Hipotez Testi (Devam)

IST 108 Olasılık ve İstatistik
Bahar 2016

Yrd. Doç. Dr. Ferhat Dikbıyık

Varyansın bilinmediği durum: t-Testi

- Bundan önce varyansın bilindiği, fakat beklentinin bilinmediği durumları incelemiştik.
- Fakat hem beklentinin hem de varyansın bilinmediği durumlar daha çok karşımıza çıkar.
- Yine aşağıdaki sıfır hipotezi (H_0), alternatif hipotezine (H_1) karşı test edelim.
  - $H_0 : \mu = \mu_0$
  - $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- Burada sıfır hipotezi artık basit hipotez değildir, çünkü bu hipotez bilinmeyen σ^2 ilgili bilgi vermez.

Varyansın bilinmediği durum: t-Testi

- Daha önce yaptığımız gibi sıfır hipotezini örnekleme ortalaması μ_0'dan uzakta olduğunda reddetmek makuldur.

- Fakat varyansın bilinmediği bu yeni durumda örnekleme ortalamasının μ_0'dan ne kadar uzakta olduğu varyansa bağlıdır.

Varyansın bilinmediği durum: t-Testi

- Varyans bilindiğinde şu durumda hipotezi reddediyorduk.

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\overline{X}-\mu_0\right| > z_{\alpha/2}$$

- Artık varyans da bir bilinmeyen olduğundan, varyans yerine onun doğal nokta değerlendiricisi olarak örnekleme varyansını alabiliriz.

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/(n-1)$$

- Bu durumda H_0'ı aşağıdaki T değeri büyük olduğunda reddebiliriz;

$$T = \left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|$$

Varyansın bilinmediği durum: t-Testi

- Hipotezi reddetmek için T'nin ne kadar büyük olduğunu tespit etmeliyiz ve bunun için H_0 doğru iken T'nin dağılımına bakmalıyız.

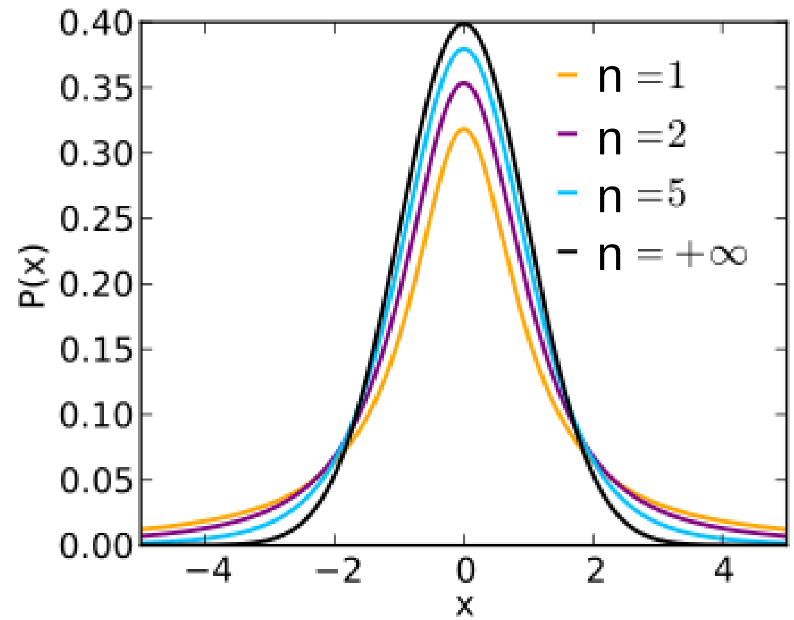
- T'nin dağılımı, $\mu = \mu_0$ olduğunda serbestlik derecesi n-1 olan bir t-dağılımıdır.

t-dağılımı

- Serbestlik derecesi n olan bir t-dağılımı sıfır etrafında simetrik ve standart normal dağılıma benzeyen bir eğriye sahiptir.

$$P\{T_n \geq t_{\alpha,n}\} = \alpha$$

Farklı α ve n değerleri için $t_{\alpha,n}$ değerlerini veren tablolar mevcuttur.



Bu şekil wikipedia.org'dan alınmıştır.

Varyansın bilinmediği durum: t-Testi

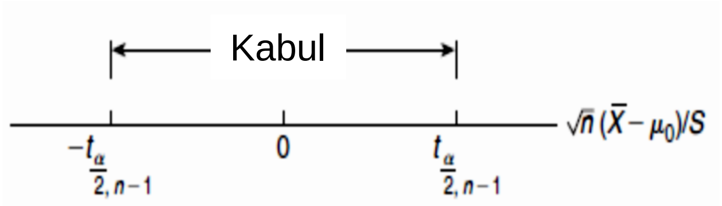
- T'nin dağılımı, $\mu = \mu_0$ olduğunda serbestlik derecesi n-1 olan bir t-dağılımıdır.

$$P_{\mu_0}\{|T| > c\} = \alpha \Rightarrow 2P_{\mu_0}\{T > c\} = \alpha$$

$$\Rightarrow P_{\mu_0}\{T > c\} = \alpha / 2 \Rightarrow c = t_{\alpha/2, n-1}$$

- Yani H_0'ı;
  - reddet et, eğer $|T| = \left|\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2, n-1}$
  - kabul et, eğer $|T| = \left|\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \leq t_{\alpha/2, n-1}$

İki taraflı t-testi



Örnek 1

- Bir kliniğin, kanlarındaki kolesterol seviyesi orta seviye ile yüksek seviye arasında olan hastaları arasından kolesterolü düşüren yeni bir ilacı test etmek için gönüllüler seçiliyor. 50 gönüllüye 1 ay boyunca bu ilaç veriliyor ve kolesterol değişimi gözleniyor. Eğer kolesterol düşümü ortalama 14,8 ve örnekleme standart sapması 6,4 ise bundan nasıl bir sonuç çıkartırız? Önem seviyesi: 0,05.

Örnek 1

- Bir kliniğin, kanlarındaki kolesterol seviyesi orta seviye ile yüksek seviye arasında olan hastaları arasından kolesterolü düşüren yeni bir ilacı test etmek için gönüllüler seçiliyor. 50 gönüllüye 1 ay boyunca bu ilaç veriliyor ve kolesterol değişimi gözleniyor. Eğer kolesterol düşümü ortalama 14,8 ve örnekleme standart sapması 6,4 ise bundan nasıl bir sonuç çıkartırız? Önem seviyesi: 0,05.
- Burada değişimin tamamen şansa olup olmadığını test edelim. Yani;
  - $H_0 : \mu = 0$
  - $H_1 : \mu \neq 0$

Örnek 1

- Bir kliniğin, kanlarındaki kolesterol seviyesi orta seviye ile yüksek seviye arasında olan hastaları arasından kolesterolü düşüren yeni bir ilacı test etmek için gönüllüler seçiliyor. 50 gönüllüye 1 ay boyunca bu ilaç veriliyor ve kolesterol değişimi gözleniyor. Eğer kolesterol düşümü ortalama 14,8 ve örnekleme standart sapması 6,4 ise bundan nasıl bir sonuç çıkartırız? Önem seviyesi: 0,05.
- Burada değişimin tamamen şansa olup olmadığını test edelim. Yani;
  - $H_0 : \mu = 0$
  - $H_1 : \mu \neq 0$

$$t_{\alpha/2, n-1} = t_{0,025, 49} \approx 2,009$$

$$|T| = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{14,8 - 0}{6,4 / \sqrt{50}} \right| = 16,352$$

  - 16,352 değeri 2,937 değerinden büyük olduğu için hipotezi reddederiz. Yani hastaların kolesterol seviyelerinde gerçekten bir düşme olmuştur. Fakat bunun ilaç kaynaklı olup olmadığını belirlemek için diğer etkilere de bakmak gerekir.

Örnek 2

- Bir sağlık il müdürlüğü görevlisi ortalama musluk suyu kullanımının ev başına günlük 350 lt. olduğunu iddia etmektedir. Bu iddiayı doğrulamak için 20 ev rastgele seçilmiş ve günlük su kullanımları kaydedilmiştir. 20 evin günlük kullanımları şu şekilde kaydedilmiştir;

340	344	362	375	318
356	386	354	364	360
332	402	340	355	338
362	322	372	324	370

- Bu veri iddia ile tutarlı mıdır?

Örnek 2

- Bir sağlık il müdürlüğü görevlisi ortalama musluk suyu kullanımının ev başına günlük 350 lt. olduğunu iddia etmektedir. Bu iddiayı doğrulamak için 20 ev rastgele seçilmiş ve günlük su kullanımları kaydedilmiştir. 20 evin günlük kullanımları şu şekilde kaydedilmiştir;

340	344	362	375	318
356	386	354	364	360
332	402	340	355	338
362	322	372	324	370

- Bu veri iddia ile tutarlı mıdır?
- Verilerin ortalaması 353,8 ve standart sapması 21,8478

Örnek 2

- Bir sağlık il müdürlüğü görevlisi ortalama musluk suyu kullanımının ev başına günlük 350 lt. olduğunu iddia etmektedir. Bu iddiayı doğrulamak için 20 ev rastgele seçilmiş ve günlük su kullanımları kaydedilmiştir. 20 evin günlük kullanımları şu şekilde kaydedilmiştir;
- Verilerin ortalaması 353,8 ve standart sapması 21,8478
- Önem seviyesi 0,1 olsun (yani hata tipi I ihtimali %10 olsun).
  - $H_0 : \mu = 350$
  - $H_1 : \mu \neq 350$

$$|T| = \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{353,8 - 350}{21,8478 / \sqrt{20}} \right| = 0,7778$$

$$t_{\alpha/2, n-1} = t_{0,05, 19} = 1,730$$

  - 0,7778 değeri 1,730 değerinden küçük olduğu için hipotezi kabul ederiz. Yani veriler yetkilinin iddiası ile tutarlıdır.

Varyansın bilinmediği durum: Tek-taraflı t-Testi

- Hipotez test problemi:
  - $H_0 : \mu = \mu_0$ (veya $\mu \leq \mu_0$)
  - $H_1 : \mu > \mu_0$
- Bu hipotez test problemi de varyans bilindiğindeki tek-taraflı test ile benzerlik gösterir.
- Yani H_0'ı;
  - reddet et, eğer $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} > t_{\alpha, n-1}$
  - kabul et, eğer $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \leq t_{\alpha, n-1}$

Tek taraflı t-testi

Varyansın bilinmediği durum: Diğer bir tek-taraflı t-Testi

- Hipotez test problemi:
  - $H_0 : \mu = \mu_0$ (veya $\mu \geq \mu_0$)
  - $H_1 : \mu < \mu_0$
- Bu hipotez test problemi de varyans bilindiğindeki tek-taraflı test ile benzerlik gösterir.
- Yani H_0'ı;
  - reddet et, eğer $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} < -t_{\alpha, n-1}$
  - kabul et, eğer $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \geq -t_{\alpha, n-1}$

Tek taraflı t-testi

Örnek 3

- Yeni bir fiberglass araba lastiği üreticisi lastiklerin ortalama yaşam süresinin en az 40.000 km olduğunu iddia etmektedir. Bu iddiayı doğrulamak için 12 adet lastik test edilmiştir ve yaşam süreleri aşağıdaki gibidir (birim x1000km).

Lastik	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Yaşam Süresi	36,1	40,2	33,8	38,5	42	35,8	37	41	36,8	37,2	33	36

- Üreticinin iddiasını %5 önem seviyesine göre test edin.

Örnek 3

- Yeni bir fiberglass araba lastiği üreticisi lastiklerin ortalama yaşam süresinin en az 40.000 km olduğunu iddia etmektedir. Bu iddiayı doğrulamak için 12 adet lastik test edilmiştir ve yaşam süreleri aşağıdaki gibidir (birim x1000km).

Lastik	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Yaşam Süresi	36,1	40,2	33,8	38,5	42	35,8	37	41	36,8	37,2	33	36

- Bu verilerin ortalaması 37,2833 ve standart sapması 2,7319.

Örnek 3

- Yeni bir fiberglass araba lastiği üreticisi lastiklerin ortalama yaşam süresinin en az 40.000 km olduğunu iddia etmektedir. Bu iddiayı doğrulamak için 12 adet lastik test edilmiştir ve yaşam süreleri aşağıdaki gibidir (birim x1000km).
- Bu verilerin ortalaması 37,2833 ve standart sapması 2,7319.
- Önem seviyesi %5'e göre test edelim.
  - $H_0 : \mu \leq 40$
  - $H_1 : \mu > 40$

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} = \frac{37,2833 - 40}{2,7319 / \sqrt{12}} = -3,4448$$

$$t_{\alpha, n-1} = t_{0,05,11} = 1,796$$

  - -3,4448 değeri 1,796 değerinden küçük olduğu için hipotezi kabul ederiz. Yani veriler üreticinin iddiası ile tutarsızdır.

İki Normal Popülasyonun beklentilerinin eşitliği testi

- Bazen mühendisler olarak iki farklı yaklaşımın aynı sonucu verip vermediğini merak ederiz. Bunu için iki normal popülasyonun beklentilerinin eşit olması hipotezini test ederiz.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ beklentisi (μ_x) bilinmeyen ama varyansı (σ_x^2) bilinen bir popülasyondan ve $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ beklentisi (μ_y) bilinmeyen ama varyansı (σ_y^2) bilinen başka bir popülasyondan seçilmiş rastgele örnekler olsun.

İki Normal Popülasyonun beklentilerinin eşitliği testi

- Hipotez test problemi:
  - $H_0 : \mu_x = \mu_y$
  - $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$
- X değerlerinin örnekleme ortalaması μ_x'yi ve Y değerlerinin örnekleme ortalaması μ_y'yi tahmin etmek için kullanılabileceğinden bu ortalamaların farkı da μ_x - μ_y tahmin etmek için kullanılabilir. Bu durumda $H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$ yazılabilir.
- Bu durumda test H_0'ı;
  - reddet et, eğer $\left| \overline{X} - \overline{Y} \right| > c$
  - kabul et, eğer $\left| \overline{X} - \overline{Y} \right| \leq c$

İki Normal Popülasyonun beklentilerinin eşitliği testi

- c değerini belirlemek için örnekleme ortalamalarının birbirlerinden uzaklığının hipotez doğru iken dağılımına bakmalıyız.

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}\right)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

- Eğer H_0 doğru ise ($\mu_x - \mu_y = 0$): $Z = \left(\overline{X} - \overline{Y}\right) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$

İki Normal Popülasyonun beklentilerinin eşitliği testi

- Hipotez test problemi:
  - $H_0 : \mu_x = \mu_y$
  - $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$

- Yani H_0'ı;
  - reddet et, eğer $\dfrac{\left|\overline{X} - \overline{Y}\right|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n} + \dfrac{\sigma_y^2}{m}}} > z_{\alpha/2}$
  - kabul et, eğer $\dfrac{\left|\overline{X} - \overline{Y}\right|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n} + \dfrac{\sigma_y^2}{m}}} \leq z_{\alpha/2}$

İki Normal Popülasyonun beklentilerinin eşitliği testi Tek-taraflı

- Hipotez test problemi:
  - $H_0 : \mu_x = \mu_y \; (\mu_x \leq \mu_y)$
  - $H_1 : \mu_x > \mu_y$

- Yani H_0'ı;
  - reddet et, eğer $$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} > z_\alpha$$
  - kabul et, eğer $$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \leq z_\alpha$$

Örnek 4

- Araç lastiği üretmek için iki yeni metot geliştirilmiştir. Hangisini daha iyi olduğuna karar vermek için bir lastik üreticisi birinci metodu kullanarak 10 lastik ve ikinci metodu kullanarak 8 lastik üretmiştir.
- Birinci metotla üretilen lastikler A şehrinde yol testine tabi tutulmuş ve yaşam süreleri ortalamaları 61.550 km olarak hesaplanmıştır. A yolunda yapılan testlerde genel olarak lastiklerin yaşam sürelerinin standart sapması 4.000 km olan bir Normal dağılımla ifade edildiği biliniyor.
- İkinci metotla üretilen lastikler ise B şehrinde yol testine tabi tutulmuş ve yaşam süreleri ortalamaları 60.025 km olarak hesaplanmıştır. B yolunda yapılan testlerde genel olarak lastiklerin yaşam sürelerinin standart sapması 6.000 km olan bir Normal dağılımla ifade edildiği biliniyor.
- Üretici bu testler sonucunda iki metodun eşdeğer olduğunu düşünüyorsa, üreticinin bu iddiasını %5 önem seviyesi için test edin?

Örnek 4

- Araç lastiği üretmek için iki yeni metot geliştirilmiştir. Hangisini daha iyi olduğuna karar vermek için bir lastik üreticisi birinci metodu kullanarak 10 lastik ve ikinci metodu kullanarak 8 lastik üretmiştir.
- Birinci metot ortalama yaşam süresi 61.550 km, standart sapma 4.000 km.
- İkinci metotla ortalama yaşam süresi 60.025 km standart sapması 6.000 km.
- Önem seviyesi %5.
  - $H_0 : \mu_x = \mu_y$
  - $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$

$$\frac{\left|\bar{X} - \bar{Y}\right|}{\sqrt{\sigma_x^2 / n + \sigma_y^2 / n}} = \frac{\left|61.550 - 60.025\right|}{\sqrt{(4000)^2 / 10 + (6000)^2 / 8}} = 0,6174$$

$$z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$$

  - 0,6174 değeri 1,96 değerinden küçük olduğu için sıfır hipotezi kabul edilir.

Bernoulli Popülasyonlarında Hipotez Testleri

- Binomial dağılımla mühendislik problemlerinde sıklıkla karşılaşırız. Örneğin üretilen ürünlerin kabul edilebilir ve bozuk olarak ikiye ayrıldığı bir üretim sürecini düşünelim ve bir ürünün bozuk olma ihtimalinin p olduğunu varsayalım.
- Bu durumda bu üründen aldığımız n tane örnek için oluşan bir binomial dağılım için aşağıdaki testi düşünelim. Burada p_0 sabit bir sayıdır.
  - $H_0 : p \leq p_0$
  - $H_1 : p > p_0$

Bernoulli Popülasyonlarında Hipotez Testleri

- Eğer X, n boyutlu örnek içerisinde bozuk olan ürünlerin sayısı ise, X çok büyük olduğunda H_0'ı reddedebiliriz. α önem seviyesinde reddedebilmek için X ne kadar büyük olmalıdır?
- Eğer n çok büyük ise Merkezi Limit Teoremine göre Binomial dağılım, normal dağılıma yakınsanabilir.

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

Bernoulli Popülasyonlarında Hipotez Testleri

$$P\{X \geq c\} = \alpha \Rightarrow P\left\{\frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \geq \frac{c - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right\} = \alpha$$

$$\Rightarrow P\left\{\frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \geq z_\alpha\right\} = \alpha$$

- Yani H_0'ı;
  - reddet et, eğer $\dfrac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \geq z_\alpha$
  - kabul et, eğer $\dfrac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} < z_\alpha$

Örnek 5

- Bir çip üreticisi piyasaya sürdüğü çiplerin arızalı olanların oranının %2'den daha az olduğunu iddia etmektedir. Bir elektronik firması bu iddiadan etkilenerek yüklü miktarda çip almıştır. Firma, üreticinin iddiasını test etmek için 300 adet çip örneğinden 10 tanesinin arızalı olduğunu tespit etmiştir. Bu durumda üreticin iddiasını reddedilebilir mi?

Örnek 5

- Bir çip üreticisi piyasaya sürdüğü çiplerin arızalı olanların oranının %2'den daha az olduğunu iddia etmektedir. Bir elektronik firması bu iddiadan etkilenerek yüklü miktarda çip almıştır. Firma, üreticinin iddiasını test etmek için 300 adet çip örneğinden 10 tanesinin arızalı olduğunu tespit etmiştir. Bu durumda üreticin iddiasını reddedilebilir mi?
- %5 önem seviyesi ile hipotezi test edelim. Burada X değerini 10 yerine 9,5 alırız (süreklilik uyumluluğu için).

$$\frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{9,5-(300)(0,02)}{\sqrt{(300)(0,02)(0,98)}} = 1,443 \qquad z_\alpha = z_{0,05} = 1,645$$

- 1,443 değeri 1,645 değerinden küçük olduğu için üreticinin iddiasını kabul edebiliriz.