Rastgele Değişkenler ve Beklenti

IST 108 Olasılık ve İstatistik
Bahar 2016

Yrd. Doç. Dr. Ferhat Dikbıyık

Rastgele Değişkenler (Random Variables)

- Bir deney gerçeklendiğinde çoğunlukla deneyin tüm sonuçlarından ziyade deneyin çıktılarının bazı fonksiyonları ile ilgileniriz.
- Örneğin zar deneyinde iki zar toplamının 7 olup olmadığı ile ilgileniriz ve 7 toplamının nasıl olduğu ile ilgilenmeyiz. İlgilendiğimiz bu numerik (sayısal) değeri olan fonksiyonlara ratgele değişken denir.
- Mavi zar-beyaz zar deneyinde mavi zarın gösterdiği sayı *X* ve beyaz zarın gösterdiği sayı *Y* ise aşağıdakiler birer rastgele değişken örneğidir.

  - X
  - Y
  - X+Y
  - sin(XY)
  - 2(XY)
  - X-Y
  - X^2Y
  - $\sqrt{Y}$

Örnek 1

- 3 bitlik rastgele bir ikili sayı üretiliyor. Her bit eşit ihtimalle 0 veya 1 oluyor ve bitlerin oluşumu birbirinden bağımsızdır. X gelen 1 bitlerinin sayısını ifade etsin. Bu durumda X bir rastgele değişkendir. X hangi değerler arasında değişir ve her bir değere eşit olma ihtimali nedir?

Örnek 1

- 3 bitlik rastgele bir ikili sayı üretiliyor. Her bit eşit ihtimalle 0 veya 1 oluyor ve bitlerin oluşumu birbirinden bağımsızdır. X gelen 1 bitlerinin sayısını ifade etsin. Bu durumda X bir rastgele değişkendir. X hangi değerler arasında değişir ve her bir değere eşit olma ihtimali nedir?
- X rastgele değişkeni 0, 1, 2 ve 3 değerlerinden birini alır. B: Bitin 1'e eşit olması
- $P\{X = 0\} = P\{(B', B', B')\} = ½ \times ½ \times ½ = 1/8$
- $P\{X = 1\} = P\{(B, B', B'),(B', B', B),(B', B, B')\} = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$
- $P\{X = 2\} = P\{(B', B, B),(B, B, B'),(B, B', B)\} = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$
- $P\{X = 3\} = P\{(B, B, B)\} = ½ \times ½ \times ½ = 1/8$

Örnek 2

- Slotted ALOHA protokolübü düşünelim. Bir kullanıcının gönderecek verisi vardır ve herhangi bir zaman aralığında çarpışma olmadan bu veriyi gönderme ihtimali *p* ile gösterilmiştir. Eğer kablosuz kanal üzerinde başka bir kullanıcının verisi ile çarpışırsa rastgele belirlenen bir zaman aralığında tekrar göndermeyi dener. Eğer *n* sayıda denemeden sonra kullanıcı verisini gönderemez ise kablosuz ağdan ayrılır. X, kullanıcı verisini gönderene veya ağdan ayrılana kadar veri gönderme sayısını göstersin. Bu durumda X bir rastgele değişkendir. X hangi değerleri alır ve her bir değere eşit olma ihtimali nedir?

Örnek 2

- Slotted ALOHA protokolübü düşünelim. Bir kullanıcının gönderecek verisi vardır ve herhangi bir zaman aralığında çarpışma olmadan bu veriyi gönderme ihtimali *p* ile gösterilmiştir. Eğer kablosuz kanal üzerinde başka bir kullanıcının verisi ile çarpışırsa rastgele belirlenen bir zaman aralığında tekrar göndermeyi dener. Eğer *n* sayıda denemeden sonra kullanıcı verisini gönderemez ise kablosuz ağdan ayrılır. X, kullanıcı verisini gönderene veya ağdan ayrılana kadar veri gönderme sayısını göstersin. Bu durumda X bir rastgele değişkendir. X hangi değerleri alır ve her bir değere eşit olma ihtimali nedir?
- X rastgele değişkeni 1, 2, …,n değerlerinden birini alır. T: veriyi göndermesi
- $P\{X = 1\} = P(T) = p$
- $P\{X = 2\} = P(T', T) = (1-p)p$
- $P\{X = 3\} = P(T', T', T) = (1-p)^2p$
- …..
- $P\{X = n-1\} = P(T', T', \ldots, T', T) = (1-p)^{n-2}p$
- $P\{X = n\} = P\{(T', T', \ldots, T', T), (T', T', \ldots, T', T')\} = (1-p)^{n-1}p + (1-p)^n = (1-p)^{n-1}$

Kesikli Rastgele Değişkenler

- Bir rastgele değişkenin alabileceği değerler sınırlı sayıda (countable) ise, bu değişken ***kesikli rastgele değişken*** olarak tanımlanır.
- Bir kesikli değişkenin muhtemel değerlerden birini alma ihtimalini gösteren fonksiyona ***olasılık kütle fonksiyonu*** denir.

$$p_X(a) = P\{X = a\}$$

Olasılık Kütle Fonksiyonu (Probability Mass Function)

- Olasılık kütle fonksiyonu (pmf) sayılabilir miktarda *a* değeri için pozitiftir. Bir diğer deyişle, eğer x_1, x_2, … değerleri X rastgele değişkenin mevcut değerleri ise,

$$p_X(x_i) \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$p_X(x) = 0 \qquad \text{tum} \quad \text{diger x} \quad \text{degerleri} \quad \text{icin}$$

- X rastgele değişkeni x_i değerlerinden birini alacağından,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1$$

Örnek 3

- Bir X rastgele değişkenin olasılık kütle fonksiyonu şu şekilde verilmiştir:
  - $p_X(k) = c.\frac{a^k}{k!}$, k = 0, 1,2,… ve a pozitif bir sayı.
  - P{X = 0} =?
  - P {X > 2} = ?
  - İpucu $e^a = \sum_{i=0}^{\infty} a^k/k!$

Örnek 3

- Bir X rastgele değişkenin olasılık kütle fonksiyonu şu şekilde verilmiştir:
  - $P_X(k) = c.\frac{a^k}{k!}$, k = 0, 1,2,… ve a pozitif bir sayı.
  - P{X = 0} =?
  - P {X > 2} = ?
  - İpucu $e^a = \sum_{i=0}^{\infty} a^k/k!$

$\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$ => c $\sum_{k=0}^{\infty} a^k/k! = 1$ =>$c = e^{-a}$

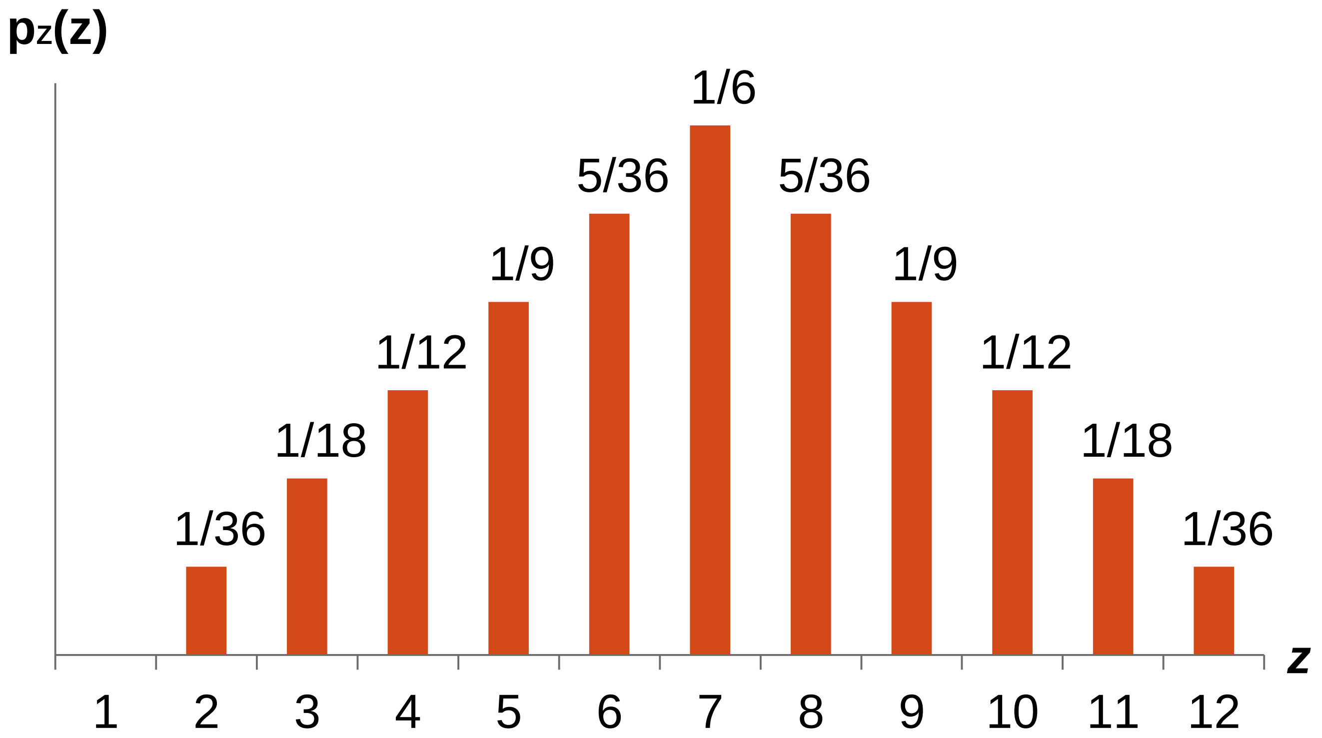
P{X = 0}=$e^{-a}a^0/0! = e^{-a}$

P {X > 2} = 1 – P{X = 0} – P{X = 1} – P{X = 2}

= 1 –e^{-a}– ae^{-a}– $a^2e^{-a}/2$

Olasılık Kütle Fonksiyonu
İki zar deneyi

- İki zar deneyimizde *X* mavi zar üstündeki ve *Y* de beyaz zar üzerindeki noktaları ifade ediyordu. Yeni bir rastgele değişken tanımlayalım.
- $Z = X + Y$ için pmf grafiği şöyle olur.



Yığılmalı (Kümülatif) Dağılım Fonksiyonu (Cumulative Distribution Function)

- Bazen bir rastgele değişkenin aldığı bir değeri değil de herhangi bir değerden küçük olma (yada bir değer aralığı içinde olma) ihtimali ile ilgileniriz. Bunun için yığılmalı dağılım fonksiyonunu (cdf) kullanırız.

$$F_X(a) = P\{X \leq a\}$$

$$F_X(a) = \sum_{\text{her } x \leq a} p_X(x)$$

Yani a değerine kadar olan (a dahil) X'in tüm muhtemel değerlerine eşit olma olasılıkları toplamı.

Yığılmalı Dağılım Fonksiyonu
İki Zar Deneyi

Örneğin iki zarda gelen sayılar toplamının 8 veya daha düşük olma ihtimali 13/18'dir.

13/18-1/6=10/18

Peki 5 ile 8 arasında olma ihtimali nedir?

1-13/18=5/18

Peki 9 veya daha büyük olma ihtimali nedir?

Dağılım Fonksiyonun Özellikleri

Bu özelliklerde $F_X(x^+)$ ve $F_X(x^-)$ ifadeleri şu limitleri ifade etmektedir.

$$F_X(x^+) = \lim F_X(x+\varepsilon) \qquad F_X(x^-) = \lim F_X(x-\varepsilon) \qquad \varepsilon < 0 \to 0$$

1. $F_X(+\infty) = 1 \qquad F_X(-\infty) = 0$
2. Azalmayan bir fonksiyondur Eğer $x_1 < x_2$ ise $F_X(x_1) < F_X(x_2)$.
3. Eğer $F_X(x_0) = 0$ ise her $x < x_0$ için $F_X(x) = 0$.
4. $P\{X > x\} = 1 - F_X(x)$
5. Sağdan devamlıdır. $F_X(x^+) = F_X(x)$
6. $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$ ve $P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1^-)$
7. $P\{X = x\} = F_X(x) - F_X(x^-)$

Beklenti (Expectation) yada Beklenen Değer (Expected Value)

- Olasılık teorisinde ***çok önemli*** konseptlerinden biri bir rastgele değişkenin beklenen değeridir. Kesikli bir rastgele değişkenin beklenen değeri

$$E[X] = \sum_i x_i P\{X = x_i\} = \sum_{x:p_X(x)>0} x p_X(x)$$

- Diğer bir deyişle, *X*'in beklenen değeri *X*'in alabileceği olası değerlerin ağırlıklı ortalamasıdır (her muhtemel değerin ağırlığı o *X*'in o değere eşit olma olasılığıdır).

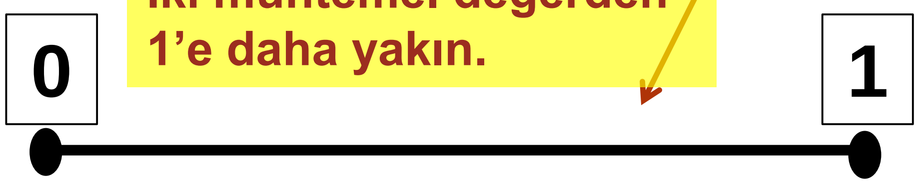
Beklenti yada Beklenen Değer

- Örnek:

$$p(0) = \frac{1}{4}, \quad p(1) = \frac{3}{4}$$

$$E[X] = 0\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

Beklenen değer
İki muhtemel değerden
1’e daha yakın.



Beklenti

- Örneğin bir zar atışındaki beklenti:

$$E[X] = 1(1/6) + 2(1/6) + 3(1/6) + 4(1/6) + 5(1/6) + 6(1/6)$$

$$E[X] = 7/2$$

Eğer sonsuz kere zar atsaydık ve sonuçların ortalamasını alsaydık cevap 7/2 olurdu.

Örnek 4

- *H*, belirli bir A olayının göstergesi olsun. Şöyle ki;

$$H = \begin{cases} 0 & \text{Eğer A olayı gerçekleşmezse} \\ 1 & \text{Eğer A olayı gerçekleşirse} \end{cases}$$

Bu durumda H'nin beklentisi ne olur?

Örnek 4

- *H*, belirli bir A olayının göstergesi olsun. Şöyle ki;

$$H = \begin{cases} 0 & \text{Eğer A olayı gerçekleşmezse} \\ 1 & \text{Eğer A olayı gerçekleşirse} \end{cases}$$

Bu durumda H'nin beklentisi ne olur?

$$p_H(1) = P(A) \qquad\qquad p_H(0) = P(\bar{A})$$

$$E[H] = 0.P(\bar{A}) + 1.P(A) = P(A)$$

Örnek 5

- Sakarya Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği'nden 120 öğrenci BİLMÖK gezisine 3 otobüsle gideceklerdir. Birinci otobüste 36, ikincisinde 44 ve üçüncüsünde 40 öğrenci vardır. BİLMÖK'te rastgele seçilen bir öğrenciye geldiği otobüste kaç kişi olduğu sorulursa öğrencinin vereceği cevabın beklentisi ne olur?

Örnek 5

- Sakarya Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği'nden 120 öğrenci BİLMÖK gezisine 3 otobüsle gideceklerdir. Birinci otobüste 36, ikincisinde 44 ve üçüncüsünde 40 öğrenci vardır. BİLMÖK'te rastgele seçilen bir öğrenciye geldiği otobüste kaç kişi olduğu sorulursa öğrencinin vereceği cevabın beklentisi ne olur?
- X: Öğrencinin geldiği otobüsteki öğrenci sayısı olsun
- X, bu durumda 36, 40 veya 44'e eşittir.
- E[X] = 36.P[X=36] + 40.P{X=40} + 44.P{X=44}
- E[X] = 36.(36/120)+ 40.(40/120) + 44.(44/120) = 40,2667

Bir Rastgele Değişkenin Fonksiyonun Beklentisi

- Diyelim ki bir rastgele değişkenin pmf ve cdf fonksiyonları verilmiş olsun. Ama bazen bir bu rastgele değişkenin (*X*) bir fonksiyonu ile ilgileniriz (g(*X*)).
- g(*X*)'in kendisi de bir rastgele değişken olduğu için, bir pmf ve cdf vardır ve *X*'in fonksiyonlarından üretilebilir. Örnek;
  - $p(0) = 0.2, \quad p(1) = 0.5, \quad p(2) = 0.3.$ $E[X^2]$ nedir?
  - $Y = X^2, \quad p_Y(0) = P\{Y = 0^2\} = 0.2,$

$$p_Y(1) = P\{Y = 1^2\} = 0.5, \quad p_Y(4) = P\{Y = 2^2\} = 0.3$$

$$E[X^2] = E[Y] = 0(0.2) + 1(0.5) + 4(0.3) = 1.7$$

Bir Rastgele Değişkenin Fonksiyonun Beklentisi

- Her ne kadar bu yöntem teoride işe yarasa da, bu işin daha kolay bir yolu var.

$$E[g(X)] = \sum_{x} g(x) p_X(x)$$

- Bir önceki örnek için;

$$E[X^2] = 0^2(0.2) + 1^2(0.5) + 2^2(0.3) = 1.7$$

- Lineer fonksiyonlar için bu özelliğin doğal bir sonucu;

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

Beklenti = Ortalama = İlk Moment

- Beklentiye aynı zamanda ortalama (mean) yada ilk moment de denir. Bir rastgele değişkenin *n*. momenti, $E[X^n]$ şeklinde gösterilir ve kesikli rastgele değişkenler için aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$E[X^n] = \sum_x x^n p(x)$$

İki Rastgele Değişkenin Toplamının Beklenen Değeri

- İki rastgele değişkenin bir fonksiyonunun beklenen değeri aynı tek değişkende olduğu gibi hesaplanabilir;

$$E[g(X,Y)] = \sum_{y}\sum_{x} g(x,y)\,p_{X,Y}(x,y)$$

- g(*x*, *y*)=*X*+*Y* ise

$$E[X+Y] = \sum_{y}\sum_{x}(x+y)\,p_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_{x} x \underbrace{\sum_{y} p_{X,Y}(x,y)}_{p_X(x)} + \sum_{y} y \underbrace{\sum_{x} p_{X,Y}(x,y)}_{p_Y(y)}$$

$$= E[X] + E[Y]$$

Rastgele Değişkenlerin Toplamlarının Beklentisi

- Genel olarak şöyle yazabiliriz;

$$E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$$

Varyans

- Verilen bir rastgele değişkenin dağılım fonksiyonunu özetleyen ölçütler oldukça fayda sağlamaktadır. Bu anlamda beklenen değer, değişkenin ağırlıklı ortalamasını vererek bir fikir verir.
- Fakat beklenen değer, değişkenin varyasyonu, diğer bir deyişle yayılımı hakkında bir bilgi vermez. Şu üç değişkene bir göz atalım;
  - $W = 0$, 1 olasılıkla
  - $Y = -1$, ½ olasılıkla ve $Y = 1$, ½ olasılıkla
  - $Z = -100$, ½ olasılıkla ve $Z = 100$, ½ olasılıkla
  - Bu 3 değişken için de beklenti 0'dır. Ama yayılımları farklıdır.

Varyans

- Varyans, rastgele değişkenin beklenen değerinden (E[X]= μ) ne kadar uzağa yayılım yaptığını gösterir ve şu şekilde ölçülür;

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2]$$

- Alternatif bir varyans hesaplama tekniği;

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E[(X-\mu)^2] \\
&= E[X^2 - 2X\mu + \mu^2] \\
&= E[X^2] - E[2X\mu] + E[\mu^2] \\
&= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\
&= E[X^2] - \mu^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2}$$

Varyans

- Örneğin bir zarar attığımızdaki varyansı hesaplayalım.
- Daha önce beklentiyi 7/2 bulmuştuk.
- $E[X^2] = 1^2.(1/6) + 2^2.(1/6) + 3^2.(1/6) + 4^2.(1/6) + 5^2.(1/6) + 6^2.(1/6) = 91/6$
- $Var(X) = 91/6 – (7/2)^2 = 35/12$

Örnek 6

- *H*, belirli bir A olayının göstergesi olsun. Şöyle ki;

$$H = \begin{cases} 0 & \text{Eğer A olayı gerçekleşmezse} \\ 1 & \text{Eğer A olayı gerçekleşirse} \end{cases}$$

Bu durumda H'nin varyansı ne olur?

Daha önce beklentiyi P(A) olarak hesaplamıştık.

$$E[H^2] = 0^2.P(\bar{A}) + 1^2.P(A) = P(A)$$

$$Var(H) = E[H^2] - (E[H])^2 = P(A)(1 - P(A))$$

Problem 1

- Bir bilgisayar oyununda oyuncunun önünde 2 aşama vardır. Oyuncu istediği aşamayı yarışmak için seçebilir. Oyuncu ilk seçtiği aşamayı geçerse ancak o zaman diğer aşamayı oynamaya hak kazanır. Eğer ilk aşamayı geçemezse diğer aşamayı oynamasına izin verilmez. Aşamalardan biri 100 puan değerinde diğeri ise 200 puan değerindedir. İki aşamayı da geçerse 300 puan alacaktır. Fakat 100 puanlık aşamanın zorluk derecesi (oyuncunun bu aşamayı geçme ihtimali) %80 iken diğer aşamayı geçme ihtimali %60’tır. Bu durumda oyuncu hangi aşamadan başlarsa puan kazancı maksimum olur?

Problem 1

- Bir bilgisayar oyununda oyuncunun önünde 2 aşama vardır. Oyuncu istediği aşamayı yarışmak için seçebilir. Oyuncu ilk seçtiği aşamayı geçerse ancak o zaman diğer aşamayı oynamaya hak kazanır. Eğer ilk aşamayı geçemezse diğer aşamayı oynamasına izin verilmez. Aşamalardan biri 100 puan değerinde diğeri ise 200 puan değerindedir. İki aşamayı da geçerse 300 puan alacaktır. Fakat 100 puanlık aşamanın zorluk derecesi (oyuncunun bu aşamayı geçme ihtimali) %80 iken diğer aşamayı geçme ihtimali %60'tır. Bu durumda oyuncu hangi aşamadan başlarsa puan kazancı maksimum olur?
- X: 100 puanlık aşamadan başlarsa puanı olsun.
  - Bu durumda X, 100 puanlık aşamayı geçemezse (yani 0,2 ihtimalle) 0'a,
  - Eğer ilk aşamayı geçer ve ikinci aşamayı geçemezse (yani 0,8x0,4 = 0,32 ihtimalle) 100'e ve
  - İki aşamayı da geçerse (yani 0,8x0,6 = 0,48 ihtimalle) 300' eşit olur
  - Bu durumda X'in beklentisi
  - $E[X] = 0 \times 0,2 + 100 \times 0,32 + 300 \times 0,48 = 176$

Problem 1

- Bir bilgisayar oyununda oyuncunun önünde 2 aşama vardır. Oyuncu istediği aşamayı yarışmak için seçebilir. Oyuncu ilk seçtiği aşamayı geçerse ancak o zaman diğer aşamayı oynamaya hak kazanır. Eğer ilk aşamayı geçemezse diğer aşamayı oynamasına izin verilmez. Aşamalardan biri 100 puan değerinde diğeri ise 200 puan değerindedir. İki aşamayı da geçerse 300 puan alacaktır. Fakat 100 puanlık aşamanın zorluk derecesi (oyuncunun bu aşamayı geçme ihtimali) %80 iken diğer aşamayı geçme ihtimali %60'tır. Bu durumda oyuncu hangi aşamadan başlarsa puan kazancı maksimum olur?
- Aynı şekilde Y: 200 puanlık aşamadan başlarsa puanı olsun.
  - Bu durumda Y, 200 puanlık aşamayı geçemezse (yani 0,4 ihtimalle) 0'a,
  - Eğer ilk aşamayı geçer ve ikinci aşamayı geçemezse (yani 0,6x0,2 = 0,12 ihtimalle) 200'e ve
  - İki aşamayı da geçerse (yani 0,8x0,6 = 0,48 ihtimalle) 300' eşit olur
  - Bu durumda Y'in beklentisi
  - $E[Y] = 0 \times 0{,}2 + 200 \times 0{,}12 + 300 \times 0{,}48 = 168 < E[X] = 176$
  - Bu durumda 100 puanlık aşamadan başlamalıdır.