

Sabitlerin Değişimi Yöntemi:

$y' + P(x) \cdot y = 0$ denkleminde homojen kısım için çözüm bulunursa:

$$0 \rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx \rightarrow \ln y = -\int P(x)dx + \ln c \rightarrow y = c e^{-\int P(x)dx} + \ln c$$

c sabiti $c(x)$ ile değiştirilir. $y = c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} - c(x) P(x) e^{-\int P(x)dx}$$
$$c'(x) e^{\int P(x)dx} - c(x) P(x) e^{\int P(x)dx} + c(x) e^{\int P(x)dx} P(x) = 0(x)$$

$$c'(x) e^{\int P(x)dx} = 0(x) \rightarrow c'(x) = \int e^{\int P(x)dx} \cdot 0(x) dx + c \text{ çıkar.}$$

yerine yazılınca:

$$y = \left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot 0(x) dx + c \right] \cdot e^{-\int P(x)dx} \text{ olarak bulunur.}$$

Bernoulli Diferansiyel Denklemleri:

Video izle!

$y' + P(x) \cdot y = 0(x) \cdot y^n$ denkleminde $n \neq 1$

$$\frac{y'}{y^n} + P(x) \frac{1}{y^{n-1}} = 0(x) \text{ denkt. } \frac{1}{y^{n-1}} = z \text{ dönüşümü yapılır.}$$

$$z = y^{1-n} \rightarrow z' = (1-n) y^{-n} y' \text{ yerine yazılıp denkt. lin. dif. denkt. haline gelir.}$$

$y' - xy = y^3 e^{-x^2}$ genel çözüm?

$$y' - xy = -y^3 e^{-x^2} \rightarrow \frac{y'}{y^3} - xy = -e^{-x^2}$$

$$\frac{1}{y^2} = z \rightarrow z' = -\frac{2y'y}{y^4} = -\frac{2y'}{y^3}$$

$$-\frac{z'}{2} - xz = -e^{-x^2} \rightarrow z' + 2xz = 2e^{-x^2} \text{ (lin. dif. denkt.)}$$

$$z(x) = e^{-\int 2x dx} \left[\int e^{\int 2x dx} \cdot 2e^{-x^2} dx + c \right]$$

$$z = e^{-x^2} (2x + c) = 1/y^2$$

Riccati Diferansiyel Denklemleri:

Eğer özel çözümü biliniyorsa, y_1 özel çözüm ise:

$y = y_1 + 1/u$ dön. yapılır. Denkleminde türevi ve kendisi yazılır.

lineer dif. denkt. bulunur. Ve çözülür.

$y' + y^2 - 1 = 0$ denklemin bir özel çözümü $y=1$ old. göre genel çözüm?

$$y = 1 + 1/u \text{ dön. yapılır. } y' = -\frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{u'}{u^2} + \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 - 1 = 0$$

$$= -\frac{u'}{u^2} + 1 + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2} - 1 \rightarrow u^2 - 2u = 1 \text{ (lin. dif. denkt.)}$$

$$u = e^{2x} \left(\frac{e^{-2x}}{-2} + c \right) = \frac{-1 + 2ce^{2x}}{-2} \rightarrow y = 1 + \frac{1}{u} = 1 + \frac{2}{-1 + 2ce^{2x}} = y$$

③ $(ax+by+c)dx + (ex+fy+g)dy = 0$ $\frac{a}{b} = \frac{e}{f} \rightarrow$ doğrular paralel.

Yani $ax+by, ex+fy$ 'nin bir katı olduğundan $*ax+by = k(ex+fy)$

$ex+fy = t$ dönüşümü yapılır.

$edx+fdy=dt$ $dy = \frac{dt-edx}{f}$ (*) denkleminde yazılır, ve çözülür.

> $(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0$ genel çözüm?

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \rightarrow$ paraleldir.

$x+2y=t \rightarrow dx+2dy=dt$
 $dy = \frac{dt-dx}{2}$

$(t+3)dx + (2t-1)dy = 0$ (homogen denkle.)

$(t+3)dx + (2t-1)\frac{dt-dx}{2} = 0$

$(t+3+1/2-t)dx + (t-1/2)dt = 0$

$(7/2)dx + (t-1/2)dt = 0$

$7/2 x + \frac{t^2}{2} - t/2 = c$

Tam Diferansiyel Denklem:

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denkleminde $P_y = Q_x$ varsa tam dif. 'tir.

> $(6xy^3 - \frac{4}{x})dx + (9x^2y^2 - \frac{8}{y})dy = 0$ denklemi tam dif. mi? Genel çözüm?

$P_y = 18xy^2 - 0$
 $Q_x = 18xy^2 - 0$ } $P_y = Q_x$ tam dif.

$U_x = 6xy^3 - 4/x$
 $U_y = 9x^2y^2 - 8/y$

$\int U_x dx = \int (6xy^3 - 4/x) dx + f(y)$

$U(x,y) = 3x^2y^3 - 4\ln x - 8\ln y + c$
 $= 3x^2y^3 - 4(\ln x + \ln y^2) + c$

$U(x,y) = 3x^2y^3 - 4\ln(x) + f(y)$
 $U_y = 9x^2y^2 - 0 + f'(y) = 9x^2y^2 - 8/y$
 $f'(y) = -8/y \rightarrow f(y) = -8\ln y + c$

İntegrasyon Çarpanı:

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denkleminde $P_y = Q_x$ (tam dif) özelliği sağlanamıyorsa bu denklemi tam dif haline getirmek için $\mu(x,y)$ fonksiyonuyla denklem çarpılır.

$\mu(v) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{Py - Qx} dx}$ formülü kullanılır. (Önce tam dif mi? kontrol)

• Genel çözüm istenirse int. çarpanı yerine yazılıp çözüm yapılır.

1) İntegrasyon çarpanının sadece x'in bir fonksiyonu olması hali:

Bu durumda $v=x$ olur. $v_x=1, v_y=0$ 'dır.

$\mu(x) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{-Q} dx}$ formülü kullanılır.

> $(3xy^2 + 2y)dx + (2x^2y + x)dy = 0$ denkleminin x'e bağlı İntegrasyon çarpanı?

$\mu(x) = e^{\int \frac{4xy+1-(6xy+2)}{-2x^2y-x} dx} = e^{\ln x} \rightarrow x$

2) İntegrasyon carpanının sadece y 'nin bir fonksiyonu olması hali:

$v=y$ olur. $v_x=0, v_y=1$

$\mu(x) = e^{\int \frac{Qx - Py}{P} dy}$ formülü kullanılır.

> $(2x-1)ydx + (y^2 - x^2 + x)dy = 0$ denkleminin y 'ye bağıli integrasyon carpanı?

$\mu(x) = e^{\int \frac{-2x+1-(2x-1)}{2x-1} dx} = e^{-2 \cdot \ln y} = y^{-2} \rightarrow$ Integrasyon carpanı.

NOT: Denklem tam değil fakat homojense $\mu = \frac{1}{x^p + y^q}$ onun int. carpanıdır.

> $(x-2y)dx + ydy = 0$ int. carpanı?

$\begin{matrix} P_y = -2 \\ Q_x = 0 \end{matrix}$ } tam dif değil! $\mu = \frac{1}{x \cdot (x-2y) + y \cdot y} = \frac{1}{(x-y)^2}$

> $(xy+y^2)dx - x^2dy = 0$ $\mu = \mu(xy^2)$ şeklindeki int. carpanı yardımıyla

$[M(xy+y^2)]y = [M(-x^2)]x$

$\mu_y \cdot (xy+y^2) + \mu \cdot (x+2y) = \mu_x \cdot (-x^2) + \mu \cdot (-2x)$

$\mu = \mu(xy^2) \rightarrow u = xy^2 \rightarrow \mu = \mu(u)$

$\mu_y = \mu_u \cdot u_y = \mu' \cdot 2xy$ } $2xy \cdot \mu'(xy+y^2) + x^2 \cdot \mu' \cdot y^2 = \mu(-2x-x-2y)$

$\mu_x = \mu_u \cdot u_x = \mu' \cdot y^2$ } $\mu'(2x^2y^2 + 2xy^3 + x^2y^2) = -\mu(3x+2y)$

$\frac{d\mu}{du} (3x^2y^2 + 2xy^3) = -\mu(3x+2y)$

$= (xy^2(3x+2y)) \frac{d\mu}{du} \rightarrow \frac{d\mu}{du} = \frac{-du}{xy^2} = \frac{-du}{u} \rightarrow \ln \mu = -\ln u = \ln \frac{1}{u}$

$\rightarrow \mu_y \cdot P + \mu \cdot P_y = \mu_x \cdot Q + \mu \cdot Q_x$ yapılır.

μ_y ve $\mu_x \rightarrow \mu_u, u_x, u_y$ cinsinden yazılır. $\mu(u) du$

$\mu_y \cdot P - \mu_x \cdot Q = \mu(Q_x - P_y)$ yapılır. Sadeleştirilir, integral alınır.

1. mertebeden lineer diferansiyel denklemler:

$y' + P(x)y = Q(x)$ tipindeki denklemlerde $y = uv$ formülü çözüm aranır.

$y' = u'v + uv'$ yerine yazılırsa $(u'v + uv') + P(x) \cdot uv = Q(x)$ elde edilir.

$v(u' + uP(x)) + uv' = Q(x)$

0 yapan v fonk. bulunur.

> $(1+x)y' - 2y = (1+x)^4$ denkleminin genel çözümü?

$y' - \frac{2}{1+x}y = (1+x)^3$ $y = uv$ $y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \frac{2}{1+x}uv = (1+x)^3$ $v(u' - \frac{2}{1+x}u) + u \cdot v' = (1+x)^3$

$u' - \frac{2}{1+x}u = 0 \rightarrow \frac{du}{u} = \frac{2dx}{1+x} \rightarrow \ln u = 2 \ln(1+x)$

$\ln u = 2 \ln(1+x) \rightarrow (1+x)^2 v' = (1+x)^3 \rightarrow v' = (1+x)$

$u = (1+x)^2$ $v = \frac{(1+x)^2}{2} + c \rightarrow y = (1+x)^2 \left[\frac{(1+x)^2}{2} + c \right]$

> $y = xp + p^2$ tekil ve genel çözümü?

$$p = 1 \cdot p + x \cdot \frac{dp}{dx} + 2p \cdot \frac{dp}{dx} \rightarrow (x + 2p) \cdot \frac{dp}{dx} = 0$$

$$p = -x/2 \rightarrow y = -(x/2)^2 \rightarrow y = -\frac{x^2}{4}$$

Lagrange Diferansiyel Denklemleri

$y = \frac{dy}{dx} = p$ olmak üzere $y = x f(p) + g(p)$ formundadır. $p = f(p) + x \cdot f'(p) \frac{dp}{dx} + g'(p) \frac{dp}{dx}$ bulunur

a) $p - f(p) = 0$ bu denklemden bulunan p değerleri yerine yazılıp tekil çözümler bulunur.

b) $p - f(p) \neq 0$ 2. denklemden

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x \cdot f'(p) + g'(p)}{p - f(p)}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p} x = \frac{g'(p)}{p - f(p)} \quad (3)$$

(1. mertebeden lineer denk.)

Lineer denklem çözümlünc

$x = \mathcal{U}(p, c)$ genel anlamda çözümlünc
pve sabite elde edilir, x'in bu değeri
bağı ①'de yazılırsa

$y = f(p) \cdot \mathcal{U}(p, c) + g(p)$ çıkar. Bu çözüm denklemin parametrik hali.

> $y = x(p^2 + 2p) - (p^2 + 2p - 1)$ denkleminin genel ve tekil çözümü?

$$p = p^2 + 2p + x(2p + 2) \frac{dp}{dx} - (2p + 2) \frac{dp}{dx}$$

$$-(p^2 + p) = [x(2p + 2) - (2p + 2)] \frac{dp}{dx}$$

$$A) -p^2 + p = 0 \rightarrow \begin{cases} p = 0 \rightarrow y = 1 \\ p = -1 \rightarrow y = -x + 2 \end{cases}$$

$y = 1$ ve $y = 2 - x$ denklemin tekil çözümleridir.

$$B) -p^2 + p \neq 0 \rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{x(2p + 2) - (2p + 2)}{-(p^2 + p)}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{(2 - 2x)}{p} \rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} x = \frac{2}{p}$$

$$x(p) = e^{-\int \frac{2}{p} dp} \left(\int e^{\int \frac{2}{p} dp} \cdot \frac{2}{p} dp + c \right) \rightarrow x(p) = e^{-2 \ln p} \left(\int e^{2 \ln p} \cdot \frac{2}{p} dp + c \right)$$

$$= \frac{1}{p^2} \left[\int p^2 \cdot \frac{2}{p} dp + c \right] \rightarrow \frac{1}{p^2} (p^2 + c) = 1 + \frac{c}{p^2}$$

$$x(p) = 1 + \frac{c}{p^2} \rightarrow y(p) = \left(1 + \frac{c}{p^2}\right)(p^2 + 2p) - (p^2 + 2p - 1) \rightarrow y = c + \frac{2c}{p} + 1$$

$$\left. \begin{aligned} x(p) &= 1 + \frac{c}{p^2} \\ y(p) &= 1 + \frac{2c}{p} + c \end{aligned} \right\} \text{genel çözümün parametrik hali.}$$

Riccati Diferansiyel Denklemleri:

$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$ tipindeki denklemdir. y_1 özel çözümü biliniyorsa:

$y = y_1 + 1/u$ dönüşümü yapılır.

$$y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} \rightarrow y_1' - \frac{u'}{u^2} = P(x) + Q(x)(y_1 + 1/u) + R(x)(y_1 + 1/u)^2$$

$$y_1' - (P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2) = \frac{u'}{u^2} + \frac{Q(x)}{u} + \frac{R(x)}{u^2} + \frac{2R(x)y_1}{u}$$

$$\rightarrow \frac{u'}{u^2} + (Q(x) + 2R(x)y_1)u = -R(x) \text{ şeklinde linear diferansiyel denkleme}$$

$y' + y^2 - 1 = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = 1$ old. göre genel çözüm?

$$y = 1 + 1/u \text{ dönüşümü} \rightarrow y' = \frac{-u'}{u^2} \rightarrow \frac{-u'}{u^2} + (1 + 1/u)^2 - 1 = 0$$

$$\rightarrow \frac{-u'}{u^2} + 1 + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2} - 1 = 0 \rightarrow -u' + 2u + 1 = 0 \rightarrow -u' + 2u = -1 \text{ (lin. dif. denk.)}$$

$$u = e^{-\int 2dx} \left[\int e^{\int 2dx} (-1) dx + c \right] = e^{-2x} \left[e^{-2x} / -2 + c \right] = -\frac{1}{2} + \frac{2ce^{2x}}{2}$$

$$y = 1 + \frac{1}{u} = 1 + \frac{2}{2ce^{2x} - 1} = \frac{2ce^{2x} + 1}{2ce^{2x} - 1}$$

NOT: Bir Riccati dif. denkleminin 3 çözümü biliniyorsa bu denklemin genel çözümü yazılabilir.

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = c \rightarrow \text{eğri ailesinin genel çözümü.}$$

$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ özel çözümlerine sahip Riccati denkleminin genel çözümü?

$$\frac{y-1}{y-x} : \frac{x^2-1}{x^2-x} = c \quad \frac{y-1}{y-x} = \frac{c \cdot x}{x+1} \rightarrow y-1 = \frac{c \cdot x \cdot (y-x)}{x+1}$$

$$y = \frac{1 - \frac{cx^2}{x+1}}{1 - \frac{cx}{x+1}} = \frac{x+1 - cx^2}{x+1 - cx}$$

Clairout diferansiyel denklemleri:

$y' = \frac{dy}{dx} = p$ olmak üzere $y = xp + f(p)$ formundaki denkleminin x 'e göre türevi alınır $y' = p = 1 \cdot p + x \cdot \frac{dp}{dx} + f'(p) \frac{dp}{dx} \rightarrow (x + f'(p)) \frac{dp}{dx} = 0$

$$B) \frac{dp}{dx} \neq 0 \rightarrow x + f'(p) = 0 \rightarrow x = -f'(p)$$

↓
Buna göre: A) $\frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c = \text{sbt}$
genel çözümü: $y = cx + f(c)$

$y = -f'(p) \cdot p + f(p)$ bu elde edilir.

$x = -f'(p)$
 $y = -pf'(p) + f(p)$ } p parametresine bağlı tekil çözüm elde edilir.

Diferansiyel Denklemleri:

türev sayısı: meritebe

kuvvetinin büyüklüğü: derece

$$x^2y'' + xy' - y = 0 \quad (2. \text{ dereceden } 2. \text{ meritebe})$$

Diferansiyel çözüm kavramı: Meritebe kadar türev alınır. Denklem yazılır.

$y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ eğri ailesinin dif. denk?

$$\begin{aligned} y' &= c_1e^x + 2c_2e^{2x} \\ y'' &= c_1e^x + 4c_2e^{2x} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} c_1 \text{ ve } c_2 \text{ çekilir. } y'' + 3y' + 2y = 0$$

Değişkenlerine ayrılabilen denklemler:

$f(x)dx = g(y)dy$ şeklindeki denklemlerdir.

Taraflara ayırıp integral alınır.

$$\cos^2 x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 2 \quad \text{genel çözüm?}$$

$$\left(\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{dy}{2-y} \right) \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dy}{2-y} \Rightarrow -\ln|2-y| = \tan x + c$$

Homojen diferansiyel denklemler:

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denkleminde $y = u \cdot x$ dönüşümü yapılır.

$dy = udx + xdu$ da elde edilir. Denkleme yerine yazılır.

$(xy + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$ denklemi homojen mi? Genel çözüm mü?

$$P(x,u) = x \cdot ux + (ux)^2 = x^2(u + u^2)$$

$$Q(x,u) = x^2 - x \cdot (ux) = x^2(1-u)$$

$$y = ux \rightarrow dy = udx + xdu$$

$$(ux^2 + (ux)^2)dx + (x^2 - ux^2)(udx + xdu) = 0$$

$$x^2(u + u^2 + (1-u)u)dx + (1-u)x^2du = 0$$

$$\frac{2dx}{x} + \frac{(1-u)du}{u} = 0$$

$$\left(\frac{2dx}{x} + \left(\frac{1}{u} - 1 \right) du \right) \text{ integral al. } \rightarrow u = y/x$$

$$2\ln|x| + \ln|u| - u = c$$

$$2\ln|x| + \ln|y/x| - y/x = c$$

$$\ln x^2 + \ln y/x \rightarrow \ln|xy| = y/x + c$$

Homojen olmayan diferansiyel denklemler:

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denkleminde P ve Q birimindeyse homojen değildir.

$$P = ax + by + c, \quad Q = ex + fy + g$$

2 durum oluşur:

$$\textcircled{1} \frac{a}{b} \neq \frac{e}{f} \rightarrow \text{doğrular birbirini keser.}$$

Bu kesim noktası (r,s) ise

$$\begin{aligned} x &= X + r \\ y &= Y + s \end{aligned}$$

dönüşümü yapılır.

$$\begin{aligned} dx &= dX \\ dy &= dY \end{aligned} \text{ olur.}$$

$$(aX + bY)dx + (cX + fY)dy = 0 \quad \text{homojen denk.}$$

$y = ux$ ile homojen denklem çözülür.

Olur.

$$(x + 2y + 1)dx + (2x - 3y + 2)dy = 0 \quad \text{genel çözüm?}$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-3} \quad \text{paralellik yok! Kesmiyorlar.}$$

$$\begin{aligned} -2/x + 2y + 1 \\ 2x - 3y + 2 \\ y = 0 = 3 \\ x = -1 = r \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{aligned} x &= X - 1 \\ y &= Y \end{aligned} \quad \text{dönüşümü yapılır.}$$

$$(X - 1 + 2Y + 1)dX + (2X - 3Y + 2)dY = 0$$

$$(X + 2Y)dX + (2X - 3Y)dY = 0 \quad (\text{homojen dif. denk})$$

$y = ux$ ile çözülür.