

Tarih: 04/08/2023

Süre: 75 dakika.

ADI SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

**BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ ARASINAVI**

İşlem yapılmadan verilen cevaplar dikkate alınmayacaktır. Başarılar Dilerim.

1. $y = c_1 x^{-3} + c_2 x^{-2}$ eğri ailesini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferensiyel denklemi türev yardımıyla elde ediniz. Elde ettiğiniz denklemin mertebe, derece ve lineerlik durumlarını nedenleriyle ifade ediniz. (Denklemi en sade şekliyle yazınız.)
2. $y' = x^3 (y - x)^2 + \frac{y}{x}$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.
3. $4y = 8xp + 8x^2 + p^2$ ($p = y'$) denkleminin genel çözümünü ve varsa aykırı çözümünü bulunuz.
4. $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 16y^{(4)} - 12y''' + 41y'' - 8y' + 26y = 0$ denkleminin iki çözümü $\sin x$ ve $e^{2x} \sin 3x$ olduğuna göre verilen denklemin genel çözümünü elde ediniz.

$$1) y = c_1 x^{-3} + c_2 x^{-2} \quad (1)$$

$$y' = -3c_1 x^{-4} - 2c_2 x^{-3} \quad (2)$$

$$y'' = 12c_1 x^{-5} + 6c_2 x^{-4} \quad (3)$$

(4), (3) te yerine yazılırsa

(2) ve (3) te

$$c_2 = \frac{4x^{-1}y' + y''}{-2x^{-4}} \quad (4)$$

$$c_1 = \frac{4y'' + 12x^{-1}y'}{12x^{-5}} \quad (5)$$

(4) ve (5), (1) de yerlerine yazılırsa

$$y = \frac{4y'' + 12x^{-1}y'}{12} x^2 - \frac{4x^{-1}y' + y''}{2} x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 y'' + 6x y' + 6y = 0}$$

2.mrt, 1.dre lineer

$$2) y' = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}$$

$$y_1 = x$$

$$y = x + \frac{1}{u}$$

$$y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$$

$$u' + \frac{1}{x}u = -x^3 \text{ lineer}$$

$$\lambda = x$$

$$u = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{c_1}{x}$$

$$y = x + \frac{1}{u} \Rightarrow$$

$$\boxed{y = x + \frac{1}{\frac{c_1}{x} - \frac{x^5}{5}}}$$

$$3) \quad 4y = 8xp + 8x^2 + p^2 \quad y = f(x, p)$$

x 'e göre türev alalım.

$$4p = 8p + 8x \frac{dp}{dx} + 16x + 2p \frac{dp}{dx}$$

$$-4(p+4x) = 2(p+4x) \frac{dp}{dx}$$

$$p+4x \neq 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -2 \Rightarrow p = -2x + C$$

$$\left. \begin{array}{l} p = -2x + C \\ 4y = 8xp + 8x^2 + p^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y = Cx - x^2 + \frac{C^2}{4}} \quad \text{Genel Çözüm}$$

$$p+4x=0 \Rightarrow \boxed{y + 2x^2 = 0} \quad \text{Aykırı Çözüm}$$

$$4) \quad \begin{array}{ll} \sin x & \text{çözüm ise } r_{1,2} = \pm i \\ e^{2x} \sin 3x & \text{" " } r_{3,4} = 2 \pm 3i \end{array}$$

Buradan $r^6 - 4r^5 + 16r^4 - 12r^3 + 41r^2 - 8r + 26 = 0$ karakteristik denklemini $(r^2+1)(r^2-4r+13) = 0$ bölünür $r^2+1=0$ elde edilir. Buradan $r_{1,2} = \pm \sqrt{-1}$ bulunur.

Böylece

$$T.C.K = \{ \cos x, \sin x, e^{2x} \cos 3x, e^{2x} \sin 3x, e^{\sqrt{2}x} \cos \sqrt{2}x, e^{\sqrt{2}x} \sin \sqrt{2}x \}$$

olup

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{2x} (C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x) + e^{\sqrt{2}x} (C_5 \cos \sqrt{2}x + C_6 \sin \sqrt{2}x)$$

olarak elde edilir.