

BÖLÜM 4

SİĞA VE DİELEKTRİKLER

4.1. SİĞA

Aralarında V kadar potansiyel fark bulunan eşit ve zıt yüklere sahip iki iletkenin birleşimine kondansatör denir. Bir kondansatörün C sığası, iletkenlerden biri üzerindeki yükün büyüklüğünün, bu iletkenler arasındaki potansiyel farkının büyüklüğüne oranı olarak tanımlanır.

$$C = \frac{Q}{V}$$

SI birim sisteminde sığa, Volt başına Coulomb olarak adlandırılan Farad'dır.

$$1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}}$$

$$1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$$

Kondansatörün sığası, iletkenlerin geometrik düzenine bağlıdır. Yarıçapı R ve üzerindeki yükü Q olan izole bir iletken kürenin sığası, kürenin potansiyeli kQ/R olduğundan

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{kQ/R} = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R$$

olur.

Örnek: 12 cm yarıçaplı yalıtılmış iletken bir küre merkezinden 21 cm uzaklıkta $4,9 \cdot 10^4 \text{ N/C}$ 'luk elektrik alan oluşturuyor.

a) Yüzeysel yük yoğunluğu nedir?

b) Sığası ne kadardır?

Çözüm:

$$E = k \frac{q}{r^2} \Rightarrow q = \frac{Er^2}{k} = \frac{4,9 \cdot 10^4 \cdot (0,21)^2}{9 \cdot 10^9} = 0,024 \cdot 10^{-5} \text{ C} = 0,24 \mu\text{C}$$

$$\text{a) } \sigma = \frac{q}{A} = \frac{0,24}{4 \cdot \pi \cdot (0,12)^2} = 1,33 \mu\text{C/m}^2$$

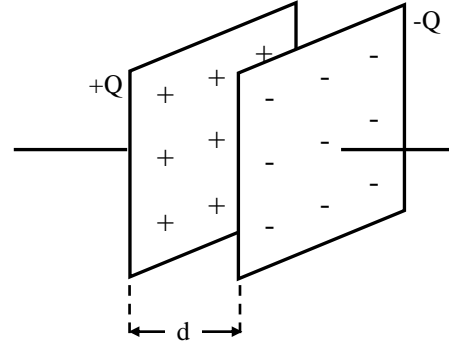
$$\text{b) } C = 4\pi\epsilon_0 R = 4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,12 = 13,34 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 13,34 \text{ pF}$$

4.2. SIĞA HESABI

4.2.1. Paralel Plakalı Kondansatör

Aralarında d uzaklığı bulunan eşit A yüzeylerine sahip, birinin yükü Q diğerinin ki $-Q$ olan iki paralel plakanın üzerinde birim alan başına yük $\sigma = Q/A$ ile verilir. Plakalar arasındaki elektrik alanı

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$



Şekil 4. 1. Paralel plakalı kondansatör

ile verilir. Plakalar arasındaki potansiyel farkı

$$V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

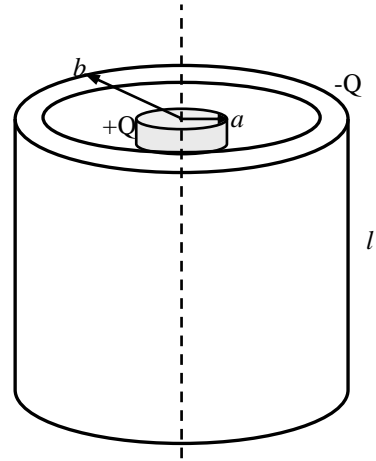
olduğundan

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Qd}{\epsilon_0 A}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

olur. Yani paralel plakalı bir kondansatörün sığası plakanın birinin yüzey alanı ile doğru orantılı, levhalar arası uzaklık ile ters orantılıdır.

4.2.2. Silindirik Kondansatör

Şekildeki gibi silindirik bir iletkenin yarıçapı a ve yükü Q 'dur. Aynı eksenli daha büyük bir silindirik kabuğun yarıçapı b ve yükü $-Q$ 'dur. Bu durumda elektrik alan silindirlerin eksenine diktir ve iki silindir arasındaki bölgede hapsedilmiştir. İki silindir arasındaki potansiyel farkı



Şekil 4. 2. Silindirik kondansatör

olur. Silindirin elektrik alanının $2k\lambda/r$ olduğu biliyoruz. Dıştaki silindirin içteki elektrik alana hiçbir katkısı yoktur. O halde

$$\begin{aligned} V_b - V_a &= -\int_a^b E_r dr = -2k\lambda \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= -2k\lambda \left(\ln r \Big|_a^b \right) = -2k\lambda \left(\ln \frac{b}{a} \right) \\ V_b - V_a &= -2k \frac{Q}{l} \left(\ln \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

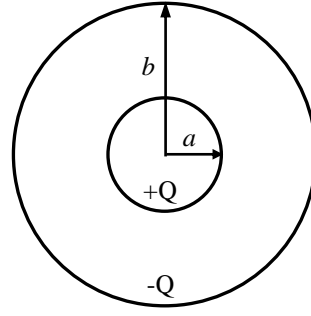
olur. $V = V_a - V_b$ potansiyel farkının büyüklüğü $2k \frac{Q}{l} \left(\ln \frac{b}{a} \right)$ olduğundan sığa

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{2k \frac{Q}{l} \ln \frac{b}{a}} = \frac{l}{2k \ln \frac{b}{a}}$$

bulunur.

4.2.3. Küresel Kondansatör

Küresel bir kondansatör, $-Q$ yüklü b yarıçaplı küresel bir iletken ile aynı merkezli daha küçük a yarıçaplı $+Q$ yüklü bir küreden oluşur. Küreler arasındaki elektrik alan kQ/r^2 ifadesi ile verilir. Böylece küreler arasındaki potansiyel farkı



Şekil 4. 3. Küresel kondansatör

$$\begin{aligned} V_b - V_a &= -\int_a^b E_r dr = -kQ \int_a^b \frac{dr}{r^2} \\ &= kQ \left(\frac{1}{r} \Big|_a^b \right) = kQ \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \\ V_b - V_a &= kQ \left(\frac{a-b}{ab} \right) \end{aligned}$$

olur. $V = V_a - V_b$ potansiyel farkının büyüklüğü $kQ \left(\frac{b-a}{ab} \right)$ olduğundan sığa

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{kQ \frac{b-a}{ab}} = \frac{ab}{k(b-a)}$$

bulunur.

Örnek: Dairesel paralel plakalı kondansatörün aralığı $d = 3$ mm ve üzerindeki yüklerin oluşturduğu elektrik alan şiddeti $3 \cdot 10^6$ V/m'dir. Bu kondansatörde biriken Q yükü $1 \mu\text{C}$ ise plaka yarıçapı ne kadardır?

Çözüm:

$$V = E \cdot d = 3 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 9 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^3} = 0,11 \cdot 10^{-9} \text{ F}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{d} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{Cd}{\pi \epsilon_0}}$$

$$R = \sqrt{\frac{0,11 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 0,109 \text{ m}$$

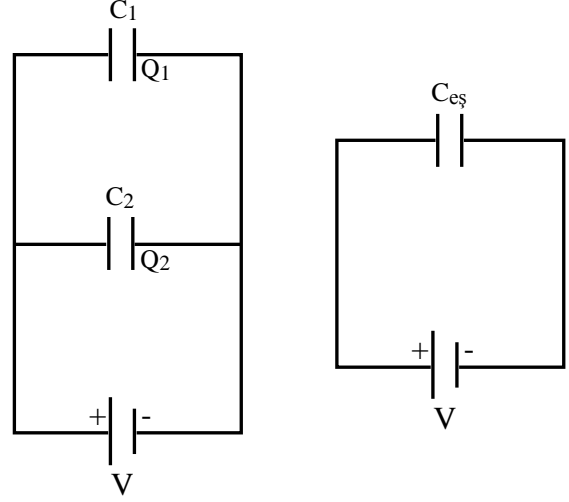
4.3. KONDANSATÖRLERİN BAĞLANMASI

4.3.1. Paralel Bağlama

C_1 kondansatöründeki yük Q_1 , C_2 kondansatöründeki yük Q_2 ise her iki kondansatörde depolanan toplam Q yükü

$$Q = Q_1 + Q_2$$

olur. Ayrıca, paralel devredeki kondansatörlerin her birinin uçları arasındaki potansiyel farkları aynıdır ve V voltajına eşittir.



Şekil 4.4. Paralel bağlı iki kondansatör

$$C_1 = \frac{Q_1}{V}$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{V}$$

$$C_{eq} = \frac{Q_{eq}}{V}$$

$$Q_1 = C_1 V$$

$$Q_2 = C_2 V$$

$$Q_{eq} = C_{eq} V$$

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2$$

$$C_{eq} V = C_1 V + C_2 V$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Paralel bağlama

Eğer ikiden fazla paralel bağlı kondansatör varsa,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

olur.

4.3.2. Seri Bağlama

Seri bağlı kondansatörlerde, plakalar üzerindeki yükün büyüklüğü aynı olmalıdır. Sağdaki bütün plakalar $-Q$ yükü kazanırken, soldaki tüm plakalar $+Q$ yüküne sahip olurlar. Eş değer kondansatörde sağ plaka üzerinde $-Q$, sol plaka üzerinde ise $+Q$ yükü bulunmalıdır. O halde

$$C_{eş} = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C_{eş}}$$

olur. $V = V_1 + V_2$ 'dir.

$$C_1 = \frac{Q}{V_1} \quad V_1 = \frac{Q}{C_1}$$

$$C_2 = \frac{Q}{V_2} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$V = V_1 + V_2$$

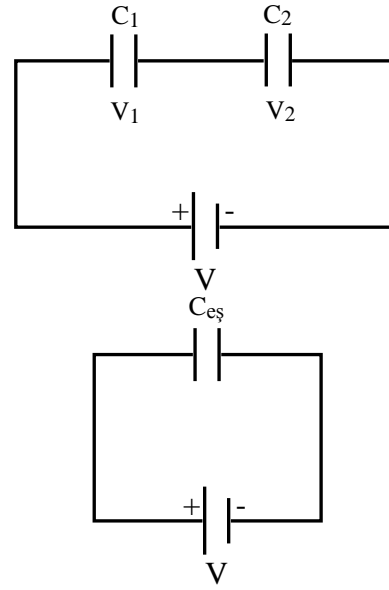
$$\frac{Q}{C_{eş}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Seri bağlama

Eğer ikiden fazla seri bağlı kondansatör varsa,

$$\frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \dots$$



Şekil 4.4. Paralel bağlı iki kondansatör

olur.

Örnek: Kondansatörlerin şekildeki gibi bağlandığını düşününüz.

a) a ve b noktaları arasında eşdeğer sığa ne kadardır?

b) $V_{ab} = 4,8 \text{ V}$ ise, her bir kondansatör üzerindeki yükü bulunuz.

Çözüm:

a)
$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{20} + \frac{1}{5}$$

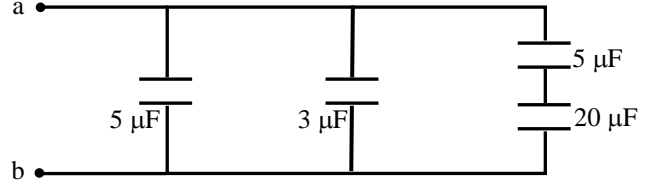
$$C_1 = 4 \mu\text{F}$$

$$C_{\text{eş}} = 5 + 3 + 4 = 12 \mu\text{F}$$

b) $Q_5 = C_5 V = 5 \cdot 4,8 = 24 \mu\text{C}$

$$Q_3 = C_3 V = 3 \cdot 4,8 = 14,4 \mu\text{C}$$

$$Q_{20,5} = C_1 V = 4 \cdot 4,8 = 19,24 \mu\text{C}$$



4.4. YÜKLÜ KONDANSATÖRDE DEPOLANAN ENERJİ

Bir kondansatörün yüklenmesi esnasında herhangi bir anda kondansatör üzerindeki yük q olsun. Aynı anda kondansatörün uçları arasındaki potansiyel farkı $V = \frac{q}{C}$ olur. Bir dq yükünü $-q$ yüklü plakadan $+q$ yüklü plakaya nakletmek için gerekli iş

$$dW = Vdq = \frac{q}{C} dq$$

ile verilir. O halde kondansatörü $q = 0$ 'dan herhangi bir $q = Q$ yüküne kadar doldurmak için gereken iş

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

olur. Bu iş kondansatörde depolanan U potansiyel enerjisine eşittir.

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

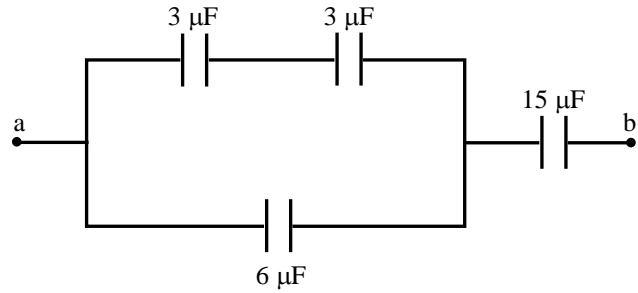
Bir paralel plakalı kondansatörde potansiyel farkı elektrik alana $V = Ed$ şeklinde bağlıdır ve kondansatörün sığası $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ ile verilir. O halde kondansatörde depolanan potansiyel enerji

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 A d E^2$$

olur. Bir paralel plakalı kondansatörün plakaları arasındaki Ad hacmi, elektrik alan tarafından doldurulduğundan birim hacimdeki enerji $u = \frac{U}{Ad}$ olur ve buna enerji yoğunluğu denir:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Örnek: Şekilde $V_{ab} = 15 \text{ V}$ ise, kondansatör gruplarında toplam ne kadarlık enerji toplanır.



Çözüm:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow C_1 = 1,5 \mu\text{F}$$

$$C_2 = 1,5 + 6 = 7,5 \mu\text{F}$$

$$\frac{1}{C_{\text{eş}}} = \frac{1}{7,5} + \frac{1}{15} \Rightarrow C_{\text{eş}} = 5 \mu\text{F}$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

$$U = \frac{1}{2} 5 \cdot 10^{-6} \cdot 15^2$$

$$U = 5,625 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

4.5. DİELEKTRİKLİ KONDANSATÖRLER

Dielektrik, lastik, cam veya mumlu kâğıt gibi iletken olmayan maddelerdir. Bir dielektrik madde, kondansatörün plakaları arasına konulduğunda kondansatörün sığası artar. Dielektrik, plakalar arasındaki boşluğu tamamen doldurursa, kondansatörün sığası boyutsuz κ çarpanı kadar artar. Bu κ çarpanına dielektrik sabiti denir.

Bir dielektrik yokken paralel plakalı kondansatörün yükü Q_0 , sığası C_0 olsun. Kondansatörün uçlarındaki potansiyel farkı $V_0 = Q_0/C_0$ olur. Eğer plakalar arasına bir dielektrik konulursa voltmetreden okunan V değeri κ çarpanı kadar azalır. Yani

$$V = \frac{V_0}{\kappa}$$

olur. $V < V_0$ olduğundan $\kappa > 1$ 'dir. Kondansatörün üzerindeki Q yükü değişmemiş olduğundan sığanın değeri

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{V_0/\kappa} = \kappa \frac{Q_0}{V_0} = \kappa C_0$$

olur. Burada C_0 dielektrik yokken sığanın değeridir. Yani, plakalar arasındaki bölge tam olarak dielektrikle doldurulduğu zaman, sığa κ çarpanı kadar artar. Paralel plakalı kondansatörün $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ sığası, kondansatör dielektikle doldurulduğu zaman

$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

olur.

Örnek: Yalıtkan kalınlığı 0,04 mm ve levha yüzeyi 175 cm² olan teflon doldurulmuş paralel plakalı kondansatörün,

a) Sığasını,

b) Uygulanacak maksimum voltajı tayin ediniz.

Elektriksel bozulma olmadan dielektrikte bulunabilecek maksimum elektrik alan 60.10⁴ V/m ve $\kappa_{\text{teflon}} = 2,1$ 'dir.

Çözüm:

a) $C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d}$

$$C = 2,1 \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 175 \cdot 10^{-4}}{0,04 \cdot 10^{-3}}$$

$$C = 8,13 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 8,13 \text{ nF}$$

b) $V = Ed$

$$V = 60 \cdot 10^4 \cdot 0,04 \cdot 10^{-3}$$

$$V = 2,4 \cdot 10^3 \text{ V} = 2,4 \text{ kV}$$

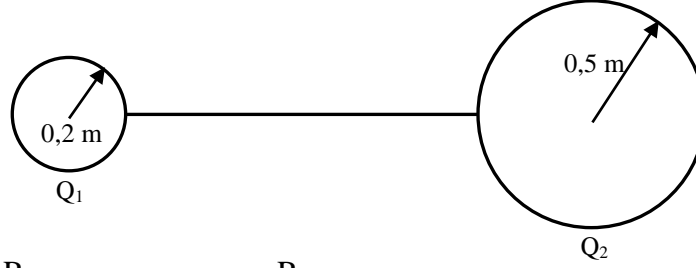
Problemler

1. Çapları 0,4 ve 1 m olan iki iletken küre çaplarına göre çok büyük bir uzaklığa konularak birbirlerinden ayrılmıştır. Küreler ince bir telle bağlanıp 7 C’luk yük veriliyor.

a) Bu toplam yük küreler arasında nasıl paylaşılır. Bağlantı teli üzerindeki yükü ihmal ediniz.

b) $r = \infty$ ’da $V = 0$ durumuna göre kürelerden oluřan bu sistem potansiyeli ne kadardır?

zm:



$$\text{a)} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow Q_1 = \frac{R_1}{R_2} Q_2$$

$$Q_1 + Q_2 = 7 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} Q_2 + Q_2 = 7$$

$$\frac{0,2}{0,5} Q_2 + Q_2 = 7 \Rightarrow Q_2 = 5 \text{ C}$$

$$Q_1 = 2 \text{ C}$$

$$\text{b)} \quad \left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \\ V_2 &= \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned} \right\} V_1 = V_2$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,5}$$
$$= \frac{10^7}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85}$$

$$V_1 = 9 \cdot 10^4 \text{ V}$$

2. Bir silindirik kondansatörün iç ve dıştaki iletkenlerin yarıçapları arasındaki oran $b/a = 4/1$ 'dir. İçteki iletken, yarıçapı orijinal iletkenin yarısı olan bir iletken telle değiştiriliyor. Orijinal sığaya eşit bir sığa elde edebilmek için kondansatörün uzunluğu hangi çarpan kadar artırılmalıdır?

Çözüm:

$$C = \frac{l}{2k \ln \frac{b}{a}}$$

$$\frac{b}{a_1} = \frac{4}{1} \quad a_2 = \frac{a_1}{2}$$

$$C_1 = C_2$$

$$\frac{b}{a_2} = \frac{b}{a_1/2} = \frac{2b}{a_1} = \frac{8}{1}$$

$$\frac{l_1}{2k \ln \frac{b}{a_1}} = \frac{l_2}{2k \ln \frac{b}{a_2}}$$

$$\frac{l_1}{\ln 4} = \frac{l_2}{\ln 8} \Rightarrow l_2 = \frac{\ln 4 + \ln 2}{\ln 4} l_1$$

$$l_2 = \left(1 + \frac{\ln 2}{2 \ln 2}\right) l_1 \Rightarrow l_2 = \frac{3}{2} l_1$$

3. Şekildeki devrede $C_1 = 6 \mu\text{F}$, $C_2 = 3 \mu\text{F}$ ve $V = 20 \text{ V}$ 'dur. S_1 anahtarı kapatılarak ilk olarak C_1 kondansatörü yüklenir. Daha sonra S_1 anahtarı açılır ve yüklenmiş kondansatör S_2 anahtarı kapatılarak yüksüz kondansatöre bağlanır. C_1 kondansatörünün başlangıçta kazandığı yükü ve kondansatörün her birindeki son yükü hesaplayınız.

Çözüm:

$$C_1 = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = C_1 V$$

$$Q = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 120 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

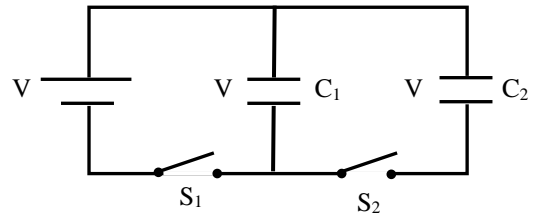
$$Q_1 + Q_2 = 120 \cdot 10^{-6} \text{ C} \Rightarrow Q_1 = 120 \cdot 10^{-6} - Q_2$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow \frac{120 \cdot 10^{-6} - Q_2}{6 \cdot 10^{-6}} = \frac{Q_2}{3 \cdot 10^{-6}}$$

$$Q_2 = 40 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_1 = 120 \cdot 10^{-6} - Q_2$$

$$Q_1 = 80 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$



4. $C_1 = 25 \mu\text{F}$ ve $C_2 = 5 \mu\text{F}$ 'lık iki kondansatör paralel bağlanarak 100 V 'luk güç kaynağıyla yüklenmiştir.

a) Bu iki kondansatörde depolanan toplam enerjiyi hesaplayınız.

b) Bu iki kondansatörün seri bağlanması durumunda a) şıkkındaki kadar enerji depolanması için kondansatörün uçları arasında ne kadarlık bir potansiyel farkı gerekir?

Çözüm:

a) $C_{\text{eş}} = 25 + 5 = 30 \mu\text{F}$

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

$$U = \frac{1}{2} 30 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2$$

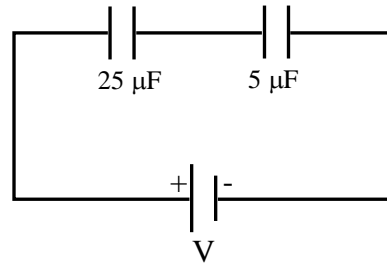
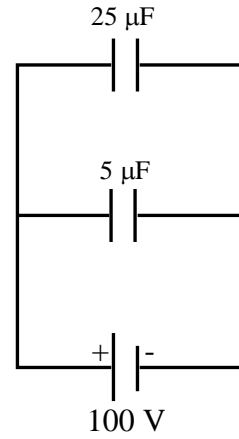
$$U = 0,15 \text{ J}$$

b) $\frac{1}{C_{\text{eş}}} = \frac{1}{25} + \frac{1}{5} = \frac{25}{6} \mu\text{F}$

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

$$0,15 = \frac{1}{2} \frac{25}{6} \cdot 10^{-6} \cdot V^2$$

$$V = 268 \text{ V}$$



5. Bir kondansatör, $d = 0,75$ mm uzaklığı ile birbirlerinden ayrılan ve bir kenarının uzunluğu $L = 2$ cm olan karesel iki metal plakadan yapılmıştır. Plaka arasındaki ortamın yarısı Polystyrene ($\kappa = 2,56$) ile doldurulmuş ve diğer yarısına da neoprene lastik ($\kappa = 6,7$) konulmuştur. Aygıtın sığasını hesaplayınız.

Çözüm:

$$C_1 = \kappa_1 \frac{\epsilon_0 A/2}{d} \quad A/2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$C_1 = 2,56 \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{0,75 \cdot 10^{-3}}$$

$$C_1 = 6,04 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

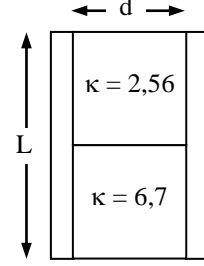
$$C_2 = \kappa_2 \frac{\epsilon_0 A/2}{d}$$

$$C_2 = 6,7 \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{0,75 \cdot 10^{-3}}$$

$$C_2 = 15,81 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

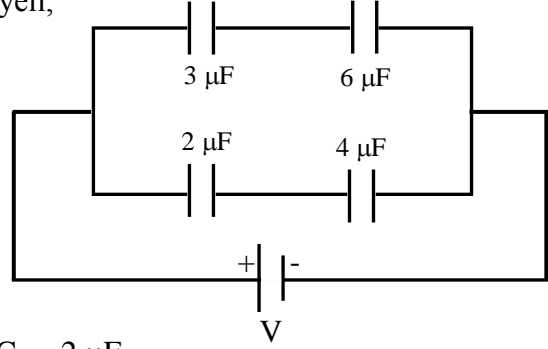
$$C = C_1 + C_2 = 21,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

$$C = 21,85 \text{ pF}$$



6. Şekilde görülen kondansatör sistemi için;

- a) sistemin eşdeğer sığasını,
- b) her bir kondansatörün uçlarındaki potansiyeli,
- c) her bir kondansatör üzerindeki yükü,
- d) sistemde biriken toplam enerjiyi bulunuz.



Çözüm:

a) $\frac{1}{C_{\bar{u}}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \Rightarrow C_{\bar{u}} = 2 \mu\text{F}$

$\frac{1}{C_a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow C_a = \frac{4}{3} \mu\text{F}$

$C_{eş} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \mu\text{F}$

b) $V = \frac{Q_{eş}}{C_{eş}} \Rightarrow Q_{eş} = V.C_{eş} = 90 \cdot \frac{10}{3} = 300 \mu\text{C}$

$Q_{\bar{u}} = V.C_{\bar{u}} = 90 \cdot 2 = 180 \mu\text{C}$ üst koldaki yük

$Q_a = V.C_a = 90 \cdot \frac{4}{3} = 120 \mu\text{C}$ alt koldaki yük

$V_3 = \frac{Q_{\bar{u}}}{C_3} = \frac{180}{3} = 60 \text{ V}$

$V_6 = \frac{Q_{\bar{u}}}{C_6} = \frac{180}{6} = 30 \text{ V}$

$V_2 = \frac{Q_a}{C_2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ V}$

$V_4 = \frac{Q_a}{C_4} = \frac{120}{4} = 30 \text{ V}$

c) $Q_3 = V_3.C_3 = 60 \cdot 3 = 180 \mu\text{C}$

$Q_6 = V_6.C_6 = 30 \cdot 6 = 180 \mu\text{C}$

$Q_2 = V_2.C_2 = 60 \cdot 2 = 120 \mu\text{C}$

$Q_4 = V_4.C_4 = 30 \cdot 4 = 120 \mu\text{C}$

d) $U = \frac{1}{2} CV^2$

$U = \frac{1}{2} \frac{10}{3} \cdot 10^{-6} \cdot 90^2$

$U = 1,35 \cdot 10^{-2} \text{ J}$