

Universitat Politècnica de Catalunya

FACULTAT D'INFORMÀTICA DE BARCELONA

TREBALL CPM - PERT

Investigació Operativa

Pol Monroig i Yaiza Cano

Gener 2021

Índex

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introducció | 2 |
| 2 | Descripció del model | 3 |
| 2.1 | Model bàsic | 3 |
| 2.2 | Model final | 3 |
| 3 | Projecte emprat | 5 |
| 3.1 | Distribució de productes | 5 |
| 3.2 | Distribució durant un esdeveniment especial | 6 |
| 4 | Funcionament i Proves | 7 |
| 4.1 | Àrea #1 | 7 |
| 4.2 | Àrea #2 | 7 |
| 5 | Resultats | 8 |
| 5.1 | Àrea #1 | 8 |
| 5.2 | Àrea #2 | 9 |
| A | Canvis i modificacions | 11 |
| B | Cerca d'informació | 12 |
| B.1 | OR-Notes [1] | 12 |
| B.2 | Wikipedia CPM [4] | 12 |
| B.3 | Malcolm et al. [5] | 12 |
| B.4 | CPM for Beginners [3] | 12 |

1 Introducció

Se'ns planteja l'elaboració d'un software propi que permeti fer avaluacions i prendre decisions relatives a la durada de projectes que han de contractar a una determinada empresa.

La nostra idea inicial de desenvolupament com a analistes és crear un model CPM (*Critical Path Method*) i anar afegint diverses implementacions segons vagin sorgint necessitats. Un model CPM o CPA (*Critical Path Analysis*) [4], és un algorisme utilitzat pel càlcul de temps i terminis en la planificació de projectes. Aquesta eina es va desenvolupar per primera vegada en el U.S. Navy [5].

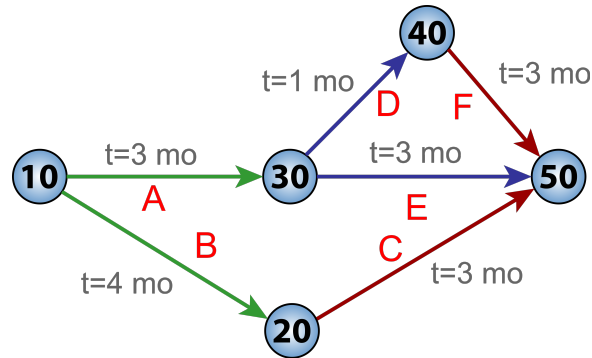


Figure 1: Exemple d'un graf PERT on t es la duració de cada tasca

Així doncs, en un primer moment s'ha pensat en utilitzar un sistema de modelització algebraic amb el que es puguin resoldre fàcilment problemes d'optimització i que, a posteriori, es durà a terme la integració dels models creats en un sistema d'ajut a la presa de decisions, que és l'objectiu principal de l'empresa. Aquest sistema d'optimització d'assignació de tasques es centra en minimitzar la durada de les tasques dins del camí crític, es a dir, fer el camí crític el més curt possible, ja que representa que les tasques que no estan al camí crític es poden fer a l'hora (amb o sense inactivitat).

2 Descripció del model

En aquest apartat descriurem com està implementat el nostre model des de la versió inicial i més bàsica, fins la darrera versió.

2.1 Model bàsic

El nostre primer model consta de 2 sets:

- Milestones: corresponen als nodes del graf direccional *AOA*.
- Real_tasks: corresponen a les tasques que es realitzen a l'àrea d'aplicació.
- Tasks: correspon a la unió de les *Real_tasks* amb arestes extres que hem hagut d'afegir a les dades del model per tal d'aconseguir resultats (*¹).

(*¹) Si ens fixem en els grafs que apareixen a l'apartat 3. [Projecte emprat](#), podem veure que hi ha tasques que procedeixen del mateix node i que van a parar al mateix node successor, aquestes arestes que al graf les interpretem de forma individual, *ampl* les interpreta com una sola aresta i, per tant, s'han hagut d'afegir nodes intermedis i arestes sense costos ni duracions per poder adaptar el graf a un model que entengués *ampl*.

A més a més, consta d'1 paràmetre:

- Durations: corresponen al temps que triga una tasca en realitzar-se.

Per últim, tenim 2 variables:

- t: corresponen als instants on finalitzen les tasques.
- inactivity: corresponen a la inactivitat de les tasques i hi surt representat el/s camí/ns crític/s.

En quant a les restriccions, en tenim 2:

- define_inactivity: correspon al temps que ha estat esperant cada tasca fins que s'executen. Es pot muntar el camí crític amb aquesta informació.
- non_negative: fixa fita inferior del *define_inactivity* tenint en compte el temps màxim d'inactivitat de les tasques precedents a cada tasca.

Per últim, la funció objectiu tindrà com a finalitat minimitzar la duració total que trigaria el projecte en dur-se a terme.

2.2 Model final

En general, podem deduir que aquest nou model necessitarà de moltes més variables, paràmetres i restriccions que l'anterior.

En quant als sets, tindrem els mateixos que al [model bàsic](#).

En quant als paràmetres, en tenim 7.

- crash_costs: corresponen als costos necessaris per disminuir la duració de cada tasca.
- normal_costs: corresponen al cost que té cada tasca.
- normal_duration: correspon al *durations* del [model bàsic](#).
- crash_duration: correspon a la duració de cada tasca un cop s'ha pagat el *crash_cost* corresponent.
- alpha: correspon al pes assignat entre la relació de les dues funcions objectius a minimitzar en aquest model.
- b0: correspon al poder adquisitiu que es té inicialment.
- r: correspon a la taxa d'interès d'un possible préstec.

En quant a les variables en tenim unes altres 7.

- t: correspon a la mateixa t del [model bàsic](#).
- inactivity: correspon a la mateixa *inactivity* del [model bàsic](#).
- interest_pay: correspon a la quantitat extra de diners a pagar un cop superat el *threshold b0*. Té en compte la taxa d'interès r .
- total_cost: correspon a la quantitat total a pagar sense tenir en compte l'interès.
- total_duration: correspon a la duració total del projecte.
- durations: corresponen a les duracions finals escollides per cada tasca.
- costs: corresponen als costos finals escollits per cada tasca.

En quant a les restriccions en tenim 8.

- define_inactivity: correspon al *define_inactivity* del [model bàsic](#).
- non_negative: correspon al *non_negative* del [model bàsic](#).
- calculate_duration: correspon a l'assignació de la duració final de cada tasca. Els valors s'escullen dels paràmetres de *normal_duration* i *crash_duration*.
- calculate_cost: correspon a l'assignació del cost final de cada tasca. Els valors s'escullen dels paràmetres de *normal_costs* i *crash_costs*.
- relationship_cost_duration: correspon a la relació entre pagar més i treballar més ràpid. És una relació lineal així que s'han calculat la desviació i el pes.
- calculate_total_cost: correspon al càlcul de la variable *total_cost*.
- calculate_total_duration: correspon al càlcul de la variable *total_duration*.
- calculate_interest: correspon al càlcul de la variable *interest_pay*.

Per últim, la funció objectiu a minimitzar tindrà en compte dues variables: el cost i la duració totals de dur a terme el projecte. Aquesta relació estarà ponderada per un valor *alpha* que assignarà un pes determinat a cadascuna de les funcions.

3 Projecte emprat

Ens hem basat en tota l'activitat que comporta distribuir mercaderies a una empresa amb servei online com ara Amazon, AliExpress, GearBest, Ebay, etc.

A continuació enumerarem les tasques que creiem que es duen a terme a les diferents àrees.



Figure 2: Exemple de diferents empreses de venda de productes online [2]

3.1 Distribució de productes

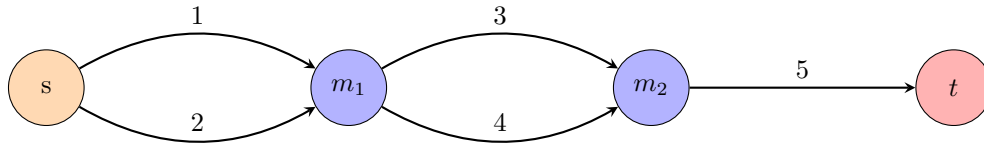
Aquest tipus de tasques es basen en la distribució dels productes als diferents clients. Des del moment en que es comencen a fer les comandes a través de la pàgina web o aplicació mòbil fins que s'empaqueten i es distribueixen a cada client.



Figure 3: Imatge del que seria el cicle de distribució [6]

A continuació llistem les activitats que creiem que es duen a terme en el procés descrit anteriorment i muntem el graf direccional AOA corresponent.

1. Rebre demandes de productes.
2. Selecció dels productes als diversos magatzems.
3. Empaquetar els productes.
4. Assignar els productes als repartidors.
5. Entregar els productes.

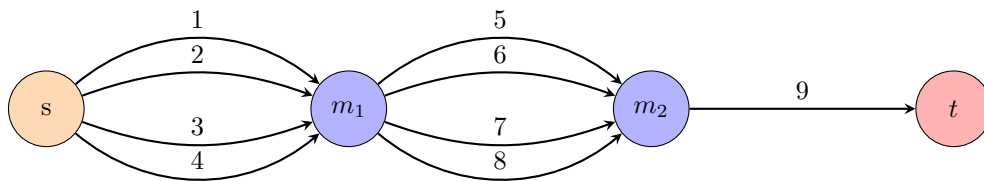


3.2 Distribució durant un esdeveniment especial

En aquesta segona àrea, tenim un tipus de distribució de productes en els quals volem fer una oferta en un dia especial (e.g., Black Friday, Nadal). Per tal de fer la venda d'aquests productes, primer hem de seleccionar els productes per una data determinada, fer anuncis, estimar preus i probabilitat d'èxit de venda. També hem d'acordar a fer promocions especials per usuari, per tant tenim en compte el punt d'interès de cadascun.

A continuació llistem les activitats que creiem que es duen a terme en el procés descrit anteriorment i muntem el graf direccional *AOA* corresponent.

1. Contactar amb venedors.
2. Seleccionar els productes candidats per aplicar promoció.
3. Determinar data/es en les que es durà a terme l'event.
4. Comprovar els punts d'interès dels clients.
5. Estimar èxit de venda.
6. Acordar preu.
7. Buscar spots per anunciar-se.
8. Dissenyar anuncis.
9. Promocionar event.



4 Funcionament i Proves

En aquest apartat mostrem les dades que hem creat de manera aleatòria per cada àrea d'aplicació i les solucions que n'obtenim utilitzant-los als diferents models implementats. S'han tingut en compte les següents consideracions:

Per la variable *alpha* hem decidit utilitzar un *step* de 0.1.

Per la variable *r* (tipus d'interès) hem decidit fixar un valor de 15.

Per la variable *b0* (poder adquisitiu inicial) hem decidit fixar un valor de 200.

Cal comentar que el funcionament del [model bàsic](#) s'ha comprovat amb les dades que es proporcionen a l'apartat de *Wikipedia* sobre el *Critical path method* [4]. A més a més, hem decidit que també comprovarem que les solucions entre models coincideixin pel valor d'*alpha* = 0, el qual correspon a que el [model final](#) només minimitza la duració.

4.1 Àrea #1

Correspon a l'àrea d'aplicació de [distribució de productes](#).

La taula 1 que mostrem a continuació conté les dades necessàries per provar el [Model final](#). Hi podem observar les duracions i els costos estàndards així com els de *crash* assignats a cada activitat de manera aleatòria.

| Nº Activitat | Normal Cost | Crash Cost | Normal Duration | Crash Duartion |
|--------------|-------------|------------|-----------------|----------------|
| 1 | 58 | 74 | 20 | 3 |
| 2 | 76 | 101 | 63 | 21 |
| 3 | 25 | 225 | 91 | 41 |
| 4 | 7 | 108 | 96 | 44 |
| 5 | 80 | 124 | 83 | 72 |

Table 1: Data to test final model

4.2 Àrea #2

Correspon a l'àrea d'aplicació de [distribució durant un esdeveniment especial](#).

A continuació repetirem el mateix procés que hem realitzat amb l'àrea anterior.

A la taula 2 hi podem observar les dades generades aleatòriament per provar el [Model final](#).

| Nº Activitat | Normal Cost | Crash Cost | Normal Duration | Crash Duartion |
|--------------|-------------|------------|-----------------|----------------|
| 1 | 74 | 88 | 40 | 22 |
| 2 | 10 | 226 | 76 | 43 |
| 3 | 82 | 117 | 118 | 71 |
| 4 | 18 | 294 | 80 | 43 |
| 5 | 30 | 262 | 46 | 32 |
| 6 | 40 | 154 | 27 | 25 |
| 7 | 51 | 68 | 111 | 32 |
| 8 | 58 | 135 | 23 | 6 |
| 9 | 44 | 80 | 50 | 13 |

Table 2: Data to test final model

5 Resultats

5.1 Àrea #1

En aquest primera àrea d'aplicació tenim que hem trobat una frontera de optimització amb un $\alpha = 0.4$, ja que és en aquest moment on els costos i les duracions es mantenen constants, independentment de si augmentem el valor d' α .

A l'inici de la gràfica podem veure com es minimitza bastant la duració però ràpidament (amb valors α petits) es comencen a invertir els rols, el cost disminueix ràpidament i la duració augmenta a la mateixa velocitat fins arribar a la frontera d'optimització.

Aquesta gràfica té una exactitud de 0.01, és a dir, hem provat valors de α en intervals d'aquest tamany.

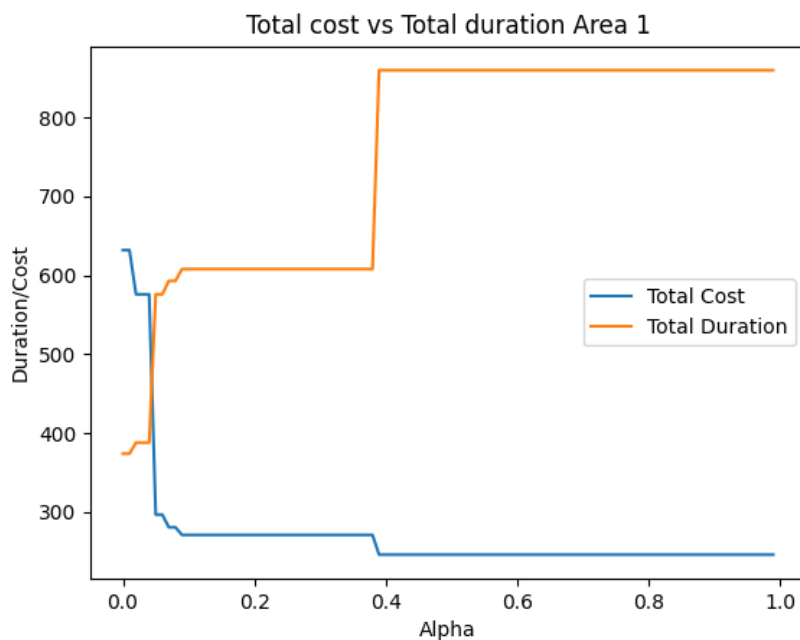


Figure 4: Relació entre el cost i la duració totals

En les següents taules podem veure els temps d'inactivitat de cada una de les tasques amb els diferents valors d' α . Sorprenentment els camins crítics són els mateixos sempre, això pot ser degut a que tenim una sistema de tasques molt petit.

| Nº Activitat | $\alpha=0$ | $\alpha=0.1$ | $\alpha=0.2$ | $\alpha=0.3$ | $\alpha=0.4$ | $\alpha=0.5$ |
|--------------|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| task 1 | 18 | 1 | 1 | 1 | 43 | 43 |
| task 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| task 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| task 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| task 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Nº Activitat | $\alpha=0.6$ | $\alpha=0.7$ | $\alpha=0.8$ | $\alpha=0.9$ | $\alpha=1$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------------|
| task 1 | 43 | 43 | 43 | 43 | 43 |
| task 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| task 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| task 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| task 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Table 3: Temps d'inactivitat per diferents valors d' α

| α | Cami Crític |
|----------|---------------------------------|
| 0 | $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ |
| 0.1 | $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ |
| 0.2 | $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ |
| 0.3 | $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ |
| 0.4 | $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ |
| 0.5 | $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ |
| 0.6 | $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ |
| 0.7 | $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ |
| 0.8 | $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ |
| 0.9 | $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ |
| 1 | $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ |

Table 4: Camins crítics per diferents valors d'alpha

5.2 Àrea #2

A la segona àrea d'aplicació tenim un sistema molt més complexe, en el que intervenen moltes més tasques. Això dóna més llibertat al sistema i obre la possibilitat a més camins crítics.

Com podem veure a la gràfica, a diferència de l'àrea anterior, la frontera d'optimització es troba amb valors una mica més grans, la diferència principal entre els dos jocs de prova és que un té més tasques, llavors seria interessant provar, en un futur, el mateix sistema amb més tasques i veure si la frontera augmenta també.

En aquest cas tenim que el intercanvi de rols, es dóna molt més extrem; es a dir, els costos es redueixen molt més ràpid, en canvi, la duració creix més lentament i, fins i tot, té moltes àrees on es queda constant. Una de les diferències més grans que podem observar en el comportament a la gràfica es troba als camins crítics: per valors grans d' α , tenim sempre el mateix camí crític, però per valors petits, prop de la frontera, tenim més d'un i fins i tot 3.

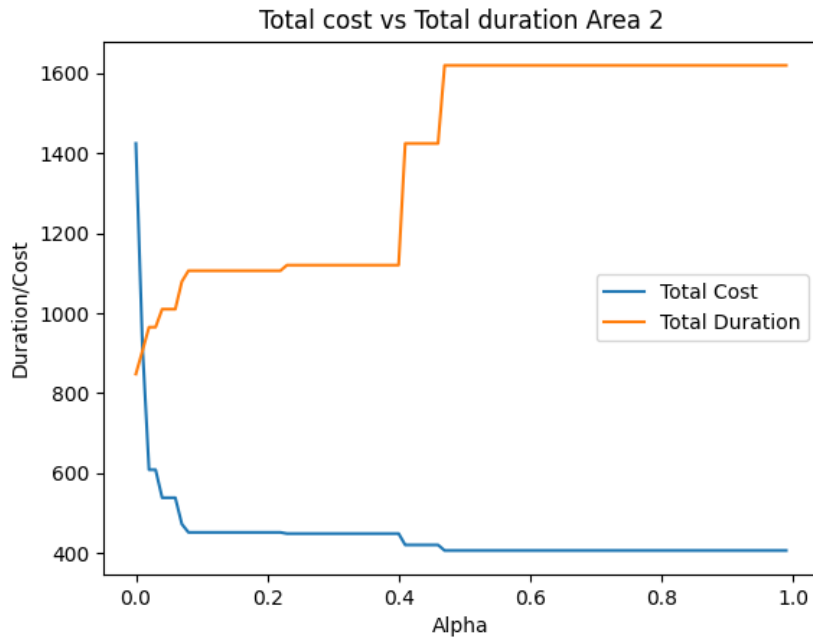


Figure 5: Relació entre el cost i la duració totals

| Nº Activitat | $\alpha=0$ | $\alpha=0.1$ | $\alpha=0.2$ | $\alpha=0.3$ | $\alpha=0.4$ | $\alpha=0.5$ |
|--------------|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| task 1 | 49 | 40 | 40 | 40 | 40 | 78 |
| task 2 | 28 | 4 | 4 | 4 | 4 | 42 |
| task 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| task 4 | 28 | 0 | 0 | 0 | 0 | 38 |
| task 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 65 |
| task 6 | 7 | 19 | 19 | 19 | 19 | 84 |
| task 7 | 0 | 14 | 14 | 0 | 0 | 0 |
| task 8 | 26 | 23 | 23 | 23 | 23 | 88 |
| task 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Nº Activitat | $\alpha=0.6$ | $\alpha=0.7$ | $\alpha=0.8$ | $\alpha=0.9$ | $\alpha=1$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------------|
| task 1 | 78 | 78 | 78 | 78 | 78 |
| task 2 | 42 | 42 | 42 | 42 | 42 |
| task 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| task 4 | 38 | 38 | 38 | 38 | 38 |
| task 5 | 65 | 65 | 65 | 65 | 65 |
| task 6 | 84 | 84 | 84 | 84 | 84 |
| task 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| task 8 | 88 | 88 | 88 | 88 | 88 |
| task 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Table 5: Temps d'inactivitat per diferents valors d'alpha

| α | Cami Crític |
|----------|--|
| 0 | $3 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ $3 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ |
| 0.1 | $3 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ $4 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ |
| 0.2 | $3 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ $4 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ |
| 0.3 | $3 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ $4 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ $3 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ $4 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ |
| 0.4 | $3 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ $4 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ $3 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ $4 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ |
| 0.5 | $3 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ |
| 0.6 | $3 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ |
| 0.7 | $3 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ |
| 0.8 | $3 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ |
| 0.9 | $3 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ |
| 1 | $3 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ |

Table 6: Camins crítics per diferents valors d'alpha

A Canvis i modificacions

Durant la practica hem hagut d'implementar molts canvis, ja que hem començat amb un model molt senzill i hem acabat en un model molt complex. El primer model de tots, no tenia en compte la implementació del set de *REAL_TASKS* ja que no pensàvem que fos necessari, aquest model només s'encarregava de minimitzar el temps total d'execució buscant el camí òptim, per tant, ja que no teníem en compte els costos, la duració de cada tasca era fixe.

Després hem afegit al model una implementació de costos, on es minimitzen els costos segons el cost de cada tasca, els ingressos que tenim i els interessos que apliquem. Aquest model funcionava molt bé amb el joc de proves bàsic que hem provat i que podem trobar a [\[4\]](#) però al aplicar els nostres grafs de tasques no funcionava ja que teníem que afegir el set *REAL_TASKS*. L'explicació d'aquest set es pot trobar a la [secció](#) on es descriuen els diferents models.

Per últim, hem afegit un bucle per executar el *solver* diversos cops amb diferents paràmetres, d'aquesta manera podem fer gràfiques i comparacions.

B Cerca d'informació

En aquest annex volem descriure cadascuna de les referències que hem utilitzat amb més profunditat, descrivim en cada una perquè l'hem utilitzat, que ens aporta i com l'hem trobat. Les referències [2] i [6] són referències de imatges que hem trobat, no d'informació que hem utilitzat i per tant no cal fer una descripció més exhaustiva.

B.1 OR-Notes [1]

1. **Descripció:** Sèrie de notes introductòries sobre temes que pertanyen a l'ampli àrea del camp de la investigació operativa. En aquest article hem trobat una extensió d'un àrea molt similar a la nostra a la secció *Network analysis - activity on arc*.
2. **Utilitat:** Aquesta web ens ha servit molt per informar-nos en el funcionament bàsic d'aquest tipus de model, a més d'altres conceptes de investigació operativa. És una font d'informació molt important ja que ens mostra diferents maneres d'aplicar-lo.
3. **Ubicació:** Assignatura d'Investigació Operativa.

B.2 Wikipedia CPM [4]

1. **Descripció:** Secció a L'Enciclopèdia Lliure on s'explica en detall l'algorisme CPM.
2. **Utilitat:** Aquesta web ens ha servit per tenir un coneixement més teòric sobre com funciona l'algorisme, a més a més d'informar-nos una mica sobre la seva història i en quines tècniques bàsiques es pot aplicar.
3. **Ubicació:** Google/Wikipeida

B.3 Malcolm et al. [5]

1. **Descripció:** Aquest document és el primer document que parla de al algoritme CPM-PERT del U.S. Army. Aquest ens mostra la primera aplicació on es va fer servir.
2. **Utilitat:** Tot i que ens dona una informació inicial de com funciona el model, el que ens aporta en el nostre cas és una informació històrica.
3. **Ubicació:** Google Scholar

B.4 CPM for Beginners [3]

1. **Descripció:** En aquest article em trobat diferents exemples molt senzills. Aquest ens mostra diverses aplicacions pel model amb extensions d'àrees diferents.
2. **Utilitat:** Ens han servit per poder entendre molt millor el funcionament del CPM a més de diferents extensions reals, en altres àrees com l'hostaleria.
3. **Ubicació:** Google Scholar

References

- [1] J. E. Beasley. OR-Notes [en l nia]. URL: <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/contents.html>. [Consulta: 3.01.2021].
- [2] Abhishek Chand. eCommerce, Online Shopping websites that ship to Nepal [en l nia]. 2016. URL: <https://www.deltadigit.com/ecommerce-online-shopping-websites-ship-nepal/>. [Consulta: 29.12.2020].
- [3] Esther Cohen. How to Use the Critical Path Method for Complete Beginners [en l nia]. URL: <https://www.workamajig.com/blog/critical-path-method>. [Consulta: 3.01.2021].
- [4] Wikipedia contributors. Critical path method [en l nia] — Wikipedia, the free encyclopedia. 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Critical_path_method. [Consulta: 28.12.2020].
- [5] Malcolm et al. “Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation”. In: OPERATIONS RESEARCH 7.5 (1959), pp. 646–669.
- [6] PinclipArt. Online Shop Clipart [en l nia]. 2020. URL: <https://www.pinclipart.com/maxpin/ihxToxw/>. [Consulta: 29.12.2020].