$\frac{dy}{dx}$ → y x'e bağlı (bağımlı)
→ x (bağımsız)

Diferansiyel Denklemler

→ Fonksiyon türevleri içermesi diğer cebirlerden farklıdır.

Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Tanım I.
Bir veya daha fazla değişkene göre türevlenmiş bir veya daha fazla bağımlı değişken içeren denkleme, diferansiyel denklemler denir.

Tanım II.
Bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişkenin tek bir bağımsız değişkene göre bayağı türevlerini içeren denkleme bayağı (adi) diferansiyel denklem denir.

Tanım III.
Bir tek bağımlı değişkenin bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren denkleme kısmi diferansiyel denklemler denir.

Tanım IV.
n tane bilinmeyen fonksiyonu içeren m adet diferansiyel denkleme kısaca diferansiyel denklem sistemi denir. Burada m ile n eşit olmak zorunda değildir.

Tanım V.
Bir diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken ve tüm türevleri birinci dereceden ise diferansiyel denkleme lineer diferansiyel denklem denir. n. mertebeden adi lineer diferansiyel bağımlı değişken y ve bağımsız değişken x olmak üzere aşağıdaki formda gösterilir;

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dy^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\cdot\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

veya;

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_1(x)y = b(x)$$

Dolayısıyla içerisinde;
y^3 $(y'')^2$ yy' $y'y''$ $\sin y$ $\exp(y)$
mevcutsa bu tür denklemler diferansiyel denklem değildir. Bunun yanında;
x^2 xy' $\sin x$ $\exp(-\sin x^3)$ $\ln x$
türünden içeren denklemler diferansiyel denklemlerdir.

Tanım VI.
Birinci dereceden adi diferansiyel denklem ile
$f(x,y,y') = 0 \Longleftrightarrow F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right) = 0$ veya
$y' = f(x,y) \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x,y)$ formunda düşünülür.

Tanım VII.
n. mertebeden adi diferansiyel denklem şu form içinde düşünülür.

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^ny}{dx^n}\right) \text{ yada}$$

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\dots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Tanım VIII.
Bir problem diferansiyel denklemi ve belirli koşulları içermektedir. Problemdeki koşullar x'in bir değeri ile ilgiliyse bu durumda probleme başlangıç değer problemi x'in iki değeri ile ilgiliyse sınır değer problem denir.

ÖRN
Aşağıdaki diferansiyel denklemden hangileri kısmi denklemdir?

→ $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = 0$ (Bayağı)

→ $e^{xy} - 2x + 3y^2 = 0$ (Türev içermediğinden ne bir bayağı ne de bir kısmi diferansiyel denklemdir)

→ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0$ (Birden fazla bağımsız değişken olduğu için kısmi bir diferansiyel denklemdir)

→ $(x^2+y^2)dx - 3ydy = 0$ Düzenleyelim...

$(x^2+y^2)dx = 3ydy$
$x^2+y^2 = \frac{3ydy}{dx}$ (Adi diferansiyel denklem)

→ $\frac{\partial^4 x}{\partial t^4} + 5\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 3x = \sin t$ (Adi diferansiyel denklem)

$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ (Kısmi diferansiyel denklem)

Tanım IX.
Bayağı diferansiyel denklemde en yüksek mertebeli türevin mertebesi, denklemin mertebesi en yüksek mertebeli türevin üssü de denklemin derecesi olarak tanımlanır.

ÖRN Aşağıdaki dif. denklemlerin mertebelerini ve derecelerini bulunuz.

$\rightarrow \underbrace{\frac{2d^2y}{dx^2}}_{\text{2. mertebeden 1. derece}} + \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}_{\text{1. mertebeden 2. derece}} - 4y = 0$

(İkinci mertebeden birinci derece bayağı dif. denk.'dir)

$\rightarrow y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$
(3. mertebeden 1. derece dif. denk.)

$\rightarrow (y'')^3 + 5x(y')^4 = e^x + 1$
(2. mertebeden 3. derece dif. denk.)

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 5x + 3$ (1. mertebeden 1. derece dif. denk. dir)

$\rightarrow e^y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$ (2. mert. 1. derece dif denk.)

$\rightarrow 4\frac{d^3y}{dx^3} + \sin\frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0$ (3. mertebeden 1. derece dif denk.)

$\rightarrow \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x$

(2. mertebeden 3. derece dif. denk.)

Tanım X.
Bir diferansiyel denklemde;
a) Bağımlı değişkenin ve türev terimlerinin üsleri bir ve
b) Bağımlı değişkenlerin veya türev terimlerinin çarpımları yoksa,
lineerdir (doğrusaldır)

Genel olarak aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

ÖRN
Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin lineer olup olmadıklarını gösteriniz.

$\rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = \sin x$ (lineer)

$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + y(\cos x)\frac{dy}{dx} = 0$ (b şartına uygun olmadığı için lineer değil)

$\rightarrow y''' + x\underbrace{(y')^3}_{} + y = 0$ (lineer değil)
(a'ya uygun olmadığı için)

Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Tanım I.
Bir diferansiyel denklemi sağlayan bir fonksiyona bu denklemin özel çözümü denir.

Tanım II.
n. mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümü öyle bir bağıntıdır ki n tane bağımsız sabite sahip olup verilen denklemi sağlar.

ÖRN Aşağıda tanımlanan $y(x)$ fonksiyonlarının yanlarında verilen diferansiyel denklemlerin çözümleri olup olmadığını ve çözümlerin hangi aralıklarda geçerli olduğunu belirleyiniz.

$\rightarrow y' + y^2 = 0 \qquad y(x) = 2$
$y'(x) = 0$
$y' + y^2 = 0 + 4 = 4 \neq 0$ (denklem sağlanmadığı için önerilen çözüm bu denklemin çözümü değildir)

$y' + y = 0 \qquad y(x) = 3e^{-x}$
$y'(x) = -3e^{-x}$

$y' + y = 0 \longrightarrow -3e^{-x} + 3e^{-x} = 0$
(Bu verilen çözüm denklemin çözümüdür)
x her değeri alır ki olabiliyorsa x in aralığı $(-\infty, \infty)$ dır.

$y'' + 4y = 0$ $\quad y(x) = 2\sin x$
$y'(x) = 2\cos x$
$y''(x) = -2\sin x$

$-2\sin x + 4(2\sin x) = 6\sin x$ (Bazı noktalarda sağlandığı bazı noktalarda sağlamadı)

NOT $y = \sin x$ ise $y' = \cos x$
$y = \cos x$ ise $y' = -\sin x$

Buyütden çözüm olması
$\rightarrow \dddot{y} + 4\ddot{y} - 4\dot{y} + 16y = 0 \quad y(t) = e^{4t}$

(Zamana göre türev alındığında $\dot{y}$ olur)

$\dot{y}(t) = e^{4t} \cdot 4$
$\ddot{y}(t) = 4 \cdot 4\, e^{4t}$
$\dddot{y}(t) = 4^3\, e^{4t}$

$\cancel{64e^{4t}} - \cancel{64e^{4t}} - \cancel{16e^{4t}} + \cancel{16e^{4t}} = 0$
çözümdür

$\rightarrow y'' + 4y = 0 \quad y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

$y'(x) = c_1 . 2 . \cos 2x + c_2 . (-\cos 2x) . 2$
$y''(x) = -4 c_1 \sin 2x + 4 c_2 \sin 2x$

NOT $y = \sin u$ ise $y' = \cos u . u'$
$y = \cos u$ ise $y' = -\sin u . u'$

$\cancel{-4c_1 \sin 2x} + \cancel{4c_2 \sin 2x} + \cancel{4c_1 \sin 2x} + \cancel{4c_2 \cos 2x} = 0$
sağlar

$\rightarrow y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x} \quad y'' + 2y' + y = 0$
denkleminin bir çözümü olup olmadığını gösteriniz.

NOT $y = u . v$ ise $y' = u'v + u . v'$

$y'(x) = -2e^{-x} + 1e^{-x} - xe^{-x} = -e^{-x} - xe^{-x}$

$y''(x) = e^{-x} - [1e^{-x} + x - e^{-x}) =$
$e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = xe^{-x}$

$xe^{-x} + 2(-e^{-x} - xe^{-x}) + 2e^{-x} + xe^{-x} \stackrel{?}{=} 0$ ✓

$\rightarrow y'' + 2y' + y = x$ diferansiyel denkleminin $y(x) = 1$ çözümü müdür?

$y'(x) = 0$ $\quad 0 + 0 + 1 \neq x$ çözüm
$y''(x) = 0$ değildir.

ÖRN Aşağıda verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü bul

$\rightarrow y'' = 12x + 8$ (integral alınır...)

$y' = \frac{12x^2}{2} + 8x + c_1$

$y = 2x^3 + 4x^2 + c_1 x + c_2 \longrightarrow$ istenilen çözüm budur.

$\rightarrow y''' = 16e^{-2x} \quad y(x) = ?$ (Genel çözümü)

$y'' = \frac{16e^{-2x}}{-2} + c_1 = -8e^{-2x} + c_1$

$y' = 4e^{-2x} + c_1 x + c_2$

$y = -2e^{-2x} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3$ ✓

$\rightarrow y'' = \sec^2 x$

NOT $\int \sec^2 u . du = \tan u + c$

$\int \tan u\, du = -\log \cos u + c$
$= \log \sec u + c$

$y' = \tan x + c_1$
$y = \log \sec x + c_1 x + c_2 = -\ln \cos x + c_1 x + c_2$
$\log = \ln$

$\rightarrow y' = \frac{4}{x(x-4)}$ $\quad$ **NOT** $\frac{4}{x(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} \Rightarrow$
$(x-4) \quad (x)$

$A(x-4) + Bx = 4$
$Ax - 4A + Bx = 4$
$A + B = 0 \quad A = -1$
$B = 1$

Logisin ...

$$\int y' = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} \right) dx$$

$$y = -\ln|x| + \ln|x-4| + c$$

$$y = \ln\left(\frac{x-4}{x}\right) + c$$

Tanim III.
Özel çözümü tek bir noktada sağlaması gereken bir koşul başlangıç koşulu birden çok sağlaması gereken koşul ise sınır koşulu olarak tanımlanır.

Tanim IV.
Başlangıç (sınır) koşullarla birlikte bir diferansiyel denklem başlangıç (sınır) değeri problemi olarak adlandırılır. Bu tür problemlerde önemli olan nokta başlangıç koşullarının yada sınır koşullarının sayısını denklemin mertebesine eşit olmasıdır.

ÖRN Aşağıda genel çözümleriyle verilen başlangıç değerleri çözünüz.

$\rightarrow y(x) = c_1 e^{-x} \quad y' + y = 0 \quad y(3) = 2$

$y(3) = c_1 e^{-x} = 2 \rightarrow c_1 = 2e^{+3}$

$y(x) = 2e^3 e^{-x} = 2e^{3-x}$

$\rightarrow x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{4} e^{3t}$

$x'' - x' - 2x = e^{3t} \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 2$

(2. mertebeden 2 koşullu bir diferansiyel denklemdir)

$x(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{2.0} + 1/4 e^{3.0} = 1 \Rightarrow$

$c_1 + c_2 = 3/4$

$x'(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} + \frac{3}{4} e^{3t} \quad t=0$ için;

$x'(t) = -c_1 e^{-0} + 2.c_2 e^{2.0} + \frac{3}{4} e^{3.0} = 2$

$-c_1 + 2c_2 = 5/4 \qquad c_1 = 1/4 \qquad c_2 = 2/3$

$x(t) = \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{2}{3} e^{2t} + \frac{1}{4} e^{3t}$

$\rightarrow y(x) = x^3 + c_1 x + c_2 \quad , \ y'' = 6x \ ; \ y(0) = 1 ; \ y'(1) = 2$

c_1 ve c_2 yi bulalım.
(2. mertebe olduğu için 2 tane şartı olması gerek hatta zorunlu).

$y(0) = 0 + c_1 . 0 + c_2 = 1 \longrightarrow c_2 = 1$

$y'(x) = 3x^2 + c_1 + 0 \Rightarrow 3.1^2 + c_1 = 2$
$c_1 = -1$

$y(x) = x^3 - x + 1$

$\rightarrow y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x} \ ; \ y'' - y' - 12y = 0$
$y(0) = 1 , \quad y'(0) = 2$

$y(0) = c_1 . e^0 + c_2 e^0 = 1 \rightarrow c_1 + c_2 = 1$

$y' = c_1 . e^{4x} . 4 - 3c_2 e^{-3x}$

$y'(0) = 2$ 'den $2 = c_1 . e^0 . 4 - 3c_2 e^0$

$2 = c_1 4 - 3c_2$
$4c_1 - 3c_2 = 2$

$c_1 = 5/7 \quad c_2 = 2/7$
$y(x) = 5/7 \, e^{4x} + 2/7 \, e^{-3x}$

ÖRN Aşağıda verilen fonksiyonlardan herhangi birinin verilen şartları sağlayacak başlangıç değer probleminin bir çözümü olup olmadığını belirleyiniz.

$\rightarrow y(x) = \sin 2x \ ; \ y'' + 4y = 0 ; \ y(0) = 0 , \ y'(0) = 1$

$y(0) = \sin 2.0 = 0$
$y'(x) = 2\cos 2x$
$y'(0) = 1 = 2\cos 2x = 2 \neq 1$

Verilen şartlardan 2. şartı sağlamadı.

$y''(x) = -4\sin 2x$
$-4\sin 2x + 4\sin 2x \stackrel{?}{=} 0 = 0$ ✓

diferansiyel denklem sağlandı.

$\rightarrow y(x) = x \quad y'' + 4y = 0 ; \ y(0) = 0 , \ y'(0) = 1$

$y(0) = 0 = 0$ ✓
$y'(x) = 1 = 1$ ✓
$y''(x) = 0 \quad 0 + 4x = 0 \Rightarrow 4x \neq 0$

$y(x)$ bir çözüm değildir.
(Şartlar sağlandı başlangıç koşulları sağlanamadı)

Kaynak: Mühendislikte Diferansiyel Denklemler (4. blok)
Muhittin Recepli 2. Baskıyı iste. M.129

$y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \qquad y'' + 4y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

$y(0) = \frac{1}{2}\underbrace{\sin 0}_{0} = 0 = 0$ ✓

$y'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$

$y'(0) \stackrel{?}{=} 1 \quad \cos 0 = 1 = 1$ ✓

$y'' = -\sin 2x \cdot 2$

$= -2\sin 2x + 4 \cdot \frac{1}{2}\sin 2x \stackrel{?}{=} 0$

$-\cancel{2\sin 2x} + \cancel{2\sin 2x} = 0$

$0 = 0$ ✓

Hepsini sağlar.

Değişkenlerine Ayrılabilen Denklemler

$F(x,y,y') = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = \ldots$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ ---- (1)

yazılış şekliyle verilen bir diferansiyel denklem $f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$ ---- (2) yazılış şeklinde dönüştürülebildiğinde verilen (1) nolu denkleme değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem denir. Anlaşıldığı gibi (1) nolu denklemi (2) nolu denkleme dönüştürmek için $M(x,y)$ fonksiyonunu $f(x)$ fonksiyonuna, $N(x,y)$ fonksiyonunu $g(y)$ fonksiyonuna dönüştürmek gerekecektir. Bunun için $M(x,y)$'den y değişkenini, $N(x,y)$'den x değişkenini yok etmek yeterli olacaktır. Görüldüğü gibi (2) nolu denklemin terimlerinden birisi x, diğeri ise y değişkenine bağlıdır. Böyle bir yazılış şekli bu denklemin birinci teriminin x değişkenine, diğerinin ise y değişkenine göre integral alınmasına imkan sağlamış olacaktır. Yani

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = c \quad \ldots \quad (3)$$

işlemi yapılabilecektir ve (3) nolu denklemdeki integraller çözülecektir. Buradaki c integral sabitidir.

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{ve} \quad \int g(y)\,dy = G(y)$$

olduğu sonucu (1) nolu denklemin genel çözüm ifadesi kapalı fonksiyon şeklinde $F(x) + G(y) = c$ ---- (4) olarak yazılmış olacaktır. Mümkün olduğu takdirde kapalı fonksiyon şeklindeki çözüm ifadesi, açık fonksiyona dönüştürülecektir.

ÖRN Aşağıdaki difi denklemlerin ayrılabilir olup olmadığını belirleyiniz.

a) $\underbrace{\sin 2x}_{\substack{M(x,y)\\ \to f(x)}}\,dx + \underbrace{y^2}_{\substack{N(x,y)\\ \to g(y)}}\,dy = 0$ ✓

b) $\underbrace{xy^2}_{\substack{M(x,y)\\ \to f(x)}}\,dx - \underbrace{x^2y^2}_{\substack{N(x,y)\\ \to g(y)}}\,dy = 0 \longrightarrow$

$\longrightarrow \frac{x\cancel{y^2}\,dx}{\cancel{y^2}\,x^2} - \frac{\cancel{x^2}\cancel{y^2}\,dy}{\cancel{y^2}\cancel{x^2}} = 0$

$\frac{x\,dx}{x^2} - dy = 0$

$\underbrace{x^{-1}}_{f(x)}dx - \underbrace{dy}_{g(y)} = 0$ ✓

c) $(1 + xy)\,dx + y\,dy = 0$ ✗

$dx + xy\,dx + y\,dy = 0$

$M(x,y) = 1 + xy$

değişkenlerine ayrılabilen bir denklem değildir. Hiçbir şekilde sadece x'e bağlı bir denklem elde edilemez.

ÖRN Aşağıda verilen denklemleri çözünüz.

a) $xy(1+y^2)\,dx - (1+x^2)\,dy = 0$

$\frac{x\,dx}{(1+x^2)} - \frac{dy}{(1+y^2)y} = 0$ (işlemi yapmıyoruz.)

İşlem...

$\frac{x\cancel{y(1+y^2)}\,dx}{\cancel{y(1+y^2)}(1+x^2)} - \frac{\cancel{(1+x^2)}\,dy}{y(1+y^2)\cancel{(1+x^2)}} = 0$

$\frac{x}{\ldots} - \frac{dy}{\ldots}$

K.Kubra

$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{dy}{y(1+y^2)} = 0$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx - \int \frac{dy}{y(1+y^2)} = 0$$

$\frac{x\,dx}{1+x^2}$ 'nin int.

$1+x^2 = u$
$2x\,dx = du$
$x\,dx = \frac{du}{2}$

$$\rightarrow \int \frac{\frac{du}{2}}{u}$$

$$\int \frac{\frac{du}{2}}{u} =$$

$= \frac{1}{2}\ln|u| =$

$= \frac{1}{2}\ln|1+x^2|$

$\frac{dy}{y(1+y^2)}$ 'nin int.

$$\frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{1+y^2}$$

$A + Ay^2 + By^2 + Cy = 1$
$A = 1 \quad B = -1 \quad C = 0$

$$\rightarrow \int\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\right)$$

$1+y^2 = u$
$2y\,dy = du$
$y\,dy = \frac{du}{2}$

$$\int\left(\frac{1dy}{y} \quad \frac{du/2}{u}\right)$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{\frac{du}{2}}{u}$$

Düzenlemek için:
$2.\frac{1}{2}\left(\ln y - \frac{1}{2}\ln|u|\right)$
$= \frac{1}{2}\ln y^2 - \ln(1+y^2)$
$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y^2}{1+y^2}\right|$

$$\frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y^2}{1+y^2}\right| = \frac{1}{2}\ln|c| \text{ (keyfi)}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\ln}\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{y^2} = \cancel{\frac{1}{2}}\ln^2|c|$$

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{y^2} = c$$

$(1+x^2)(1+y^2) = cy^2$ ✓ (istenilen çözüm budur)

b) $\underbrace{ye^{2x}}_{M(x,y)}dx = \underbrace{(4+e^{2x})}_{-N(x,y)}dy$

$M(x,y) \rightarrow f(x)$
$-N(x,y) \rightarrow g(y)$

$$\frac{\cancel{y}e^{2x}dx}{\cancel{y}(4+e^{2x})} = \frac{\cancel{(4+e^{2x})}dy}{\cancel{(4+e^{2x})}y}$$

$$\int \frac{e^{2x}dx}{4+e^{2x}} = \int \frac{dy}{y} \text{ (integral alınır)}$$

$\rightarrow \ln y$

$4+e^{2x} = u$
$2e^{2x}dx = du$
$e^{2x}dx = \frac{du}{2}$

$$\int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \int \frac{dy}{y}$$

$\frac{1}{2}\ln u = \ln y \cdot \ln|c|$

$\frac{1}{2}\ln(4+e^{2x}) = \ln y + \ln|c|$

$\ln(4+e^{2x}) = 2.(\ln y + \ln|c|)$
$\cancel{\ln}(4+e^{2x}) = \cancel{\ln}y^2 + \ln c^2$
$\ln(y^2 \cdot c^2)$

$4+e^{2x} = y^2 \cdot c^2$ ✓

c) $\underbrace{a^2dx}_{M(x,y)} = \underbrace{x\sqrt{x^2-a^2}}_{-N(x,y)}dy$

$M(x,y) \rightarrow f(x)$
$-N(x,y) \rightarrow -g(y)$

$$\frac{a^2dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\cancel{x\sqrt{x^2-a^2}}dy}{\cancel{x\sqrt{x^2-a^2}}}$$

$$\int \frac{a^2dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \int dy$$

NOT $\sqrt{x^2-a^2}$ 'yi içeren integraller

$x = a\sec u \rightarrow dx = a\sec u \tan u\, du$

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan u$$

$x = a\sec u$
$dx = a\sec u \cdot \tan u \cdot du$

$$a^2\int \frac{dy}{x\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$a^2 \int \frac{\cancel{a\sec u \tan u}\, du}{\cancel{a\sec u}\cdot a\cancel{\tan u}} = a^2\int \frac{du}{a} =$$

$$a\int du = \int dy \rightarrow a u = y + c, \quad u = \frac{y+c}{a}$$

$x = a\sec u$
$x = a\sec\left(\frac{y+c}{a}\right)$ (İstenilen çözüm budur)

d) $x\cos^2 y\,dx + \tan y\,dy = 0$

$$\frac{x\cancel{\cos^2 y}\,dx}{\cancel{\cos^2 y}} + \frac{\tan y\,dy}{\cos^2 y} = 0$$

$$x\,dx + \frac{\frac{\sin y}{\cos y}\,dy}{\cos^2 y} = 0$$

$$\int x\,dx + \int \frac{\sin y}{\cos^3 y}\,dy = 0$$

$$\int x\,dx + \int\frac{\tan y}{\cos^2 y}\,dy = 0$$

$$\frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y$$

$$\int x\,dx + \int \underbrace{\tan y}_{u}\cdot\underbrace{\sec^2 y\,dy}_{du} = 0$$

NOT $\tan x = y$ (Ahmet Karadeniz I. cilt kitabı)
$y' = \sec^2 x\,dx$

$\tan y = u$
$\sec^2 y\,dy = du$

$$\int x\,dx + \int u\,du = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{u^2}{2} = c$$

$x^2 + u^2 = 2c$
$x^2 + \tan^2 y = 2c$ (İstenilen çözüm budur)

e) $xy^3\,dx + (y+1)e^{-x}\,dy = 0$

$$\frac{x\cancel{y^3}\,dx}{\cancel{y^3}\cdot e^{-x}} + \frac{(y+1)\cancel{e^{-x}}\,dy}{\cancel{e^{-x}}\cdot y^3} = 0$$

$$\frac{x}{e^{-x}}\,dx + \frac{(y+1)}{y^3}\,dy = 0$$

(İnt. alınır)

$$\int \frac{x}{e^{-x}}\,dx + \int\frac{(y+1)}{y^3}\,dy = 0$$

$$\int \underbrace{x e^x\, dx}_{(1)} + \int (y+1)\, y^{-3}\, dy = 0 \quad (2)$$

Kısmi integrasyon (1)

NOT Kısmi integrasyon → $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

(1)
$xe^x\, dx \rightarrow x = u$, $dx = du$; $e^x\, dx = dv$, $e^x = v$

$u\cdot v - \int v\,du \rightarrow$

$x\cdot e^x - \int e^x\, dx \rightarrow xe^x - e^x = e^x(x-1)$

(2)
$\int (y+1)\frac{dy}{y^3} \rightarrow (y+1) = u$, $dy = du$; $y^{-3}\,dy = dv$, $\frac{-y^{2}}{2} = v$

$$\rightarrow (y+1)\cdot\left(\frac{-y^{2}}{2}\right) - \int\left(\frac{-y^{2}}{2}\right)\cdot dy$$

$$\rightarrow -\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2}\right]$$

(1) ve (2) den;

$$x e^x - e^x - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2}\right) = c$$

$$e^x (x-1) = \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + c$$

(İstenilen çözüm budur)

f) $x^2 y \frac{dy}{dx} = e^y$

$$x^2 y\, dy = dx\, e^y$$

$$\frac{\cancel{x^2} y\, dy}{\cancel{x^2} e^y} = \frac{dx\, \cancel{e^y}}{\cancel{e^y} x^2}$$

int alalım;

$$\int \frac{y}{e^y} dy = \underbrace{\int \frac{dx}{x^2}}_{= -\frac{1}{x}}$$

$$\int y \cdot e^{-y} dy = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$y = u$, $dy = du$

$e^{-y} dy = dv$

$-e^{-y} = v$

$$y \cdot (-e^{-y}) - \int (-e^{-y}) \cdot dy$$

$$-ye^{-y} - \int -e^{-y} dy = -e^{-y}(y+1) + c$$

$$-\frac{1}{x} = -e^{-y}(y+1) + c \longrightarrow$$

$$(cx+1) e^y = x(y+1)$$

Homojen Denklemler

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ denkleminde aynı dereceden homojen diferansiyel denklem olarak tanımlanır. Böyle durumda, M ve N fonksiyonları, 0'dan farklı her $t \in \mathbb{R}$ için;

$$\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \quad N(x,y) \neq 0$$

özdeşliğini sağlar.

1. dereceden ve 1. mertebeden herhangi bir diferansiyel denklem $y = v x$ veya $x = v y$ dönüşümü yapılarak değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem biçimine dönüştürülür. Burada $v = v(x)$'tir. Daha sonra $y = vx$ denkleminin her iki tarafının diferansiyeli alınır $dy = v \cdot dx + x \cdot dv$ elde edilen türev alınır $y = vx$ ve $dy = v dx + x dv \rightarrow$

$\rightarrow M(x,y)dx + N(x,y) \cdot dy = 0$

denkleminde yerine yazılarak sadeleştirilir.

Artık bu denklem değişkenlerine ayrılarak çözülecektir. Çözüm formülünden v değişkeninin yerine $\frac{y}{x}$ yazıldığında verilen ilk denklemde $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ denkleminin genel çözümü bulunmuş olacaktır.

ÖRN Aşağıda verilen denklemlerin homojen olduklarını göstererek çözümlerini bulunuz.

a) $\underbrace{(x^2+y^2)dx}_{M(x,y)} + \underbrace{3xy\,dy}_{N(x,y)} = 0$

$$\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)} = \frac{x^2t^2 + y^2t^2}{3tx\,ty} = \frac{t^2(x^2+y^2)}{t^2(3xy)} = \frac{x^2+y^2}{3xy} \neq 0 \quad \text{(Homojen denklem)}$$

$y = vx \qquad dy = v\,dx + x\,dv$

$$(x^2 + v^2x^2)dx + 3xvx\,(v dx + x dv) = 0$$

$$x^2 dx + v^2 x^2 dx + 3x^2v^2 dx + 3x^3 v\,dv = 0$$

$$(x^2 + 4x^2v^2)dx + 3x^3 v\,dv = 0$$

$$x^2(1+4v^2)dx + x^2\, 3x\, v\,dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{3v}{1+4v^2} dv = 0 \rightarrow 1+4v^2 = u$$

$8v\,du = du$

$v\,dv \rightarrow \frac{du}{8}$

$$\ln|x| + \frac{3}{8} \ln|1+4v^2| = \ln|c|$$

$$8 \ln|x| + 3\ln|1+4v^2| = 8 \ln|c|$$

$$3 \int \frac{v\,dv}{1+4v^2} = 3 \int \frac{dv/8}{u} = \frac{3}{8} \ln|u|$$

$\ln|x^3(1+4v^2)^3| = \ln|c^8|$

$x^8(1+4v^2)^3 = c^8 \rightarrow x^8(1+4\frac{y^2}{x^2}) = c^8 \Rightarrow$

$x^2(x^2+4y^2)^3 = c^8$

b) $\underbrace{x\tan\left(\frac{y}{x}\right) + y}_{M(x,y)}dx - \underbrace{x}_{N(x,y)}dy = 0$

$\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)} = \frac{(xt\tan(ty/tx) + ty)}{-tx} =$

$= \frac{\cancel{t}(x\tan(y/x) + y)}{-\cancel{t}x} \Rightarrow x \neq 0$

$y = v.x \qquad dy = v.dx + x.dv$

$(x.\tan\left(\frac{vx}{x}\right) + vx)dx - x(vdx + xdv) = 0$

$x\tan v\,dx + vx.dx - vx\,dx - x^2dv = 0$

$x\tan v\,dx - x^2dv = 0 \Rightarrow \tan v\,dx - xdv = 0$

$\frac{dx}{x} - \frac{dv}{\tan v} = 0$

$\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dv}{\tan v} \rightarrow \ln|x| - \ln|\sin v| = \ln|c|$

$= \ln\left|\frac{x}{\sin v}\right| = \ln|c|$

$x = c.\sin v \Rightarrow x = c\sin\frac{y}{x}$

c) $\underbrace{x^2}_{N(x,y)}dy - \underbrace{(y^2 - yx)}_{-M(x,y)}dx = 0$

$\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{-(t^2y^2 - ty\,tx)}{t^2x^2} = \frac{-t^2(y^2-yx)}{t^2x^2}$

$= -\frac{(y^2-yx)}{x^2}$

$y = vx \qquad dy = x.dv + v.dx$

$x^2(vdx + xdv) - (v^2x^2 - vx^2)dx = 0$

$x^2vdx + x^3dv - v^2x^2dx + vx^2dx = 0$

$2x^2vdx + x^3dv - v^2x^2dx = 0$

$dx(2x^2v - v^2x^2) + x^3dv = 0$

$dx(2v - v^2) + xdv = 0$

$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dv}{2v-v^2} = 0 \qquad \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{2-v}\right)dv$

$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|v| - \ln|2-v| = 0 \qquad v = y/x$

$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \ln\left|2 - \frac{y}{x}\right| = 0$

$\frac{1}{2}\left[2\ln|x| + \ln|v| + \ln|2-v|\right] = \ln c$

$x^2v(2-v) = c^2 \qquad v = y/x$

$x^2\frac{y}{x}\left|2 - \frac{y}{x}\right| = c^2 \Rightarrow y(2x-y) = c^2$

ÖRN

$(4x^2 - 3xy - y^2)dx + (5x^2 - yx)dy = 0$

* $\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \qquad N(x,y) \neq 0$

$\frac{4t^2x^2 - 3tx\,ty - y^2t^2}{(5t^2x^2 - yt\,xt)} = \frac{t^2(4x^2 - 3xy - y^2)}{t^2(5x^2 - yx)}$

$5x^2 - yx \neq 0$

* $y = vx \qquad dy = v.dx + x.dv$

$(4x^2 - 3x\,vx - v^2x^2)dx + (5x^2 - vx^2)(vdx + xdv) = 0$

$4x^2dx - 3x^2vdx - v^2x^2dx + 5x^2vdx + 5x^3dv - v^2x^2dx - vx^3dv = 0$

$(4x^2 - 3x^2v - v^2x^2 + 5x^2v - x^2v^2)dx + (5x^3 - vx^3)dv = 0$

$(4 + 2v - 2v^2)dx + x(5-v)dv = 0$

$2(2 + v - v^2)dx + x(5-v)dv = 0$

$-2(v^2 - v - 2)dx + x(5-v)dv = 0$

$\int -2\frac{dx}{x} + \int\left(\frac{5-v}{v^2-v-2}\right)dv = 0$

$\frac{5-v}{v^2-v-2} = \frac{\overset{\nearrow 1}{A}}{v-2} + \frac{\overset{\nearrow -2}{B}}{v+1} =$

$$= \int \frac{1}{v-2} - \int \frac{2}{v+1}$$

$$= \ln|v-2| - 2\ln|v+1|$$
$$= \ln \frac{|v-2|}{(v+1)^2}$$

$$\Longrightarrow -2\ln|x| + \ln\frac{|v-2|}{(v+1)^2} = \ln c$$

$$\ln \frac{|v-2|}{(v+1)^2 x^2} = \ln c \Longrightarrow$$

$$|v-2| = (v+1)^2 x^2 c$$
$$x^2 = \frac{(v-2)}{c(v+1)^2}$$

$$y = vx \Longrightarrow v = \frac{y}{x}$$

$$x^2 = \frac{\left(\frac{y}{x}-2\right)}{c\left(\frac{y}{x}+1\right)^2} \Longrightarrow x(y+x)^2 c = y-2x$$

ÖRN $2(2x^2+y^2)dx - xydy = 0$

$$\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)} = \frac{2(2t^2x^2+t^2y^2)dx}{tx+ty\,dy} =$$

$$\frac{t^2\,2(2x^2+y^2)dx}{t^2\,xydy} \quad x.y\,dy \neq 0$$

$\to y = v.x \to dy = v.dx + xdv$

$$2(2x^2+v^2x^2)dx - (x\,vx)(vdx+xdv) = 0$$

$$4x^2dx + 2x^2v^2dx - x^2v^2dx - x^3v\,dv = 0$$

$$(4x^2dx + x^2v^2)dx - x^3v\,dv = 0$$

$$x^2(4+v^2)dx - x^2(x.v\,dv) = 0$$

$$(4+v^2)dx - x.v\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{v}{4+v^2}dv = 0$$

$$4+v^2 = u$$
$$2u\,du = du$$
$$v.du = \frac{dy}{2}$$

$$\ln x - \frac{1}{2}\ln|4+v^2| \Longrightarrow$$

$$\frac{x^2}{(4+x^2)} = c^2 \longrightarrow x^4 = c^2(4x^2+y^2)$$

ödev

ÖRN $v^2dx + x(x+v)dv = 0$

$$\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)} = \frac{t^2y^2dx}{tx(tx+ty)dy} =$$

$$\frac{t^2y^2dx}{t^2(x^2+xy)dy} = \frac{t^2y^2dx}{t^2(x^2+xy)dy} \quad (x^2+xy)\neq 0$$

$$v = xy \quad dv = xdy + ydx$$

$$x^2y^2dx + x(x+xy)(xdy+ydx) = 0$$

$$x^2y^2dx + (x^2+x^2y)(xdy+ydx) = 0$$

$$x^2y^2dx + x^3dy + x^2ydx + x^3ydy + x^2y^2dx = 0$$

$$(2x^2y^2+x^2y)dx + (x^3+x^3y)dy = 0$$

$$x^2(2y^2+y)dx + x^3(1+y)dy = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1+y)dy}{\underbrace{(2y^2+y)}_{y(1+2y)}} = 0$$

$$\frac{(1+y)}{y(1+2y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+2y} \quad y=0$$

$$y+1 = A(1+2y) + By \quad A=1$$

$$y=-1/2 \quad 1/2 = -1/2B \Longrightarrow B=-1$$

$$\int\frac{dx}{x} + \int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+2y}\right)dy$$

$$1+2y = u$$
$$2dy = du$$

$$\ln x + \ln y - \frac{1}{2}\ln|1+2y| \Longrightarrow$$

$$\ln\frac{x^2y^2}{1+2y} = \ln c^2$$

$$(x^2y^2) = c^2(1+2y)$$

$$x^2 = c^2\left(\frac{1+2y}{y^2}\right)$$

$y = \frac{v}{x}$

$x^2 = c^2 \left(\frac{1 + \frac{2v}{x}}{\frac{v^2}{x^2}} \right)$

$x^2 = c^2 \; \frac{x + 2v}{x} \; \frac{x^2}{v^2}$

$x = c^2 \left(\frac{x + 2v}{v^2} \right)$

ÖRN (1) $(y^2 + 7xy + 16x^2)dx + x^2 dy = 0$

(2) $2xy - 2y\,dx = \sqrt{x^2 + 4y^2}\; dx$

Homojen Türe Dönüştürülebilen Denklemler

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sabit sayılar olmak üzere ;

$(a_1 x + b_1 y + c_1)dx + (a_2 x + b_2 y + c_2)dy = 0$ -- (1)

denklemini göz önüne alalım. Bu tip denklemler uygun bir dönüşümle homojen hale getirilebilir.

a) Eğer $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$ ise ,

$x = X + h \qquad y = Y + k$

$(a_1 X + b_1 Y) dX + (a_2 X + b_2 Y) dY = 0$

$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$
$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$

değişken dönüşümü yapılarak (1) nolu denklem homojen denklemine dönüştürülür. Burada h ve k'nın seçimi $a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$
$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$
sisteminin çözümünden bulunabilir.

b) Eğer $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ ise ;

$z = a_1 x + b_1 y$ değişken dönüşümü yapılarak (1) nolu denklem x ve z 'nin değişkenleri cinsinden değişkenlerine ayrılabilen türe dönüştürülebilir.

ÖRN $(x - 2y + 1)dx - (2x - y - 1)dy = 0$

$a_1 = 1 \quad b_1 = -2 \quad c_1 = 1 \qquad a_2 = -2 \quad b_2 = 1 \quad c_2 = 1$

$\frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-2}$

$x = X + h \quad , \quad y = Y + k$

$\left. \begin{array}{l} a_1 h + b_1 k + c_1 = 0 \\ a_2 h + b_2 k + c_2 = 0 \end{array} \right\}$ 'dan

$h - 2k + 1 = 0$
$-2h + k + 1 = 0$
$k = 1 \quad h = 1$

$x = X + 1$
$y = Y + 1$

$(a_1 X + b_1 Y)dX + (a_2 X + b_2 Y)dY = 0$ 'dan

$(X - 2Y)dX + (-2X + Y)dY = 0$

$Y = vX \qquad dY = dX \cdot v + X \cdot dv$

$(X - 2(vX))dX + (-2X + vX)(v\,dX + X\,dv) = 0$

$X dX - 2vX dX - 2Xv dX - 2X^2 dv + v^2 X dX + vX^2 dv = 0$

$(X - 2vX - 2Xv + v^2 X)dX + (vX^2 - 2X^2)dv = 0$

$(v^2 - 4v + 1)dX + X(v - 2)dv = 0$

$\int \frac{dX}{X} + \int \frac{(v-2)dv}{v^2 - 4v + 1} = 0$ integral alınır

$v^2 - 4v + 1 = u$
$(2v - 4)dv = du$
$(v - 2)dv = \frac{du}{2}$

$\ln|X| + \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = 0$

$\ln|X| + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = 0$

$\ln|X| + \frac{1}{2} \ln|u| = 0$

$$\ln X + \frac{1}{2}\ln|v^2-4v+1| = \ln|c|$$

Çözümü nasıl kolay elde edebiliyorsak keyfi değeri ona göre veriyoruz)

$$\ln|X^2(v^2-4v+1)| = \ln|c^2|$$

$$X^2(v^2-4v+1) = c^2 \longrightarrow v = \frac{Y}{X}$$

$$X^2\left(\frac{Y^2}{X^2} - 4\frac{Y}{X} + 1\right) = c^2$$

$$\cancel{X^2}\left(\frac{Y^2-4YX+X^2}{\cancel{X^2}}\right) = c^2$$

$$\boxed{Y^2-4YX+X^2 = c^2}$$

Homojen denklemde ulaşacağımız sonuç budur.

$x = X+h \qquad y = Y+k$

$X = x-1 \qquad Y = y-1$

$$\boxed{(y-1)^2 - 4(y-1)(x-1) + (x-1)^2 = c^2}$$

ÖRN

$$(x+y+1)dx + (2x+2y+3)dy = 0$$

$a_1 = 1 \quad b_1 = 1 \quad c_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad b_2 = 2 \quad c_2 = 3$

$$\frac{a_2}{a_1} \stackrel{?}{=} \frac{b_2}{b_1} \qquad \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \checkmark$$

$z = a_1x + b_1y$

$z = x+y \xrightarrow{\text{diff'i}} dz = dx+dy$

$y = z-x \qquad dy = dz-dx$ → Denklemde yerine koyuyoruz

$$(\cancel{x} + z - \cancel{x} + 1)dx + (\cancel{2x} + 2z - \cancel{2x} + 3)(dz-dx) = 0$$

$$(z+1)dx + (2z+3)(dz-dx) = 0$$

$$\cancel{z dx} + \cancel{dx} + 2z\,dz - 2z\cancel{dx} + 3dz - 3\cancel{dx} = 0$$

$$-z\,dx - 2dx + 2z\,dz + 3dz = 0$$

$$-(z+2)dx + (2z+3)dz = 0$$

dx'li ifadenin yanında x'li ifade
dz '' '' '' z '' '' olmalı

$$\int dx - \int\frac{(2z+3)}{(z+2)}dz = 0$$

$$x - \int\frac{2z+4-1}{z+2}dz = 0$$

$$x - \int\frac{2\cancel{(z+2)}}{\cancel{(z+2)}}dz + \int\frac{1\,dz}{z+2} = 0$$

$$x - 2z + \ln|z+2| = c$$ ↓ keyfi sabit

$z = x+y$ idi

$$x - 2x - 2y + \ln|x+y+2| = c$$

$$-x - 2y + \ln|x+y+2| = c$$

$$\boxed{\ln|x+y+2| = c + x + 2y}$$

c'yi (−)'li de bulabiliriz.

ÖRN

$$(2x-y)dx + (4x+y-6)dy = 0$$

$a_1 = 2 \quad a_2 = 4$

$b_1 = -1 \quad b_2 = 1$

$c_1 = 0 \quad c_2 = -6$

$$\frac{a_2}{a_1} \stackrel{?}{=} \frac{b_2}{b_1} \qquad \frac{4}{2} \neq \frac{1}{-1}$$

$x = X+h \qquad y = Y+k$

$a_1h + b_1k + c_1 = 0$

$a_2h + b_2k + c_2 = 0$

$2h - k = 0$

$4h + k - 6 = 0$

$6h = 6 \qquad h = 1$

$k = 1.2 = 2$

$x = X+1 \qquad y = Y+2$

şimdilik

$(a_1X + b_1Y)\,dX + (a_2X + b_2Y)\,dY = 0$

$(2X - Y)\,dX + (4X + Y)\,dY = 0$

dönüşüm yapalım

$Y = v.X \qquad dY = v\,dX + X\,dv$

$(2X - vX)\,dX + (4X + vX)(v\,dX + X\,dv)$

$2X\,\underline{dX} - vX\,\underline{dX} + 4Xv\,\underline{dX} + 4X^2\,dv + v^2X\,\underline{dX} + vX^2\,dV = 0$

$(2X - vX + 4vX + v^2X)\,dX + (4X^2 + vX^2)\,dV = 0$

$(v^2 + 3v + 2)\,dX + X(v+4)\,dV = 0$

Değişkenlerine ayrılabilen dif. denk. hâline geldi.

$$\int \frac{dX}{X} + \int \frac{(v+4)}{v^2+3v+2}\,dv = 0$$

$v \quad +2$

$v \quad +1$

$$\frac{v+4}{v^2+3v+2} = \frac{A}{v+2} + \frac{B}{v+1}$$

$(v+1) \qquad (v+2)$

$v+4 = Av + A + Bv + 2B$

$A + B = 1 \qquad A + 2B = 4$

$B + 1 = 4 \qquad B = 3 \qquad A = -2$

$$\int \frac{dX}{X} - \int \frac{2}{v+2} + \int \frac{3}{v+1} = $$

$\ln X - 2\ln|v+2| + 3\ln|v+1| = \ln|c|$

$\ln\left|\dfrac{X\cdot(v+1)^3}{(v+2)^2}\right| = \ln c$

$X(v+1)^3 = c(v+2)^2 \qquad v = Y/X$ dönüşümü

$X\left(\dfrac{Y}{X} + 1\right)^3 = c\left(\dfrac{Y}{X} + 2\right)^2$

$\cancel{X}\,\dfrac{(Y+X)^3}{\cancel{X^3}} = c\,\dfrac{(Y+2X)^2}{\cancel{X^2}} \longrightarrow$

$(Y+X)^3 = c_1(Y+2X)^2$

$X = x - 1 \qquad Y = y - 2$

$(y - 2 + x - 1)^3 = c.(y - 2 + 2x - 2)^2$

$(y + x - 3)^3 = c.(y - 4 + 2x)^2$

<u>ÖRN</u> $(y-2)\,dx - (x - y - 1)\,dy = 0$

$$\left.\begin{matrix} a_1 = 0 & a_2 = -1 \\ b_1 = 1 & b_2 = 1 \\ c_1 = -1 & c_2 = 1 \end{matrix}\right\} \quad \frac{a_2}{a_1} \overset{?}{=} \frac{b_2}{b_1} \rightarrow \frac{-1}{0} \neq \frac{1}{1}$$

$x = X + h \qquad y = Y + k \rightarrow x = X + 3 \quad y = Y + 2$

$a_1h + b_1k + c_1 = 0$

$a_2h + b_2k + c_2 = 0$

$k - 2 = 0 \rightarrow k = 2$

$-h + k + 1 = 0 \qquad -h + 3 = 0 \qquad h = 3$

$(a_1X + b_1Y)\,dX + (a_2X + b_2Y)\,dY = 0$

$Y\,dX + (-X + Y)\,dY = 0$

$Y = vX \qquad dY = v\,dX + X\,dV$

$vX\,dX + (-X + vX)(v\,dX + X\,dv) = 0$

$(vX + v^2X - Xv)\,dX + (vX^2 - X^2)\,dV = 0$

$v^2\,dX + X(V-1)\,dV = 0$

$\dfrac{dX}{X} + \dfrac{(V-1)}{V^2}\,dV = 0$ integral alınır.

$$\int \frac{dX}{X} + \int \left(\frac{V-1}{V^2}\right) dV = 0$$

$$\int \frac{dX}{X} + \int \frac{dv}{v} - \int \frac{dv}{v^2} = 0$$

$\ln|x| + \ln|v| - \dfrac{1}{v} = c$

$\ln|x.v| + \dfrac{1}{v} = c$

$v = \frac{y}{x} \longrightarrow \ln\left|\frac{xy}{x}\right| + \frac{1}{\frac{y}{x}} = c$

$\ln|y| + \frac{x}{y} = c$

$\ln(y-2) + \frac{x-3}{y-2} = c$

$(y-2)\ln(y-2) + (x-3) = c.(y-2)$

$(y-2).[\ln(y-2) - c] = 3 - x$

ÖRN $(x-y-1)\,dx + (4y+x-1)\,dy = 0$

$a_1 = 1 \quad a_2 = 4$
$b_1 = -1 \quad b_2 = 1$
$c_1 = -1 \quad c_2 = -1$

$\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1} \quad \frac{1}{1} \neq \frac{4}{-1}$

$x = X + h$
$y = Y + k$

$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$
$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$

$h - k - 1 = 0 \quad 5k = 0 \quad k = 0$
$h + 4k - 1 = 0 \quad h = +1$

$(a_1 X + b_1 Y)dX + (a_2 X + b_2 Y)dY = 0$

$(X - Y)dX + (X + 4Y)\,dY = 0$

$Y = vX \quad dY = v\,dX + X\,dv$

$(X - vX)dX + (X + 4vX)(v\,dX + X\,dv) = 0$

$X\,dX - vX\,dX + Xv\,dX + X^2 dv + 4v^2 X\,dX + 4vX^2 dv = 0$

$(X - vX + Xv + 4v^2)dX + (x^2 + 4v X^2)\,dv = 0$

$(4v^2+1)\,dX + X(4v+1)\,dv = 0$

$\int \frac{dX}{X} + \int \frac{(4v+1)}{(4v^2+1)}\,dv = 0$

$\frac{4v\,dv}{4v^2+1} + \frac{dv}{4v^2+1} \longrightarrow \frac{\frac{du}{2}}{u} + \frac{1}{2}\arctan 2v$

$4v^2 + 1 = u \qquad (2v)^2 + 1^2$
$8v\,dv = du \qquad 2v = a$
$4v\,dv = \frac{du}{2} \qquad 2dv = da$
$dv = \frac{da}{2}$

$\frac{1}{2}\int \frac{da}{a^2+1^2} = \frac{1}{2}\arctan 2v$

$\ln|X^2.(4v^2+1)| + \arctan 2v = \ln|c^2|$

$v = \frac{Y}{X}$

$\ln\left(X^2\left(\frac{4Y^2}{X^2}+1\right)\right) + \arctan\frac{2Y}{X} = \ln|c^2|$

$\ln\left|\cancel{X^2}\,\frac{4Y^2+X^2}{\cancel{X^2}}\right| + \arctan\frac{2Y}{X} = \ln|c^2|$

$\ln|4Y^2 + X^2| + \arctan\frac{2Y}{X} = \ln|c^2|$

$Y = y \qquad X = x - 1$

$\ln|4y^2 + (x-1)^2| + \arctan\frac{2y}{x-1} = \underbrace{\ln k^2}_{c'}$

de denir