05/08/2019

SAÜ BİLGİSAYAR VE BİLİŞİM FAKÜLTESİ BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

1. $y''-y'=e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2. $(2x+1)y''-(4x+4)y'+4y=0$ denklemi için önce $y=e^{ax}$ şeklinde bir özel çözüm araştırınız. Daha sonra ise bu özel çözüm yardımıyla genel çözümünü bulunuz.

3. $y''+x^2y'-4xy=0$ denkleminin $x=0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

4. $f(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ 2, & x\geq 3\end{cases}$ olmak üzere $\begin{matrix} y''+y=f(x) \\ y(0)=0, y'(0)=0\end{matrix}$ probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

SÜRE: 80 DAKİKADIR

BAŞARILAR DİLERİZ

$L\{f(x)\}=F(s)$ olmak üzere $g(x)=\begin{cases}0, & x<c\\ f(x-c), & x\geq c\end{cases}$ için $L\{g(x)\}=e^{-cs}F(s)$

$L\{y^{(n)}\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-...-y^{(n-1)}(0)$

1) $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$

$r^2 - r = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \quad r_2 = 1$ $\boxed{y_h = c_1 + c_2 e^{x}}$ 10

$y_p = c_1(x).1 + c_2(x)e^{x}$

$c_1'.1 + c_2'e^{x} = 0$

$c_1'.0 + c_2'e^{x} = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$

$c_1' = -e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$

$c_2' = e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}$

$\boxed{c_1 = \frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}}$ 5 $\boxed{c_2 = \frac{1}{2}\left[\arcsin e^{x} + e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}\right]}$ 5

$y_p = \frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3} + \frac{1}{2}e^{x}\left[\arcsin e^{x} + e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}\right]$ 5

$y_g = y_h + y_p$

---

2) $(2x+1)y'' - (4x+4)y' + 4y = 0$ $\quad y = e^{ax} \Rightarrow a = 2$

$\boxed{y_1 = e^{2x}}$ 5

$y = e^{2x}.u$ ile 5

$(2x+1)u'' + 4xu' = 0$

$u' = v \quad u'' = v'$ ile

$(2x+1)v' + 4xv = 0$ 5 $\Rightarrow$ $v = c_1(2x+1)e^{-2x}$ 5

$\boxed{u = c_1\int(2x+1)e^{-2x}\,dx + c_2}$

$\boxed{y = e^{2x}.u}$ 5

---

3) $y'' + x^2 y' - 4xy = 0$ $\quad x=0$ adi nokta

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$ (5)

$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$

$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$

$(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots) + (a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 3a_3 x^4 + 4a_4 x^5 + \dots)$ (10)

$- (4a_0 x + 4a_1 x^2 + 4a_2 x^3 + \dots) = 0$

$2a_2 + (6a_3 - 4a_0)x + (12a_4 - 3a_1)x^2 + (20a_5 - 2a_2)x^3 + \dots = 0$

$a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{2}{3}a_0 \quad a_4 = \frac{1}{4}a_1$ (5) $a_5 = \frac{1}{10}a_2 = 0 \dots$

$y = a_0 + a_1 x + \frac{2}{3}a_0 x^3 + \frac{1}{4}a_1 x^4 + \dots$

$= a_0\left(1 + \frac{2}{3}x^3 + \dots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{4}\right)$ (5)

---

4) $y'' + y = f(x)$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x<3 \\ 2, & x \geq 3 \end{cases}$

$L[y''+y] = L[f(x)]$

$(s^2+1)Y(s) = \frac{2}{s}e^{-3s} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{2}{s(s^2+1)}e^{-3s}}$ (10)

$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+1)}e^{-3s}\right\} = \begin{cases} 0, & x<3 \\ f(x-3), & x\geq 3 \end{cases}$ (5)

$f(x) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+1)}\right\} \Rightarrow f(x) = 2 - 2\cos x$ (5)

$y(x) = \begin{cases} 0, & x<3 \\ 2-2\cos(x-3), & x\geq 3 \end{cases}$ (5)

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^{n+1} = 0$$

$n \to n+2 \qquad n \to n-1 \qquad n \to n-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 4 a_{n-1} x^n = 0$$

$$2a_2 + 6a_3 x - 4a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n-5)a_{n-1}\right] x^n = 0$$

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \qquad 6a_3 - 4a_0 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{2}{3} a_0$$

$$a_{n+2} = -\frac{(n-5)}{(n+1)(n+2)} a_{n-1} \qquad n \geq 2$$

$n=2 \quad a_4 = \frac{3}{12} a_1 = \frac{1}{4} a_1$

$n=3 \quad a_5 = \frac{2}{20} a_2 = \frac{1}{10} a_2 = 0$

$n=4 \quad a_6 = \frac{1}{30} a_3 = \frac{1}{45} a_0$

$n=5 \quad a_7 = 0$

$n=6 \quad a_8 = 0 \quad \ldots$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

$$y = a_0\left(1 + \frac{2}{3}x^3 + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{4}\right)$$

16/05/2018

SAÜ BİLGİSAYAR VE BİLİŞİM BİLİMLERİ FAKÜLTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

HER GRUPTAN SADECE 1 (BİR) ADET SORUYU CEVAPLAYINIZ

---

1. $y = xp^2 + p^3$ denkleminin çözümlerini bulunuz. $\left(p = \dfrac{dy}{dx}\right)$

2. $xy' = 2\left(y - \sqrt{xy}\right)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

---

3. $y'' + 4y = \cos ec2x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4. Karakteristik denkleminin kökleri $1,1,0,0,2 \mp 3i$ olan homojen olmayan sabit katsayılı denkleme ilişkin $f(x)$ fonksiyonu $f(x) = x^2 e^{2x} \cos 3x$ olarak veriliyor. y_p özel çözümünün nasıl seçilmesi gerektiğini belirtiniz. (Katsayıları bulmaya çalışmayınız.)

---

5. $y'' + y' + xy = 0$ denkleminin $x = 0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

6. $\begin{aligned} &y'' + 2y' + y = 3xe^{-x} \\ &y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{aligned}$ probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

---

7. $\begin{aligned} &x' = x - 4y \\ &y' = x + y \end{aligned}$ sistemini yok etme yöntemi yardımıyla çözünüz.

8. $\begin{aligned} &x' + y = e^{2t} \\ &y' + x = 0 \\ &x(0) = 0, y(0) = 0 \end{aligned}$ sisteminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$L\left\{e^{ax} f(x)\right\} = F(s-a)$

SÜRE: 80 DAKİKADIR.

Başarılar Dileriz
İyi Tatiller.

1) $y = xp^2 + p^3$ (Lagrange)

x'e göre türev alalım

$$p = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx}$$ 5

$$p - p^2 = (2px + 3p^2)\frac{dp}{dx}$$ $p - p^2 \neq 0$ ol. ür

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}x = \frac{3p}{1-p}$$ (lineer) 5

$$\begin{cases} x = \dfrac{\frac{3}{2}p^2 - p^3 + c}{(1-p)^2} \\ y = xp^2 + p^3 \end{cases}$$ Parametrik gösterim 10

$p - p^2 = 0 \Rightarrow p = 0,\ p = 1$ olup sırasıyla $y = 0$ ve $y = x + 1$ Aykırı çözümlerdir 5

---

2) $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$

$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{2\sqrt{x}}{x}y^{\frac{1}{2}}$$ (Bernoulli) $y^{\frac{1}{2}} = u$ ile

10 $\lambda = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

$$u' - \frac{1}{x}u = -\frac{\sqrt{x}}{x}$$ (lineer)

$$u = 2\sqrt{x} + cx$$ 10 $\Rightarrow$ $\boxed{y^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + cx}$ 5

3) $y'' + 4y = \operatorname{Cosec} 2x$ $\quad r^2 + 4 = 0 \quad r = \mp 2i$ 5

$\boxed{y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}$ 5 $\quad y_p = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x$

$c_1' \cos 2x + c_2' \sin 2x = 0$ 5 $\quad c_1' = -\frac{1}{2}$

$-2c_1' \sin 2x + 2c_2' \cos 2x = \operatorname{Cosec} 2x$ $\quad c_2' = \frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$

$c_1 = -\frac{1}{2}x \quad c_2 = \frac{1}{4}\ln \sin 2x$

$y_p = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln \sin 2x$ 5

$y_g = y_h + y_p$ 5

4) $1, 1, 0, 0, 2 \mp 3i$ $\quad f(x) = x^2 e^{2x} \cos 3x$

$y_h = \underbrace{c_1 e^x + c_2 x e^x}_{5} + \underbrace{c_3 + c_4 x}_{5} + \underbrace{e^{2x}[c_5 \cos 3x + c_6 \sin 3x]}_{5}$

$y_p = \underbrace{x(Ax^2 + Bx + C)e^{2x}\cos 3x}_{5} + \underbrace{x(Dx^2 + Ex + F)e^{2x}\sin 3x}_{5}$

5) $y'' + y' + xy = 0$ $\quad x=0$ adi noktası.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (5) \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

(10)

$$2a_2 + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2) a_{n+2} + (n+1) a_{n+1} + a_{n-1} \right\} x^n = 0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_1 \qquad a_{n+2} = -\frac{(n+1) a_{n+1} + a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \quad (5)$$

$$a_3 = \frac{a_1 - a_0}{6} \qquad a_4 = \frac{a_0 - 3a_1}{24} \quad \text{---}$$

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{a_1 - a_0}{6} x^3 + \frac{a_0 - 3a_1}{24} x^4 + \dots \quad (5)$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\right) + a_1 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{3}{24} x^4 + \dots\right)$$

---

6) $y'' + 2y' + y = 3xe^{-x}$ $\quad y(0) = y'(0) = 0$

$$(5) \; s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + 2\left[sY(s) - \cancel{y(0)}\right] + Y(s) = \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$(s^2 + 2s + 1) Y(s) = \frac{3}{(s+1)^2} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{3}{(s+1)^4}} \quad (10)$$

$$y(x) = L^{-1} \left\{ \frac{3}{(s+1)^4} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{2} x^3 e^{-x}} \quad (10)$$

7) $(D-1)x + 4y = 0$

$(D-1)/\ (D-1)y - x = 0$

$4y + (D-1)^2 y = 0 \Rightarrow \quad y'' - 2y' + 5y = 0$ 5

$r^2 - 2r + 5 = 0 \qquad (r-1)^2 = -4 \qquad r - 1 = \mp 2i$ 5

$r = 1 \mp 2i$ 5

$$\boxed{y = e^t (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)}$$ 5

$$\boxed{x = y' - y = e^t [-2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t]}$$ 10

8) $x' + y = e^{2t} \qquad x(0) = y(0) = 0$

$y' + x = 0$

$sX(s) - x(0) + Y(s) = \frac{1}{s-2}$ 5

$sY(s) - y(0) + X(s) = 0$

$sX(s) + Y(s) = \frac{1}{s-2}$

$X(s) + sY(s) = 0$

$$\boxed{X(s) = \frac{s}{(s-1)(s+1)(s-2)}}$$ 5

$= -\frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{s+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{s-2}$

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}}$$ 5

$y = e^{2t} - x' = e^{2t} - \left[-\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t}\right]$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t}}$$ 10

31/07/2018

SAÜ BİLGİSAYAR VE BİLİŞİM BİLİMLERİ FAKÜLTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

1. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2. $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3. $y''+x^2y'-4xy=0$ denkleminin $x=0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

4. $\begin{array}{l} y''-y'=e^x\cos x \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{array}$ başlangıç değer probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$$L\left\{e^{ax}f(x)\right\}=F(s-a)$$
$$L\left\{y^{(n)}\right\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)$$

SÜRE: 80 DAKİKADIR.

Başarılar Dileriz
İyi Tatiller.

1) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ linear

$\lambda = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$ (5)

$e^{x^2} y = \int e^{x^2} 2x e^{-x^2} dx + C$ (5)

$e^{x^2} y = x^2 + C \Rightarrow \boxed{y = x^2 e^{-x^2} + Ce^{-x^2}}$ (5)

(10)

2) $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$ $\quad r^2 - 4r + 5 = 0$ (5) $r_{1,2} = 2 \mp i$

$\boxed{y_h = e^{2x}[c_1 \cos x + c_2 \sin x]}$ (5)

$y_p = c_1(x) e^{2x} \cos x + c_2(x) e^{2x} \sin x$ (5)

$c_1' (e^{2x} \cos x) + c_2' (e^{2x} \sin x) = 0$

$c_1' (2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x) + c_2' (2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x) = \frac{e^{2x}}{\cos x}$

$c_1' = -\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow c_1 = \ln \cos x$ (5)

$c_2' = 1 \Rightarrow c_2 = x$

$\boxed{y_p = e^{2x} \cos x (\ln \cos x) + e^{2x} \sin x (x)}$ (5)

$\boxed{y_g = y_h + y_p}$

3) $y'' + x^2 y' - 4xy = 0 \qquad x = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{n-5}{(n+1)(n+2)} a_{n-1}} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$n = 0 \qquad a_2 = 0$

$n = 1 \qquad a_3 = \frac{2}{3} a_0$

$a_4 = \frac{1}{4} a_1$

$a_5 = 0$

$a_6 = \frac{1}{30} a_3 = \frac{1}{45} a_0$

$a_7 = 0$

$a_8 = 0$

$a_{10} = 0$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1 x + \frac{2}{3} a_0 x^3 + \frac{1}{4} a_1 x^4 + \frac{1}{45} a_0 x^6 + \cdots$$

$$\boxed{y = a_0\left(1 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{45} x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{4}\right)}$$

4) $y'' - y' = e^x \cos x \qquad y(0) = y'(0) = 0$

$L\{y'' - y'\} = L\{e^x \cos x\}$

$s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} - sY(s) + \cancel{y(0)} = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}$

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+2)}}$$

$\dfrac{1}{s(s^2-2s+2)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{Bs+C}{s^2-2s+2} \qquad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2} \quad C = 1$

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{1/2}{s} + \frac{-1/2\, s + 1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right\} + \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x}$$

15/05/2018

SAÜ BİLGİSAYAR VE BİLİŞİM BİLİMLERİ FAKÜLTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

AŞAĞIDAKİ SORULARDAN SADECE BİR (1) TANESİNİ CEVAPLAYINIZ.

1. $y'+e^x-3y+e^{-x}y^2=0$ Riccati denkleminin bir özel çözümü $y_1=e^x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

2. $p^2x=2yp-3$ denkleminin genel çözümünü ve varsa aykırı çözümünü bulunuz.

AŞAĞIDAKİ SORULARDAN SADECE BİR (1) TANESİNİ CEVAPLAYINIZ.

3. $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4. $x^2y''+xy'+4y=2x\ln x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

---

5. $y''+2xy'+xy=0$ denkleminin $x=0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

---

6. $f(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ 3, & x\geq 2\end{cases}$ olmak üzere $\begin{array}{l} y''+4y=f(x) \\ y(0)=0, y'(0)=0\end{array}$ probleminin çözümünü

Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$L\{f(x)\}=F(s)$ olmak üzere $g(x)=\begin{cases}0, & x<c\\ f(x-c), & x\geq c\end{cases}$ için $L\{g(x)\}=e^{-cs}F(s)$

$L\{y^{(n)}\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)$

SÜRE: 80 DAKİKADIR.

Başarılar Dileriz
İyi Tatiller.

1) $y' + e^x - 3y + e^{-x} y^2 = 0$ $\quad y_1 = e^x$

$y = e^x + \frac{1}{u}$ $\quad y' = e^x - \frac{u'}{u^2}$ 5 ile denklem

$u' + u = e^{-x}$ 5 (lineer) denklemine dönüşür.

$\lambda = e^x$ olup $(e^x u)' = 1$ 5 $\Rightarrow$ $\boxed{u = e^{-x}(x+c)}$ 5

$$\boxed{y = e^x + \frac{e^x}{x+c}}$$ 5 Genel Çözüm

---

2) $p^2 x = 2yp - 3$ $\quad y = x\frac{p}{2} + \frac{3}{2p}$ (Lagrange) $(p \neq 0)$

x'e göre türev alalım.

$$p = \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{3}{p^2}\right)$$ 5 $\quad p = 0$ için aykırı çözüm yok 5

$$\frac{dx}{dp} - \frac{1}{p}x = -\frac{3}{p^3}$$ (lineer) 5

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{p^2} + cp \\ y = \dfrac{x}{2}p + \dfrac{3}{2p} \end{cases}$$

Genel çözümün parametrik gösterimi 10

3) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$

$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 2$ 5

$\boxed{y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}}$ 5 $\quad y_p = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{2x}$

$$\left.\begin{aligned} c_1' e^x + c_2' e^{2x} &= 0 \\ c_1' e^x + c_2'(2e^{2x}) &= \frac{e^{2x}}{e^x+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c_1' = -\frac{e^x}{e^x+1}, \quad c_2' = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$ 5 5

$\Rightarrow \boxed{c_1 = -\ln(1+e^x)} \quad \boxed{c_2 = -\ln(1+e^{-x})}$ 5

$\boxed{y_p = -\ln(1+e^x)\, e^x - \ln(1+e^{-x})\, e^{2x}}$ 5

$\boxed{y_g = y_h + y_p}$

---

4) $x^2 y'' + xy' + 4y = 2x\ln x$ Cauchy - Euler

$x = e^t$ ile denklem $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 2te^t$ 5

denk.e dönüşür.

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \mp 2i$ $\quad \boxed{y_h = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t}$ 5

$y_p = (At + B)e^t$ 5 olup $A = \dfrac{2}{5}$ $\quad B = -\dfrac{4}{25}$ olarak bulunur.

$\boxed{y_p = \left(\dfrac{2}{5}t - \dfrac{4}{25}\right)e^t}$ 5

$$\boxed{y_g = c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x) + \frac{2}{5}x\ln x - \frac{4}{25}x}$$ 5

5) $y'' + 2xy' + xy = 0$ $\quad x=0$ adi nokta

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$

$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots$ $\quad 5$

$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots$

$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots) + (2a_1 x + 4a_2 x^2 + 6a_3 x^3 + \cdots) +$

$+ (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots) = 0$

$2a_2 + (6a_3 + 2a_1 + a_0)x + (12a_4 + 4a_2 + a_1)x^2 + (20a_5 + 6a_3 + a_2)x^3 + \cdots = 0$ $\quad 5$

$\boxed{a_2 = 0}$

$6a_3 + 2a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{6}a_0 - \frac{1}{3}a_1}$ $\quad 5$

$12a_4 + 4a_2 + a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_4 = -\frac{1}{12}a_1}$

$20a_5 + 6a_3 + a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_5 = \frac{1}{20}a_0 + \frac{1}{10}a_1}$

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ $\quad 5$

$y = a_0 + a_1 x + \left(-\frac{1}{6}a_0 - \frac{1}{3}a_1\right)x^3 - \frac{1}{12}a_1 x^4 + \left(\frac{1}{20}a_0 + \frac{1}{10}a_1\right)x^5 + \cdots$

$= a_0 + a_1 x + \left(-\frac{1}{6}a_0 - \cdots\right)$

$y = a_0\left(1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \cdots\right)$

5

6) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}$ $\quad y'' + 4y = f(x)$

$y(0) = y'(0) = 0$

$$L\{y'' + 4y\} = L\{f(x)\}$$

$$s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + 4Y(s) = \frac{3}{s} e^{-2s}$$

$$(s^2+4) Y(s) = \frac{3}{s} e^{-2s} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{3}{s(s^2+4)} e^{-2s}}$$ 10

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{3}{s(s^2+4)} e^{-2s}\right\} = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ f(x-2), & x \geq 2 \end{cases}$$ 5

$$f(x) = L^{-1}\left\{\frac{3}{s(s^2+4)}\right\}$$

$$\frac{3}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2+4}$$ $\quad A = \frac{3}{4} \quad B = -\frac{3}{4} \quad C = 0$ 5

$$f(x) = \frac{1}{4} L^{-1}\left\{\frac{3}{s} - \frac{3s}{s^2+4}\right\} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos 2x$$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos(2x-4), & x \geq 2 \end{cases}$$ 5

4

Tarih: 02/01/2020
Süre: 80 dakika.

ADI SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

SAÜ Mühendislik Fakültesi Metalurji ve Malzeme Mühendisliği Bölümü
Diferensiyel Denklemler – Yıl Sonu Sınavı

İşlem yapılmadan verilen cevaplar dikkate alınmayacaktır. Başarılar Dileriz.

---

1. $xy' + y = x^2 y^2$ Bernoulli denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' + \frac{1}{x} y = x y^2$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y^{-1} = z \\ -y^{-2} y' = z' \end{array}}$$ 5

$$y^{-2} y' + \frac{1}{x} y^{-1} = x$$

$$-z' + \frac{1}{x} z = x$$

$$\boxed{z' - \frac{1}{x} z = -x \quad (\text{lineer})}$$ 5 $\quad \lambda = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x} z' - \frac{1}{x^2} z' = -1 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{x} z\right)' = -1}$$ 5

$$\Rightarrow \frac{1}{x} z = -x + c \Rightarrow \boxed{z = -x^2 + cx}$$ 5

$z = y^{-1}$ ile

$$\boxed{y^{-1} = cx - x^2}$$ 5

AŞAĞIDAKİ SORULARDAN SADECE BİR (1) TANESİNİ CEVAPLAYINIZ.

2. $x^2y''-3xy'+4y=6x^2\ln x+\dfrac{6}{x}$ Cauchy-Euler denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2) $x=e^t$ $\quad y'=\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$ $\quad y''=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)$ ile

denklem $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}-4\dfrac{dy}{dt}+4y=6te^{2t}+6e^{-t}}$ 10 ye dönüşür

$r^2-4r+4=0 \Rightarrow r_{1,2}=2$ $\quad \boxed{y_h=(c_1+c_2t)e^{2t}}$ 5

$y_p=t^2(At+B)e^{2t}+ce^{-t}$ ile $\quad \boxed{y_p=t^3e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}}$ 5

$\boxed{y_g=(c_1+c_2t)e^{2t}+t^3e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}}$ 2 $t=\ln x$ ile

$\boxed{y_g=(c_1+c_2\ln x)x^2+x^2(\ln x)^3+\frac{2}{3x}}$ 3

3) $r^2-2r+1=0$ $\quad r_1=r_2=1$ $\quad y_h=c_1e^x+c_2xe^x$ 5

$\boxed{y_p=c_1(x)e^x+c_2(x)xe^x}$ 3

$c_1'e^x+c_2'xe^x=0$

$c_1'e^x+c_2'(e^x+xe^x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ 5

$\boxed{c_2=-\frac{1}{x}}$ 5

$\boxed{c_1=-\ln x}$

$\boxed{y_p=-e^x-e^x\ln x}$ 2

$\boxed{y_g=c_1e^x+c_2xe^x-e^x-e^x\ln x}$ 5

4. $\begin{array}{l} y''+y=x^2+2 \\ y(0)=1, y'(0)=-1 \end{array}$ probleminin genel çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$\left(L\left\{y^{(n)}\right\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)\right)$

$$L\{y''+y\}=L\{x^2+2\}$$

$$s^2Y(s)-s\underbrace{y(0)}_{1}-\underbrace{y'(0)}_{-1}+Y(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s}$$

$$\boxed{Y(s)=\frac{s^4-s^3+2s^2+2}{s^3(s^2+1)}} \quad 10$$

$$\frac{s^4-s^3+2s^2+2}{s^3(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{Ds+E}{s^2+1} \quad 5$$

$$A=B=0 \quad C=2 \quad D=1 \quad E=-1$$

$$y(x)=L^{-1}\left\{\frac{s^4-s^3+2s^2+2}{s^3(s^2+1)}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \quad 5$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x)=x^2+\cos x-\sin x} \quad 5$$

5. $y''-xy'+2y=0$ denkleminin $x=0$ noktası civarında $\left(y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)$ seri çözümünü bulunuz.

$x=0$ adi nokta olup

$$\left.\begin{aligned} y &= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots \\ y' &= a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots \\ y'' &= 2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\cdots \end{aligned}\right\} 5$$

denklemde yerlerine yazılırsa

$$(2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\cdots)-(a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+\cdots)+$$
$$+(2a_0+2a_1x+2a_2x^2+2a_3x^3+\cdots)=0 \quad 5$$

$$(2a_2+2a_0)+(6a_3-a_1+2a_1)x+(12a_4-2a_2+2a_2)x^2+$$
$$+(20a_5-3a_3+2a_3)x^3+\cdots=0 \quad 5$$

$$5\left\{\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \\ a_3 &= -\frac{1}{6}a_1 \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= -\frac{1}{120}a_1 \end{aligned}\right.$$

$$y=a_0+a_1x-a_0x^2-\frac{1}{6}a_1x^3-\frac{1}{120}a_1x^5+\cdots$$

$$\boxed{y=a_0(1-x^2)+a_1\left(x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5+\cdots\right)}$$

5