

T.C. Cumhuriyet Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi - Bilgisayar Mühendisliği
Bilgisayar Destekli Lineer Cebir Final Sınavı

Adı – Soyadı : Numarası : N.Ö. İ.Ö.

Sorular

1- Aşağıda verilen lineer denklem sistemini Gauss-Jordan yöntemi ile çözünüz (20 Puan) ?

$$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 = -4$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Çözüm: Verilen denklem sisteminin genişletilmiş matrisinde uygun elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} (-3)R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ (-2)R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -14 & 19 \\ 0 & 4 & -8 & 12 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{(-1)R_3 + R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -14 & 19 \\ 0 & 4 & -8 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} 1R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \\ (-4)R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 16 & -16 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\frac{1}{16}R_3 \rightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} 3R_3 + R_1 \rightarrow R_1 \\ 6R_3 + R_2 \rightarrow R_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. En sağdaki indirgenmiş satırca basamak matrisinin gösterdiği lineer denklem sistemi göz önüne alındığında verilen lineer denklem sisteminin çözümünün

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1$$

eşitlikleriyle belirli olduğu hemen görülebilir. \square

2- Aşağıdaki Matris işlemlerini Gerçekleştiriniz (Her şık 5 Puan) ?

a $\begin{bmatrix} x+y \\ 2-x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x+y \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ x-y \end{bmatrix}$ x ve y değerleri nedir ?

$$\begin{bmatrix} x+y \\ 2-x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x+y \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ x-y \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x+y-2x+y=7 \rightarrow -x+2y=7 \\ 2-x-1=x-y \rightarrow -2x+y=-1 \end{array} \right\} x=3, y=5$$

b $(A.B)^T$ işleminin sonucu nedir ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+4.0 & 1.3+4.(-2) & 1.4+4.1 \\ (-5).2+2.0 & (-5).3+2.(-2) & (-5).4+2.1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -10 & -19 & -18 \end{bmatrix} \Rightarrow (A.B)^t = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ -5 & -19 \\ 8 & -18 \end{bmatrix}$$

c

Denklem sisteminin çözüm kümesi nedir ?

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(A_1 \cdot B_2 \cdot C_3 + A_2 \cdot B_3 \cdot C_1 + A_3 \cdot B_1 \cdot C_2)$$

$$- (A_3 \cdot B_2 \cdot C_1 + A_1 \cdot B_3 \cdot C_2 + A_2 \cdot B_1 \cdot C_3) = 0$$

$$(x+1)(x+2)(x+3) + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$- [3 \cdot (x+2) \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot (x+1) + (x+3) \cdot 2 \cdot 1] = 0$$

$$x^3 + 6x^2 = 0 \rightarrow x^2(x+6) = 0 \rightarrow x_{1,2} = 0, x_3 = -6$$

d

AX=B çarpımını sağlayan X matrisi nedir ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \cdot 1 + 0 \cdot c & b \cdot 1 + 0 \cdot d \\ a \cdot (-1) + c \cdot 1 & b \cdot (-1) + d \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a = 1, b = 0, c = 2, d = 1 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

e

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, matris gösterimi

$$(2A - B) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olan doğrusal denklem sistemini yazınız ?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow [2A - B] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[2A - B] = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x + 4y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

3-

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşüm olsun

$T(1, 0) = (1, 2)$, $T(1, 1) = (3, -1)$ ise $T(x, y) = ?$, $T(4, 5) = ?$

(20 Puan)

$\{ (1, 0), (1, 1) \}$ kümesinin \mathbb{R}^2 için bir taban olduğunu kontrol ediniz.

(x, y) vektörü bu tabandaki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılır

$$(x, y) = a (1, 0) + b (1, 1)$$

$$(x, y) = (a + b, b)$$

$$\begin{cases} a + b = x \\ b = y \end{cases}$$

bulunur. Buradan $a = x - y$, $b = y$ olur.

$$(x, y) = (x - y) (1, 0) + y (1, 1) \quad T \text{ lineer olduğundan}$$

$$T(x, y) = (x - y) T(1, 0) + y T(1, 1)$$

$$T(x, y) = (x - y) (1, 2) + y (3, -1)$$

$$T(x, y) = (x - y, 2x - 2y) + (3y, -y)$$

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x - 3y)$$

bulunur. Buradan;

$$T(4, 5) = (4 + 2 \cdot 5, 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5) = (14, -7)$$

olur.

4.

\mathbb{R}^3 deki $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 0, 1)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadıklarını çözümleyiniz, hazırlayacak olduğunuz MATLAB kodlaması ile yaptığınız çözümlerin bilgisayar ortamında çözümünü yapınız ?

(20 Puan)

\mathbb{R}^3 deki $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 0, 1)$ vektörlerinin lineer bağımsız olduklarını gösterelim; bunun için c_1 , c_2 , c_3 bilinmeyen sabitler olmak üzere,

$$c_1 (1, 1, 0) + c_2 (0, 1, 0) + c_3 (1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

alalım.

$$(c_1 + c_3, c_1 + c_2, c_3) = (0, 0, 0)$$

Buradan

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

sistemin çözümünden $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ bulunur. O halde A, B, C vektörleri lineer bağımsızdır.

5-

3x3 lük bir matrisin değerleri dışardan girilecek şekilde determinantını saruss kuralı ile hesaplayacak MATLAB fonksiyonunu yazınız ? (15 Puan)