Bölüm 6 lineer momentum ve çarpışmalar

Lineer momentum ve korunumu

Bir çarpışma dan sonra iki kütlenin hareketine bakalım;

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

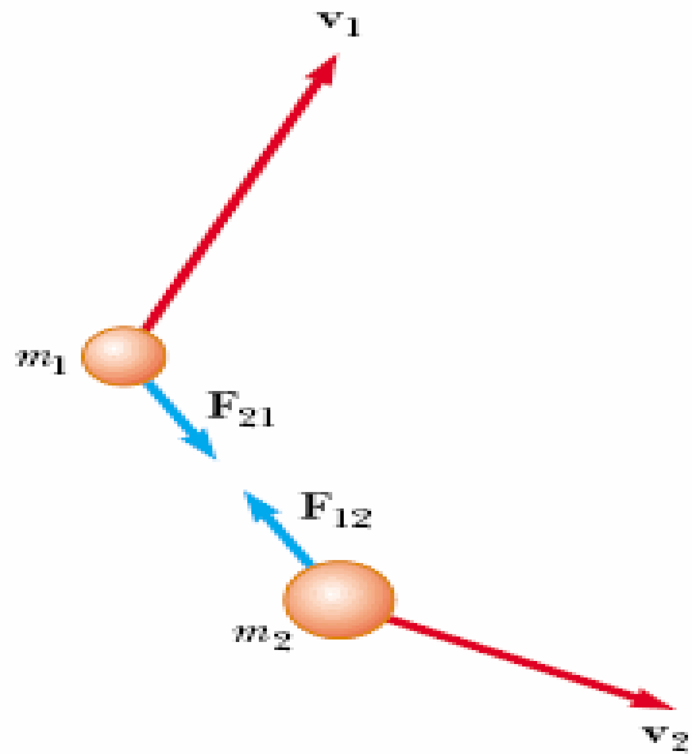
$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0$$

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = 0$$

$$m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d(m_1\mathbf{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\mathbf{v}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) = 0$$



Buradaki mv çarpımına momentum denir. Hareket kabiliyeti olarak bilinir.

Buradaki mv çarpımına momentum denir. Hareket kabiliyeti olarak bilinir.

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$$

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Böylece bir çarpışma olayında eğer bir dış kuvvet yoksa toplam momentum değişmez.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{sabit}$$

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1s} + \mathbf{p}_{2s}$$

İmpulse ve momentum

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt \longrightarrow d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt$$

$$t_i \longrightarrow \mathbf{p}_i \qquad t_S \longrightarrow \mathbf{p}_S$$

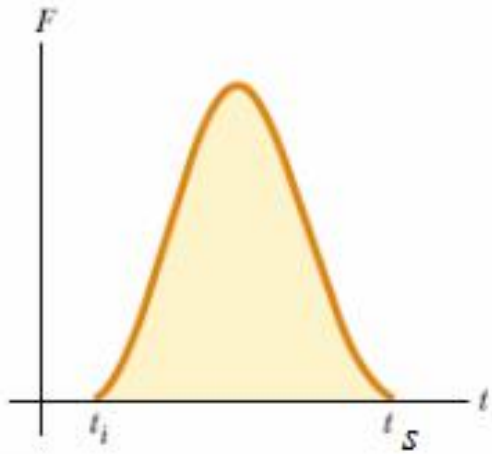
$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_S - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_S} \mathbf{F}\,dt$$

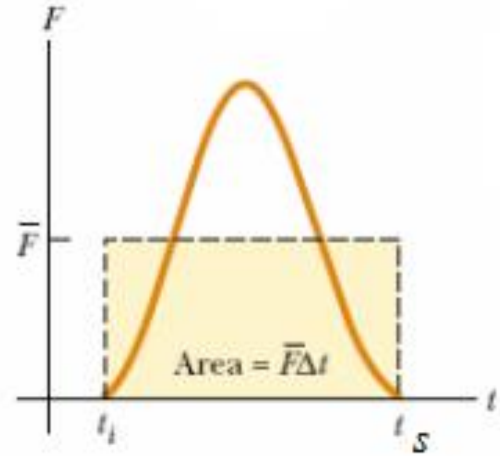
$$\Delta t = t_S - t_i$$

$$\boxed{\mathbf{I} \equiv \int_{t_i}^{t_S} \mathbf{F}\,dt}$$

I ifadesine impulse denir ve

momentumdaki değişime eşittir.





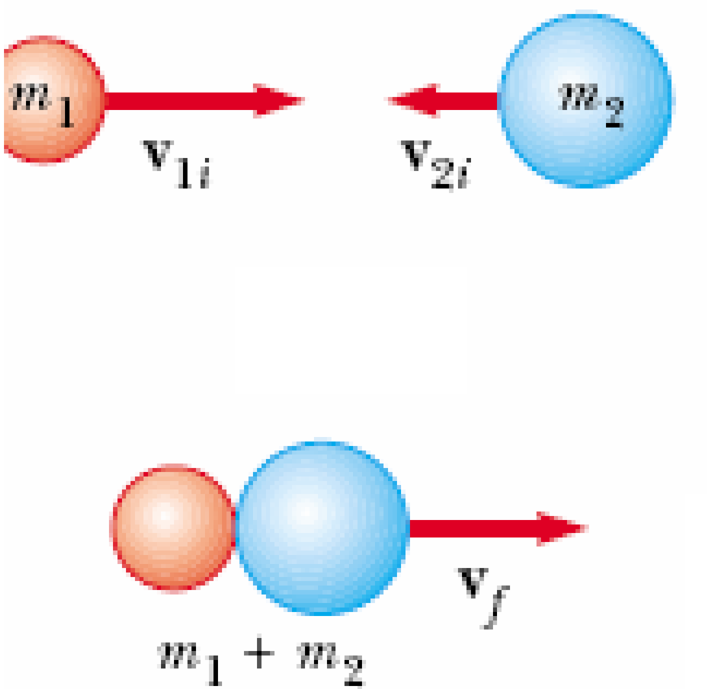
$$\overline{\mathbf{F}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_S} \mathbf{F}\, dt$$

$$\mathbf{I} = \overline{\mathbf{F}}\, \Delta t$$

Örnek : 60 gr kütleli bir golf topuna 80 m/sn hızla vuruluyor. Top bir duvara çarparak 72 m/sn hızla geri tepiyor. Topun duvarla temas süresi 0.08 sn olduğuna göre duvarın topa uyguladığı kuvveti ve çarpma anındaki impulse' ı hesaplayınız.

Tek boyutta çarpışmalar

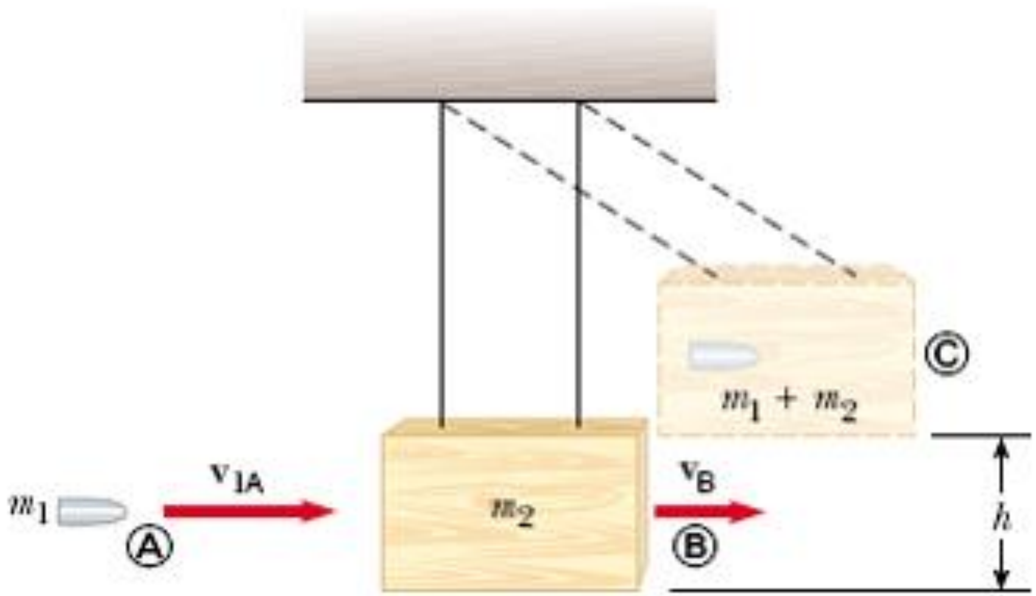
Esnek olmayan



$$m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_S$$

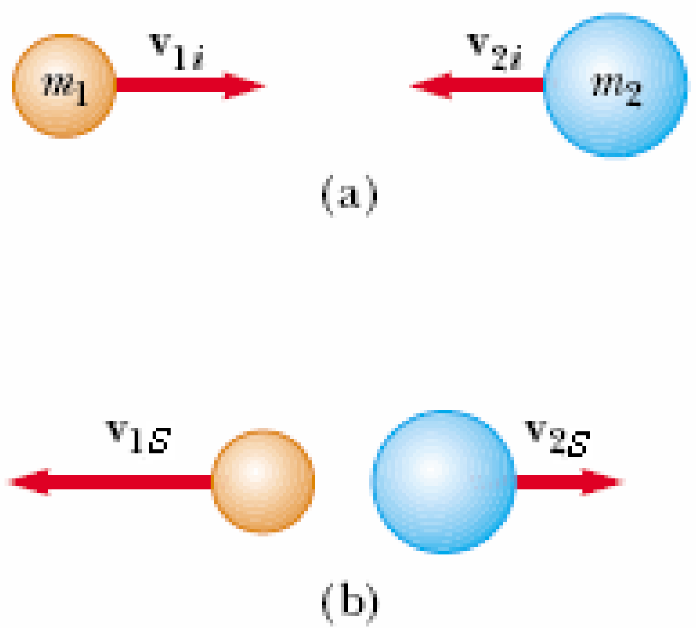
$$\mathbf{v}_S = \frac{m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Örnek : Şekildeki mermi 20 gr kütleli mermi 200 m/sn hızla duran ve kütlesi 980 gr olan tahta bloğa saplanıyor. İkisi birlikte ne kadar yükselir?



(a)

Esnek olan çarpışma



$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1s} + m_2 v_{2s}$$

$$\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1s}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2s}}^2$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1s} + m_2 v_{2s} \quad \Longrightarrow \quad m_1 (v_{1i} - v_{1s}) = m_2 (v_{2s} - v_{2i})$$

$$\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1s}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2s}}^2 \quad \Longrightarrow \quad m_1 ({v_{1i}}^2 - {v_{1s}}^2) = m_2 ({v_{2s}}^2 - {v_{2i}}^2)$$

$$\underbrace{m_1 (v_{1i} - v_{1s})}(v_{1i} + v_{1s}) = \underbrace{m_2 (v_{2s} - v_{2i})}(v_{2s} + v_{2i})$$

$$v_{1i} + v_{1s} = v_{2s} + v_{2i}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1s} - v_{2s})$$

$$v_{1s} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

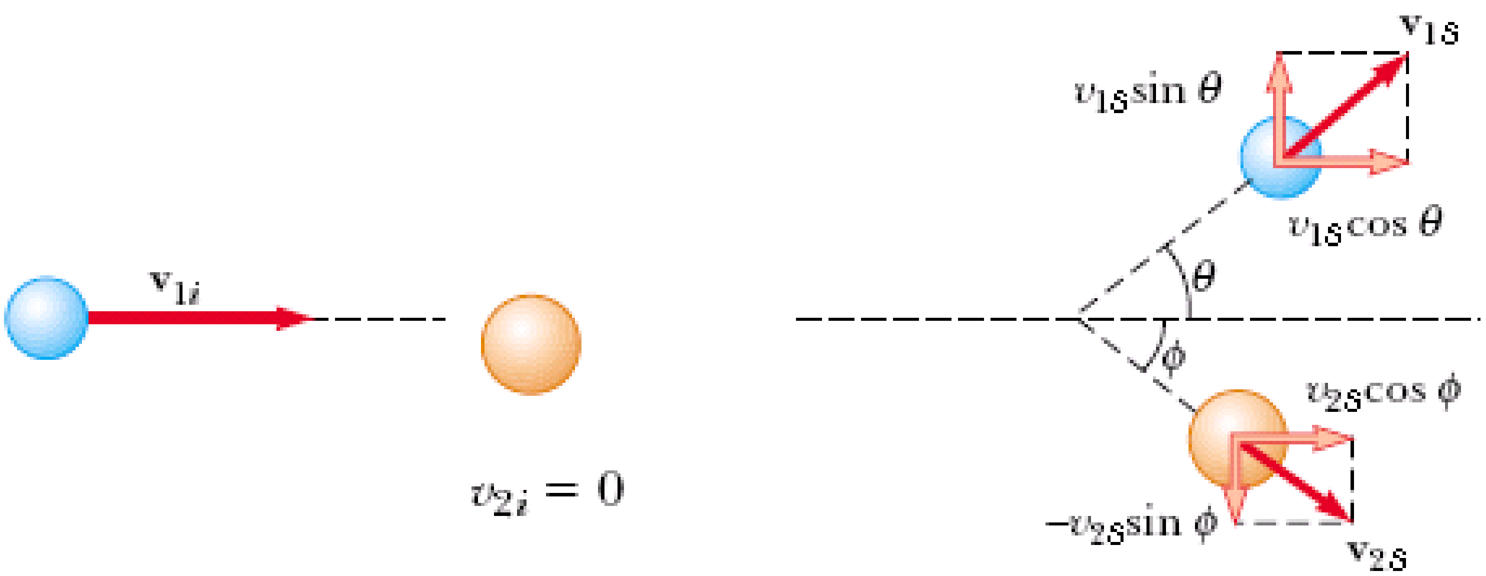
$$v_{2s} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

$$v_{2i} = 0$$

$$v_{1s} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i}$$

$$v_{2s} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i}$$

İki boyutta çarpışma



$$m_1 v_{1ix} = m_1 v_{1sx} + m_2 v_{2sx}$$

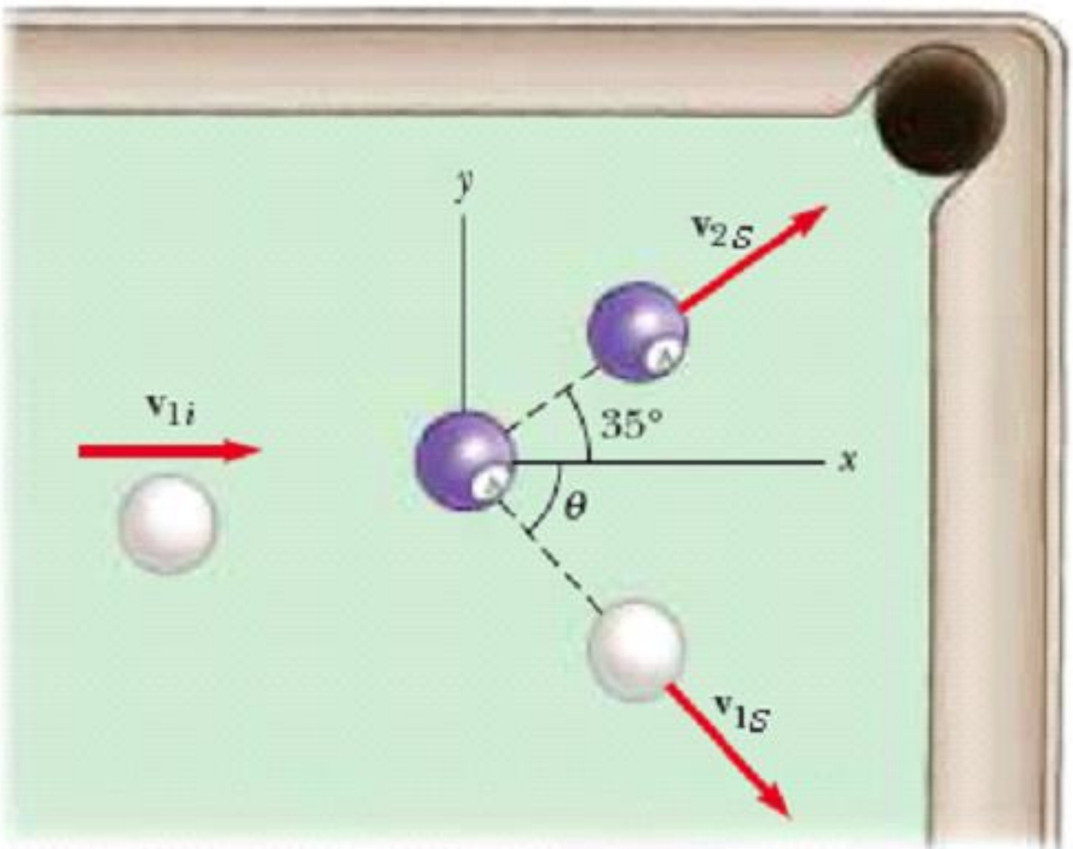
$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1s}\cos\theta + m_2 v_{2s}\cos\phi$$

$$0 = m_1 v_{1sy} + m_2 v_{2sy}$$

$$0 = m_1 v_{1s}\sin\theta - m_2 v_{2s}\sin\phi$$

$$\tfrac{1}{2}m_1 {v_{1i}}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 {v_{1s}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 {v_{2s}}^2$$

Örnek : Özdeş kütleli toplarla şekildeki gibi atış yapılıyor. θ açısını hesaplayınız.



(1) $\frac{1}{2}m_1 v_{1i}{}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1S}{}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2S}{}^2$

$m_1 = m_2 = m$

$v_{1i}{}^2 = v_{1S}{}^2 + v_{2S}{}^2$

(2) $$m_1\mathbf{v}_{1i} = m_1\mathbf{v}_{1S} + m_2\mathbf{v}_{2S}$$

(3) $$v_{1i}^{\,2} = (\mathbf{v}_{1S} + \mathbf{v}_{2S}) \cdot (\mathbf{v}_{1S} + \mathbf{v}_{2S}) = v_{1S}^{\,2} + v_{2S}^{\,2} + 2\mathbf{v}_{1S} \cdot \mathbf{v}_{2S}$$

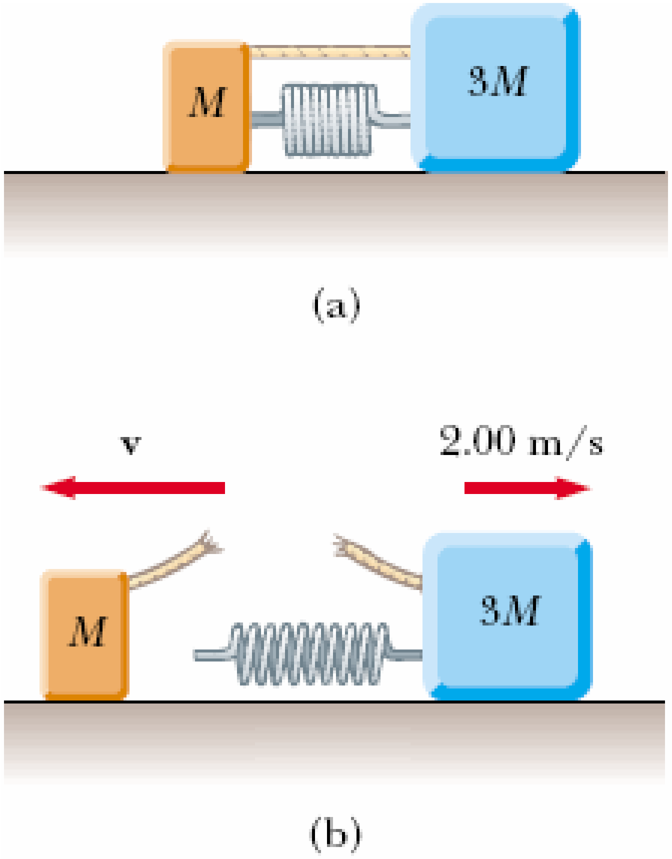
$$v_{1i}^{\,2} = v_{1S}^{\,2} + v_{2S}^{\,2} + 2v_{1S}\,v_{2S}\cos(\theta + 35°)$$

$$0 = 2\,v_{1S}\,v_{2S}\,\cos(\theta + 35°)$$

$$0 = \cos(\theta + 35°)$$

$$\theta + 35° = 90° \qquad \boxed{\theta = 55°}$$

Örnek : Şekildeki sistem durgun iken aradaki ip kesiliyor. 3M kütleli cisim sağa doğru 2 m/sn hızla hareket ediyor. a) Diğer kütlenin hızını bulunuz b) eğer M=350 gr ise yayda depo edilen enerjiyi ne olur?



(a) $\Delta p = 0$

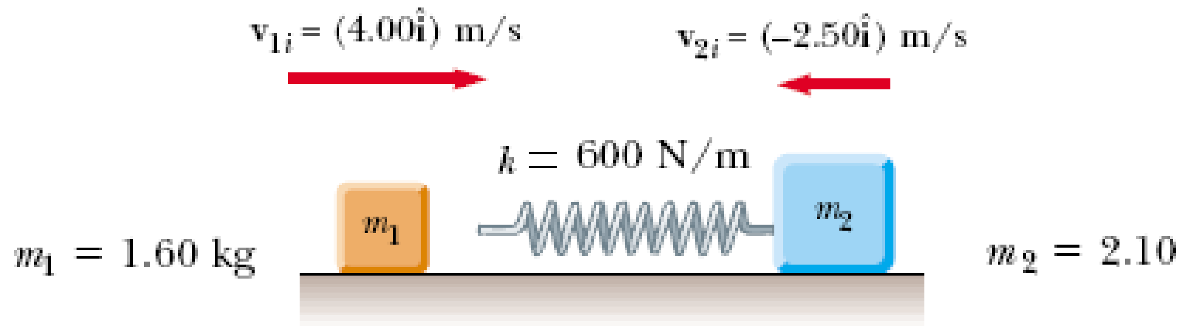
$p_i = p_s$

$0 = Mv_m + (3M)(2.00\ \text{m/s})$

$v_m = \boxed{-6.00\ \text{m/s}}$

(b) $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}(3M)v_{3M}^2 = \boxed{8.40\ \text{J}}$

Örnek : Çarpışmadan sonra her iki cismin hızını bulunuz



$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1S} + m_2 v_{2S}$$

$$(1.60\ \text{kg})(4.00\ \text{m/s}) + (2.10\ \text{kg})(-2.50\ \text{m/s}) = (1.60\ \text{kg})v_{1S} + (2.10\ \text{kg})v_{2S}$$

$$1.15\ \text{kg}\cdot\text{m/s} = (1.60\ \text{kg})\,v_{1S} + (2.10\ \text{kg})v_{2S}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1S} - v_{2S})$$

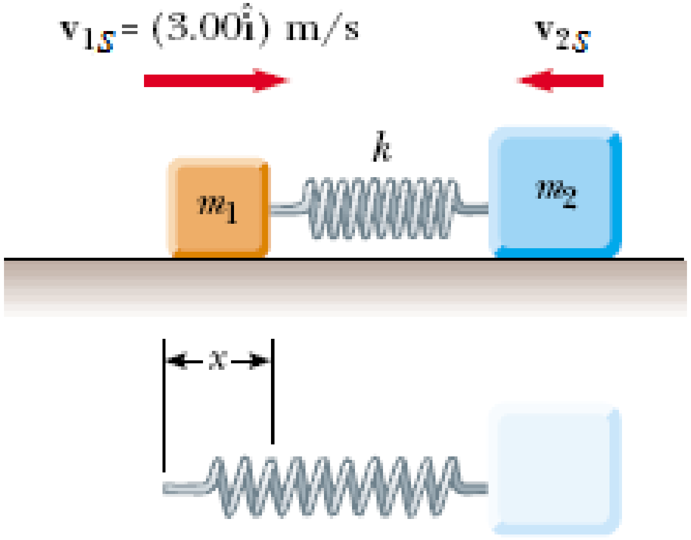
$$4.00\ \text{m/s} - (-2.50\ \text{m/s}) = -v_{1S} + v_{2S}$$

$$6.50\ \text{m/s} = -v_{1S} + v_{2S}$$

$$v_{2S} = \boxed{3.12\ \text{m/s}} \qquad v_{1S} = \boxed{-3.38\ \text{m/s}}$$

Örnek : m1 kütleli bloğun hızının şekildeki sağa doğru

3 m/sn olduğu bir anda m2 kütlesini hızını bulunuz.



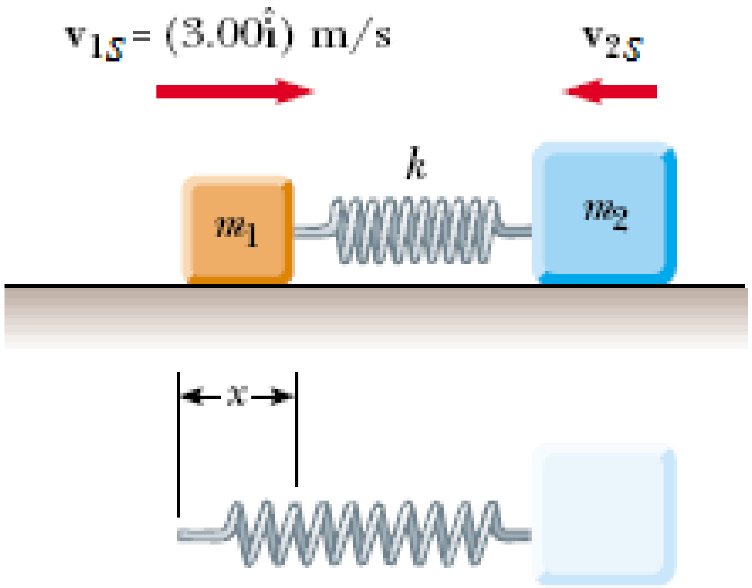
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1S} + m_2 v_{2S}$$

$$(1.60\text{ kg})(4.00\text{ m/s}) + (2.10\text{ kg})(-2.50\text{ m/s})$$

$$= (1.60\text{ kg})(3.00\text{ m/s}) + (2.10\text{ kg})v_{2S}$$

$$v_{2S} = \boxed{-1.74\text{ m/s}}$$

Örnek : Tam bu durumda yayadaki sıkışma miktarı ne kadar olur?



$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^{\;2} + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^{\;2} + 0 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^{\;2} + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^{\;2} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = \boxed{0.173 \text{ m}}$$

Örnek: 3 kg kütleli bir top şekildeki gibi bir duvara şekildeki gibi çarpıyor ve tepiyor. Duvarla top 0.3 sn etkileşimde bulunduğuna göre duvarın uyguladığı ortalama kuvvet kaçtır?

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t$$

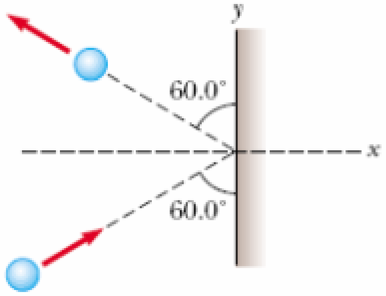
$$\Delta p_y = m\left(v_{sy} - v_{iy}\right) = m(v\cos 60.0°) - mv\cos 60.0° = 0$$

$$\Delta p_x = m(-v\sin 60.0° - v\sin 60.0°) = -2mv\sin 60.0°$$

$$= -2(3.00\text{ kg})(10.0\text{ m/s})(0.866)$$

$$= -52.0\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

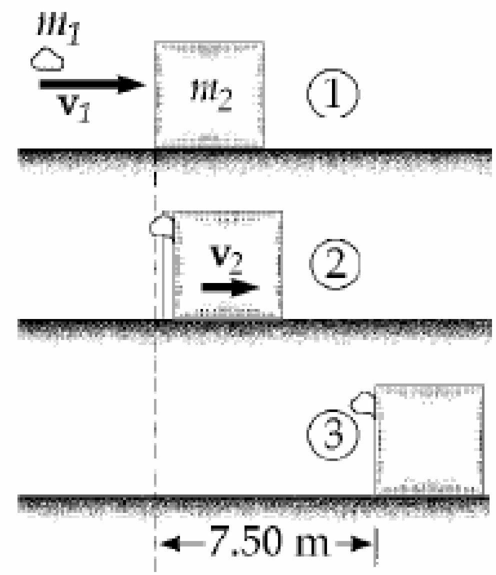
$$F = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{-52.0\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0.200\text{ s}} = \boxed{-260\text{ N}}$$



Örnek : Sürtünme katsayısı 0.65 olan yolda şekildeki gibi 10 gr kütleli bir mermi çekirdeği 100 gr kütleli bir tahta bloğa sağlanarak birlikte 7.5 m yol aldıktan sonra duruyorlar. Mermi çekirdeğinin çarpma öncesi hızını hesaplayınız.

$$mv_1 = (m_1 + m_2)v_2 \longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 = f \cdot d = \mu(m_1 + m_2)gd \longrightarrow$$



$$\frac{1}{2}(0.112\ \text{kg})v_2^2 = 0.650(0.112\ \text{kg})\left(9.80\ \text{m/s}^2\right)(7.50\ \text{m})$$

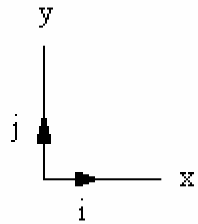
$$v_2 = 9.77\ \text{m/s}$$

$$\left(12.0 \times 10^{-3}\ \text{kg}\right)v_1 = (0.112\ \text{kg})(9.77\ \text{m/s}) \qquad v_1 = \boxed{91.2\ \text{m/s}}$$

Örnek : M kütleli bir roket yerden 1000 m yükseklikte ve hızı 300 m/sn iken patlayarak üç eşit parçaya ayrılıyor. Parçalardan biri 450 m/sn hızla yukarı giderken diğeri 240 m/sn hızla doğuya doğru gidiyor. Son parçanın hızı ve yönü nedir?

$$P_i = P_s$$

$$\mathbf{p}_i = M\mathbf{v}_i = M(300\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s})$$



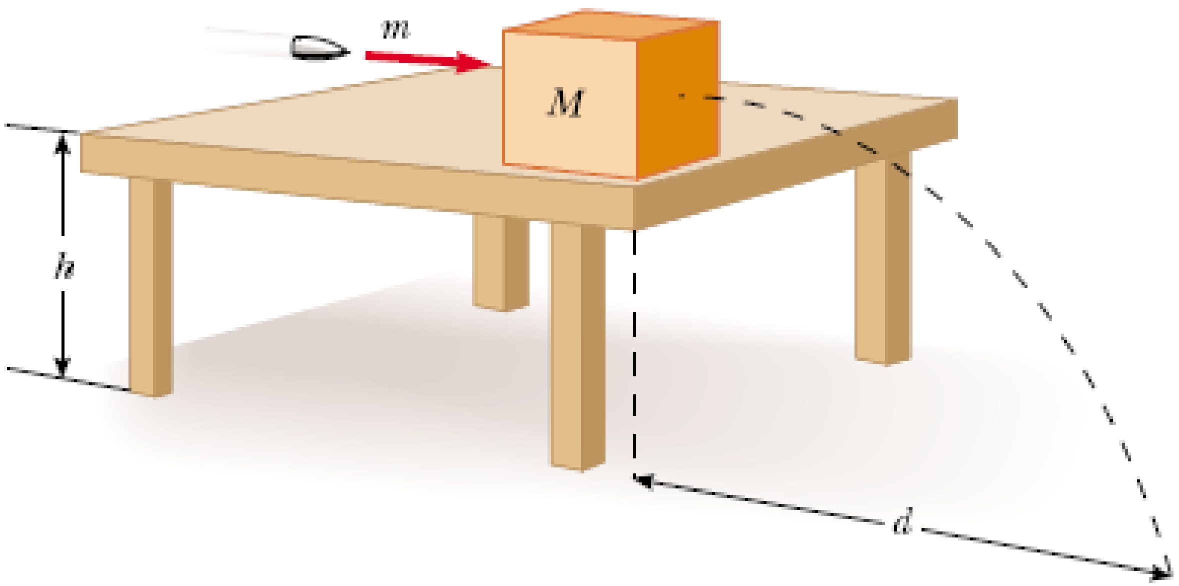
$$\mathbf{p}_S = \frac{M}{3}(240\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}) + \frac{M}{3}(450\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}) + \frac{M}{3}\mathbf{v}_S$$

$$\frac{M}{3}\mathbf{v}_S + \frac{M}{3}(240\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}) + \frac{M}{3}(450\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s})$$

$$= M(300\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s})$$

$$\mathbf{v}_S = \boxed{(-240\hat{\mathbf{i}} + 450\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}}$$

Örnek : Merminin ilk hızını hesaplayınız.



$$mv_i = (M+m)v_S$$

$$v_i = \left(\frac{M+m}{m}\right)v_S$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$d = v_S t \quad \longrightarrow \quad v_S = \frac{d}{t} = d\sqrt{\frac{g}{2h}} = \sqrt{\frac{gd^2}{2h}}$$

$$v_i = \left(\frac{M+m}{m}\right)\sqrt{\frac{gd^2}{2h}}$$

Örnek : 45 kg kütleli bir kişi 150 kg küleli bir tahta üzerinde durmaktadır. Başlangıçta tahta da durmaktadır. Kişi yere göre 1.5 m/sn sabit hızla yürümeye başlıyor. a) kişinin yere göre hızı nedir? b) tahtanın yere göre hızı nedir?

Kişini yere göre hızı $v_{\text{kişi}} - v_{\text{tahta}} = 1.50$

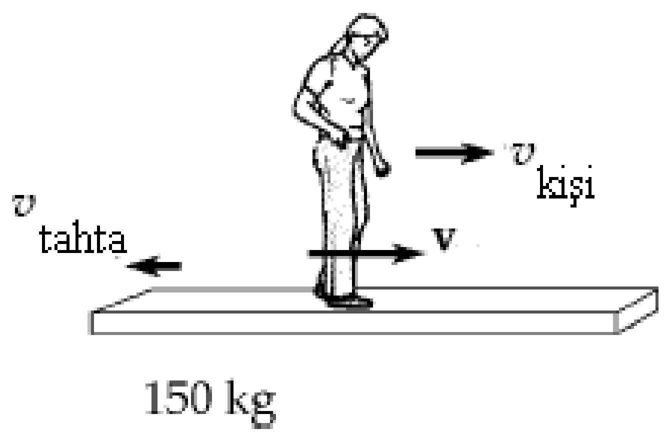
$$m_{\text{kişi}}\, v_{\text{kişi}} + m_{\text{tahta}}\, v_{\text{tahta}} = 0$$

$$45.0 v_k + 150 v_t = 0 \qquad v_k = -3.33 v_t$$

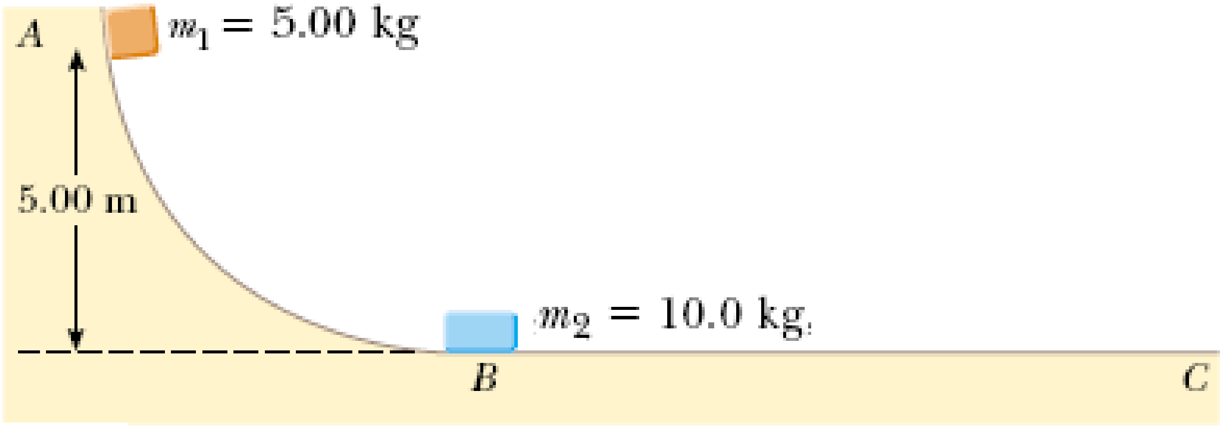
$$-3.33 v_t - v_t = 1.50$$

$$v_t = -\,0.346 \text{ m/s}$$

$$v_k = 1.15 \text{ m/s}$$



Örnek : Başlangıçta durmakta olan m1 kütleli cisim serbest kalınca m2 ile esnek çarpıştıktan sonra ne kadar yükseğe çıkabilir.



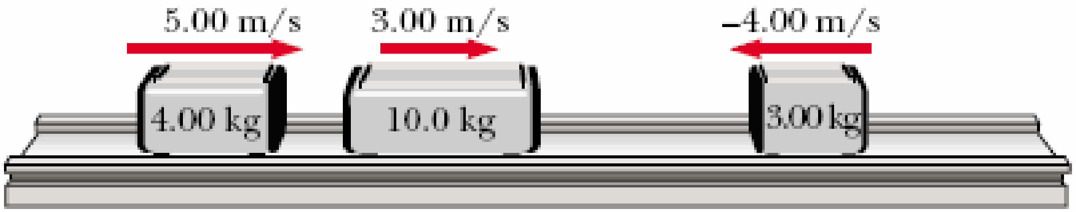
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = m_1gh \longrightarrow v_1 = \sqrt{2(9.80)(5.00)} = 9.90 \text{ m/s}$$

$$v_{1s} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 = -\frac{1}{3}(9.90) \text{ m/s} = -3.30 \text{ m/s}$$

$$m_1gh_{\max} = \frac{1}{2}m_1(-3.30)^2 \longrightarrow h_{\max} = \frac{(-3.30 \text{ m/s})^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)} = 0.556 \text{ m}$$

Örnek : Şekildeki kütleler a) hepsi aynı anda b) sadece ikinci ve üçüncü

c) sadece birinci ve ikinci esnek olmayan çarpışma yaparlarsa hızları ne olur?



$$\left(\sum p\right)_{önce} = \left(\sum p\right)_{sonra}$$

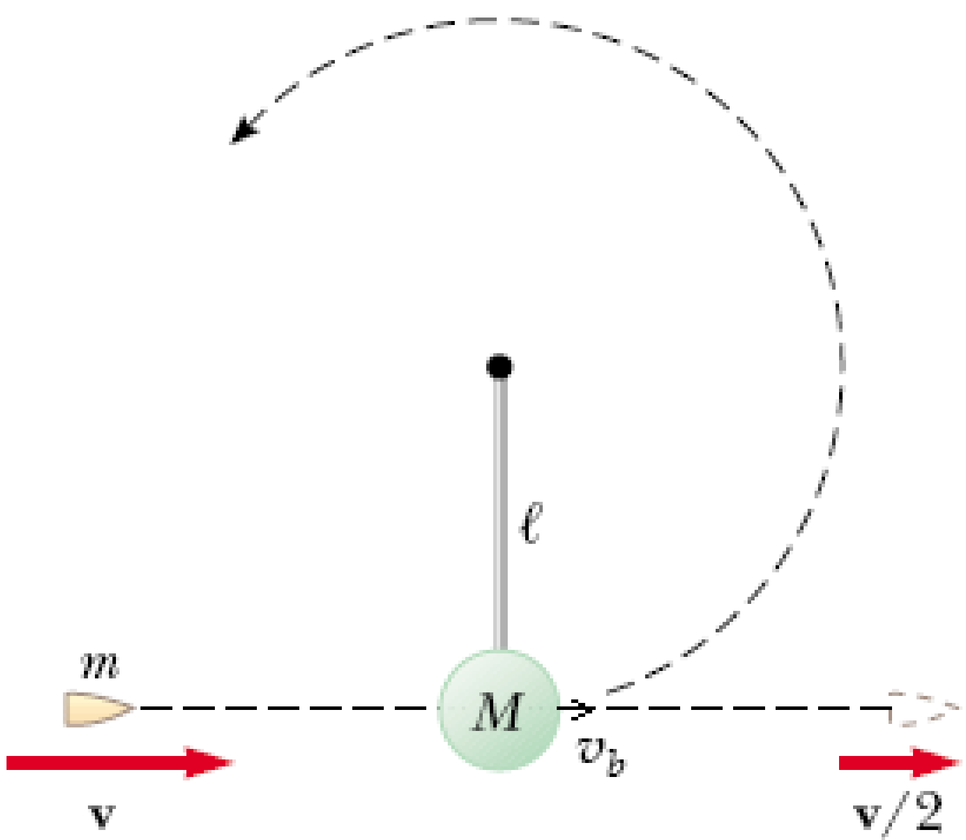
a) $$\left[(4.0+10+3.0)\right]v = (4.0)(5.0) + (10)(3.0) + (3.0)(-4.0)$$

$$v = +2.24 \text{ m/s}$$

b) $$(13)v_1 = (10)(3.0) + (3.0)(-4.0) \qquad v_1 = +1.38 \text{ m/s}$$

c) $$(17)v = (13)(1.38) + (4.0)(5.0) \qquad v = +2.24 \text{ m/s}$$

Örnek : Şekildeki M kütleli V hızına sahip mermi M kütlesini delip V/2 hızı ile çıkıp gidiyor. M kütlesinin tam bir çember çizebilmesi için V hızı ne olmalıdır?



$$K_i + U_i = K_s + U_s$$

$$\frac{1}{2} M v_b^2 + 0 = 0 + Mg2\ell$$

$$v_b^2 = g4\ell \longrightarrow v_b = 2\sqrt{g\ell}$$

$$mv = m\frac{v}{2} + M\left(2\sqrt{g\ell}\right)$$

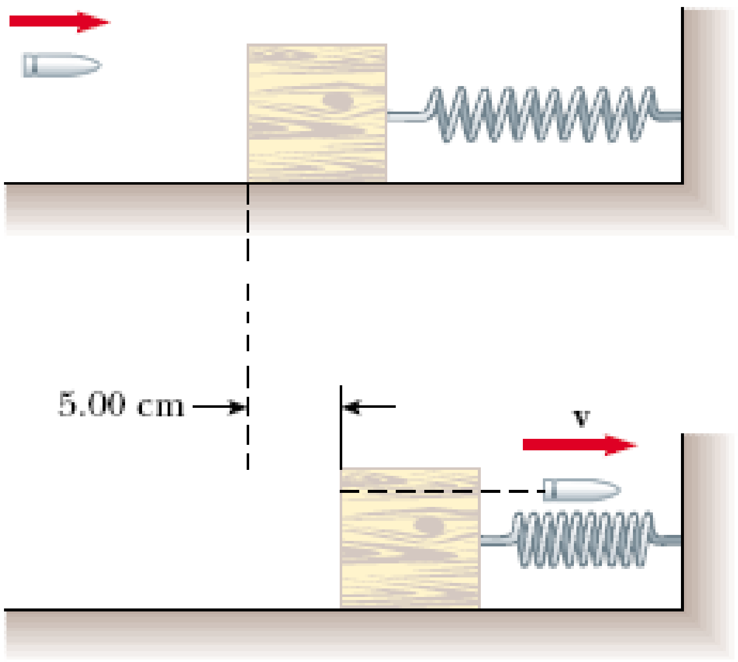
$$v = \frac{4M}{m}\sqrt{g\ell}$$

Örnek : Yay sabiti 900 N/m olan sistemde yay 5.00 cm sıkışmaktadır .

MErminin bloktan çıkış hızını ve hesaplayınız .

$m = 5.00$ g $M = 1.00$ kg

$v_i = 400$ m/s



$$mv_i = MV_i + mv$$

$$\frac{1}{2}MV_i^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

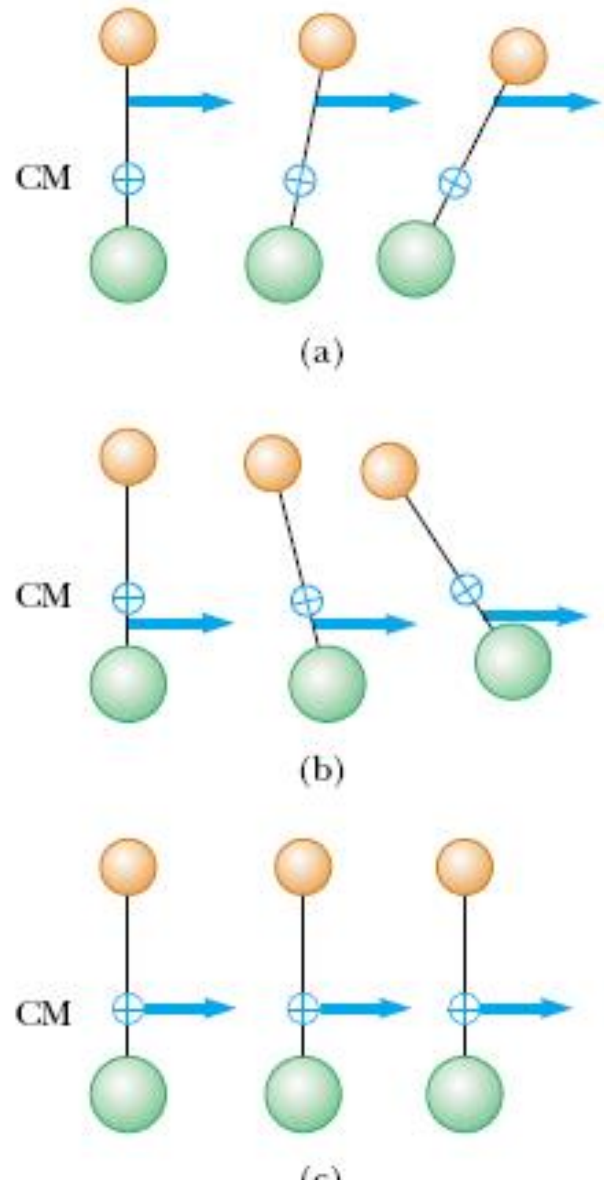
$$V_i = \sqrt{\frac{(900\ \text{N/m})(5.00\times10^{-2}\ \text{m})^2}{1.00\ \text{kg}}} = 1.50\ \text{m/s}$$

$$v = \frac{mv_i - MV_i}{m}$$

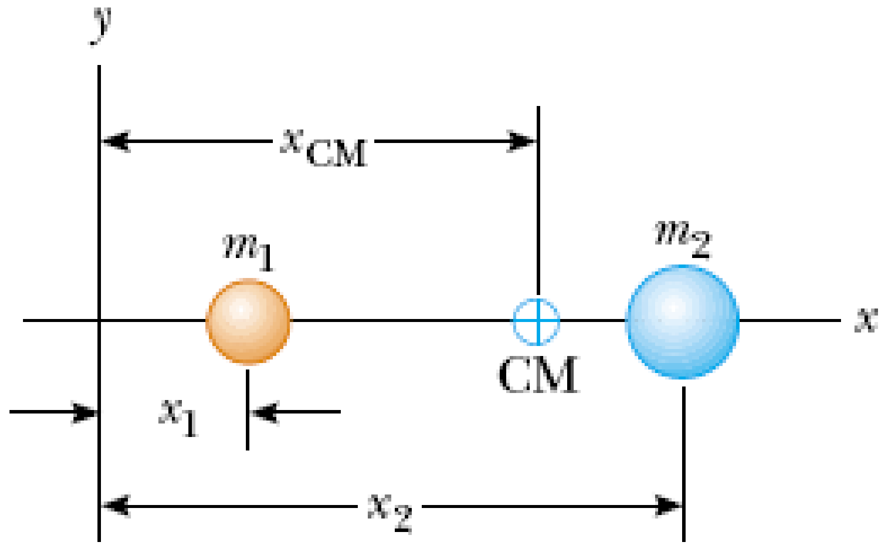
$$= \frac{(5.00\times10^{-3}\ \text{kg})(400\ \text{m/s}) - (1.00\ \text{kg})(1.50\ \text{m/s})}{5.00\times10^{-3}\ \text{kg}}$$

$$v = \boxed{100\ \text{m/s}}$$

Kütle merkezi



(a) (b) (c)



$$x_{CM} \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

$$= \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_ix_i}{M}$$

$$z_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

$$y_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i y_i}{M}$$

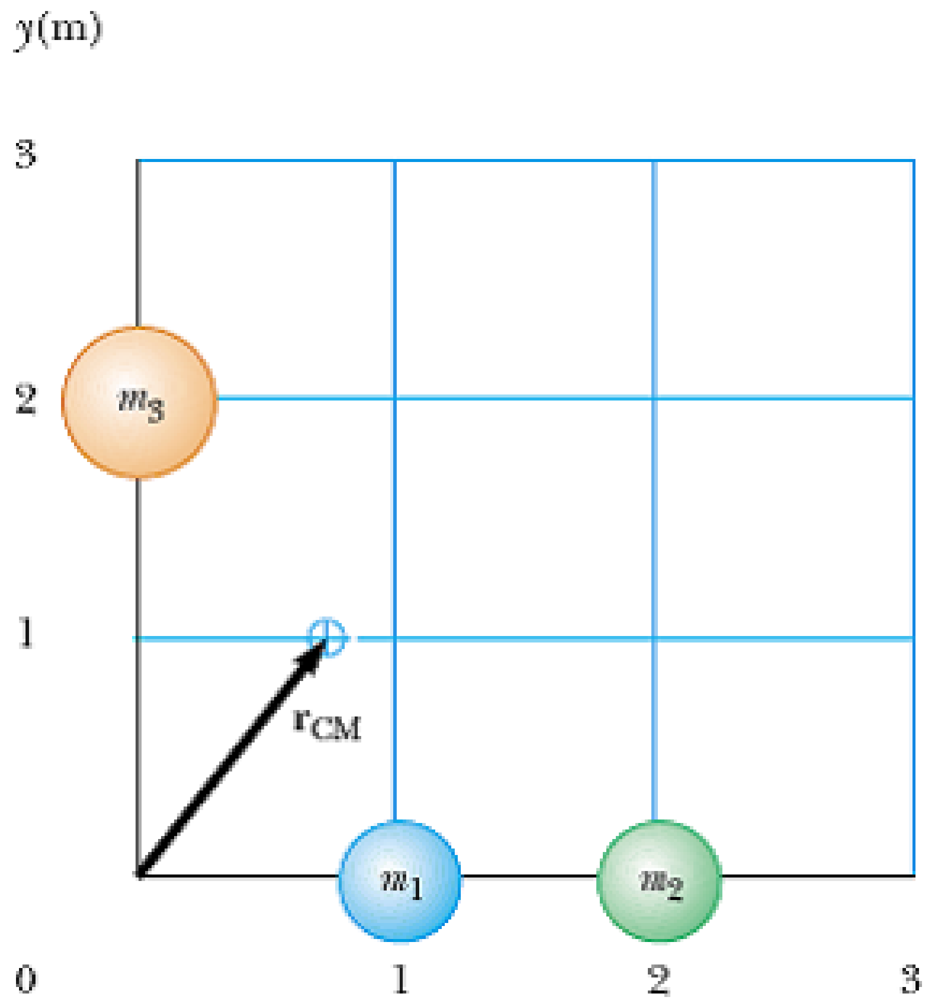
$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = x_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{i}} + y_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{j}} + z_{\mathrm{CM}}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i m_i x_i \hat{\mathbf{i}} + \sum_i m_i y_i \hat{\mathbf{j}} + \sum_i m_i z_i \hat{\mathbf{k}}}{M}$$

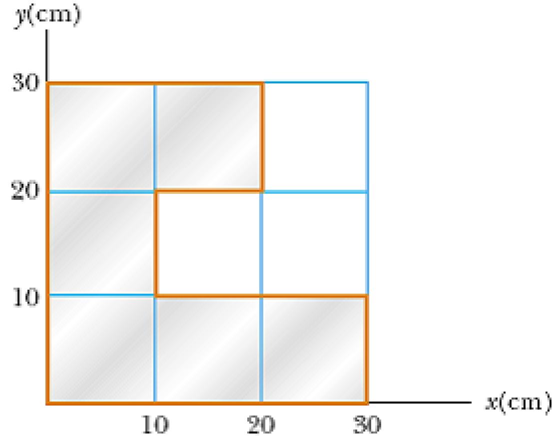
$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \qquad \mathbf{r}_i \equiv x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

Örnek : $m_1=m_2=1$ kg $m_3=2$ kg olan sistemin

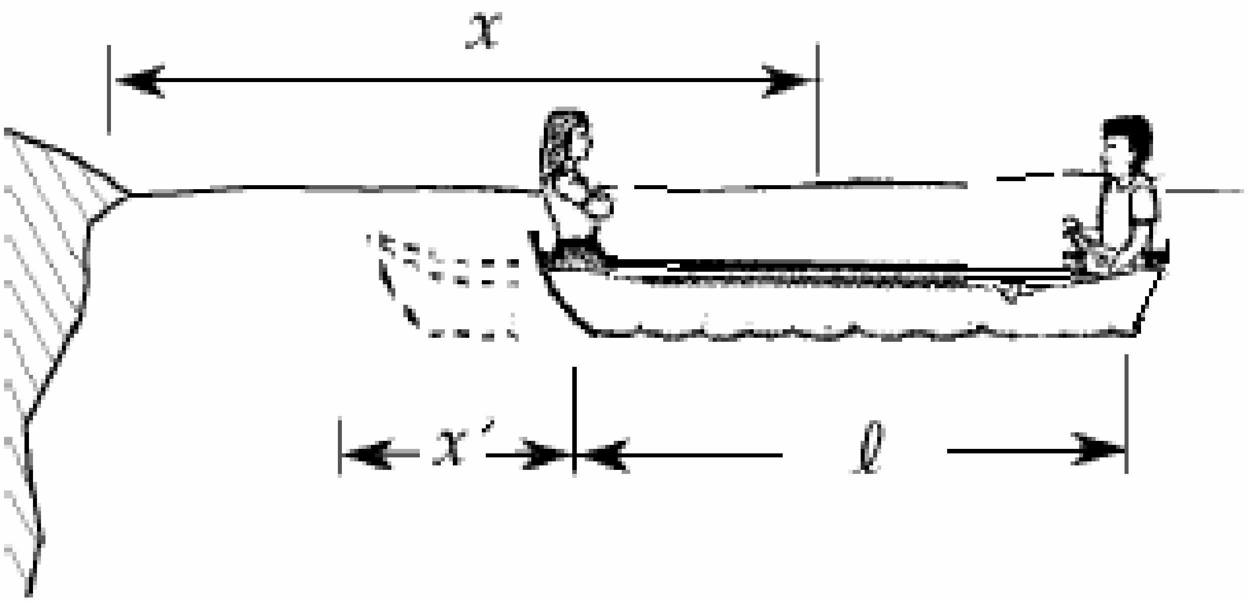
kütle merkezini orijine birleştiren vektörü bulunuz.

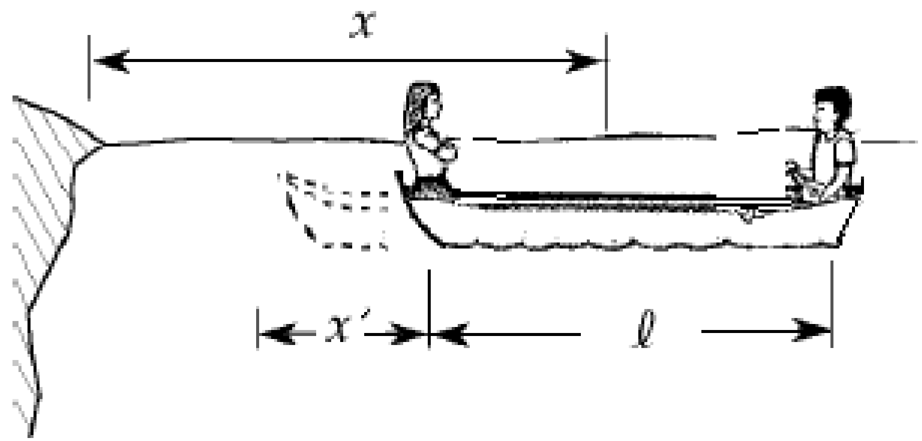


Örnek : Şekildeki sistemin kütle merkezinin koordinatları nedir?



Örnek : Şekildeki erkek 77 kg, bayan 55 kg ve kayığın kütlesi 80 kg ve uzunluğu 2.70 m dir. Eğer bayan kayığın diğer tarafındaki erkeğin yanına kadar kayık içerisinde yürürse kayık sahile ne kadar yaklaşır?





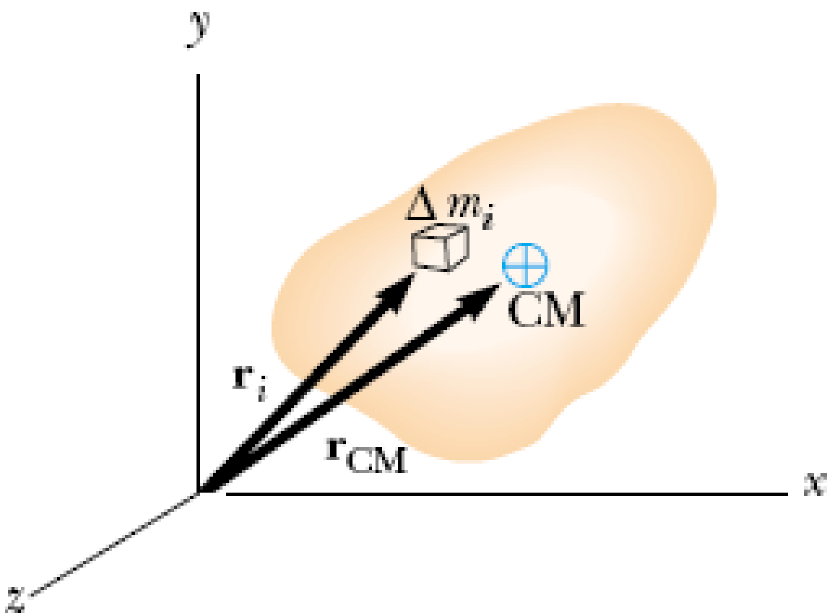
Önce $$x_{CM} = \frac{\left[M_k x + M_b\left(x - \frac{\ell}{2}\right) + M_e\left(x + \frac{\ell}{2}\right)\right]}{\left(M_k + M_e + M_b\right)}$$

sonra $$x_{CM} = \frac{\left[M_k (x - x') + M_b\left(x + \frac{\ell}{2} - x'\right) + M_e\left(x + \frac{\ell}{2} - x'\right)\right]}{\left(M_k + M_e + M_b\right)}$$

$$\ell\left(-\frac{55.0}{2} + \frac{77.0}{2}\right) = x'(-80.0 - 55.0 - 77.0) + \frac{\ell}{2}(55.0 + 77.0)$$

$$x' = \frac{55.0\ell}{212} = \frac{55.0(2.70)}{212} = \boxed{0.700\ \text{m}}$$

Sürekli bir cismin kütle merkezi



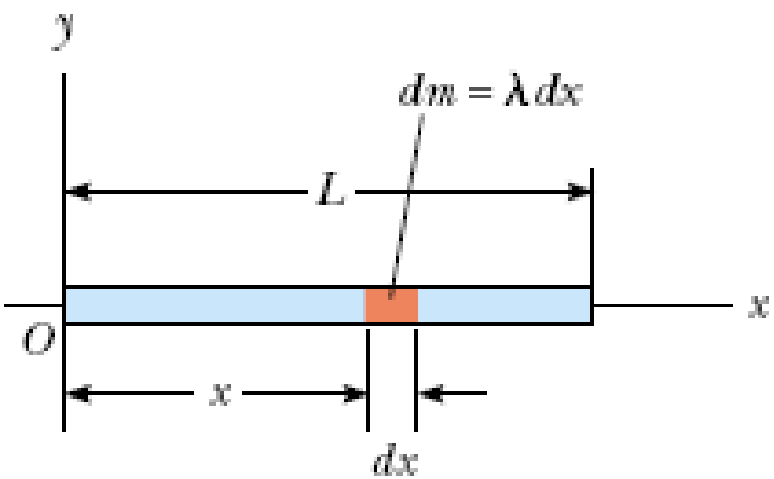
$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

$$\boxed{\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm}$$

Örnek : Kütlesi M ve uzunluğu L olan bir çubuğun a) homojen olması durumunda b) kütlenin $\lambda = \alpha x$ şeklinde değişmesi durumunda kütle merkezini hesaplayınız.

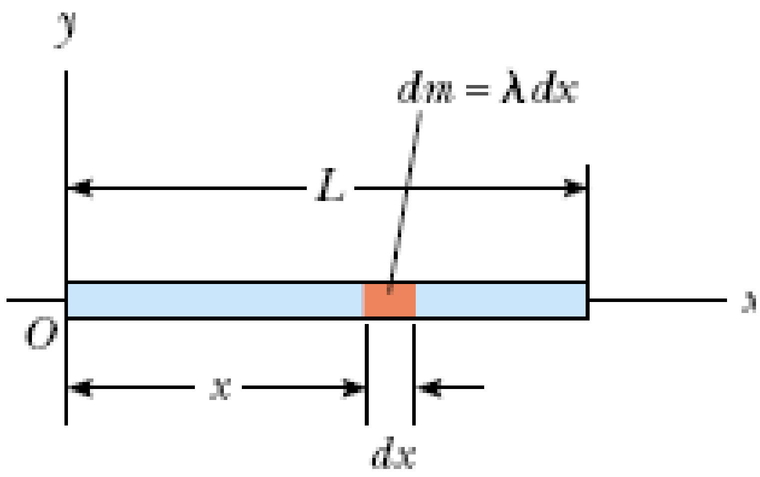


$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx$$

$$= \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

$$x_{CM} = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \boxed{\frac{L}{2}}$$

Örnek : Kütlesi M ve uzunluğu L olan bir çubuğun a) homojen olması durumunda b) kütlenin $\lambda = \alpha x$ şeklinde değişmesi durumunda kütle merkezini hesaplayınız.

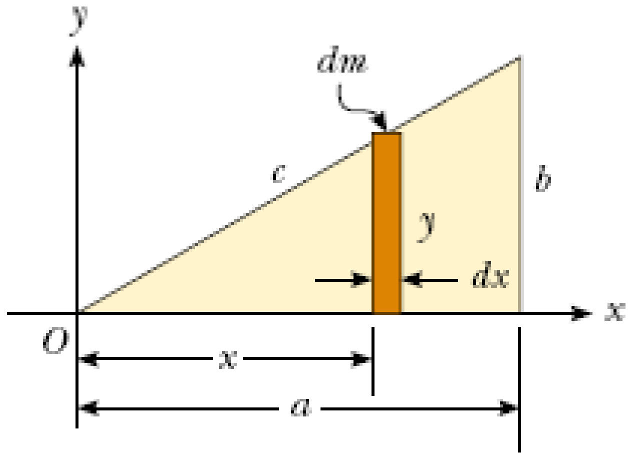


$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^L x\alpha x\,dx$$

$$= \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2\,dx = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

Örnek : Şekildeki gibi kalınlığı t olaarak verilen homojen üçgen cismin kütle merkezini bulunuz.



$$dm = \rho\, y\, t\, dx = \left(\frac{M}{\frac{1}{2}a\,b\,t}\right) y\, t\, dx = \frac{2My}{a\,b}\, dx$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^a x\,\frac{2My}{ab}\, dx$$

$$= \frac{2}{ab}\int_0^a xy\, dx$$

$$y = (b/a)\,x$$

$$x_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right) dx$$

$$= \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2\, dx$$

$$= \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}a$$

Örnek : 30 cm uzunluğundaki bir çubuğun kütle yoğunluğu $\lambda = 50.0\ \mathrm{g/m} + 20.0x\ \mathrm{g/m^2}$

Burada x metre cinsinden çubuğun bir ucundan uzklığı gösterir. a) çubuğun kütlesini

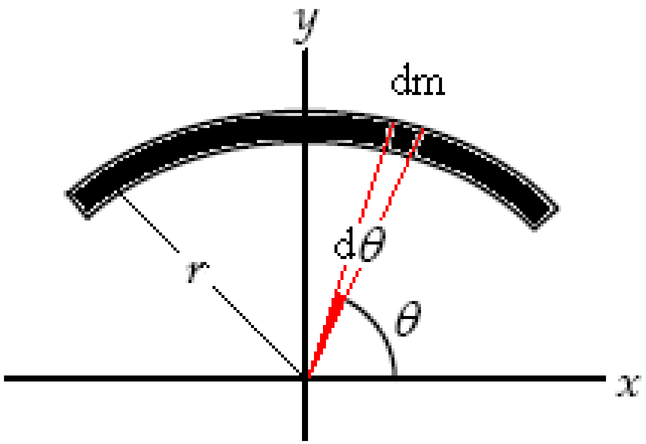
b) kütle merkezinin yerini bulunuz.

(a) $$M = \int_0^{0.300\text{ m}} \lambda\, dx = \int_0^{0.300\text{ m}} \left[50.0 + 20.0x\right] dx = 15.9\text{ g}$$

(b) $$x_{CM} = \frac{\int x\,dm}{M} = \frac{1}{M}\int_0^{0.300\text{ m}} \lambda\, x\,dx = \frac{1}{M}\int_0^{0.300\text{ m}} \left[50.0x + 20.0x^2\right] dx$$

$$x_{CM} = \frac{1}{15.9\text{ g}}\left[25.0x^2 + \frac{20x^3}{3}\right]_0^{0.300\text{ m}} = 0.153\text{ m}$$

Örnek : Şekildeki gbi bükülen homojen L uzunluğundaki çubuk çeyrek çember şeklinde bükülüp koordinat sistemine düzgün yerleştiriliyor. Kütle merkezini bulunuz.



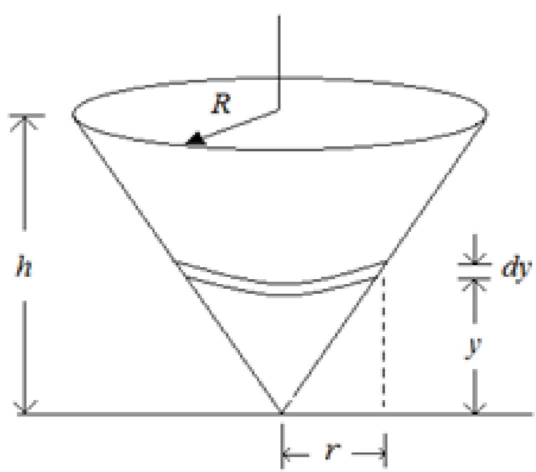
$$L = \frac{1}{4} 2\pi r \longrightarrow r = \frac{2L}{\pi}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y\, dm$$

$$\frac{dm}{r d\theta} = \frac{M}{L} \longrightarrow dm = \frac{Mr}{L} d\theta$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\theta=45^\circ}^{135^\circ} r \sin\theta \frac{Mr}{L} d\theta = \frac{4\sqrt{2}L}{\pi^2}$$

Soru : Kütlece yoğunluğu ρ olan şekildeki gibi içi dolu koni cismin üzerinde bir yerde seçilen bir metal para şeklindeki hacimsel kütle elemanı ile tüm cismi taramak mümkündür. Tabandan yukarıya doğru çıkıldıkça her seçilen elemanın r yarıçapı değiştiği gibi y koordinatının da değişmesi ilk bakışta olasıdır. Bu olay, sonuca iki katlı bir integral ile gidileceğini gösterir. Ancak seçilen her küçük hacim elamanının bir tarafı her zaman koninin yanal yüzeyine değer. Bu sebeple yan yüzün yatayla yaptığı açı göz önüne alınarak y parametresinin r cinsinden yazılması bu integrali tek kata indirger. Bu yol göstermeyi de kullanarak şekildeki koninin kütle merkezinin yerinin dipten itibaren $\frac{3}{4}h$ olduğunu bulunuz.



Parçacık si stemlerinin hareketi

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M}$$

$$M\mathbf{v}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{tot}$$

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

$$M\mathbf{a}_{CM} = \sum m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i$$

$$\sum \mathbf{F}_{dış} = M\mathbf{a}_{CM}$$

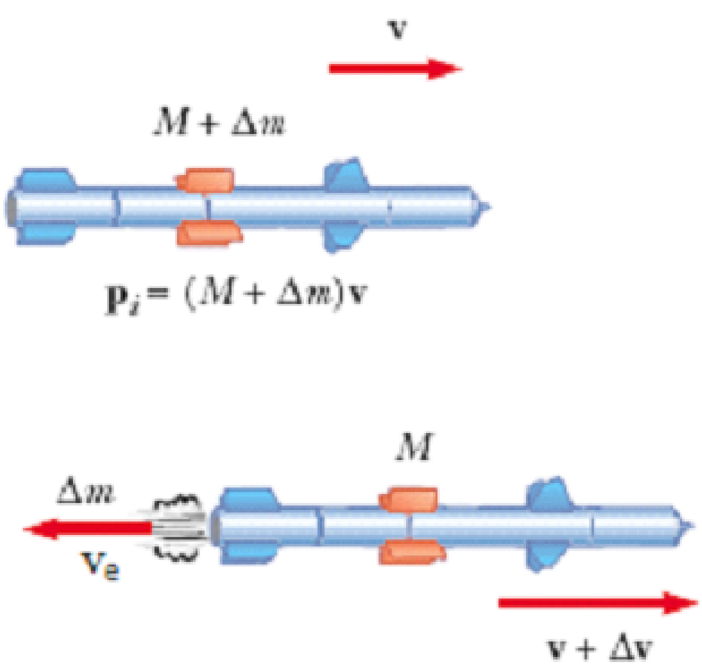
dış kuvvet sıfı ise;

$$M\mathbf{a}_{CM} = M\frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = 0$$

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{p}_{top} = \text{sabit}$$

Roket itmesi

v hızı ile giden gemi Δm kadar bir gaz kütlesini püskürtürse geminin hızını nasıl etkileneceğini inceleyelim. Gazın çıkış hızı gemiye göre v_e olsun. Bu durumda geminin hızına bu gaz çıkışı Δv kadar bir katkı sağlasın.



$$P_i = P_S$$

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

$$M\,\Delta v = v_e\,\Delta m$$

çıkan gaz kütlesi ve hız değişimleri

$$\Delta v \longrightarrow dv \qquad \Delta m \longrightarrow dm.$$

$$M\,dv = v_e\,dm = -v_e\,dM \qquad **$$

$$*$$

$$\int_{v_i}^{v_S} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_S} \frac{dM}{M}$$

$$v_S - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_S}\right)$$

Örnek : Satürn V aracının 2600 m/sn hızla sn'de 15000 kg yanmış yakıt attığını düşündüğümüzde a) bu işlemle araca verilen itici kuvvet ne kadardır? b) ilk kütlesi $3x10^6$ kg olan aracın düşey yukarı hareketinde kazandığı ivme ne olur?

$$\text{(a)} \quad \begin{matrix}\text{İtici}\\ \text{kuvvet}\end{matrix} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| = \left(2.60\times10^3 \ \text{m/s}\right)\left(1.50\times10^4 \ \text{kg/s}\right) = 3.90\times10^7 \ \text{N}$$

$$\text{(b)} \quad \sum F_y = \begin{matrix}\text{İtici}\\ \text{kuvvet}\end{matrix} - Mg = Ma$$

$$3.90\times10^7 - \left(3.00\times10^6\right)(9.80) = \left(3.00\times10^6\right) a$$

$$a = 3.20 \ \text{m/s}^2$$

Örnek : Başlangıçtaki duran ve kütlesi 25.5 gr yakıtı olan bir model roketin 12.7 gr

Yakıtı 1.9 sn içerisinde yandığında rokete verilen ortalama itme 5.26 N dur.

a) Gazın rokete göre motordan çıkış hızı b) eğer roket motoru 53.5 gr ise

tüm yakıt yandığında roketin ortalama hızın hesaplayınız.

(a) $$\frac{dM}{dt} = \frac{12.7 \text{ g}}{1.90 \text{ s}} = 6.68 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$$

$$\text{İtme } = v_e \frac{dM}{dt}$$

$$5.26 \text{ N} = v_e \left(6.68 \times 10^{-3} \text{ kg/s}\right) \longrightarrow v_e = 787 \text{ m/s}$$

(b) $$v_S - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_S}\right)$$

$$v_S - 0 = (787 \text{ m/s}) \ln\left(\frac{53.5 \text{ g} + 25.5 \text{ g}}{53.5 \text{ g} + 25.5 \text{ g} - 12.7 \text{ g}}\right)$$

$$v_S = 138 \text{ m/s}$$