Bağımsız Olaylar ve Ayrık Olaylar

IST 108 Olasılık ve İstatistik
Bahar 2016

Yrd. Doç. Dr. Ferhat Dikbıyık

Ayrık olaylar (Disjoint Events)

- Eğer iki olay aynı anda oluşamıyorsa bunlara *ayrık olaylar* denir.
  - Deney defteri örneğimizde bu durum şöyle ifade edilebilir. Eğer iki olay (A olayı ve B olayı) için deney defterinin hiçbir satırında aynı anda Evet yazması mümkün değilse bu olaylar ayrık olaylardır. Diğer bir deyişle "A ve B" olayı için bütün satırlarda hayır yazacaktır $P(AB)=0$.
  - Eğer A ve B ayrık olaylarsa $P(A \text{ veya } B)=P(A)+P(B)$.
    - Normalde $P(A \text{ veya } B)=P(A)+P(B) - P(AB)$. Ayrık olaylar için $P(AB)=0$ olduğundan

Bağımsız olaylar (Independent Events)

- İki olay (*A* ve *B* olayları) eğer şu koşulu sağlıyorlarsa bağımsız olaylar olarak adlandırılır; $P(AB)=P(A)P(B)$.
- Bağımsız olmayan olaylar bağımlı olaylar olarak adlandırılır. Bu durumda genel kural geçerlidir; $P(AB)=P(A)P(B|A)$.
- $P(AB)$'yi hesaplarken, olayların bağımsız olup olmadığını nereden bileceğiz?
  - Eğer $P(B|A)=P(B)$ ise bu olaylar bağımsızdır. Yani *B* olayı *A*'nin gerçekleşip gerçekleşmemesinden etkilenmiyorsa bağımsızdır.
  - Örnek: İki zar atma örneğimizde mavi zarda gelen sayının 2 olması ($X=2$) ile beyaz zarda gelen sayının 3 olması ($Y=3$) birbirinden bağımsızdır. Peki $X=2$ ile $X+Y=5$ olayları bağımsız mıdır?

Bağımsız olayların özellikleri

- Eğer A ve B bağımsız olaylar ise o zaman A ve $\bar{B}$ de bağımsız olaylardır.
- Üç olay A, B ve C, aşağıdaki koşulları sağlıyorlarsa birbirlerinden bağımsız olaylardır.
  - $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$
  - $P(AB)=P(A)P(B)$
  - $P(AC)=P(A)P(C)$
  - $P(BC)=P(B)P(C)$

P(.|*B*) de bir olasılıktır

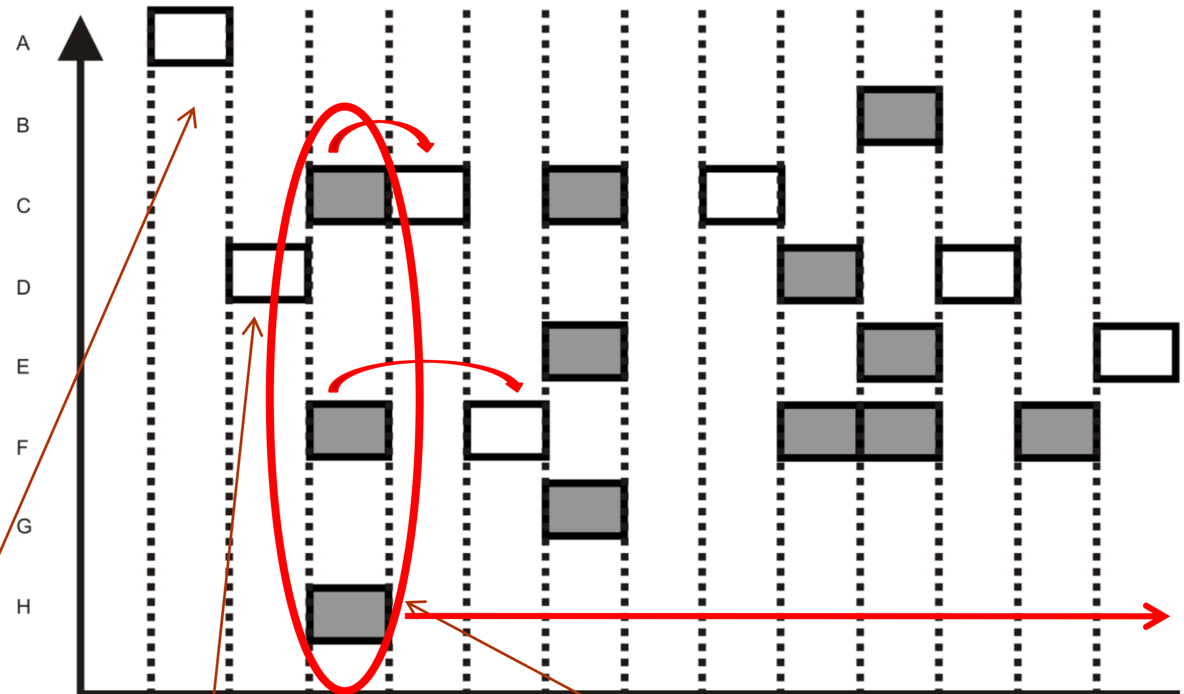
- Bu nedenle sıradan olasılığın tüm özelliklerini taşır.
  - $0 \leq P(A|B) \leq 1$
  - Eğer A_i, i=1,2,... olayları ayrık olaylar ise

$$P\left(\bigcup_i A_i \middle| B \right) = \sum_i P(A_i | B)$$

Slotted ALOHA örneği

- Kablosuz ağlarda kullanıcıların internete çıkmak için aynı frekans kanalını kullanır. Bu nedenle aynı anda iletim yapmaya kalkarlarsa sinyaller çarpışır ve iletim başarılı olmaz.
- Slotted ALOHA protokolü bu sorunu çözmek için oluşturulmuştur. Zaman farklı slotlara (zaman aralıklarına) ayrılmıştır.
- Gönderecek verisi olan her bir kullanıcı bir zaman aralığında göndermeyi dener. Eğer sinyal çarpışması olursa sinyali çarpışan kullanıcılar rastgele bir zaman aralığı belirleyip, o zaman aralığında tekrar göndermeyi denerler.
- Bu rastgeleliğin bir daha çarpışma olmasını engelleyeceği tahmin beklenir.

Slotted ALOHA örneği



1. slotta sadece A gönderir çarpışma olmaz

2. slotta sadece D gönderir çarpışma olmaz

3. slotta C, F ve H aynı anda göndermeyi dener ve çarpışma olur. Her biri rastgele olarak yeni bir gönderim zamanı belirler.

Slotted ALOHA örneği

- İki adet kullanıcı olduğunu düşünelim. Herhangi bir zaman aralığında gönderecek verisi olma ihtimallerinin *p* ile gösterelim.
- Her bir kullanıcı çarpışma durumunda eşit ihtimalle 1 ile k arasında bir sayı belirlemektedir.
- Bu durumda bu iki kullanıcının sinyallerinin üst üste iki kere çarpışması olasılığı nedir?

Slotted ALOHA örneği

- İki adet kullanıcı olduğunu düşünelim. Herhangi bir zaman aralığında gönderecek verisi olma ihtimallerinin *p* ile gösterelim. Her bir kullanıcı çarpışma durumunda eşit ihtimalle 1 ile k arasında bir sayı belirlemektedir. Bu durumda bu iki kullanıcının sinyallerinin üst üste iki kere çarpışması olasılığı nedir?
- $Ç_1$: Herhangi bir zamanda ilk kez çarpışmaları
- $Ç_2$: Bir çarpışmadan sonra ikinci kez çarpışmaları
- $P(Ç_1Ç_2) = ?$

Slotted ALOHA örneği

- İki adet kullanıcı olduğunu düşünelim. Herhangi bir zaman aralığında gönderecek verisi olma ihtimallerinin *p* ile gösterelim. Her bir kullanıcı çarpışma durumunda eşit ihtimalle 1 ile k arasında bir sayı belirlemektedir. Bu durumda bu iki kullanıcının sinyallerinin üst üste iki kere çarpışması olasılığı nedir?
- $Ç_1$: Herhangi bir zamanda ilk kez çarpışmaları
- $Ç_2$: Bir çarpışmadan sonra ikinci kez çarpışmaları
- $P(Ç_1 Ç_2) = P(Ç_2 | Ç_1) P(Ç_1)$

Slotted ALOHA örneği

- İki adet kullanıcı olduğunu düşünelim. Herhangi bir zaman aralığında gönderecek verisi olma ihtimallerinin *p* ile gösterelim. Her bir kullanıcı çarpışma durumunda eşit ihtimalle 1 ile *k* arasında bir sayı belirlemektedir. Bu durumda bu iki kullanıcının sinyallerinin üst üste iki kere çarpışması olasılığı nedir?
- $Ç_1$: Herhangi bir zamanda ilk kez çarpışmaları
- $Ç_2$: Bir çarpışmadan sonra ikinci kez çarpışmaları
- $P(Ç_1Ç_2) = P(Ç_2|Ç_1)P(Ç_1)$

İlk kez çarpışmaları ihtimali ikisinin de gönderecek mesajı olduğunda olur. İki kullanıcının mesaj gönderme durumu birbirinden bağımsızdır. Bu durumda ikisinin de aynı anda mesaj gönderme ihtimali p^2.

Slotted ALOHA örneği

- İki adet kullanıcı olduğunu düşünelim. Herhangi bir zaman aralığında gönderecek verisi olma ihtimallerinin *p* ile gösterelim. Her bir kullanıcı çarpışma durumunda eşit ihtimalle 1 ile *k* arasında bir sayı belirlemektedir. Bu durumda bu iki kullanıcının sinyallerinin üst üste iki kere çarpışması olasılığı nedir?
- $Ç_1$: Herhangi bir zamanda ilk kez çarpışmaları
- $Ç_2$: Bir çarpışmadan sonra ikinci kez çarpışmaları
- $P(Ç_1Ç_2) = P(Ç_2|Ç_1)P(Ç_1)$

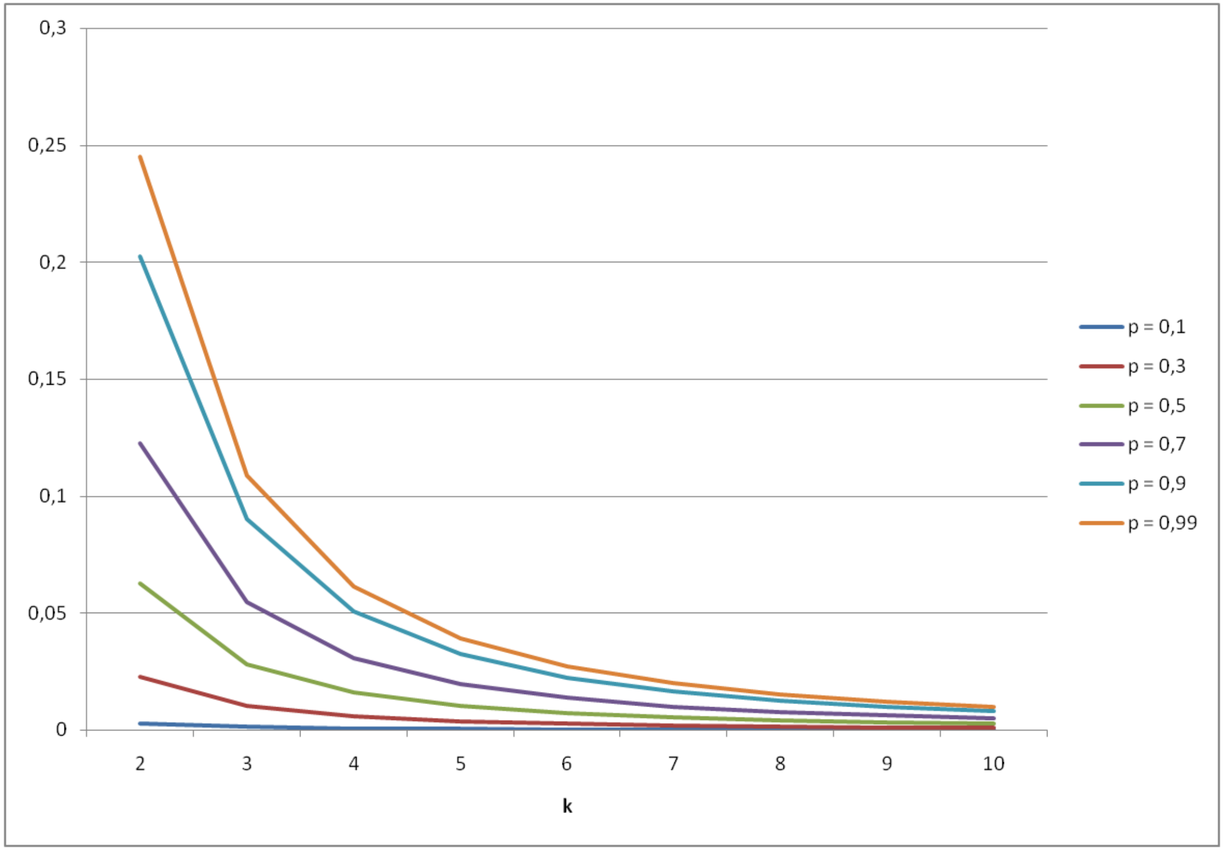
Birinci çarpışmadan sonra tekrar çarpışabilmeleri için iki kullanıcının da aynı sayıyı belirlemesi gerekir. Bir kullanıcının herhangi bir sayıyı belirleme ihtimali 1/*k*'dır. İki kullanıcının da sayı belirlemeleri birbirinden bağımsız olduğu için ikisinin de aynı sayıyı belirleme ihtimali $1/k^2$ olur.

Slotted ALOHA örneği

- İki adet kullanıcı olduğunu düşünelim. Herhangi bir zaman aralığında gönderecek verisi olma ihtimallerinin *p* ile gösterelim. Her bir kullanıcı çarpışma durumunda eşit ihtimalle 1 ile *k* arasında bir sayı belirlemektedir. Bu durumda bu iki kullanıcının sinyallerinin üst üste iki kere çarpışması olasılığı nedir?
- $Ç_1$: Herhangi bir zamanda ilk kez çarpışmaları
- $Ç_2$: Bir çarpışmadan sonra ikinci kez çarpışmaları
- $P(Ç_1Ç_2) = P(Ç_2|Ç_1)P(Ç_1) = p^2/k^2$
- Peki uygun k değeri nedir?

Slotted ALOHA örneği

- Peki uygun k değeri nedir?



k = 10 olduğunda, kullanıcılar zamanın %99'unda aktif olsalar bile üst üste iki kez çarpışma ihtimalleri %1,6 civarındadır.

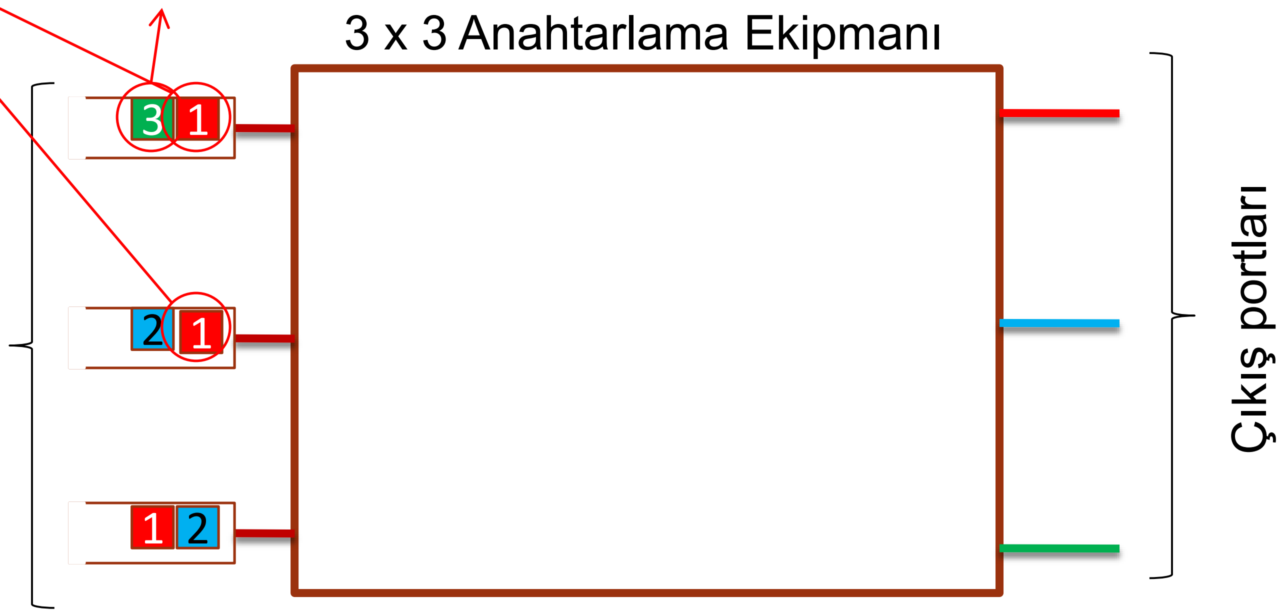
Daha büyük k değerleri için bu ihtimal daha da düşecektir. Örneğin k = 100 ve p = 0,99 için ihtimal 10.000'de birdir.

Sıra başı engellenmesi
Head of Line (HoL) Blocking

İkisi de 1. çıkış portuna iletilecek, fakat aynı anda iletilemez.

Bir sonraki zaman aralığında gideceği port müsait olmasına rağmen önünde bulunan paket nedeni ile engellenir (sıra başı engellenmesi).

Giriş portları (her birinde gelen paketleri sıraya alan tampon (buffer) mevcut.



Anahtarlama ekipmanı birim zamanda her bir çıkış portuna sadece bir paket iletebilir.

Sıra başı engellenmesi olasılığı

- Varsayımlar:
  - Her hangi bir girişe gelen paket eşit olasılıklarla çıkışlardan birine iletilecektir.
  - Buffer başlarında aynı çıkış portuna iletilecek paket varsa seçim rastgele yapılır.
  - Giriş portlarının bufferları doludur ve sonraki üç zaman aralığında yeni bir paket beklenmiyor.

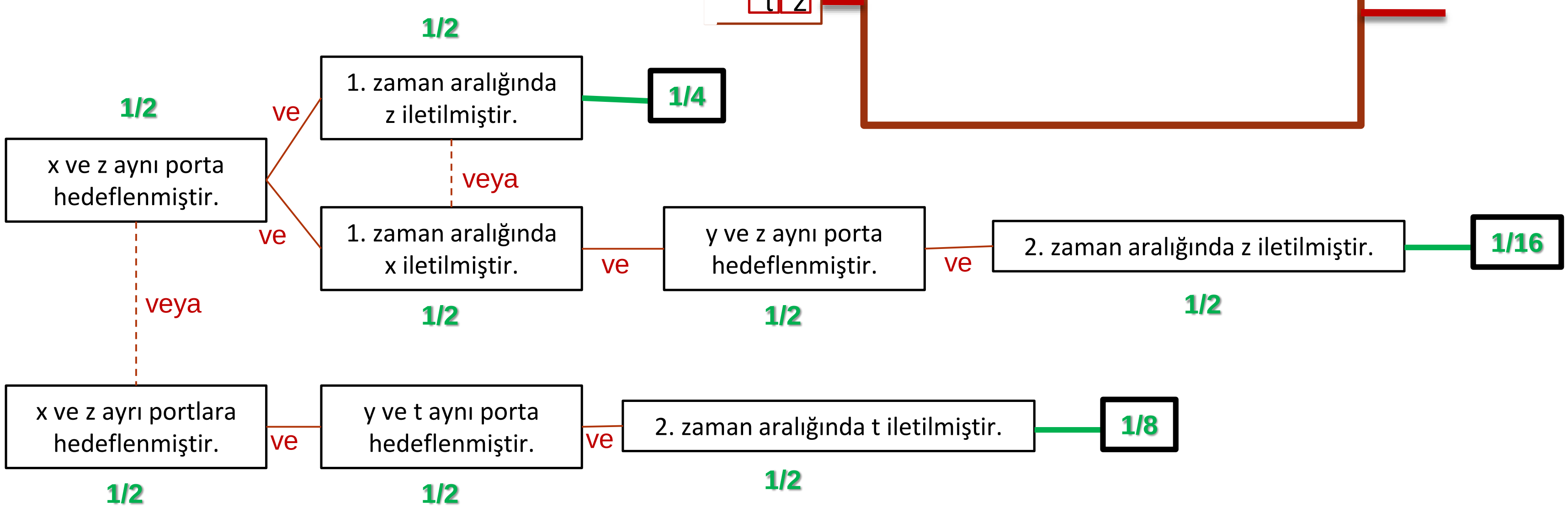
2 x 2 Anahtarlama Ekipmanı

<u>Soru</u>: y ile işaretli paketin ikinci zaman aralığında çıkış portu müsait olmasına rağmen iletilememesi ihtimali?

Sıra başı engellenmesi olasılığı

Aşağıdaki durumlar oluşursa y paketi 2. zaman aralığında iletilemez;

2 x 2 Anahtarlama Ekipmanı



Cevap: ¼ + 1/16 + 1/8 = 0,4375

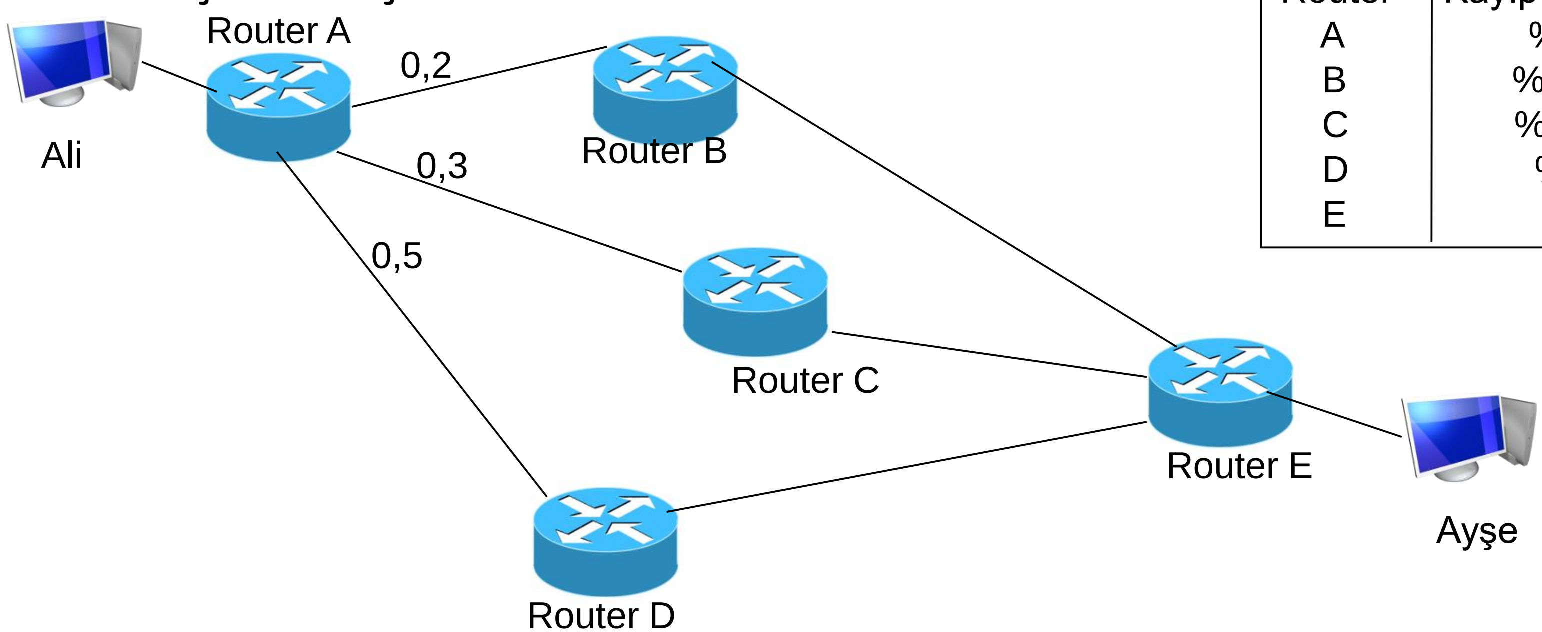
Paket Anahtarlama

- İnternette veriler gönderilmeden önce paketlere bölünür ve öyle gönderilir.
- Fakat tüm paketler aynı yönlendiricilerden (rotuter) geçmek zorunda değildir.
- Routerların bufferları eğer dolu ise routerın giriş portuna gelen paketler düşürülür (yani işleme alınmaz).
- Bu şekilde kaybolan paketler eğer uygulama kayıp kabul etmiyorsa (örneğin e-posta) tekrar gönderilir.

Paket Anahtarlama örneği

- Ali, Ayşe'ye bir e-posta gönderecektir. E-posta iki pakete bölünmüştür ve ilk paket başarılı bir şekilde iletilmeden ikinci paket gönderilmeyecektir. Paketler aşağıdaki ağ topolojisi üzerinden iletilecektir. Her bir routera ait kayıp oranları ve diğer bir routera iletim olasılıkları verilmiştir. Bu durumda iki paketin en çok üç gönderimde başarılı bir şekilde iletilme ihtimali nedir?

Router	Kayıp oranı
A	%0
B	%0,1
C	%0,5
D	%1
E	%0



Paket Anahtarlama örneği

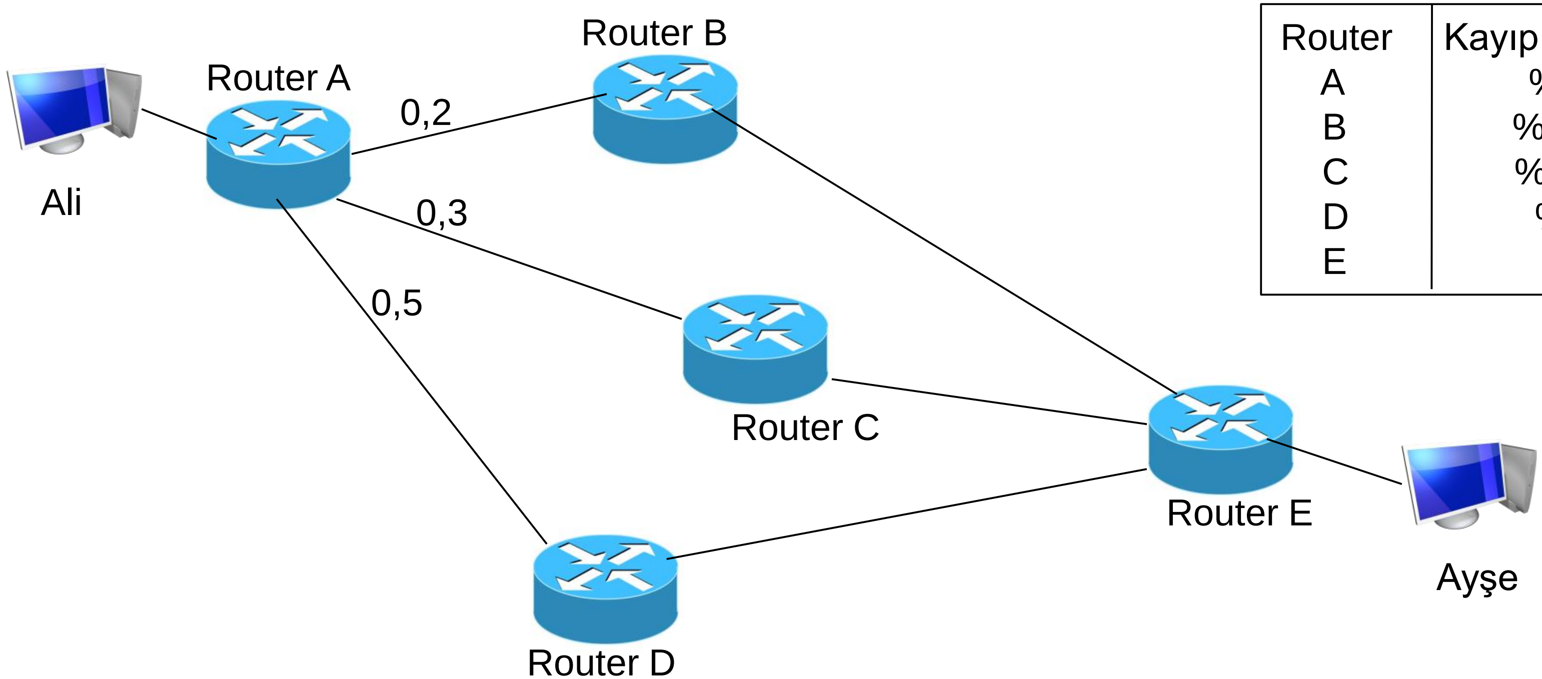
- Ali, Ayşe'ye bir e-posta gönderecektir. E-posta iki pakete bölünmüştür ve ilk paket başarılı bir şekilde iletilmeden ikinci paket gönderilmeyecektir. Paketler aşağıdaki ağ topolojisi üzerinden iletilecektir. Her bir routera ait kayıp oranları ve diğer bir routera iletim olasılıkları verilmiştir. Bu durumda iki paketin en çok üç gönderimde başarılı bir şekilde iletilme ihtimali nedir?
- Önce sadece bir paketin başarılı bir şekilde iletilme ihtimalini bulalım.
- B: Paketin B routerından geçmesi
- C: Paketin C routerından geçmesi
- D: Paketin D routerından geçmesi
- T: Paketin başarılı bir şekilde iletilmesi
- $P(T) = P(TB) + P(TC) + P(TD) = P(T|B)P(B) + P(T|C)P(C) + P(T|D)P(D)$
- $P(T) = (0{,}999)(0{,}2) + (0{,}995)(0{,}3) + (0{,}99)(0{,}5) = 0{,}9933$

Paket Anahtarlama örneği

- Ali, Ayşe'ye bir e-posta gönderecektir. E-posta iki pakete bölünmüştür ve ilk paket başarılı bir şekilde iletilmeden ikinci paket gönderilmeyecektir. Paketler aşağıdaki ağ topolojisi üzerinden iletilecektir. Her bir routera ait kayıp oranları ve diğer bir routera iletim olasılıkları verilmiştir. Bu durumda iki paketin en çok üç gönderimde başarılı bir şekilde iletilme ihtimali nedir?
- Herhangi bir paketin başarılı iletilme ihtimali 0,9933
- $T_{i,\,k}$: *i*. paketin *k*. gönderimde başarılı bir şekilde iletilmesi
- $P(T_{1,\,1}T_{2,\,1}$ veya $T'_{1,\,1}T_{1,\,2}\,T_{2,\,1}$ veya $T_{1,\,1}T'_{2,\,1}T_{2,\,2}) =$
- $P(T_{1,\,1}T_{2,\,1}) + P(T'_{1,\,1}T_{1,\,2}\,T_{2,\,1}) + P(T_{1,\,1}T'_{2,\,1}T_{2,\,2}) =$
- $P(T_{2,\,1}|T_{1,\,1})P(T_{1,\,1}) + P(T'_{1,\,1})\,P(T_{1,2}|T'_{1,\,1})\,P(T_{2,1}|T'_{1,\,1}T_{1,2}) + P(T_{1,\,1})$ $P(T'_{2,1}|T_{1,\,1})\,P(T_{2,2}|T_{1,\,1}T'_{2,1}) =$
- $P(T)P(T) + P(T')P(T)P(T) + P(T)P(T')P(T) = 0{,}99887$

Paket Anahtarlama örneği

- Ali, Ayşe’ye bir e-posta gönderecektir. E-posta iki pakete bölünmüştür ve ilk paket başarılı bir şekilde iletilmeden ikinci paket gönderilmeyecektir. Paketler aşağıdaki ağ topolojisi üzerinden iletilecektir. Her bir routera ait kayıp oranları ve diğer bir routera iletim olasılıkları verilmiştir. Eğer ilk gönderimden sonra C routerı bozuluyor ve bu routera gönderilecek tüm paketler B routerına gönderiliyorsa cevap nasıl değişir?



Router	Kayıp oranı
A	%0
B	%0,1
C	%0,5
D	%1
E	%0

Paket Anahtarlama örneği

- Ali, Ayşe'ye bir e-posta gönderecektir. E-posta iki pakete bölünmüştür ve ilk paket başarılı bir şekilde iletilmeden ikinci paket gönderilmeyecektir. Paketler aşağıdaki ağ topolojisi üzerinden iletilecektir. Her bir routera ait kayıp oranları ve diğer bir routera iletim olasılıkları verilmiştir. Eğer ilk gönderimden sonra C routerı bozuluyor ve bu routera gönderilecek tüm paketler B routerına gönderiliyorsa cevap nasıl değişir?
- İlk gönderimde 1. paketin başarılı iletilme ihtimali $P(T) = 0,9933$
- Diğer gönderimlerde herhangi bir paketin başarılı gönderilme ihtimali $P(S)$
- $P(S) = P(SB) + P(SD) = P(S|B)P(B) + P(S|D)P(D)$
- $P(S) = (0,999)(0,5) + (0,99)(0,5) = 0,9945$
- Bu durumda istenen cevap: $P(T_{2,1}|T_{1,1})P(T_{1,1}) + P(T'_{1,1})\,P(T_{1,2}|T'_{1,1})\,P(T_{2,1}|T'_{1,1}T_{1,2}) + P(T_{1,1})\,P(T'_{2,1}|T_{1,1})\,P(T_{2,2}|T_{1,1}T'_{2,1}) =$
- $P(S)P(T) + P(T')P(S)P(S) + P(T)P(S')P(S) = 0,9999$