Intelligence Artificielle

Logique propositionnelle

La Logique Propositionnelle

Le système formel, que nous appellerons calcul booléen, a reçu une interprétation mathématique rigoureuse au moyen du domaine $D = \{0, 1\}$ et des opérations $+$ et $\times$ définies sur lui,

Maintenant, « concrètement » quelle signification donner à des variables qui ne peuvent prendre pour valeurs que 0 ou 1?

Une candidate à la signification qu'on peut accorder à une variable booléenne est la notion logique de **proposition**,

Une proposition est une entité qui est soit **vraie** (1) soit **fausse** (0)

Le **calcul propositionnel** est donc une «interprétation concrète » du calcul booléen quand 1 est interprété comme Vrai (*v*) et 0 comme Faux (*f*)

Le calcul propositionnel est donc une algèbre de Boole où les variables, appelées *variables propositionnelles*, représentent des **propositions**, c'est-à-dire des *entités ayant pour valeurs possibles: le vrai (v) ou le faux (f)*

Les **expressions booléennes** contenant de telles variables s'interprètent aisément

Il est d’usage de noter p, q, r, … les variables propositionnelles,

Il est d’usage aussi de noter $\vee$ ce qu’on avait noté +, $\wedge$ pour $\times$, $\neg$ pour ~

Ces symboles sont appelés des **connecteurs**

Syntaxe de la logique propositionnelle

Pour spécifier la syntaxe, on commence avec certains symboles qui peuvent être utilisés pour formuler des énoncés. Ici les symboles sont d'une part les atomes propositionnels, et d'autre part les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$

et ensuite il faut indiquer quelles suites de ces symboles sont 'grammaticales' et quelles ne le sont pas.

La totalité des expressions bien formées (ou : formules, énoncés) de la logique propositionnelle est spécifiée comme suit :

(i) Les atomes propositionnelles sont des formules

(ii) Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule

(iii) Si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \rightarrow B)$ sont des formules.

Voilà des expressions bien formées = des formules = des énoncés :

- $((\neg p \wedge q) \wedge r)$
- $p \wedge (q \vee r)$

Et les expressions suivantes sont mal formées = des non-formules = des non-énoncés :

- pq
- $\wedge p \neg q$

Sémantique de la logique propositionnelle

La sémantique d'une logique associe une signification à ses formules et explique les conditions qui rendent les formules vraies ou fausses.

les tables de vérité précisent les significations des connecteurs, en expliquant comment la valeur de vérité d'une formule avec telle-et-telle forme dépend des valeurs de vérité de ses composants immédiats

Conjonction et disjonction

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ permettent de définir les propositions $p \wedge q$ et $p \vee q$, dont les valeurs de vérité sont calculées au moyen des tables suivantes :

p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

négation

De même, on peut définir la proposition $\neg$p:

p	$\neg$p
v	f
f	v

Qui, bien sûr, s'interprète comme la *négation* de p:

$\neg$p : non-p

implication

La table de vérité de ce connecteur:

p	q	$p \Rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Lois d'Equivalence

Lois d'élimination:

- $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Lois de Morgan:

- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

- Lois de Distributivité:
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- Lois de Commutativité:
  - $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
  - $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

- <u>Lois d'associativité:</u>
  - $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
  - $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
- <u>Loi Contraposée:</u>
  - $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

Tautologies et contradictions

- ❖ Une proposition composée qui est toujours vraie, quelles que soient les valeurs de vérité des propositions qui la composent, est appelée une tautologie
- ❖ Une proposition composée qui est toujours fausse est appelée une contradiction.

La proposition composée $p \vee \neg p$ est une tautologie car elle est toujours vraie.

La proposition composée $p \wedge \neg p$ est une contradiction car elle est toujours fausse.

p	¬ p	p∨¬p
v	f	v
v	f	v
f	v	v
f	v	v

p	¬ p	p∧¬p
v	f	f
v	f	f
f	v	f
f	v	f

Ordre de priorité des connecteurs

La négation est prioritaire, puis dans l'ordre des priorités décroissantes, nous trouvons la conjonction ($\wedge$), la disjonction ($\vee$), l'implication ($\Rightarrow$) et l'équivalence ($\Leftrightarrow$).

À priorité égale, le connecteur gauche est prioritaire, sauf pour l'implication qui est associative à droite

C'est-à-dire:

– $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ est l'abréviation de $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c))$.

– $a \wedge b \wedge c$ *est l'abréviation de* $((a \wedge b) \wedge c)$.

– $a \wedge b \vee c$ *est l'abréviation de* $((a \wedge b) \vee c)$.

– $a \vee b \wedge c$ *est l'abréviation de* $(a \vee (b \wedge c))$.

Exercice

1- Lesquelles parmi les formules suivantes sont des **tautologies**?

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$$
$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p))$$
$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q))$$
$$(((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)))$$
$$((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r))$$

2- Donner la **négation** de l'expression suivante (sous une forme la plus simple possible):

$$(q \Rightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Arbre syntaxique

Grace à la définition de la syntaxe, on peut dessiner pour toute formule A de la logique propositionnelle un arbre syntaxique.

Les nœuds de cet arbre sont des formules. La racine de l'arbre va correspondre à la formule A. Les feuilles de l'arbre correspondront aux atomes propositionnels.

Voilà un exemple très simple, l'arbre syntaxique de la formule $(\neg p \to q)$; on l'a dessiné, selon une convention habituelle, à l'envers.

```
       →
    /     \
  ¬         q
  |
  p
```

Les formes normales

- Une formule est en forme normale conjonctive(FNC) ssi c'est une conjonction de disjonctions de littéraux.

-Une formule est en forme normale disjonctive (FND) ssi c'est une disjonction de conjonctions de littéraux

Littéral: une lettre (p, q, r, ...) ou une négation de lettre (¬p, ¬q, ¬r, ...)

Exemples :

$p \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r)$

est une formule en forme normale conjonctive.

Tandis que $p \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r)$

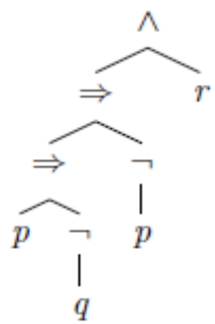
est une formule en forme normale disjonctive.

Exercice Soit la formule propositionnelle A définie comme

$$((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p) \wedge r$$

1. Ecrire la formule A sous forme d'arbre.
2. Donner la table de vérité de la formule A.
3. Donner une forme normale conjonctive et une forme normale disjonctive pour la formule A.
4. Cette formule est-elle valide ? justifier votre réponse.
5. Cette formule est-elle satisfiable ? si oui donner un modèle.

Correction :

1. 

2. *le cas où* r *est faux est trivial (la formule entière est fausse) dans le cas où* r *est vrai le cas où* p *est faux est aussi trivial (la formule entière est vraie).*

p	q	r	$p \Rightarrow \neg q$	$(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$	A
–	–	F			F
F	–	V		V	V
V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F

3. *Forme normale conjonctive :* $(\neg p \vee q) \wedge r$
   Forme normale disjonctive : $(q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$
4. *La formule n'est pas valide : il y a au moins une ligne où elle est fausse.*
5. *La formule est satisfiable : il y a au moins une ligne où elle est vraie. par exemple la seconde qui donne le modèle où* $\{p, q, r \mapsto V\}$ *dans lequel les trois variables sont vraies.*