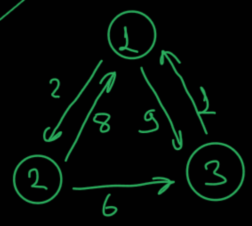
Floyd Warshall

→ Bu algoritma bir grafta bir düğümden diğer herhangi bir düğüme gitmek için kullanılabilecek yollardan en kısasını tespit etmek için kullanılır. Dinamik bir yaklaşımdır.

→ $d^{k}_{i,j}$ → i'den j'ye en kısa yolun uzunluğudur.

$$d^{k}_{i,j} = \begin{cases} l(i,j) & \text{if } k=0 \\ \min\left\{ d^{k-1}_{i,j},\ d^{k-1}_{i,k} + d^{k-1}_{k,j} \right. & \text{if } 1 \le k \le n \end{cases}$$

Örnek



Yönlü grafın tablosunu oluşturalım.

1'den 1'e, 1'den 2'ye, 1'den 3'e, 3'den 2'ye

Adım 1 → D_0 =

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 8 & 0 & 6 \\ 1 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$k=0$

$i=1,\ k=1,\ j=1$'den n'e kadar — 3

$D(1,1) = \min\{ D_0(1,1),\ D_0(1,1) + D_0(1,1) \} = 0$

$D(1,2) = \min(D_0(1,2),\ D_0(1,1) + D_0(1,2) \} = 2$

$D(1,3) = \min\{ D_0(1,3),\ D_0(1,1) + D_0(1,3) \} = 9$

$i=2,\ k=1,\ j=1$'den n'e kadar

$D(2,1) = \min\{ D_0(2,1),\ D_0(2,1) + D(1,1) \} = 8$

$D(2,2) = \min\{ D_0(2,2),\ D_0(2,1) + D_0(1,2) \} = 0$

$D(2,3) = \min\{ D_0(2,3),\ D_0(2,1) + D_0(1,3) \} = 6$

$i=3,\ k=1,\ j=1$'den n'e kadar

$D(3,1) = \min\{ D_0(3,1),\ D_0(3,1) + D_0(1,1) \} = 1$

$D(3,2) \min\{ D_0(3,2),\ \underline{D_0(3,1) + D_0(1,2)} \} = 3$ yeni

$D(3,3) \min\{ D_0(3,3),\ D_0(3,1) + D_0(1,3) \} = 0$

1 nolu düğüme uğrayarak hedef düğüme gideceğiz $k=1$

→ D_1 =

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 8 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu eleman değişti.

i = 1'den n'e kadar değişecek ve her i değeri için j'de 1'den n'e kadar gidecek. Ve bu hesap k=1'den k=n'e kadar yapılacak.

Hesap yükü = $O(n^3)$ olur.

→ $k=1$ için hesap yaptık ve D_0 matrisini D_1 matrisine güncelledik. Şimdi aynı hesapları $k=2$ için yapacağız ve D_2 matrisini oluşturacağız. Güncel matrisimiz D_1 olduğu için hesaplarda onu kullanacağız.

$i=1$, $k=2$ için $j=1$'den n'e kadar

$$D(1,1) = \min\{D_1(1,1),\ D_1(1,2)+D_1(2,1)\} = 0$$

$$D(1,2) = \min\{D_1(1,2),\ D_1(1,2)+D_1(2,2)\} = 2$$

$$D(1,3) = \min\{D_1(1,3),\ \underline{D_1(1,2)+D_1(2,3)}\} = 8$$ yeni

$i=2$, $k=2$ için $j=1$'den n'e kadar

$$D(2,1) = \min\{D_1(2,1),\ D_1(2,2)+D_1(2,1)\} = 8$$

$$D(2,2) = \min\{D_1(2,2),\ D_1(2,2)+D_1(2,2)\} = 0$$

$$D(2,3) = \min\{D_1(2,3),\ D_1(2,2)+D_1(2,3)\} = 6$$

$i=3$, $k=2$ için $j=1$'den n'e kadar

$$D(3,1) = \min\{D_1(3,1),\ D_1(3,2)+D_1(2,1)\} = 1$$

$$D(3,2) = \min\{D_1(3,2),\ D_1(3,2)+D_1(2,2)\} = 3$$

$$D(3,3) = \min\{D_1(3,3),\ D_1(3,2)+D_1(2,3)\} = 0$$

$$\rightarrow D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 8 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$k=3$ için, D_2 tablosuna göre D_3 hesabı yapılacak

$i=1$, $k=3$ için $j=1$'den n'e kadar

$$D(1,1) = \min\{D_2(1,1),\ D(1,3)+D(3,1)\} = 0$$

$$D(1,2) = \min\{D_2(1,2),\ D(1,3)+D(3,2)\} = 2$$

$$D(1,3) = \min\{D_2(1,3),\ D(1,3)+D(3,3)\} = 8$$

$i=2$, $k=3$ için $j=1$'den 3'e

$$D(2,1) = \min\{D_2(2,1),\ \underline{D_2(2,3)+D_2(3,1)}\} = 7$$ yeni

$$D(2,2) = \min\{D_2(2,2),\ D_2(2,3)+D_2(3,2)\} = 0$$

$$D(2,3) = \min\{D_2(2,3),\ D_2(2,3)+D_2(3,3)\} = 6$$

$i=3$, $k=3$ için $j=1$'den 3'e kadar

$$D(3,1) = \min\{D_2(3,1),\ D_2(3,3)+D_2(3,1)\} = 1$$

$$D(3,2) = \min\{D_2(3,2),\ D_2(3,3)+D_2(3,2)\} = 3$$

$$D(3,3) = \min\{D_2(3,3),\ D_2(3,3)+D_3(3,3)\} = 0$$

$$\rightarrow \underline{D_3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 7 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

D_n olduğunda işlemlerin sonuna geldik demektir. Güncel tablomuz bu. Bu en kısa yolları içermektedir.

Bu soru için $3^3 = 27$ maliyet yaptık. Bu yaklaşımın maliyeti: $O(n^3)$ ile sabittir. Sabitlikten dolayı $\underset{(tek)}{\Theta(n^3)}$ ile gösterilir. Bellek maliyeti: $\underset{= n^2}{i \times j}$ 'dir. Bu soru için $\Theta(n^2)$ 'den gider.