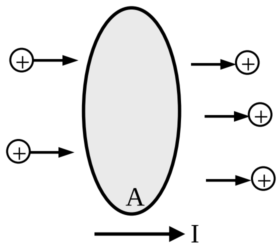
BÖLÜM 5

AKIM VE DİRENÇ

5.1. ELEKTRİK AKIMI

Aynı işaretli yükler hareket ettiği zaman bir akımın varlığından söz edilir. Örneğin A alanlı bir telin dik kesitine doğru dik olarak hareket eden yükler bir akım oluşturur. Akım, bu yüzeye doğru giden yüklerin akış hızıdır. Eğer Δt süresinde bu alandan geçen yük miktarı ΔQ ise ortalama akım,



Şekil 5.1. A alanından geçen yükler

$$I_{ort} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

ile verilir. Yükün akış hızı zamanla değişirse akım da zamanla değişir. O halde ani akım

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

olur. Akımın SI'daki birimi Amper (A)'dir.

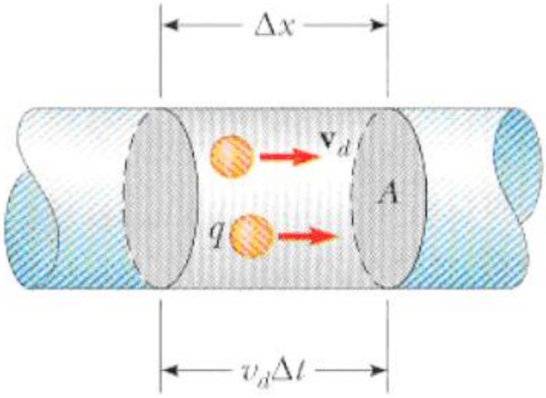
$$1\,A = 1\frac{C}{s}$$

1 Amperlik akım, yüzeyden 1 s'de 1 C'luk yük geçmesine özdeştir.

Pozitif yükün akış yönünü, anlaşmalı olarak akım yönü olarak seçeceğiz. Basit bir iletkendeki akımdan söz ederken, akım yönü, elektronların akış yönüne zıt olacaktır.

Akımın Mikroskobik Modeli

Şekilde Δx uzunluğundaki iletken elemanın hacmi $A\Delta x$'dir. n birim hacim başına düşen hareketli yük taşıyıcılarının sayısı olmak üzere, bu hacim elemanındaki hareketli yük taşıyıcılarının sayısı $nA\Delta x$ olur. O halde bu parçadaki ΔQ yükü



Şekil 5.2. Dik kesit alanı A olan düzgün bir iletken parçası.

$$\Delta Q = (nA\Delta x)q$$

olur.

Burada q, her bir parçacık üzerindeki yüktür. Eğer yük taşıyıcıları v_d hızıyla (sürüklenme hızı) hareket ederlerse Δt süresinde alacakları yol

$$\Delta x = v_d \Delta t$$

ile verilir. Dolayısıyla ΔQ yükü,

$$\Delta Q = (nAv_d\Delta t)q$$

olur. O halde akım,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqAv_d$$

olarak elde edilir.

Örnek: Bir iletkenden geçen akım $I(t) = I_0e^{-t/\tau}$ bağıntısına uygun şekilde zamanla ekponansiyel olarak azalmaktadır. Burada I_0 $t = 0$'daki ilk akım, t ise zaman biriminde bir sabittir. İletken içinde bir nokta ele alalım.

a) $t = 0$ ile $t = \tau$,

b) $t = 0$ ile $t = 10\tau$,

c) $t = 0$ ile $t = \infty$ aralığında bu noktadan ne kadar yük geçer?

Çözüm:

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad dQ = Idt \qquad \Rightarrow \qquad Q = \int Idt$$

a) $$Q = \int_0^{\tau} I_0 e^{-t/\tau} dt = I_0 \int_0^{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t} dt$$

$$= I_0\left(- \tau e^{-t/\tau}\Big|_0^{\tau} \right) = I_0\tau\left(1-\frac{1}{e}\right) = 0{,}632 I_0\tau$$

b) $$Q = I_0\tau\left(1-\frac{1}{e^{10}}\right) = 0{,}995 I_0\tau$$

c) $$Q = I_0\tau\left(1-\frac{1}{e^{\infty}}\right) = I_0\tau$$

Örnek: Dik kesit alanı 1 mm^2 olan bakır telden 1 A'lik akım geçtiği zaman, bakır tel boyunca elektronların ortalama sürüklenme hızını bulunuz. Bakırda atom başına bir elektronun akıma katkıda bulunduğu bilinmektedir. Bakırın atom ağırlığı 63,54 g/mol ve yoğunluğu 8,92 g/cm^3'tür. Avagadro sayısı $N_A = 6{,}02.10^{23}$ atom/mol

Çözüm:

Birim hacimdeki elektron sayısı

$$n = \frac{N_A}{V} = \frac{N_A g_d}{M} = \frac{6{,}02.10^{23}.8{,}92}{63{,}54}$$

$$n = 0{,}845.10^{23} \text{ atom/cm}^3 = 0{,}845.10^{23} \text{ elektron/cm}^3$$

$$v_d = \frac{I}{nqA} = \frac{1}{0{,}845.10^{23}.1{,}6.10^{-19}.10^{-2}}$$

$$v_d = 0{,}74.10^{-2} \text{ cm/s} = 7{,}4.10^{-5} \text{ m/s}$$

5.2. DİRENÇ VE OHM KANUNU

A kesit alanlı ve I akımı taşıyan bir iletken içindeki J akım yoğunluğu birim alan başına düşen akım olarak hesaplanır:

$$J = \frac{I}{A} = \frac{nqv_d A}{A} = nqv_d$$

SI birim sisteminde J'nin birimi A/m^2'dir. Akım yoğunluğu vektörel bir nicelik olduğundan

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d$$

yazılabilir. Akım yoğunluğu, akım gibi, pozitif yük durumunda yüklerin hareketi yönünde, negatif yük durumunda yüklerinin hareketinin aksi yönündedir.

Bir iletkenin uçları arasına bir potansiyel fark uygulanırsa, iletken içinde bir **J** akım yoğunluğu ve bir **E** elektrik alanı meydana gelir. Biri iletken içindeki akım yoğunluğu, elektrik alanla

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad \text{Ohm Kanunu}$$

şeklinde orantılıdır. Buradaki σ orantı katsayısına iletkenin iletkenliği denir. Ohm kanunu, bir çok madde için akım yoğunluğunun elektrik alana oranının sabit olduğunu söyler. Bu sabit, akımı üreten elektrik alandan bağımsızdır.

Ohm kanunun bir başka ifadesi ise şöyledir:

$$\left.\begin{array}{l} J = \sigma E = \sigma \dfrac{V}{\ell} \\[2ex] J = \dfrac{I}{A} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\ell}{\sigma A} I$$

Buradaki $\dfrac{\ell}{\sigma A}$ niceliğine iletkenin direnci R denir.

$$R = \frac{\ell}{\sigma A} = \frac{V}{I}$$

SI’daki direnç birimi amper başına volt olarak adlandırılan ohm (Ω)’dur.

$$1\ \Omega = 1\ \frac{V}{A}$$

Yani, bir iletkenin uçları arasındaki potansiyel farkı, 1 A’lik bir akıma sebep olursa iletkenin direnci 1 Ω’dur.

Bir maddenin iletkenliğinin tersine özdirenç denir.

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

Bu, direnç ifadesinde yerine konduğunda

$$R = \rho \frac{\ell}{A}$$

elde edilir.

Bir iletkenin özdirenci, belli bir sıcaklık aralığında sıcaklıkla şöyle değişir:

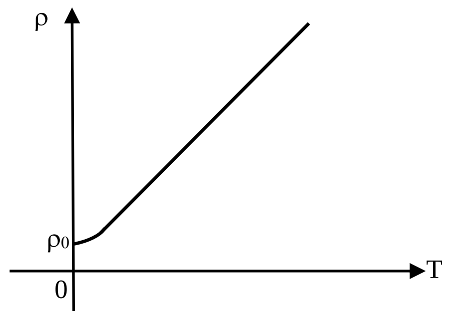
$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

Burada , ρ herhangi bir T sıcaklığındaki özdirenç, ρ_0 T_0 referans sıcaklığındaki (oda sıcaklığı) direnç, α ise özdirencin sıcaklık katsayısıdır.

$$\rho = \rho_0 + \rho_0\alpha\Delta T$$

$$\rho - \rho_0 = \rho_0\alpha\Delta T$$

$$\alpha = \frac{\Delta\rho}{\alpha\rho_0\Delta T}$$



Şekil 5.3. Bakır gibi normal bir metal için sıcaklığa karşı direnç

İletkenin direnci, özdirençle doğru orantılı olduğundan

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

olur.

Örnek: 1,2 cm düzgün yarıçaplı bir iletken, 120 V/m'lik bir elektrik alanı tarafından üretilen 3 A'lik bir akım taşımaktadır. Maddenin özdirenci ne kadardır?

Çözüm:

$A = \pi r^2 = 3{,}14.(0{,}012)^2 = 4{,}52.10^{-4}\ m^2$

$J = \sigma E$

$$\frac{I}{A} = \frac{1}{\rho}E \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{EA}{I}$$

$$\rho = \frac{120.4{,}52.10^{-4}}{3}$$

$$\rho = 0{,}018\ \Omega.m$$

Örnek: Alüminyum bir çubuk 20 °C'de 1,234 Ω'luk bir dirence sahiptir. Çubuğun 120 °C'deki direncini, hem özdirençte hem de çubuk boyutlarında meydana gelebilecek değişiklikleri dikkate alarak hesaplayınız. Alüminyumun sıcaklık katsayısı $\alpha_s = 3{,}9.10^{-3}\ °C^{-1}$ ve çizgisel genleşme katsayısı $\alpha_ç = 24.10^{-6}\ °C^{-1}$.

Çözüm:

$$R = \rho\frac{\ell}{A} = \rho_0(1+\alpha_s\Delta T)\frac{\ell_0(1+\alpha_ç\Delta T)}{A(1+\alpha_ç\Delta T)^2}$$

$$R = \frac{\rho_0\ell_0}{A}\frac{(1+\alpha_s\Delta T)}{(1+\alpha_ç\Delta T)} = R_0\frac{(1+\alpha_s\Delta T)}{(1+\alpha_ç\Delta T)}$$

$$R = 1{,}234\frac{(1+3{,}9.10^{-3}.100)}{(1+24.10^{-6}100)}$$

$$R = 1{,}234\frac{1{,}39}{1{,}0024}$$

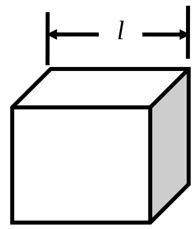
$$R = 1{,}711\Omega$$

Örnek: Bir parça kübik gümüşün kütlesi 90 gr'dır. (g_d =10,5 g/cm^3)

a) Küpün zıt yüzleri arsındaki direnç ne kadardır? (g_r =1,59.10^{-8} Ω.m)

b) Her bir gümüş atomu başına bir iletkenlik elektronu varsa, zıt yüzeyler arasına 10^{-5} V'luk bir potansiyel farkı uygulandığında, elektronların ortalama sürüklenme hızı ne olur? Gümüşün atom numarası 47 ve atomik kütlesi 107,87 g/mol'dür.

Çözüm:



a) $$V = \frac{m}{\rho_d} = \ell^3$$

$$\ell = \left(\frac{m}{\rho_d}\right)^{1/3} = \left(\frac{90}{10{,}5}\right)^{1/3}$$

$\ell = 2{,}046\,\text{cm} = 2{,}046.10^{-2}$ m   Küpün yüzeyleri arasındaki mesafe

$$R = \rho_r \frac{\ell}{A} = \frac{\rho_r}{\ell}$$

$$R = \frac{1{,}59.10-8}{2{,}046.10^{-2}}$$

$R = 7{,}77.10^{-7}$ Ω

b) $V = IR \quad \Rightarrow \quad I = \dfrac{V}{R} = \dfrac{10^{-5}}{7{,}77.10^{-7}}$

$I = 12{,}87$ A

$$n = \frac{N_A \rho_d}{M} = \frac{6{,}02.10^{23}.10{,}5}{107{,}87}$$

$n = 5{,}86.10^{22}$ elektron/cm^3 = $5{,}86.10^{28}$ elektron/m^3

$I = nqv_dA \quad \Rightarrow \quad v_d = \dfrac{I}{nqA} = \dfrac{12{,}87}{5{,}86.10^{28}.1{,}6.10^{-19}.(2{,}046.10^{-2})^2}$

$$v_d = \frac{12{,}87}{56{,}725}10^{-5}$$

$$v_d = 2{,}27.10^{-6} \text{ m/s}$$

5.3. ELEKTRİKSEL İLETKENLİK

Yükü q, kütlesi m olan hareketli bir parçacık, **E** elektrik alanında bulunduğunda **F** = q**E** kuvvetine maruz kalır. **F** = m**a** olduğundan parçacığın ivmesi

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}\mathbf{E}$$

olur. O halde ilk hızı $\mathbf{v}_0$ olmak üzere t zaman sonra elektronun hızı

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t = \mathbf{v}_0 + \frac{q}{m}\mathbf{E}t$$

ile verilir. Eğer bu ifadenin ortalama değerini alırsak $v_0 = 0$, $t = \tau$ ve $\mathbf{v} = \mathbf{v}_d$ olur. Burada τ çarpışmalar arasındaki ortalama zamandır. O halde

$$\tau = \frac{\ell}{\mathbf{v_d}}$$

olur. ℓ çarpışmalar arası ortalama serbest yol, $\mathbf{v}_d$ ise termal sürattir.

$$\mathbf{v_d} = \frac{q}{m}\tau\mathbf{E}$$

$$\left.\begin{aligned} J &= nqv_d = nq\frac{q}{m}\tau E = \frac{nq^2\tau}{m}E \\ J &= \sigma E \end{aligned}\right\} \qquad \sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$$

$$\rho = \frac{m}{nq^2\tau}$$

Örnek: Bir bakır teldeki serbest elektronların sürüklenme hızı $7{,}84.10^{-4}$ m/s ise iletkendeki elektrik alanını hesaplayınız. Bakırın özdirenci $1{,}7.10^{-8}$ Ω.m'dir. Birim hacmindeki elektron sayısı $n = 8{,}45.10^{28}$ elektron/m^3.

Çözüm:

$$\rho = \frac{m}{nq^2\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{m}{nq^2\rho}$$

$$\tau = \frac{9{,}11.10^{-31}}{8{,}45.10^{28}(1{,}6.10^{-19})^2.1{,}7.10^{-8}}$$

$$\tau = 2{,}47.10^{-14}\ \mathrm{s}$$

$$v_d = \frac{q}{m}\tau E \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{v_d m}{e\tau}$$

$$E = \frac{7{,}84.10^{-4}.9{,}11.10^{-31}}{1{,}6.10^{-19}.2{,}47.10^{-14}}$$

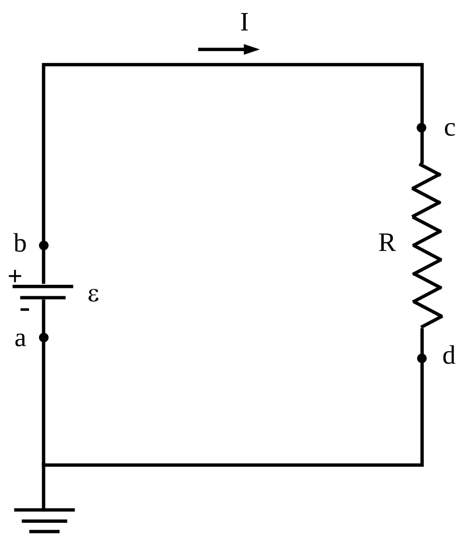
$$E = 0{,}18\ \mathrm{V/m}$$

5.4. ELEKTRİKSEL ENERJİ VE GÜÇ

Direnç üzerinden giderken ΔQ yükünün dirençteki atomlarla yaptığı çarpışmalar sonucu elektriksel potansiyel enerji kaybetme hızı

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}V = IV$$

olur. Yük kaybettiği bu enerjiyi bataryadan geçerken yeniden kazanır. Yükün enerji kaybetme hızı dirençteki P güç kaybına eşit olacağından



Şekil 5.4. emk'sı e olan bir batarya ile R direncinden oluşan bir devre

$$P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R}$$

olur.

Bu durumda güç batarya tarafından verilmektedir. I amper, V volt ve R ohm cinsinden alındığında, SI'da güç birimi watt (W) olur. R direncine sahip bir iletkende ısı olarak kaybedilen güç joule ısısı olarak adlandırılır.

Örnek: 1,4 A'lik bir akım çeken 300 W'lık bir ısıtıcıdan bobin yapmak istiyorsunuz.

a) Bobinin direncini belirleyiniz.

b) Bobin telinin özdirenci 10^{-6} Ω.m ve çapı 0,3 mm'dir. Kullanılacak telin uzunluğunu bunuz.

Çözüm:

a) $P = I^2R$

$300 = (1,4)^2R \quad \Rightarrow \quad R = 153\ \Omega$

b) $R = \rho\dfrac{\ell}{A} \quad \Rightarrow \quad \ell = \dfrac{R\pi r^2}{\rho}$

$$\ell = \frac{153.3{,}14.(0{,}15.10^{-3})^2}{10^{-6}}$$

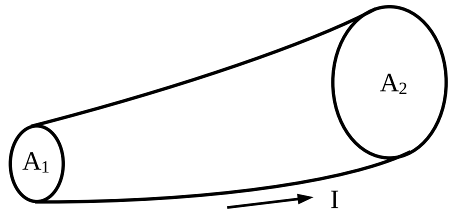
$$\ell = 10{,}8\ \text{m}$$

Problemler

1. Şekilde çapı düzgün olmayan dairesel bir iletkenin bir kısmı gösterilmektedir. İletken 5 A'lik akım taşımaktadır. A_1 dik kesitinin yarıçapı 0,4 cm'dir.

a) A_1'deki akım yoğunluğunun büyüklüğü ne kadardır?

b) A_2'deki akım yoğunluğu A_1'dekinin dörtte biri ise, iletkenin A_2'deki yarıçapı ne kadardır?



Çözüm:

a) $$J_1 = \frac{I}{A_1} = \frac{I}{\pi r_1^2} = \frac{5}{3{,}14(0{,}4.10^{-2})^2}$$

$$J_1 = 9{,}95.10^4 \ \text{A/m}^2$$

b) $$J_2 = \frac{J_1}{4}$$

$$\frac{I}{A_2} = \frac{I}{4A_1} \quad \Rightarrow \quad A_2 = 4A_1$$

$$\pi r_2^2 = 4\pi r_1^2$$

$r_2 = 2r_1$

$r_2 = 0{,}8$ cm

2. Nikron telin bir parçası başlangıçta 20 °C'dedir. Direncini iki katına çıkaracak olan sıcaklığı hesaplayınız. $\alpha = 0{,}4.10^{-3}$ °C^{-1}.

Çözüm:

$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$

$2R_0 = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$

$2 = [1 + \alpha(T - T_0)] \quad \Rightarrow \quad 1 = \alpha(T - 20)$

$$T = \frac{1}{\alpha} + 20$$

$$T = \frac{1}{0{,}4.10^{-3}} + 20$$

T = 2520 °C

3. 1 gr bakırdan düzgün bir tel imal etmek istediğimizi varsayınız. Bakırın hepsini kullanmak şartıyla telin direncinin R = 0,5 Ω olması için

a) telin boyu,

b) telin çapı ne olmalıdır?

$\rho_r = 1{,}7.10^{-8}$ Ω.m $\qquad \rho_d = 8{,}93.10^{3}$ kg/m^3

Çözüm:

a) $$\rho_d = \frac{m}{V} = \frac{m}{A\ell} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{m}{\rho_d \ell}$$

$$R = \rho_r \frac{\ell}{A} = \rho_r \frac{\ell}{\frac{m}{\ell\rho_d}} = \rho_r \frac{\ell^2 \rho_d}{m} \qquad \Rightarrow \qquad \ell = \left(\frac{mR}{\rho_r \rho_d}\right)^{1/2}$$

$$\ell = \left(\frac{10^{-3}.0{,}5}{1{,}7.10^{-8}.8{,}93.10^{3}}\right)^{1/2}$$

$$\ell = 1{,}81\,\text{m}$$

b) $$A = \frac{m}{\rho_d \ell} \qquad \Rightarrow \qquad \pi r^2 = \frac{m}{\rho_d \ell}$$

$$r = \left(\frac{m}{\pi \rho_d \ell}\right)^{1/2}$$

$$r = \left(\frac{10^{-3}}{3{,}14.8{,}93.10^{3}.1{,}81}\right)^{1/2}$$

r = 0,14.10^{-3} m

2r = 0,28 mm

4. Bir iletkendeki akım iki katına çıkarsa,

a) yük taşıyıcı yoğunluğu,

b) akım yoğunluğu,

c) elektron sürüklenme hızı,

d) çarpışmalar arasındaki ortalama zaman ne olur?

Çözüm:

a) n değişmez	$I = nqAv_d$
b) İki katına çıkar	$J = I/A$
c) İki katına çıkar	$I = nqAv_d$
d) ısıtma ile σ değişmedikçe τ değişmez	$\tau = \dfrac{m\sigma}{nq^2}$

5. 20 Ω dirençli bir elektrik ısıtıcısının uçlarına 100 V uygulamak gerekiyor. Bir çalıştırma devresi ısıtıcıyı sürekli olarak peş peşe 1 s'lik bir süre için açıyor ve 4 s'lik bir süre için kapatıyor.

a) Isıtıcının 1 saatte ürettiği enerji ne kadardır?

b) Bir devirlik bir periyotta çekilen ortalama güç ne kadardır?

Çözüm:

a) $$P = \frac{V^2}{R} = \frac{100^2}{20} = 500\ \mathrm{W}$$

$$U = P\Delta t = 500.\frac{3600}{5} = 360000\ \mathrm{J} = 360\ \mathrm{kJ}$$

b) $$\overline{P} = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{500\mathrm{W}.1\mathrm{s}}{5\mathrm{s}} = 100\ \mathrm{W}$$

6. 110 V'ta çalışan bir daldırmalı su ısıtıcısının 1,5 kg suyun sıcaklığını 10 °C'den 50 °C'ye 10 dakikada çıkarması için direnci ne olmalıdır?

c = 4184 J/kg°C

Çözüm:

$$U = P\Delta t = \frac{V^2}{R}\Delta t \qquad\qquad U = mc\Delta T$$

$$\frac{V^2}{R}\Delta t = mc\Delta T$$

$$R = \frac{V^2\Delta t}{mc\Delta T}$$

$$R = \frac{110^2.600t}{1,5.4184.40}$$

$$R = 28,9\ \Omega$$