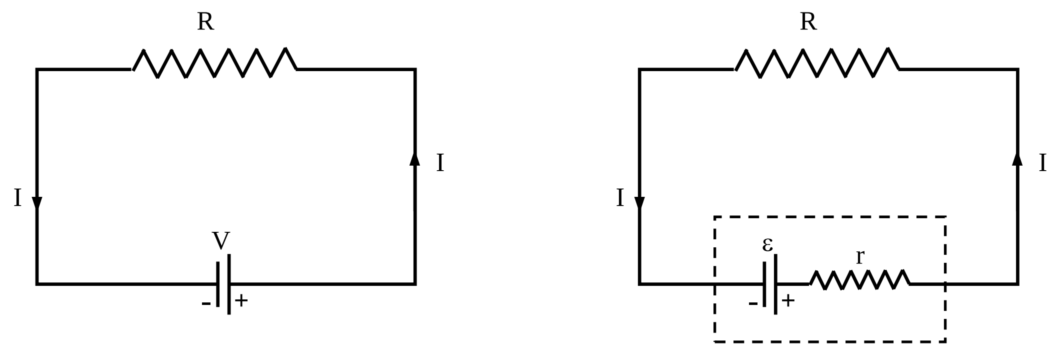
BÖLÜM 6

DOĞRU AKIM DEVRELERİ

6.1. ELEKTROMOTOR KUVVET



Şekil 6.1. a) Bir bataryanın uçarına bağlı bir dirençten ibaret devre. **b)** emk'sı ε, iç direnci r olan bir kaynağın R dış direncine bağlı olduğunu gösteren devre.

Şekildeki batarya, ε emk kaynağı ile ona seri bağlı olan r iç direncinden oluşmaktadır. Yük, bataryanın negatif ucundan pozitif ucuna geçtiğinde potansiyeli ε kadar artar. Fakat yük, r direncinden geçerken potansiyeli Ir kadar azalır. O halde bataryanın uçları arasındaki voltaj

$$V = \varepsilon - Ir$$

olur. Burada ε, açık devre voltajıdır. Yani akım yokken bataryanın kutupları arasındaki voltajdır. Çıkış voltajı V, dış direnç R'nin (yük direnci) uçları arasındaki potansiyel farkına eşittir.

$$V = IR$$

O halde devredeki akım,

$$\varepsilon = Ir + IR \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

olur. $\varepsilon = Ir + IR$ eşitliğini I ile çarparsak

$$\varepsilon I = I^2 r + I^2 R$$

elde edilir. Bu, emk'nın çıkış gücü $I\varepsilon$'nin yük direncinde joule ısısı olarak harcanan I^2R gücü ile, iç dirençte harcanan I^2r gücüne dönüştüğünü söyler.

Örnek: Bir batarya 15 V'luk bir emk'ya sahiptir. R gibi bir dış yük direncine 20 W'lık bir güç sağlandığında bataryanın çıkış voltajı 10 V'tur. .

a) R'nin değeri nedir?

b) Bataryanın iç direnci nedir?

Çözüm:

a) $P = \dfrac{V^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{V^2}{P} = \dfrac{10^2}{20} \quad \Rightarrow \quad R = 5\ \Omega$

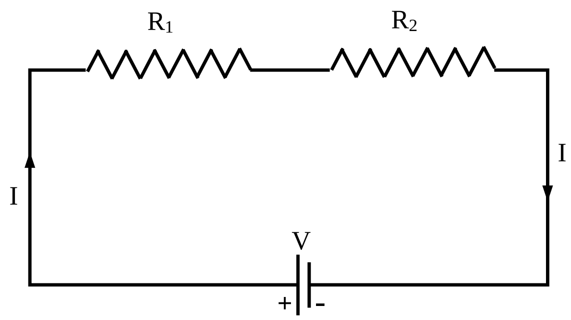
b) $V = IR \quad \Rightarrow \quad I = \dfrac{V}{R} = \dfrac{10}{5} \quad \Rightarrow \quad I = 2\ A$

$\varepsilon = Ir + IR$

$15 = 2.r + 2.5 \quad \Rightarrow \quad r = 2,5\ \Omega$

6.2. SERİ VE PARALEL BAĞLI DİRENÇLER

İki veya daha fazla direnç, çift başına sadece tek bir ortak noktaya sahipse bu dirençler seri bağlıdır. Bu devrede R_1 direncinden akan yük, R_2 direncinden akan yüke eşit olduğundan bütün dirençler içerisinden geçen akım aynıdır.



Şekil 6.2. İki tane direncin seri olarak bağlanması.

$$V = IR_1 + IR_2$$

$$IR_{eş} = I\,(R_1 + R_2)$$

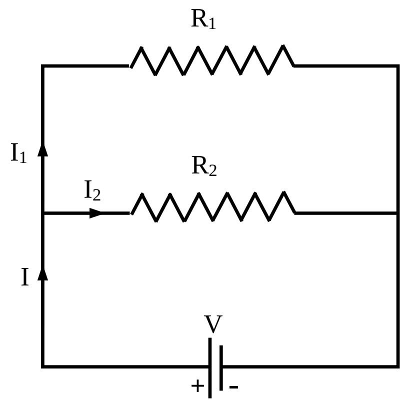
$$R_{eş} = R_1 + R_2$$

İkiden fazla direnç olduğundan eş değer direnç

$$R_{eş} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

eşitliğinden bulunur.

Paralel bağlı dirençler durumunda, her bir direncin uçları arasındaki potansiyel farkı eşittir. Fakat, her bir dirençten geçen akım genelde aynı değildir.



Şekil 6.3. R_1 ve R_2 gibi iki direncin paralel bağlanması

$$I = I_1 + I_2$$

$$\frac{V}{R_{eş}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

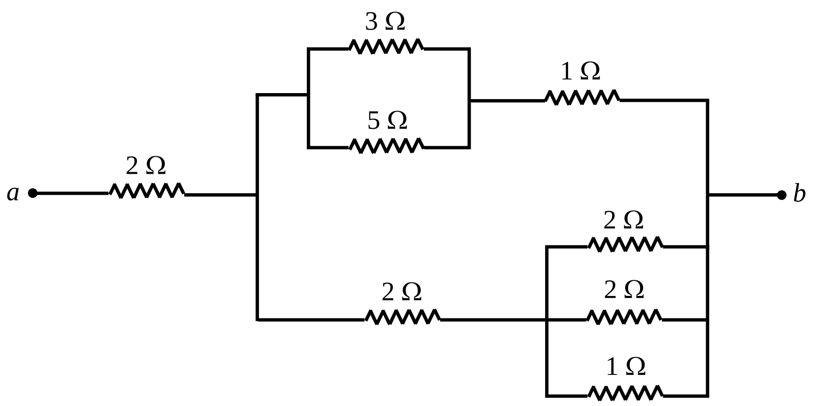
$$\frac{1}{R_{eş}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

İkiden fazla direnç olduğundan eş değer direnç

$$\frac{1}{R_{eş}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ...$$

eşitliğinden bulunur.

Örnek:

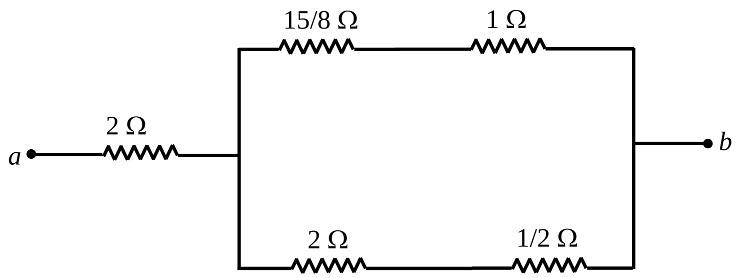


Şekilde gösterilen devre için *a* ve *b* uçları arasındaki eşdeğer direnci bulunuz.

Çözüm:

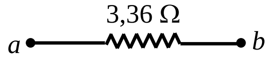
$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \qquad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

$$R_1 = \frac{1}{2}\,\Omega \qquad R_2 = \frac{15}{8}\,\Omega$$



$$\left.\begin{aligned} R_3 &= \frac{15}{8} + 1 = \frac{23}{8}\,\Omega \\ R_4 &= \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}\,\Omega \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{R_5} = \frac{1}{\frac{23}{8}} + \frac{1}{\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad R_5 = \frac{115}{86}\,\Omega$$

$$R_{eş} = \frac{115}{86} + 2 = \frac{289}{86} = 3{,}36\,\Omega$$



Örnek: Seri bağlı iki direnç 690 Ω'luk eşdeğer dirence sahiptir. Bunlar paralel olarak bağlandıklarında eşdeğer direnç 150 Ω olmaktadır. Her bir direncin değerini bulunuz.

Çözüm:

$R_{eş} = R_1 + R_2 = 690\ \Omega \qquad \Rightarrow \qquad R_1 = 690 - R_2$

$$\frac{1}{R_{eş}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{150} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{690 - R_2} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{150}$$

$$\frac{690 - R_2 + R_2}{(690 - R_2)R_2} = \frac{1}{150}$$

$$R_2^2 - 690R_2 + 103500 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 250$$

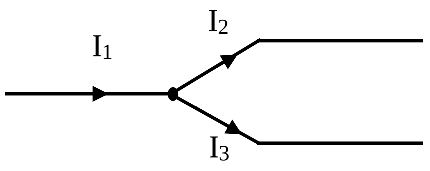
$$R_2 = \frac{-690 \mp 250}{2} \qquad \Rightarrow \qquad R_2 = 470\ \Omega$$

$$R_2 = 220\ \Omega$$

$R_1 = 220\ \Omega, \quad R_1 = 470\ \Omega$

6.3. KIRCHHOFF KURALLARI

1. Herhangi bir düğüm noktasına gelen akımların toplamı, bu düğüm noktasını terk eden akımların toplamına eşit olmalıdır. Düğüm noktası, devredeki akımın kollara ayrıldığı herhangi bir noktadır.



$I_1 = I_2 + I_3$

2. Herhangi bir kapalı devre boyunca bütün devre elemanlarının uçları arasındaki potansiyel değişimlerinin cebirsel toplamı sıfır olmalıdır.

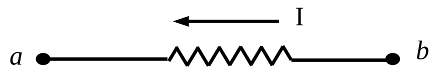
$$\sum \Delta V_i = 0$$

Bu kuralların uygulanmasında şu hususlara dikkat edilmelidir.

a) Bir direnç akım yönünde geçiliyorsa, direncin uçları arasındaki potansiyel değişimi – IR'dir.

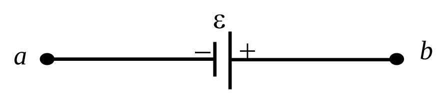
$\Delta V = V_b - V_a = - IR$

b) Direnç akıma ters yönde geçiliyorsa direncin uçları arasındaki potansiyel değişimi + IR'dir.



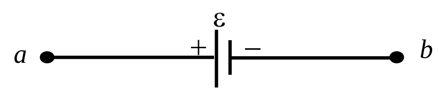
$\Delta V = V_b - V_a = + IR$

c) Bir emk kaynağı, emk yönünde (- uçtan + uca) geçiliyorsa potansiyel değişimi + ε'dir.



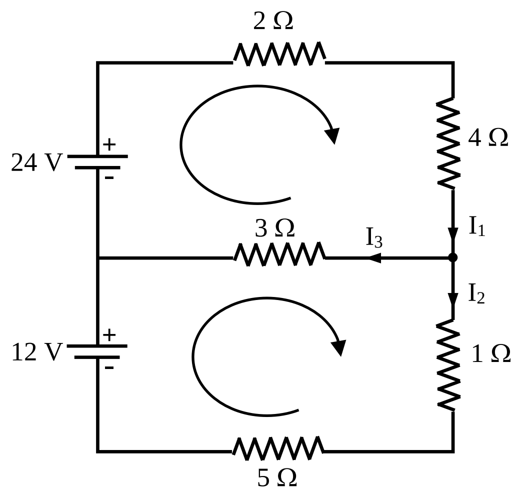
$\Delta V = V_b - V_a = + \varepsilon$

d) Bir emk kaynağı, emk'nin tersi yönünde (- uçtan + uca) geçiliyorsa potansiyel değişimi - ε'dir.



$\Delta V = V_b - V_a = - \varepsilon$

Örnek: Şekildeki devrede I_1, I_2 ve I_3 akımlarını bulunuz.



Çözüm:

Kirchoff'un 1. kuralı

$I_1 = I_2 + I_3$

Kirchoff'un 2. kuralı

Üst halka için

$24 - 2I_1 - 4I_1 - 3I_3 = 0$ $\qquad 2I_1 + I_3 = 8$

$\qquad I_3 = 8 - 2I_1$

Alt halka için

$12 + 3I_3 - 1I_2 - 5I_2 = 0$ $\qquad 2I_2 - I_3 = 4$

Taraf tarafa toplanırsa $\qquad I_1 + I_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 6 - I_1$

1. kuralda yerine konulduğunda

$I_1 = 6 - I_1 + 8 - 2I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 3{,}5$ A

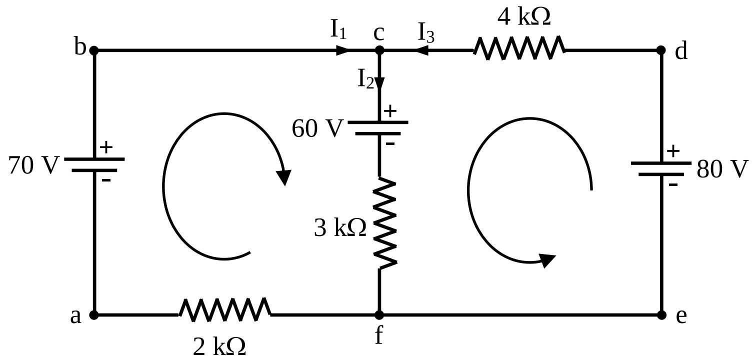
$I_2 = 6 - I_1 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 2{,}5$ A

$I_3 = 8 - 2I_1 \quad \Rightarrow \quad I_3 = 1$ A

Örnek: a) Şekildeki devrede I_1, I_2 ve I_3 akımlarını bulunuz.

b) c ve f noktaları arasındaki potansiyel farkı bulunuz.

Çözüm:



a)

Kirchoff'un 1. kuralı

$I_1 + I_3 = I_2$

Kirchoff'un 2. kuralı

Sol halka için

$70 – 60 - 3.10^3 I_2 – 2.10^3 I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3.10^3 I_2 + 2.10^3 I_1 = 10$

$I_1 = (10 - 3.10^3 I_2) / 2.10^3$

Sağ halka için

$80 - 60 – 4.10^3 I_3 – 3.10^3 I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3.10^3 I_2 + 4.10^3 I_3 = 20$

$I_3 = (20 - 3.10^3 I_2) / 4.10^3$

1. kuralda yerine konulduğunda

$(10 - 3.10^3 I_2) / 2.10^3 + (20 - 3.10^3 I_2) / 4.10^3 = I_2$

$40 = 13.10^3 I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 3{,}077$ mA

$I_1 = (10 - 3.10^3 I_2) / 2.10^3 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 0{,}385$ mA

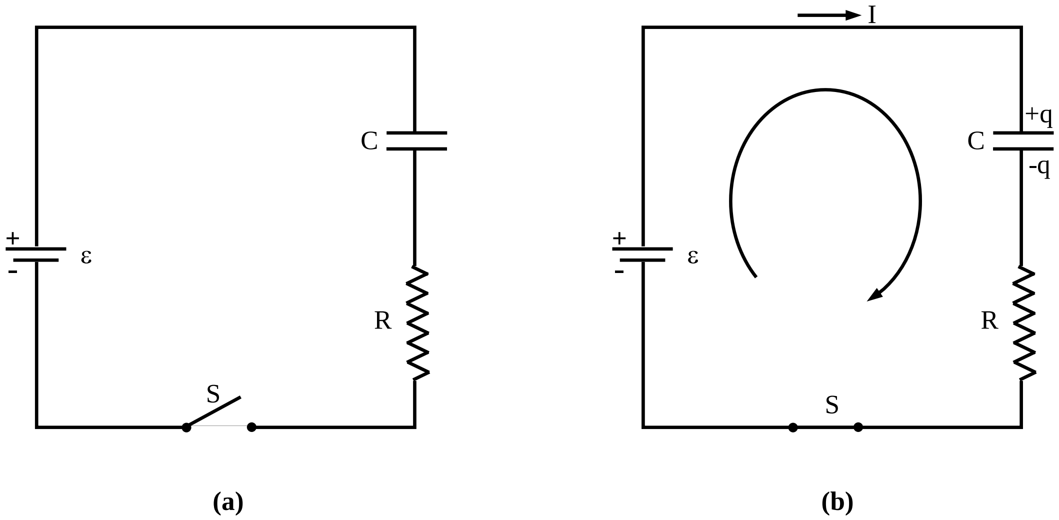
$I_3 = (20 - 3.10^3 I_2) / 4.10^3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = 2{,}692$ mA

b) $V_{cf} = -60 – 3.3{,}077$

$V_{cf} = -69.23$ V

6.4. RC DEVRELERİ

6.4.1. Bir kondansatörün Yüklenmesi



Şekil 6.4. Bir direnç, bir batarya ve bir anahtar ile seri bağlı kondansatör

Şekil 6.4a'da S anahtarı açıkken kondansatör yüksüz ve akım yoktur. Şekil 6.4b'de anahtar kapatıldıktan sonra bir akım meydana gelir ve

$$\varepsilon - IR - \frac{q}{C} = 0$$

olur. Burada IR direncin uçları arasındaki, $\frac{q}{C}$ kondansatörün uçları arasındaki potansiyel düşmesidir. Devredeki akımın başlangıç değeri t = 0 anında kondansatör üzerindeki yük sıfır olduğundan

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

olur. Daha sonra kondansatör maksimum Q değerine ulaştığında yük akımı durur ve akım sıfır olur. O halde

$$Q = C\varepsilon$$

olur.

Yük ve akımın zamana bağlı ifadeleri de şöyle olur.

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon - IR - \frac{q}{C}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - R\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

$$R\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{C}I$$

$$\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = \int_0^t -\frac{1}{RC}dt \quad \Rightarrow \quad \ell n\frac{I}{I_0} = -\frac{1}{RC}t$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\int_0^q dq = \int_0^t \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}dt$$

$$q = \frac{\varepsilon}{R}\left(-RCe^{-\frac{t}{RC}}\Big|_0^t\right) \quad \Rightarrow \quad q = -\varepsilon C\left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1\right)$$

$$q = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Bu ifadelerdeki RC niceliğine devrenin τ zaman sabiti denir. Bu, akımın başlangıç değerinin 1/e katına düşmesi için geçen zamanı gösterir. Yani τ zamanında $I = \frac{I_0}{e} = 0{,}37I_0$ olması demektir.

Örnek: t = 0'da, C sığalı yüksüz bir kondansatör sabit bir ε emk'ya sahip bir aküye R direnci üzerinden bağlıdır.

a) Kondansatör, ulaşabileceği maksimum yük değerinin yarısına sahip olması için ne kadar zaman geçer?

b) Kondansatörün tamamen yüklenmesi için ne kadar zaman geçer?

Çözüm:

a) $$q(t) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{2} = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

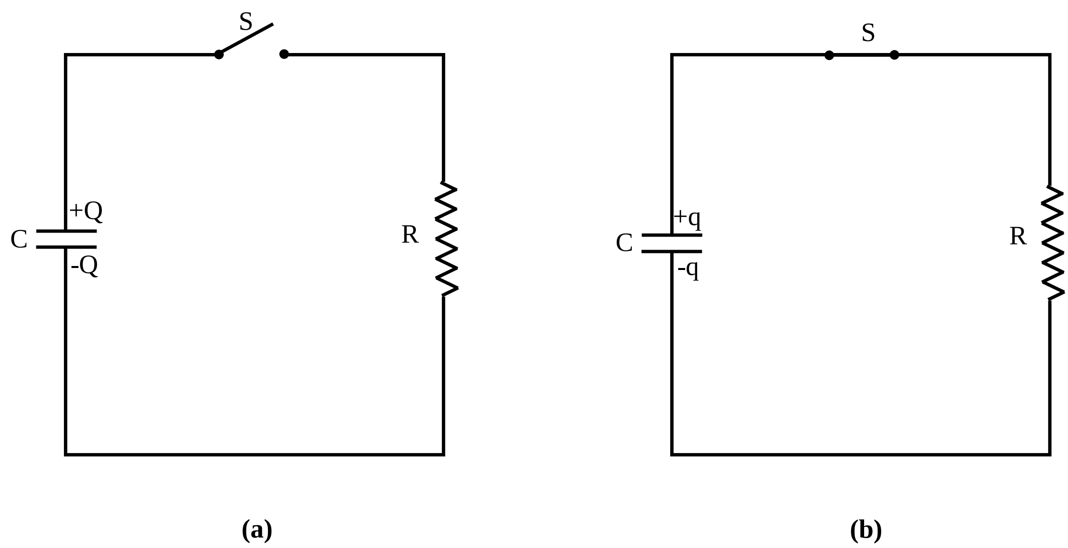
$$t = -RC\,\ell n\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}693RC$$

b) $$Q = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$0 = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{t}{RC} = -\ell n 0 \quad \Rightarrow \quad t = \infty$$

6.4.1. Bir Kondansatörün Boşalması



Şekil 6.5. Bir direnç ve bir anahtara bağlı yüklü bir kondansatör

Başlangıçta kondansatörün uçlarında Q/C'lik bir potansiyel farkı vardır. Akım sıfır olduğundan direncin uçlarında potansiyel farkı sıfırdır. Anahtar kapatıldığında kondansatör direnç üzerinden boşalmaya başlar ve devredeki akım I ve kondansatör üzerindeki yük q olur. O halde $IR = \frac{q}{C}$ olur. Devredeki akım, kondansatörün üzerindeki yükün azalma hızına eşit olmalıdır: $I = -\frac{dq}{dt}$

$$-\frac{dq}{dt}R = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad \int_Q^q \frac{dq}{q} = \int_0^t -\frac{1}{RC}dt$$

$$\ell n q\Big|_Q^q = -\frac{1}{RC}t\Big|_0^t \quad \Rightarrow \quad \ell n\frac{q}{Q} = -\frac{t}{RC}$$

$$\ell n q = \ell n Q - \frac{t}{RC}$$

$$q = Qe^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q = Qe^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = Q\left(-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Örnek: 5,1 μC'luk bir başlangıç yüküne sahip 2.10^{-3} μF'lık bir kondansatör 1300 Ω'luk bir direnç üzerinden boşalmaktadır.

a) Kondansatörün uçlarına bağlandıktan 9 μs sonra dirençten geçen akımı hesaplayınız.

b) 8 μs sonra kondansatör üzerinde ne kadar yük birikir?

Çözüm:

a) $I_0 = \dfrac{Q}{RC} = \dfrac{5{,}1.10^{-6}}{1{,}3.10^{3}.2.10^{-9}} \quad \Rightarrow \quad I_0 = 1{,}96\ \text{A}$

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad I = 1{,}96.e^{-\frac{9}{1{,}3.10^{3}.2.10^{-9}}}$$

$I = 1{,}96.0{,}0314$

$I = 0{,}0615\ \text{A} = 61{,}5\ \text{mA}$

b) $q = Qe^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad q = 5{,}1.10^{-6} e^{-\frac{8}{1{,}3.10^{3}.2.10^{-9}}}$

$q = 5{,}1.10^{-6}.0{,}046$

$q = 0{,}235.10^{-6}\ \text{C} = 0{,}235\ \mu\text{C}$

Problemler

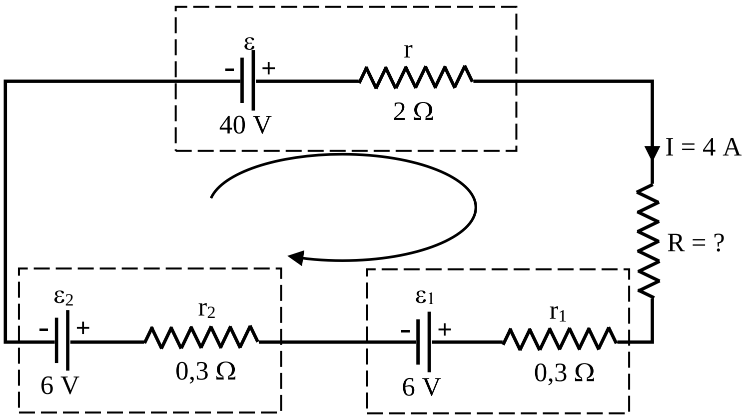
1. Bir dc güç kaynağı, 40 V'luk bir açık devre emk'sı ve 2 Ω'luk bir iç dirence sahiptir. Bu kaynak, her biri 6 V'luk emk'sı ve 0,3 Ω'luk iç dirence sahip seri bağlı iki aküyü şarj etmek için kullanılmaktadır. Şarj akımı 4 A ise;

a) Seri olarak bağlanması gereken ilave direncin değeri ne olmalıdır?

b) Güç kaynağı, aküler ve ilave dirençte kaybolan gücü bulunuz.

c) Ne kadarlık bir güç aküler içerisinde kimyasal enerjiye dönüşür?

Çözüm:



a) $\varepsilon - Ir - IR - Ir_1 - \varepsilon_1 - Ir_2 - \varepsilon_2 = 0$

$40 - 4.2 - 4R - 4.0,3 - 6 - 4.0,3 - 6 = 0$

$4R = 17,6$

$R = 4,4\ \Omega$

b) $P = I^2R$

$P = 4^2(2 + 4,4 + 0,3 + 0,3)$

$P = 112$ W

c) $P = I\varepsilon_1 + I\varepsilon_2$

$P = 4(6 + 6)$

$P = 48$ W

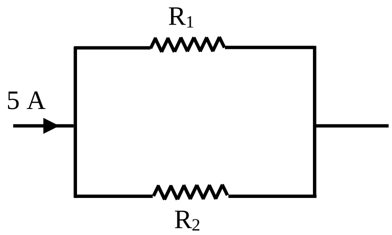
2. İki tane bilinmeyen direnç seri bağlandığında 5 A'lik toplam bir akım ile 225 W'lık bir güç harcanmaktadır. Dirençler paralel bağlandığında aynı toplam akım için 50 W'lık bir güç harcanmaktadır. Dirençlerin değerlerini tayin edin.

Çözüm:

$P = 225\ W$

$P = I^2 R_{eş}$

$225 = 5^2 R_{eş} \qquad R_{eş} = 9\ \Omega$



$P = 50\ W$

$P = I^2 R_{eş}$

$50 = 5^2 R_{eş} \qquad R_{eş} = 2\ \Omega$

$R_{eş} = R_1 + R_2 \qquad \dfrac{1}{R_{eş}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

$9 = R_1 + R_2 \qquad \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{9 - R_2} + \dfrac{1}{R_2}$

$R_1 = 9 - R_2 \qquad \dfrac{1}{2} = \dfrac{R_2 + 9 - R_2}{R_2(9 - R_2)} \Rightarrow 18 = 9R_2 - R_2^2$

$R_2^2 - 9R_2 + 18 = 0$

$\Delta = 81 - 4.18$

$\sqrt{\Delta = 3}$

$$R_2 = \frac{9 \mp 3}{2}$$

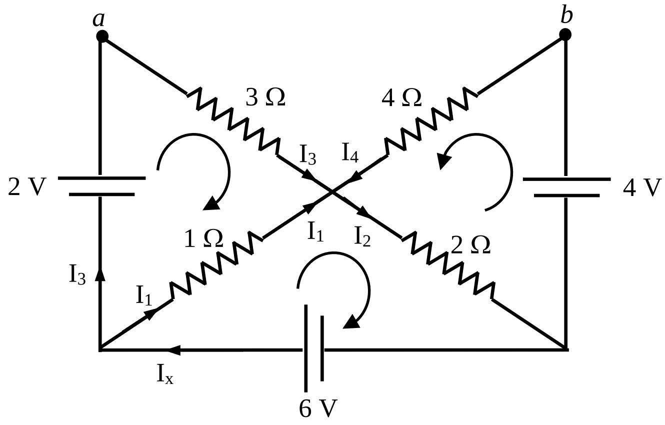
$R_2 = 6\ \Omega \qquad R_2 = 3\ \Omega$

$R_1 = 3\ \Omega \qquad R_1 = 6\ \Omega$

3. **a)** Şekilde 6 V'luk aküden geçen akımı hesaplayınız.

b) a ve b noktaları arasındaki potansiyel farkını bulunuz.

Çözüm:



$2 - 3I_3 + 1I_1 = 0 \quad\Rightarrow\quad I_3 = \dfrac{2+I_1}{3} \quad\Rightarrow\quad I_3 = \dfrac{28}{25}\ \text{A}$

$6 - 1I_1 - 2I_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad I_2 = \dfrac{6-I_1}{2} \quad\Rightarrow\quad I_2 = \dfrac{58}{25}\ \text{A}$

$4 - 4I_4 - 2I_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad I_4 = \dfrac{2-I_2}{2} \quad\Rightarrow\quad I_4 = -\dfrac{4}{25}\ \text{A}$

$I_1 + I_3 + I_4 = I_2 \quad\Rightarrow\quad I_1 + \dfrac{2+I_1}{3} + \dfrac{2-I_2}{2} = I_2$

$I_1 = \dfrac{9I_2 - 10}{8} \quad\Rightarrow\quad I_1 = \dfrac{34}{25}\ \text{A}$

a) $I_x = I_1 + I_3$

$I_x = \dfrac{34}{25} + \dfrac{28}{25}$

$I_x = \dfrac{62}{25}\ \text{A}$

b) $V_a - V_b = 2 + 6 - 4 = 4\ \text{V}$

4. 10 μF'lık bir kondansatör 10 V'luk bir batarya ile bir R direnci üzerinden yüklenmektedir. Yüklenme başladıktan 3 s sonra, kondansatör 4 V'luk bir potansiyel farkına ulaşmaktadır. R direncini bulunuz.

Çözüm:

$$q(t) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{C} = \frac{Q}{C}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$V = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \Rightarrow \quad 4 = 10\left(1 - e^{-\frac{3}{R10.10^{-6}}}\right)$$

$$0,6 = e^{-\frac{3.10^5}{R}}$$

$$-\frac{3.10^5}{R} = -0,51$$

$$R = 5,88.10^5\ \Omega$$

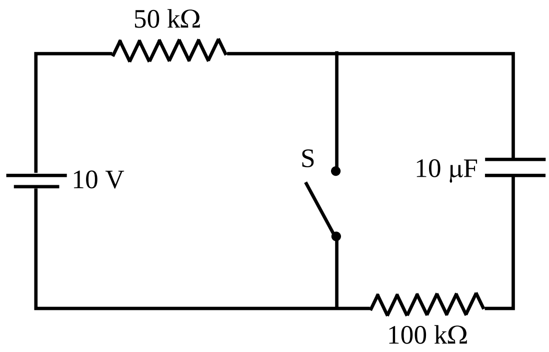
5. Şekilde görülen devrede S anahtarı uzun zamandır açıktı. Anahtar ani olarak kapatılıyor.

a) Anahtar kapanmadan önce,

b) Anahtar kapandıktan sonra zaman sabitini bulunuz.

c) t = 0'da anahtar kapalıysa zamanın fonksiyonu olarak devredeki akımı hesaplayınız.

Çözüm:



a) $\tau = RC = 150.10^3.10.10^{-6} = 1,5$ s

b) $\tau = RC = 100.10^3.10.10^{-6} = 1$ s

c) Bataryanın taşıdığı akım $I = \frac{\sum V}{\sum R} = \frac{10}{50.10^3} = 200\ \mu A$

100 kΩ'luk dirençteki akım $I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{10}{100.10^3} e^{-\frac{t}{1}} = 100e^{-t}\ \mu A$

Anahtar kapalı ise akım $I_{Top} = 200 + 100e^{-t}\ \mu A$

6. **a)** Çıkış voltajı 10 V ve iç direnci 0,2 Ω olan bataryaya bağlı 5,6 Ω'luk dirençten geçen akım nedir?

b) Bataryanın emk'sı nedir?

Çözüm:

a) $V = IR$

$10 = I.5,6$

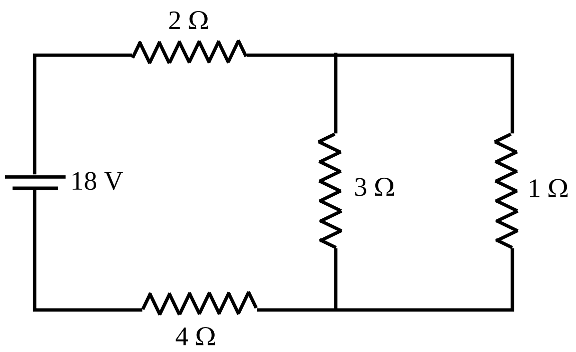
$I = 1,79$ A

b) $V = \varepsilon - IR$

$\varepsilon = 10 + 1,79.0,2$

$\varepsilon = 10,358$ V

7. Şekilde görülen devrede her bir dirençte harcanan gücü bulunuz.



Çözüm:

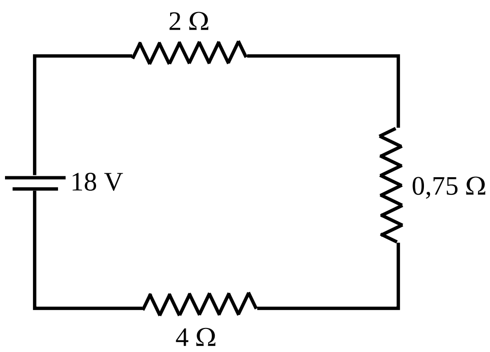
$$I = \frac{V}{R} = \frac{18}{6,75} = 2,67 \text{ A}$$

<u>*2 Ω için*</u>

$P_2 = I^2R = (2,67)^2.2 = 14,26$ W

<u>*4 Ω için*</u>

$P_4 = I^2R = (2,67)^2.4 = 28,52$ W



$\Delta V_2 = 2,67.2 = 5,34$ V

$\Delta V_4 = 2,67.4 = 10,68$ V

$\Delta V_{paralel} = 18 - 10,68 - 5,34 = 2$ V

<u>*3 Ω için*</u>

$$P_2 = \frac{V^2}{R} = \frac{4}{3} \text{ W}$$

<u>*1 Ω için*</u>

$$P_4 = \frac{V^2}{R} = \frac{4}{1} = 4 \text{ W}$$