu tür rastgele değişkenler ***sürekli rastgele değişken*** olarak adlandırılır
- X sürekli rastgele değişkeninin bir reel sayılar kümesi *B* içinde olma olasılığı şöyle ifade edilir.

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)\,dx$$

- *f*(*x*) ***olasılık yoğunluk fonksiyonu*** (probability distribution function - pdf) olarak adlandırılır.

Sürekli Rastgele Değişkenlerin Özellikleri

- X rastgele değişkeni, mutlaka (-∞, ∞) arasında bir değere eşit olacağından

$$1 = P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

- B = [a, b] olarak tanımlarsak,

$$P\{X \in [a,b]\} = P\{a \le X \le b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

- Eğer a=b olursa

$$P\{X \in [a,a]\} = P\{X = a\} = \int_{a}^{a} f(x)dx = 0$$

$$P\{X < a\} = P\{X \le a\} = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

cdf ve pdf

- Yani X sürekli rastgele değişkenin sabit değere eşit olma ihtimali sıfırdır. Bu durumda;

$$P\{X < a\} = P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

- Eşitliğin iki tarafının da türevini alırsak;

$$\frac{\partial F(a)}{\partial a} = f(a)$$

- *f(a)* bize rastgele değişkenin a değerinin etrafında olma ihtimalini verir.

Örnek 1

- X, aşağıdaki pdf'e sahip bir sürekli rastgele değişkendir.

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

  - C'nin değeri nedir?
  - P{X > 1} = ?

Örnek 1

- X, aşağıdaki pdf'e sahip bir sürekli rastgele değişkendir.

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

- C'nin değeri nedir?

$$\int f(x)dx = 1 \;\rightarrow \int_0^2 C(4x - 2x^2)dx = 1$$

$$C\int_0^2 (4x - 2x^2)dx = 1 \rightarrow C\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Bigg|_0^2 = 1 \rightarrow C = \frac{3}{8}$$

Örnek 1

- X, aşağıdaki pdf'e sahip bir sürekli rastgele değişkendir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$P\{X > 1\} = \int_1^\infty f(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx = \frac{1}{2}$$

Örnek 2

- Bir bilgisayar bozulmadan önce çalıştığı süre (saat) aşağıdaki pdf'e sahip bir rastgele değişken olarak modellenmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

  - Bilgisayarın bozulmadan önce 50 ila 150 saat arasında çalışma ihtimali nedir?
  - 100 saatten az çalışma ihtimali nedir?

Örnek 2

- Bir bilgisayar bozulmadan önce çalıştığı süre (saat) aşağıdaki pdf'e sahip bir rastgele değişken olarak modellenmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

  - Önce λ'yı bulalım.

$$\int f(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-x/100} dx = 1$$

$$-\lambda(100)e^{-x/100}\Big|_0^{\infty} = 1 \rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$$

Örnek 2

- Bir bilgisayar bozulmadan önce çalıştığı süre (saat) aşağıdaki pdf'e sahip bir rastgele değişken olarak modellenmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{100} e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

  - Bilgisayarın bozulmadan önce 50 ila 150 saat arasında çalışma ihtimali nedir?

$$P\{50 < X < 150\} = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx$$

$$= -e^{-x/100}\Big|_{50}^{150} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}384$$

Örnek 2

- Bir bilgisayar bozulmadan önce çalıştığı süre (saat) aşağıdaki pdf'e sahip bir rastgele değişken olarak modellenmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

  - Bilgisayarın bozulmadan önce 100 saatten az çalışma ihtimali nedir?

$$P\{X < 100\} = \int_0^{100} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx$$

$$= -e^{-x/100}\Big|_0^{100} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}633$$

Beklenti

- Bir X sürekli rastgele değişkenin beklentisi şöyle ifade edilir.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

- X rastgele değişkenin bir fonksiyonun beklentisi ise

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

- Eğer bu fonksiyon lineer ise

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

Varyans

- Varyans sürekli rastgele değişkenlerde de aynıdır. Yani;

$$Var(X) = (E[(X - \mu)^2])$$

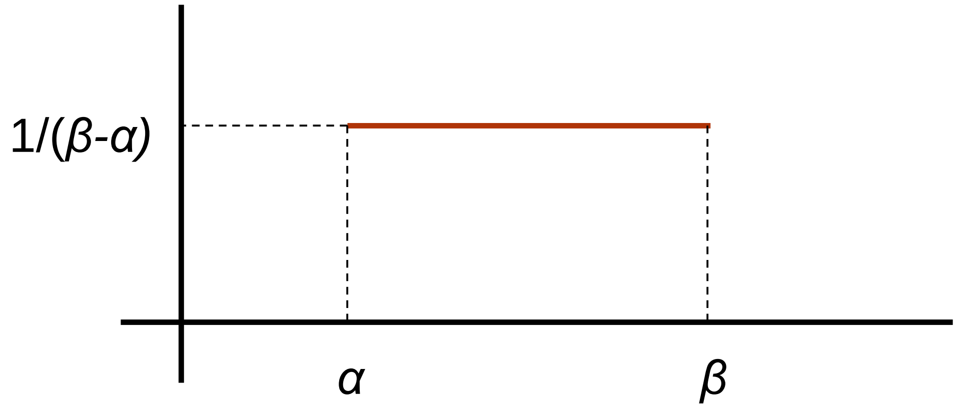
- ya da alternatif olarak;

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Uniform (Tekdüze-Düzgün) Dağılım

- Bir X rastgele değişkeni [α, β] aralığında düzgün (uniform) bir şekilde dağıtılmış ise, bu rastgele değişkene ait pdf:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & x < \alpha \text{ veya } x > \beta \end{cases}$$



Uniform (Tekdüze-Düzgün) Dağılım

- pdf'in altında kalan alan 1 olması gerekir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta-\alpha}\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} dx = 1$$

- [α, β] aralığında olan bir [a, b] alt aralığı için

$$P\{a < X < b\} = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{a}^{b} dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha}$$

Uniform (Tekdüze-Düzgün) Dağılım - Beklenti

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{\beta - \alpha}\,dx$$

Uniform (Tekdüze-Düzgün) Dağılım - Beklenti

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x}{\beta-\alpha}dx$$

$$=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{2(\beta-\alpha)}$$

Uniform (Tekdüze-Düzgün) Dağılım - Beklenti

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{\beta - \alpha}\,dx$$

$$= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\beta - \alpha)} = \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{2(\beta - \alpha)}$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Uniform (Tekdüze-Düzgün) Dağılım - 2. Moment ve Varyans

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2}{\beta-\alpha}\,dx$$

$$= \frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)} = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4}$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

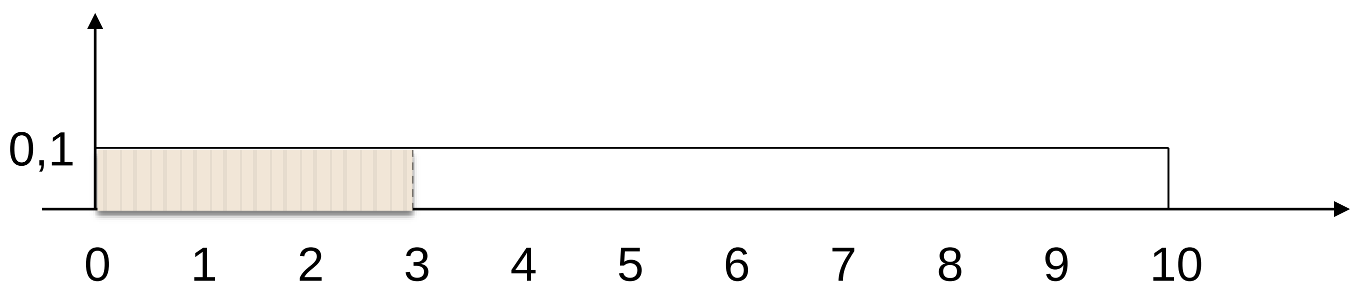
Örnek 3

- Eğer X rastgele değişkeni (0, 10) arasında düzgün (uniform) dağıtılmışsa
  - $P\{X < 3\} = ?$
  - $P\{X > 6\} = ?$
  - $P\{3 < X < 8\} = ?$

Örnek 3

- Eğer X rastgele değişkeni (0, 10) arasında düzgün (uniform) dağıtılmışsa
  - P{X < 3} = ?

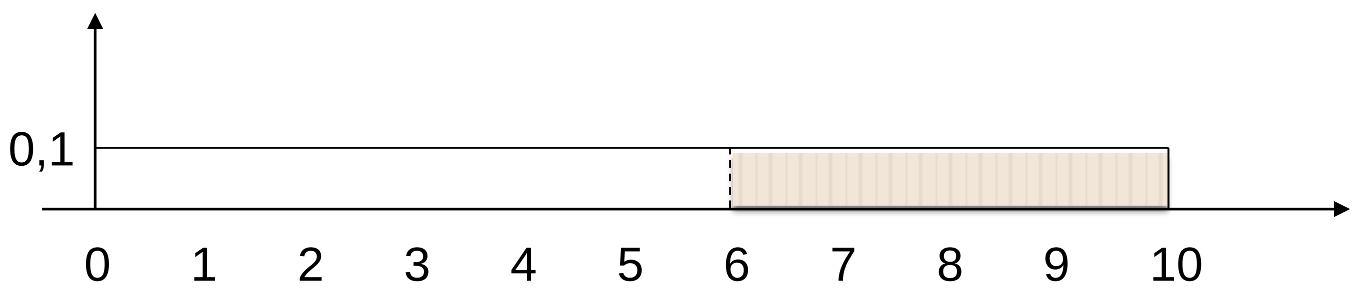
$$P\{X < 3\} = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{10}dx = \frac{3}{10}$$



Örnek 3

- Eğer X rastgele değişkeni (0, 10) arasında düzgün (uniform) dağıtılmışsa
  - P{X > 6} = ?

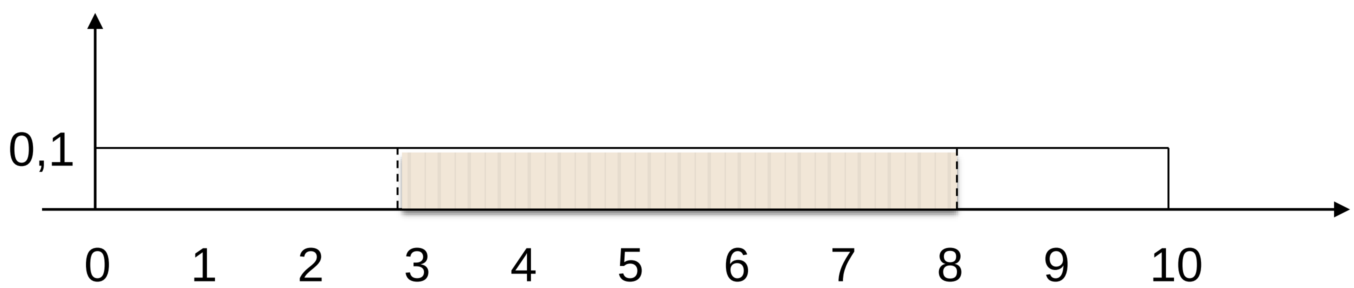
$$P\{X < 6\} = \int_{6}^{10} f(x)dx = \int_{6}^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{4}{10}$$



Örnek 3

- Eğer X rastgele değişkeni (0, 10) arasında düzgün (uniform) dağıtılmışsa
  - P{3 < X < 8} = ?

$$P\{3 < X < 8\} = \int_3^8 f(x)dx = \int_3^8 \frac{1}{10}dx = \frac{1}{2}$$



Örnek 4

- Belirli bir hatta ait otobüsler 15 dakika aralıklarla mavi durakta duruyorlar. İlk otobüs sabah 7:00'da uğruyor. Eğer bu hattaki otobüse binecek bir öğrencinin durağa varış zamanı 7:00 ile 7:30 arasında düzgün (uniform) olarak dağıtılmışsa,
  - Bu öğrencinin durakta 5 dakikadan az bekleme ihtimali nedir?
  - 10 dakikadan fazla bekleme ihtimali nedir?

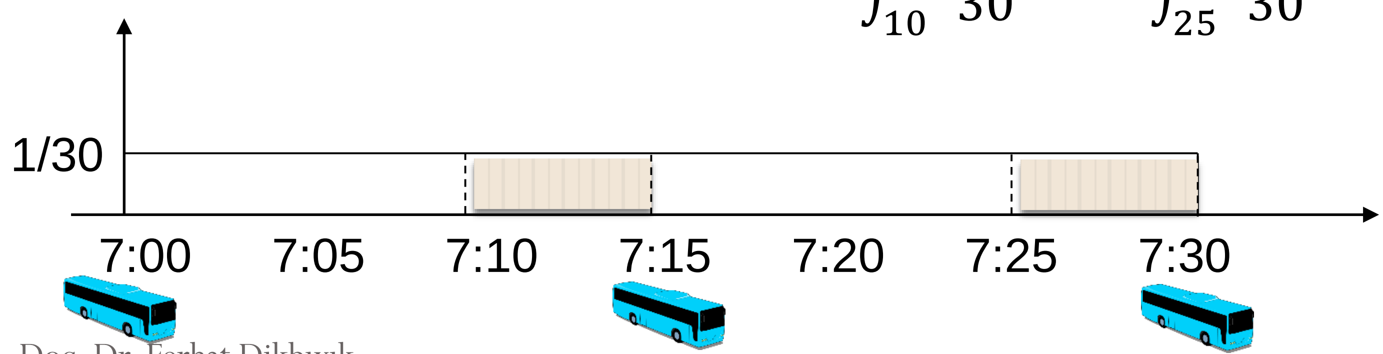
Örnek 4

- Belirli bir hatta ait otobüsler 15 dakika aralıklarla mavi durakta duruyorlar. İlk otobüs sabah 7:00'da uğruyor. Eğer bu hattaki otobüse binecek bir öğrencinin durağa varış zamanı 7:00 ile 7:30 arasında düzgün (uniform) olarak dağıtılmışsa,
  - Bu öğrencinin durakta 5 dakikadan az bekleme ihtimali nedir?
    - X: 7'den sonra geçen zamanı dakika cinsinden ifade eden değişken olsun. Bu durumda X değişkeni (0,30) arasında uniform olarak dağıtılmıştır.

Örnek 4

- Belirli bir hatta ait otobüsler 15 dakika aralıklarla mavi durakta duruyorlar. İlk otobüs sabah 7:00'da uğruyor. Eğer bu hattaki otobüse binecek bir öğrencinin durağa varış zamanı 7:00 ile 7:30 arasında düzgün (uniform) olarak dağıtılmışsa,
  - Bu öğrencinin durakta 5 dakikadan az bekleme ihtimali nedir?

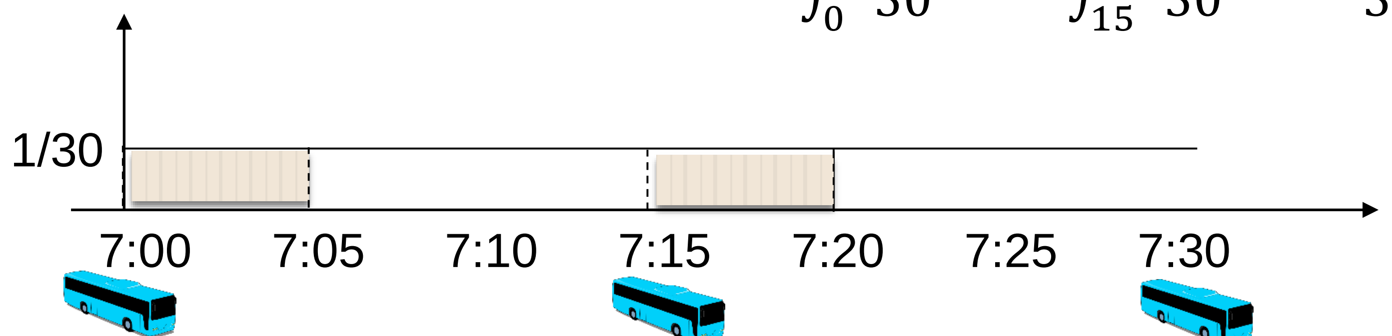
$$P\{10 < X < 15\} + P\{25 < X < 30\} = \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$



Örnek 4

- Belirli bir hatta ait otobüsler 15 dakika aralıklarla mavi durakta duruyorlar. İlk otobüs sabah 7:00'da uğruyor. Eğer bu hattaki otobüse binecek bir öğrencinin durağa varış zamanı 7:00 ile 7:30 arasında düzgün (uniform) olarak dağıtılmışsa,
  - 10 dakikadan fazla bekleme ihtimali nedir?

$$P\{0 < X < 5\} + P\{15 < X < 20\} = \int_0^5 \frac{1}{30} dx + \int_{15}^{20} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$



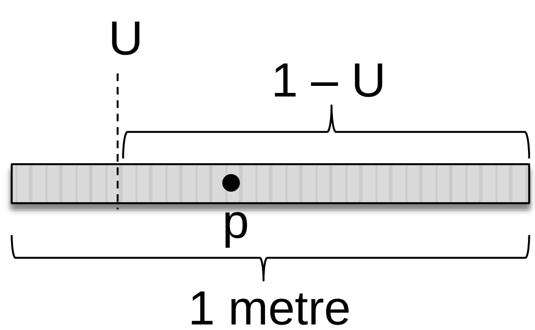
Problem 1

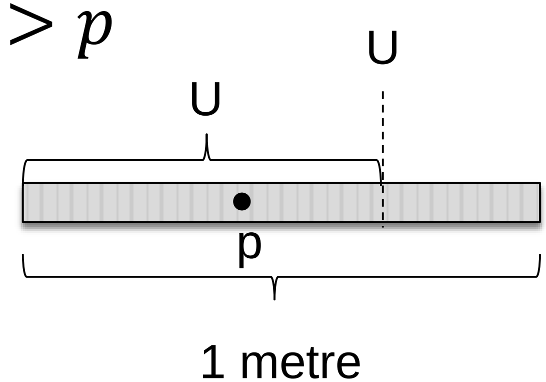
- 1 metre uzunluğundaki bir çubuk *U* noktasından ikiye ayrılmıştır. *U*, metre cinsinden (0, 1) arasında uniform olarak dağıtılmış bir sürekli rastgele değişkendir. Çubuk üzerindeki bir *p* noktasının bulunduğu parçanın uzunluğuna ait beklentiyi bulunuz. (p sabit bir sayı)
  - İpucu: İlgili parçanın uzunluğu U’nun bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Bu fonksiyon, p sabit değerinin U değişkeninden büyük veya küçük olmasına göre U’ya bağlı parçalı bir fonksiyon olacaktır.

Problem 1

- 1 metre uzunluğundaki bir çubuk *U* noktasından ikiye ayrılmıştır. *U*, metre cinsinden (0, 1) arasında uniform olarak dağıtılmış bir sürekli rastgele değişkendir. Çubuk üzerindeki bir *p* noktasının bulunduğu parçanın uzunluğuna ait beklentiyi bulunuz.

$$L(U) = \begin{cases} 1 - U & U < p \\ U & U > p \end{cases}$$





Problem 1

- 1 metre uzunluğundaki bir çubuk *U* noktasından ikiye ayrılmıştır. *U,* metre cinsinden (0, 1) arasında uniform olarak dağıtılmış bir sürekli rastgele değişkendir. Çubuk üzerindeki bir *p* noktasının bulunduğu parçanın uzunluğuna ait beklentiyi bulunuz.

$$L(U) = \begin{cases} 1-U & U < p \\ U & U > p \end{cases}$$

$$E[L(U)] = \int L(u)f(u)du = \int_0^1 L(u)du$$

$$\int_0^p (1-u)du + \int_p^1 (u)du = \frac{1}{2} - \frac{(1-p)^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{p^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + p(1-p)$$

Normal (Gaussian) Dağılım

- Bir X rastgele değişkeni, aşağıdaki pdf'e sahipse, bu rastgele değişken için, μ ve σ^2 parametreleri ile normal olarak dağılmıştır deriz ve şu şekilde gösteririz: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

- Bu fonksiyon μ'nün etrafında simetrik olan ve maksimum değeri x = μ olduğunda $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ olarak gerçekleşen çan şeklinde bir eğridir.

Normal (Gaussian) Dağılım

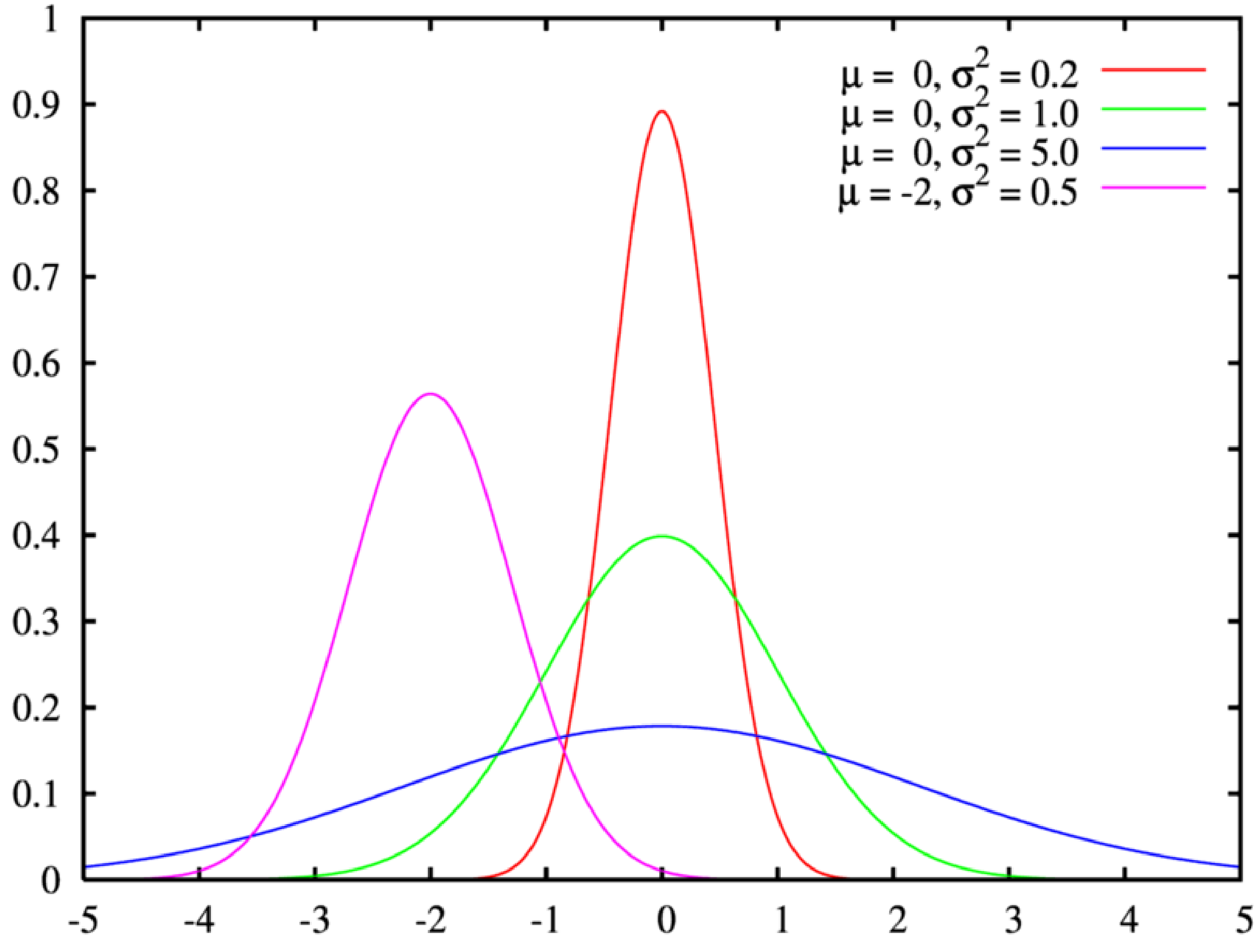


Image courtesy: wikipedia.org

Normal (Gaussian) Dağılım

- Normal dağılım 1773'de Fransız matematikçi Abraham DeMoivre tarafından, Binomial rastgele değişkenleri *n* çok büyük olduğunda yakınsamak için geliştirilmiştir.
- Bu yakınsama daha sonra Laplace tarafından daha da geliştirilmiş ve Merkezi Limit Teoremi oluşturulmuştur (ileriki derslerimizde göreceğiz).
- Pratikte bir çok rastgele olayın, en azından yaklaşık olarak, normal dağılımı izlediği görülmüştür.
  - Bir insanın boyu, bir gaz içerisindeki bir molekülün herhangi bir doğrultudaki hızı, fiziksel bir ölçümde hata sayısı, veri iletiminde sinyal bozulma miktarı, vb.

Normal (Gaussian) Dağılım Beklenti

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}_{x = x-\mu+\mu}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}_{y = x-\mu} + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2/2\sigma^2}}_{=0} + \mu \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1}$$

$$= \mu$$

Normal (Gaussian) Dağılım
Varyans

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}_{y=(x-\mu)/\sigma}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2} dy$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\left[-ye^{-y^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy\right]}_{\text{k ıısm integral}}$$

$$= \sigma^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy}_{=1}$$

$$= \sigma^2$$

Normal (Gaussian) Dağılım
Lineer fonksiyon

- $Y=AX+B$ ise
- $E[Y]=A\mu+B$
- $Var(Y)=A^2\sigma^2$

Standart Normal Dağılım

- Beklentisi 0 ve varyansı 1 olan normal dağılıma standart normal dağılım deriz.
- Standart normal dağılımın cdf'i $\Phi(x)$ ile gösterilir.
- $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy$
- $\Phi(x)$'in negatif olamayan x için alabileceği değerler, hazır tablolarda verilir.
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Normal Dağılımdan Standart Normal Dağılıma Çevirme

- X, parametreli μ ve σ^2 olan bir normal dağılımla dağıtılmış olsun.
- Bu durumda $Z = (X-\mu)/\sigma$ standart normal dağılımla dağıtılmış olur.
- Bu durumda X rastgele değişkenin cdf'ini hesaplarken aşağıdaki gibi yapabiliriz.
- $F_X(a) = P\{X \leq a\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$$= \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

- Bu değer de tablodan bulunabilir.

Örnek 5

- Eğer X, $\mu = 3$ ve $\sigma^2 = 9$ parametreleri ile normal dağılımla dağıtılmış bir rastgele değişkendir.
  - P{2 < X < 5} = ?
  - P{ X > 0} = ?
  - P{ |X – 3| > 6} = ?

Örnek 5

- Eğer X, $\mu = 3$ ve $\sigma^2 = 9$ parametreleri ile normal dağılımla dağıtılmış bir rastgele değişkendir.
  - P{2 < X < 5} = ?

$$P\{2 < X < 5\} = P\left\{\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right\}$$

$$= P\left\{-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right\} = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}3779$$

Örnek 5

- Eğer X, $\mu = 3$ ve $\sigma^2 = 9$ parametreleri ile normal dağılımla dağıtılmış bir rastgele değişkendir.
  - P{ X > 0} = ?

$$P\{X > 0\} = P\left\{\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right\} = P\{Z > -1\}$$
$$= 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \approx 0{,}8413$$

Örnek 5

- Eğer X, $\mu = 3$ ve $\sigma^2 = 9$ parametreleri ile normal dağılımla dağıtılmış bir rastgele değişkendir.
  - P{|X – 3| > 6} = ?

$$P\{|X-3|>6\} = P\{X>9\} + P\{X<-3\}$$
$$= P\left\{\frac{X-3}{3} > \frac{9-3}{3}\right\} + P\left\{\frac{X-3}{3} < \frac{-3-3}{3}\right\}$$
$$= P\{Z>2\} + P\{Z<-2\} = 1 - \Phi(2) + \Phi(-2)$$
$$= 2 - 2\Phi(2) \approx 0{,}0456$$

Problem 2

- 0 veya 1 değerine sahip bir mesaj A bilgisayarından B bilgisayarına direk bir bluetooth bağlantısı üzerinden gönderilecektir. Fakat mesaj iletimi sırasında ortam gürültüsüne maruz kalmaktadır. Gürültüden dolayı oluşacak hata ihtimalini azaltmak için 1 yerine 2 değeri ve 0 yerine ise -2 değeri gönderilmektedir. Gönderilen mesajı *m* ile, ve algılanan mesajı *R* ile gösterelim. Bu durumda algılanan mesaj $R = m + X$. Burada X ortam gürültüsünü gösteren bir sürekli rastgele değişkendir ve standart normal dağılımla dağıtılmıştır. Mesajı alan B bilgisayarı çözümlemesini söyle yapmaktadır.
  - $R \geq 0{,}5$ ise mesaj 1 kabul edilir.
  - $R < 0{,}5$ ise mesaj 0 kabul edilir.
  - Bu durumda 1 gönderildiğinde 0 algılanması ihtimali ve
  - 0 gönderildiğinde 1 algılanması ihtimali nedir?

Problem 2

- Bu durumda 1 gönderildiğinde 0 algılanması ihtimali

$$P\{R < 0{,}5 \mid m = 2\} = P\{2 + X < 0{,}5\} = P\{X < -1{,}5\}$$
$$= 1 - \Phi(1{,}5) \approx 0{,}0688$$

- Aynı şekilde 0 gönderildiğinde 1 algılanması ihtimali

$$P\{R \geq 0{,}5 \mid m = -2\} = P\{-2 + X \geq 0{,}5\}$$
$$= P\{X \geq 2{,}5\} = 1 - \Phi(2{,}5) \approx 0{,}0062$$

Üssel (Exponential) Rastgele Değişken

- Bir rastgele değişken, aşağıdaki pdf'e sahipse bu rastgele değişkene üssel rastgele değişken denir.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- Bu durumda cdf;

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Üssel (Exponential) Rastgele Değişken

- Üssel rastgele değişken pratikte genelde bazı spesifik olaylar oluşana kadar geçen süreyi ifade etmek için kullanılır. Örneğin; şimdiden başlayarak
  - Bir deprem oluşuncaya kadar geçen süre,
  - Yeni bir savaş başlayıncaya kadar geçen süre,
  - Size gelen ilk yanlış aramaya kadar geçen süre, vb.
- Üssel rastgele değişken hafızasızdır (memoryless).

Üssel (Exponential) Rastgele Değişken: Beklenti ve Varyans

$$E[X] = 1/\lambda$$

$$Var(X) = 1/\lambda^2$$

Örnek 6

- Bir bilgisayar sisteminde bazı kaynaklar servisler tarafından sırayla kullanılır. Eğer bir servisin belirli bir kaynağı kullanma süresi (ns cinsinden) $\lambda = 0,1$ olan bir üssel rastgele değişken ile modellenebiliyorsa, bu kaynağı kullanmak için sırada bekleyen servisin bekleme süresinin
  - 10 ns'den fazla olma ihtimali nedir?
  - 10 ila 20 ns arasında olma ihtimali nedir?

Örnek 6

- Bir bilgisayar sisteminde bazı kaynaklar servisler tarafından sırayla kullanılır. Eğer bir servisin belirli bir kaynağı kullanma süresi (ns cinsinden) λ = 0,1 olan bir üssel rastgele değişken ile modellenebiliyorsa, bu kaynağı kullanmak için sırada bekleyen servisin bekleme süresinin
  - 10 ns'den fazla olma ihtimali nedir?
  - X: bekleme süresini ifade eden rastgele değişken olsun

$$P\{X > 10\} = 1 - F_X(10) = e^{-1} \approx 0{,}368$$

Örnek 6

- Bir bilgisayar sisteminde bazı kaynaklar servisler tarafından sırayla kullanılır. Eğer bir servisin belirli bir kaynağı kullanma süresi (ns cinsinden) λ = 0,1 olan bir üssel rastgele değişken ile modellenebiliyorsa, bu kaynağı kullanmak için sırada bekleyen servisin bekleme süresinin
  - 10 ila 20 ns arasında olma ihtimali nedir?

$$P\{10 < X < 20\} = F_X(20) - F_X(10) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0{,}233$$

Örnek 7

- Bir aracın aküsü bitene kadar alacağı mesafe ortalama 10.000 km'dir. Akünün dayanma süresi üssel rastgele değişken ile ifade edilmişse 5.000 km'lik bir yolculuğa çıkan birinin aküyü değiştirmeye (ya da doldurmaya) gerek kalmadan yolculuğunu tamamlama ihtimali nedir?

Örnek 7

- Bir aracın aküsü bitene kadar alacağı mesafe ortalama 10.000 km'dir. Akünün dayanma süresi üssel rastgele değişken ile ifade edilmişse 5.000 km'lik bir yolculuğa çıkan birinin aküyü değiştirmeye (yada doldurmaya) gerek kalmadan yolculuğunu tamamlama ihtimali nedir?
  - X: Akünün dayanma süresi (x1000 km)

$$P\{X > 5\} = 1 - F_X(5) = e^{-5\lambda} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}604$$