Kesikli Rastgele Değişkenler ve Özellikleri

IST 108 Olasılık ve İstatistik
Bahar 2016

Yrd. Doç. Dr. Ferhat Dikbıyık

Kesikli Rastgele Değişken

- Bir rastgele değişkenin alabileceği değerler sınırlı sayıda (countable) ise, bu değişken ***kesikli rastgele değişken*** olarak tanımlanır.

$$p_X(x) = P\{X = x\}$$

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

Kesikli Rastgele Değişken Dağılımları

- Bernoulli ve Binomial Rastgele Değişkenler
- Poisson Rastgele Değikenler
- Geometrik Rastgele Değişken
- Negatif Binomial Rastgele Değişkenler

Bernoulli Rastgele Değişkeni

- Bir deneyin sonucu «başarılı» yada «başarısız» olarak sınıflandırabildiğini varsayalım. X rastgele değişkeni için deney başarılı olduğunda 1 değerini, başarısız olduğunda da 0 değerini alsın. Eğer *p* deneyin başarılı olma ihtimali ise,

$$p_X(0) = 1 - p$$
$$p_X(1) = p$$

- Bu şekilde tanımlanmış rastgele değişkene ***Bernoulli rastgele değişkeni*** denir ($0 \leq p \leq 1$).

Binomial Rastgele Değişkeni

- Şimdi de, benzer bir şekilde, her birinin başarılı olma ihtimali p olan n adet deney düşünelim.
- Eğer X rastgele değişkeni başarılı deney sayısı ise bu değişkene ***<u>Binomial rastgele değişken</u>*** denir ve bu değişkenin parametreleri (n, p) ile gösterilir.
- Örneğin Bernoulli rastgele değişkeni, (1, p) Binomial rastgele değişkenidir.

Binomial Rastgele Değişken Olasılık Kütle Fonksiyonu

n adet bağımsız deneyden *i* tanesinin başarılı olma ihtimali?

i tanesinin başarılı olma ihtimali?

n-i tanesinin başarısız olma ihtimali?

Kaç farklı *i* deney kombinasyonu oluşturabiliriz?

$$p_X(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Örnek Soru 1

- 5 tane bozuk para atılıyor. Eğer çıktılar birbirinden bağımsızsa tura sayısına ait rastgele değişkenin pmf'ini bulunuz.

Örnek Soru 1

- 5 tane bozuk para atılıyor. Eğer çıktılar birbirinden bağımsızsa tura sayısına ait rastgele değişkenin pmf'ini bulunuz.
- X: tura sayısını göstersin.
- Her bir para atımında tura sayısı (1 veya 0) bir Bernoulli rastgele değişkenidir (başarılı olma ihtimali $p = ½$).
- Bu durumda X bir Binomial Rastgele değişkendir ($n = 5$ ve $p = ½$)

Örnek Soru 1

- 5 tane bozuk para atılıyor. Eğer çıktılar birbirinden bağımsızsa tura sayısına ait rastgele değişkenin pmf'ini bulunuz.,
- P{X = 0} = $\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
- P{X = 1} = $\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$
- P{X = 2} = $\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$
- P{X = 3} = $\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$
- P{X = 4} = $\binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$
- P{X = 5} = $\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$

Örnek Soru 2

- Bir firma tarafından üretilen her bir vidanın bir birinden bağımsız olarak 0,01 olasılıkla defolu olduğu biliniyor. Firma vidaları 10'luk paketler halinde satıyor ve firma sattığı bir paketteki vidalardan 1 vidadan daha fazlası defolu çıkarsa para iade garantisi veriyor. Bu durumda firma sattığı paketlerin kaçta kaçını geri iade alır?

Örnek Soru 2

- Bir firma tarafından üretilen her bir vidanın bir birinden bağımsız olarak 0,01 olasılıkla defolu olduğu biliniyor. Firma vidaları 10'luk paketler halinde satıyor ve firma sattığı bir paketteki vidalardan 1 vidadan daha fazlası defolu çıkarsa para iade garantisi veriyor. Bu durumda firma sattığı paketlerin kaçta kaçını geri iade alır?
- X: bir paketteki defolu vida sayısı ise X bir Binomial rastgele değişkendir (n = 10, p = 0,01). Bu durumda bir paketin değiştirilme ihtimali
  - $1 - P\{X=0\} - P\{X=1\} = 1 - \binom{10}{0}(0{,}01)^0(0{,}99)^{10} - \binom{10}{1}(0{,}01)^1(0{,}99)^9 = 0{,}004$
- Yani satılan paketlerin binde 4'ü iade alınır

Örnek Soru 3

- Belirli bir karakteristik için *d* baskın geni ve *r* çekinik geni temsil etsin. Anne – babadan alınan genler kişide bu özelliğin görünüp görünmediğini gösterir. Ebeveynlerden her ikisinden de çekinik gen alan çocuk bu özelliği göstermez, ama herhangi birinden veya her ikisinden de baskın geni alan çocuk bu özelliği gösterir. Melez bir anne (*rd*) ve melez bir babanın *(rd)* 4 çocuğu olmuştur. Bunlardan 3'ünün bu özelliği gösteriyor olma ihtimali nedir?

Örnek Soru 3

- Belirli bir karakteristik için *d* baskın geni ve *r* çekinik geni temsil etsin. Anne – babadan alınan genler kişide bu özelliğin görünüp görünmediğini gösterir. Ebeveynlerden her ikisinden de çekinik gen alan çocuk bu özelliği göstermez, ama herhangi birinden veya her ikisinden de baskın geni alan çocuk bu özelliği gösterir. Melez bir anne (*rd*) ve melez bir babanın *(rd)* 4 çocuğu olmuştur. Bunlardan 3'ünün bu özelliği gösteriyor olma ihtimali nedir?
- Özelliği göstermesi için *dd* veya *rd* olması gerekir. Her bir çocuğun *dd* olma ihtimali ¼, *rd* olma ihtimali ½ ve *rr* olma ihtimali ¼ olduğuna göre, her bir çocuğun özelliği gösterme ihtimali ¾ olur.
- X: özelliği gösteren çocukların sayısı bu durumda Binomial rastgele değişken olur (n = 4, p = ¾).
- $P\{X = 3\} = \binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$

Binomial Rastgele Değişkenin Beklentisi

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i.\, p_X(i)$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Binomial Rastgele Değişkenin Beklentisi

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i.\, p_X(i)$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Binomial Rastgele Değişkenin Beklentisi

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i . p_X(i)$$

$$n\binom{n-1}{i-1}$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Binomial Rastgele Değişkenin Beklentisi

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i.\,p_X(i)$$

$$n\binom{n-1}{i-1}$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= np\sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i}$$

Binomial Rastgele Değişkenin Beklentisi

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i.\, p_X(i)$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= np \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i}$$

$j = i - 1$
$\mathrm{m} = \mathrm{n} - 1$

Binomial Rastgele Değişkenin Beklentisi

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i.\,p_X(i)$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= np \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i} = np \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j}$$

$j = i - 1$
$\mathrm{m} = \mathrm{n} - 1$

Binomial Rastgele Değişkenin Beklentisi

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i.\, p_X(i)$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

1

$$= np \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i} = np \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j}$$

Binomial Rastgele Değişkenin Beklentisi

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i.p_X(i)$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= np \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i} = np \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j}$$

$$\mathbf{E[X] = np}$$

Binomial Rastgele Değişkenin k. Momenti

$$E[X^k] = \sum_{i=0}^{\infty} i^k p_X(i)$$

$$E[X^k] = \sum_{i=0}^{n} i^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= np \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i} = np \sum_{j=0}^{m} (j+1)^{k-1} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-i}$$

$$\mathbf{E}[\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{k}}] = \mathbf{npE}[(\boldsymbol{Y}+\mathbf{1})^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}]$$

Y parametreleri (*n*-1, *p*) olan bir binomial rastgele değişken

Binomial Rastgele Değişkenin 2. Momenti ve Varyansı

$$\mathbf{E}\left[X^{k}\right] = \mathbf{npE}\left[(Y+\mathbf{1})^{k-1}\right]$$

$$\mathbf{E}\left[X^{2}\right] = \mathbf{npE}[Y+\mathbf{1}] = \mathbf{np}[(\mathbf{n}-\mathbf{1})\mathbf{p}+\mathbf{1}]$$

$$Var(X) = E\left[X^{2}\right] - (E[X])^{2}$$

$$Var(X) = np[(n-1)p+1] - (np)^{2}$$

$$\mathbf{Var(X)} = \mathbf{np(1-p)}$$

Y parametreleri (n-1, p) olan bir binomial rastgele değişken

Binomial Rastgele Değişkenin cdf hesaplama

- $F_X(i) = P\{X \leq i\} = \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

- $P\{X = k+1\} = \frac{p}{1-p} \frac{n-k}{k+1} P\{X = k\}$

Örnek Soru 4

- X, parametreleri $n = 6$ ve $p = 0,4$ olan bir Binomial Rastgele değişken olsun ve cdf'i hesaplayalım.

Örnek Soru 4

- X, parametreleri n = 6 ve p = 0,4 olan bir Binomial Rastgele değişken olsun ve cdf'i hesaplayalım.
- $P\{X = 0\} = (0,6)^6 \approx 0,0467$
- $P\{X = 1\} = (4/6)(6/1)P\{X = 0\} \approx 0,1866$
- $P\{X = 2\} = (4/6)(5/2)P\{X = 1\} \approx 0,3110$
- $P\{X = 3\} = (4/6)(4/3)P\{X = 2\} \approx 0,2765$
- $P\{X = 4\} = (4/6)(3/4)P\{X = 3\} \approx 0,1382$
- $P\{X = 5\} = (4/6)(2/5)P\{X = 4\} \approx 0,0369$
- $P\{X = 6\} = (4/6)(1/6)P\{X = 5\} \approx 0,0041$

Poisson Rastgele Değişken

- Binomial rastgele değişken için eğer deney sayısı (n) çok fazla ise ve deneyin başarılı olma olasılığı (p) küçük ise (böylece np normal bir sayı olur), $\lambda = np$ olsun

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}$$

- $P\{X=i\} = \frac{n!}{(n-i)!\,i!} p^i (1-p)^{n-i}$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n^i} \approx 1$$

- $= \frac{n!}{(n-i)!\,i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1$$

- $= \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n^i} \frac{\lambda^i}{i!} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^i}$
- $P\{X=i\} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

Poisson Rastgele Değişken

- Diğer bir deyişle çok fazla bağımsız deney için deneyin başarılı olma sayısı yaklaşık olarak Poisson rastgele değişken ile ifade edilir. Parametresi λ ile ifade edilir.
- $p_X(i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$
- $\sum_{i=0}^{\infty} p_X(i) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

Örnek Soru 5

- Bir kitaptaki her bir sayfa üzerindeki basım hatası sayısı parametresi $\lambda = 1/2$ olan bir Poisson rastgele değişkeni olsun. Bu durumda herhangi bir sayfada en az bir hata olma ihtimali nedir?

Örnek Soru 5

- Bir kitaptaki her bir sayfa üzerindeki basım hatası sayısı parametresi λ = ½ olan bir Poisson rastgele değişkeni olsun. Bu durumda herhangi bir sayfada en az bir hata olma ihtimali nedir?
- $P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-1/2} \approx 0{,}393$

Örnek Soru 6

- Belirli bir makine tarafından üretilen bir ürünün defolu olma ihtimali 0,1 verilmiştir. Rastgele seçilen 10 üründen en fazla 1 tanesinin defolu olma olasılığı nedir?

Örnek Soru 6

- Belirli bir makine tarafından üretilen bir ürünün defolu olma ihtimali 0,1 verilmiştir. Rastgele seçilen 10 üründen en fazla 1 tanesinin defolu olma olasılığı nedir?
- X: defolu ürün sayısı
- P{X = 0} + P{X = 1}
  - Eğer binomial (n = 10, p = 0,1) ile çözersek
    - $\binom{10}{0}(0{,}1)^0(0{,}9)^{10} + \binom{10}{1}(0{,}1)^1(0{,}9)^9 = 0{,}7361$
  - Eğer Poisson ile çözersek (λ = np = 1)
    - $e^{-1} + e^{-1} \approx 0{,}7358$

Poisson Rastgele Değişken Beklenti

- $E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$
- $\quad = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$
- $\quad = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$
- $\boldsymbol{E[X] = \lambda}$

Poisson Rastgele Değişken
2. Moment ve Varyans

- $E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$
- $\qquad = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$
- $\qquad = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} (j+1) \frac{\lambda^j}{j!}$
- $\qquad = \lambda \left[\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} j \frac{\lambda^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \right]$
- $\boldsymbol{E[X^2] = \lambda(\lambda + 1)}$
- $\mathbf{Var(X)} = \boldsymbol{E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda}$

Poisson Rastgele Değişkenin cdf hesaplama

- $\frac{P\{X=i+1\}}{P\{X=i\}} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+1}/(i+1)!}{e^{-\lambda}\lambda^{i}/i!} = \frac{\lambda}{i+1}$

- $F_X(a) = \sum_{i \le a} P\{X = i\}$

Poisson Rastgele Değişken

- Poisson ratgele değişkenin beklentisi belirli bir zamanda bir olayın oluşma sayısını ifade eder.
- Bir yıl içinde olacak depremlerin ortalama sayısı
- Bir ayda oluşan ortalama kaza sayısı
- Bir haftada kaçırılan ortalama ders sayısı
- Vb.

Örnek Soru 7

- Bir otoyolun belirli bir bölgesinde haftalık ortalama kaza sayısı 3 ise Bu hafta en az bir kaza olması ihtimalini hesaplayın.

Örnek Soru 7

- Bir otoyolun belirli bir bölgesinde haftalık ortalama kaza sayısı 3 ise Bu hafta en az bir kaza olması ihtimalini hesaplayın.
- $P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-3}\frac{3^0}{0!} = 0{,}9502$

Örnek Soru 8

- Bir sigorta şirketi tarafından günlük olarak ele alınan tutanak sayısı 5 ise, 3'den az tutanağın ele alındığı günlerin oranı nedir?
- Önümüzdeki 5 günün tam olarak 3'ünde 4 tutanak tutulması ihtimali nedir?

Örnek Soru 8

- Bir sigorta şirketi tarafından günlük olarak ele alınan tutanak sayısı 5 ise, 3'den az tutanağın ele alındığı günlerin oranı nedir?
- P{X ≤ 3} = P{X = 0} + P{X = 1} + P{X = 2}

$$= e^{-5}\frac{5^0}{0!} + e^{-5}\frac{5^1}{1!} + e^{-5}\frac{5^2}{2!} = 0{,}1247$$

Örnek Soru 8

- Bir sigorta şirketi tarafından günlük olarak ele alınan tutanak sayısı 5 ise, 3'den az tutanağın ele alındığı günlerin oranı nedir?
- Önümüzdeki 5 günün tam olarak 3'ünde 4 tutanak tutulması ihtimali nedir?
- Bu bir Binomial rastgele değişkendir.
  - n = 5 ve
  - p = P{X = 4}= $e^{-5}\frac{5^4}{4!} = 0{,}1755$
  - İstenen ihtimal bu durumda $\binom{5}{3}(0{,}1755)^3(0{,}8245)^2 = 0{,}0367$

Geometrik Rastgele Değişken

- Yine bağımsız tekrar eden deneyler düşünelim ve yine her birinin başarılı olma ihtimali *p* olsun. İlk başarılı deney kaç deneme sonra oluşur? X: deney başarılı oluncaya kadarki tekrar sayısı
  - $P\{X=i\}=(1-p)^{i-1}p$
  - $\sum_{i=1}^{\infty} P\{X=i\}=\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}p=\frac{p}{1-(1-p)}=1$
  - Yani eninde sonunda bir deney başarılı olacaktır.
  - İşte böyle bir X rastgele değişkenine Geometrik rastgele değişken denir.

Negatif Binomial Rastgele Değişken

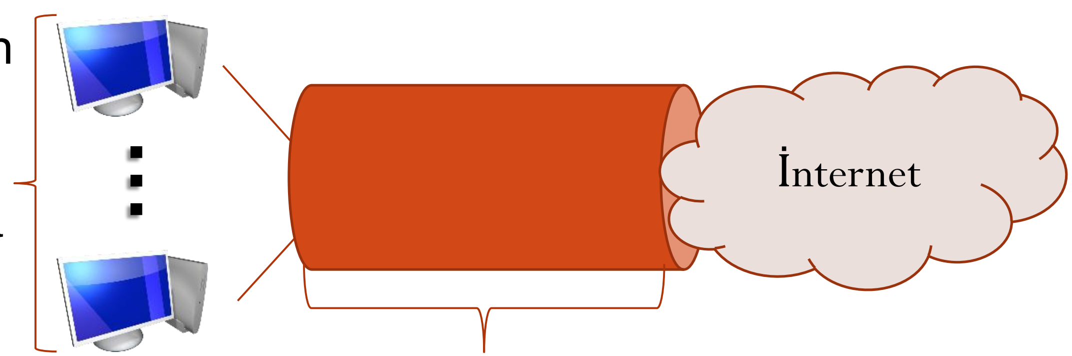
- Toplam *r* deneyde başarılı olana kadar kaç kere deneyi tekrar etmemiz gerekir?

- $P\{X = i\} = \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}$

Problem 1

- Bir bilgisayar sisteminde internete erişim 100 birim kapasiteye sahip bir bağlantı üzerinden yapılmaktadır. Her kullanıcı birim zamanın %10'unda aktiftir ve aktif olduğunda 10 birim kapasite kullanmaktadır.
  - Eğer sistemde 20 kullanıcı varsa sadece bir kullanıcının bağlantı dolu olduğu için sistemi kullanamaması ihtimali nedir?

Kullanıcıların her biri en fazla 10 birim kapasite kullanıyor.
Her biri birim zamanda %10 aktif.



Bağlantı kapasitesi 100 birim

Problem 1

- Bir bilgisayar sisteminde internete erişim 100 birim kapasiteye sahip bir bağlantı üzerinden yapılmaktadır. Her kullanıcı birim zamanın %10'unda aktiftir ve aktif olduğunda 10 birim kapasite kullanmaktadır.
  - Eğer sistemde 20 kullanıcı varsa sadece bir kullanıcının bağlantı dolu olduğu için sistemi kullanamaması ihtimali nedir?
    - $n = 20$, ve $p = 0,1$
    - Soruda aynı anda 11 kullanıcın aktif olması soruluyor (10 tanesi bağlantı kapasitesini doldurur ve bir tanesi bu nedenle kullanamaz).
    - X: Aktif kullanıcı sayısı bir Binomial rastgele değişkendir.
    - $n = 20$, ve $p = 0,1$

Problem 1

- Bir bilgisayar sisteminde internete erişim 100 birim kapasiteye sahip bir bağlantı üzerinden yapılmaktadır. Her kullanıcı birim zamanın %10'unda aktiftir ve aktif olduğunda 10 birim kapasite kullanmaktadır.
  - Eğer sistemde 20 kullanıcı varsa sadece bir kullanıcının bağlantı dolu olduğu için sistemi kullanamaması ihtimali nedir?
    - $P\{X = 11\} = \binom{20}{11}(0{,}1)^{11}(0{,}9)^{9} = 6{,}51 \times 10^{-7}$
    - Yani milyonda bir ihtimalden daha az

Problem 1

- Bir bilgisayar sisteminde internete erişim 100 birim kapasiteye sahip bir bağlantı üzerinden yapılmaktadır. Her kullanıcı birim zamanın %10’unda aktiftir ve aktif olduğunda 10 birim kapasite kullanmaktadır.
  - Eğer sistemde 20 kullanıcı varsa sistem dolu olduğu için bir ya da daha fazla kullanıcının sistemi kullanamama ihtimali nedir?

Problem 1

- Bir bilgisayar sisteminde internete erişim 100 birim kapasiteye sahip bir bağlantı üzerinden yapılmaktadır. Her kullanıcı birim zamanın %10'unda aktiftir ve aktif olduğunda 10 birim kapasite kullanmaktadır.
  - Eğer sistemde 20 kullanıcı varsa sistem dolu olduğu için bir ya da daha fazla kullanıcının sistemi kullanamama ihtimali nedir?
    - $P\{X > 10\} = \sum_{i=11}^{20} P\{X = i\} = \sum_{i=11}^{20} \binom{20}{i} (0,1)^i (0,9)^{20-i} = 7,088 \times 10^{-7}$

Problem 1

- Bir bilgisayar sisteminde internete erişim 100 birim kapasiteye sahip bir bağlantı üzerinden yapılmaktadır. Her kullanıcı birim zamanın %10'unda aktiftir ve aktif olduğunda 10 birim kapasite kullanmaktadır.
  - Eğer sistemde 20 kullanıcı varsa sistem dolu olduğu için bir ya da daha fazla kullanıcının sistemi kullanamama ihtimali nedir?
    - $P\{X > 10\} = \sum_{i=11}^{20} P\{X = i\} = \sum_{i=11}^{20} \binom{20}{i} (0{,}1)^{i} (0{,}9)^{20-i} = 7{,}088 \times 10^{-7}$

Problem 2

- Bir bilgisayar sisteminde internete erişim 100 birim kapasiteye sahip bir bağlantı üzerinden yapılmaktadır. Kullanıcılar aktif olduklarında bağlantı kapasitesinde yer varsa bağlantıyı erişim için kullanmaktadırlar.
  - Bu sistemde bir saat içinde ortalama aktif olan kullanıcı sayısı 5 ise önümüzdeki iki saat içinde en çok iki kullanıcının aktif olma ihtimali nedir?

Problem 2

- Bir bilgisayar sisteminde internete erişim 100 birim kapasiteye sahip bir bağlantı üzerinden yapılmaktadır. Kullanıcılar aktif olduklarında bağlantı kapasitesinde yer varsa bağlantıyı erişim için kullanmaktadırlar.
  - Bu sistemde bir saat içinde ortalama aktif olan kullanıcı sayısı 5 ise önümüzdeki iki saat içinde en çok iki kullanıcının aktif olma ihtimali nedir?
  - Y: İki saat içindeki aktif kullanıcı sayısı. Bu bir Poisson rastgele değişkendir.
  - Y'nin ortalaması E[Y] = λ =2 x 5 = 10 olur.
  - $P\{Y \leq 2\} = e^{-10}\frac{10^0}{0!} + e^{-10}\frac{10^1}{1!} + e^{-10}\frac{10^2}{2!} = 0{,}00277$

Problem 2

- Bir bilgisayar sisteminde internete erişim 100 birim kapasiteye sahip bir bağlantı üzerinden yapılmaktadır. Kullanıcılar aktif olduklarında bağlantı kapasitesinde yer varsa bağlantıyı erişim için kullanmaktadırlar.
  - Bu sistemde bir saat içinde ortalama aktif olan kullanıcı sayısı 5 ise önümüzdeki 5. saatte ilk defa 10 kullanıcının aynı anda aktif olma olasılığı nedir?

Problem 2

- Bir bilgisayar sisteminde internete erişim 100 birim kapasiteye sahip bir bağlantı üzerinden yapılmaktadır. Kullanıcılar aktif olduklarında bağlantı kapasitesinde yer varsa bağlantıyı erişim için kullanmaktadırlar.
  - Bu sistemde bir saat içinde ortalama aktif olan kullanıcı sayısı 5 ise önümüzdeki 5.saatte ilk defa 10 kullanıcının aynı anda aktif olma olasılığı nedir?
  - Z: Bir saat içinde aktif olan kullanıcı sayısı
  - $P\{Z = 10\} = e^{-5} \frac{5^{10}}{10!} = 0{,}0181$
  - W: 10 kullanıcının ilk defa aynı anda aktif olduğu saat. W bir geometrik rastgele değişkendir. ($p = P\{Z = 10\} = 0{,}0181$)

Problem 2

- Bir bilgisayar sisteminde internete erişim 100 birim kapasiteye sahip bir bağlantı üzerinden yapılmaktadır. Kullanıcılar aktif olduklarında bağlantı kapasitesinde yer varsa bağlantıyı erişim için kullanmaktadırlar.
  - Bu sistemde bir saat içinde ortalama aktif olan kullanıcı sayısı 5 ise önümüzdeki 5.saatte ilk defa 10 kullanıcının aynı anda aktif olma olasılığı nedir?
  - W: 10 kullanıcının ilk defa aynı anda aktif olduğu saat. W bir geometrik rastgele değişkendir. ($p = P\{Z = 10\} = 0{,}0181$)
  - $P\{W = 5\} = (1 - 0{,}0181)^4(0{,}0181)$

Soru-Cevap