Thesis

Yajie Bao

10/21/2019

1 引言

设罐子 A 中最初有 s_0 个球，其中红球个数为 $R_A(0)$，罐子 B 中最初有 t_0 个球，红球个数为 $R_B(0)$，然后在每一步进行以下操作：

- 从罐子 A 拿出 m 个球，记其中红球的数目为 a，然后将取出的球放回罐子 A；从罐子 B 拿出 l 个球，记其中红球的数目为 b，然后将取出的球放回罐子 B。
- 对于随机变量 $E \sim b(1,p)$，其中 $0 < p < 1$。若 $E = 1$，则往罐子 A 添加 a 个红球与 $m - a$ 个白球，往罐子 B 中添加 b 个红球与 $l - b$ 个白球；若 $E = 0$，则把从罐子 A 添加 b 个红球与 $l - b$ 个白球，往罐子 B 中添加 a 个红球与 $m - a$ 个白球。

重复上述步骤，则第 n 步之后，两个罐子内的球总数为：

$$s_n = s_0 + \sum_{i=1}^{n} mE_i + \sum_{i=1}^{n} l(1 - E_i),$$
$$t_n = t_0 + \sum_{i=1}^{n} lE_i + \sum_{i=1}^{n} m(1 - E_i),$$

其中 $E_i \sim b(1,p), i = 1, 2, ...$ 独立同分布。设 V_{n+1} 为第 $n+1$ 步中从罐子 A 中取出球的红球比例，U_{n+1} 为从罐子 B 中取出球的红球比例，则第 $n+1$ 步后，两个罐子内的红球数目为：

$$R_A(n+1) = R_A(n) + mV_{n+1}E_{n+1} + lU_{n+1}(1 - E_{n+1}),$$
$$R_B(n+1) = R_B(n) + lU_{n+1}E_{n+1} + mV_{n+1}(1 - E_{n+1}).$$

设第 $n+1$ 步后 A 罐子中红球比例为 X_{n+1}，B 罐子中红球比例为 Y_{n+1}，则有

$$X_{n+1} = \frac{R_A(n+1)}{s_{n+1}} = \frac{s_n X_n + mV_{n+1}E_{n+1} + lU_{n+1}(1 - E_{n+1})}{s_{n+1}}, \tag{1}$$

$$Y_{n+1} = \frac{R_B(n+1)}{t_{n+1}} = \frac{t_n Y_n + lU_{n+1}E_{n+1} + mV_{n+1}(1 - E_{n+1})}{t_{n+1}}. \tag{2}$$

设 $\mathcal{F}_n$ 为 $X_1, X_2, ..., X_n$ 以及 $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 生成的 $\sigma-$ 代数，$b_n = \sum_{i=1}^{n} E_i$，$b_n \sim b(n,p)$ 为二项分布。当 $\mathcal{F}_n$ 以及 b_n 给定时，mV_{n+1} 服从参数为 $s_n, s_n X_n, m$ 的超几何分布，mU_{n+1} 服从参数为 $t_n, t_n Y_n, l$ 的超几何分布，由此可知

$$E(V_{n+1}|\mathcal{F}_n, b_n) = \frac{1}{m} \frac{m s_n X_n}{s_n} = X_n, \tag{3}$$

$$E(U_{n+1}|\mathcal{F}_n, b_n) = \frac{1}{l} \frac{l t_n Y_n}{t_n} = Y_n. \tag{4}$$

所以有，

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n,b_n)=X_n-(1-p)\frac{l}{s_0+b_n(m-l)+(n+1)l}(X_n-Y_n),$$
$$E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n,b_n)=Y_n+(1-p)\frac{m}{t_0+b_n(l-m)+(n+1)m}(X_n-Y_n).$$

故

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)=X_n-(1-p)lE\left(\frac{1}{s_0+b_n(m-l)+(n+1)l}\right)(X_n-Y_n), \tag{5}$$
$$E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)=Y_n+(1-p)mE\left(\frac{1}{t_0+b_n(l-m)+(n+1)m}\right)(X_n-Y_n). \tag{6}$$

本文将证明两个罐子中的红球比例差的数学期望收敛到 0，而且红球比例均处处收敛到同一个极限。

2　$E(X_n-Y_n)$ 的收敛性

引理 1：(Gautschi 不等式) x 为一个正实数且 $s\in(0,1)$，$\Gamma(x)$ 为 Gamma 函数，成立

$$x^{1-s}<\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+s)}<(1+x)^{1-s}.$$

定理 1：设 $E|X_n-Y_n|$ 收敛阶在 $O\left(n^{-2(1-p)\frac{m}{l}}\right)$ 与 $o\left(n^{-2(1-p)\frac{l}{m}}\right)$ 之间。

证明：设 $d=\max\{s_0,t_0\}$，$\tilde{d}=\min\{s_0,t_0\}$，由 (1) 以及 (2) 可知，

$$E\left[|X_{n+1}-Y_{n+1}||\mathcal{F}_n\right]=\left[1-(1-p)\left(\frac{l}{s_n+l}+\frac{m}{t_n+m}\right)\right]|X_n-Y_n|.$$

两边同时取数学期望可得，

$$\prod_{k=0}^{n}\left[1-2(1-p)\frac{m}{\tilde{d}+nl+l}\right]\le\frac{E(|X_{n+1}-Y_{n+1}|)}{|X_0-Y_0|}\le\prod_{k=0}^{n}\left[1-2(1-p)\frac{l}{d+km+m}\right]. \tag{7}$$

进一步可得

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n}\left[1-2(1-p)\frac{l}{d+km+m}\right]&=\frac{\prod_{k=0}^{n}(d+km+m-2(1-p)l)}{\prod_{k=0}^{n}(d+km+m)}\\&=\frac{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{d}{m}+k+1-2(1-p)\frac{l}{m}\right)}{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{d}{m}+k+1\right)}\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{d}{m}+n+2-2(1-p)\frac{l}{m}\right)/\Gamma\left(\frac{d}{m}+2-2(1-p)\frac{l}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{m}+n+2\right)/\Gamma\left(\frac{d}{m}+1\right)}\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{d}{m}+n+2-2(1-p)\frac{l}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{m}+n+2\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{d}{m}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{m}+2-2(1-p)\frac{l}{m}\right)}.\end{aligned} \tag{8}$$

同理，

$$\prod_{k=0}^{n}\left[1-2(1-p)\frac{m}{\tilde{d}+kl+l}\right]=\frac{\prod_{k=0}^{n}\left(\tilde{d}+kl+l-2(1-p)m\right)}{\prod_{k=0}^{n}\left(\tilde{d}+kl+l\right)}$$
$$=\frac{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\tilde{d}}{l}+k+1-2(1-p)\frac{m}{l}\right)}{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\tilde{d}}{l}+k+1\right)}$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\tilde{d}}{l}+n+2-2(1-p)\frac{m}{l}\right)/\Gamma\left(\frac{\tilde{d}}{l}+2-2(1-p)\frac{m}{l}\right)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{d}}{l}+n+2\right)/\Gamma\left(\frac{\tilde{d}}{l}+1\right)}$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\tilde{d}}{l}+n+2-2(1-p)\frac{m}{l}\right)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{d}}{l}+n+2\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\tilde{d}}{l}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{d}}{l}+2-2(1-p)\frac{m}{l}\right)}. \tag{9}$$

根据引理 1Gautschi 不等式，

$$\frac{\Gamma\left(\frac{d}{m}+n+2-2(1-p)\frac{l}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{m}+n+2\right)}=\mathcal{O}(n^{-2(1-p)\frac{l}{m}}) \tag{10}$$
$$\frac{\Gamma\left(\frac{\tilde{d}}{l}+n+2-2(1-p)\frac{m}{l}\right)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{d}}{l}+n+2\right)}=\mathcal{O}(n^{-2(1-p)\frac{m}{l}}), \tag{11}$$

所以有，$E|X_n-Y_n|$ 的收敛阶在 $O\left(n^{-2(1-p)\frac{m}{l}}\right)$ 与 $O\left(n^{-2(1-p)\frac{l}{m}}\right)$ 之间。

上面证明了 $E(X_n-Y_n)$ 是收敛到 0 的，下面我们来看 $E(X_n-Y_n)$ 的具体表达式。

令 $c_n=E\left(s_0+b_n(m-l)+(n+1)l\right)^{-1}$，$d_n=E\left(t_0+b_n(l-m)+(n+1)m\right)^{-1}$，$c_0=(s_o+l)^{-1}$，$d_0=(t_0+m)^{-1}$。根据 (5) 以及 (6) 可知，

$$E(X_{n+1}-Y_{n+1})=\left[1-(1-p)(lc_n+md_n)\right]E(X_n-Y_n).$$

所以，

$$E(X_n-Y_n)=(X_0-Y_0)\prod_{k=0}^{n-1}\left[1-(1-p)(lc_k+md_k)\right].$$

进一步可得，

$$E(X_n+Y_n)=[1+(1-p)(md_0-lc_0)](X_0+Y_0)-(1-p)(X_0-Y_0)\sum_{k=1}^{n-1}(md_k-lc_k)\prod_{j=0}^{k-1}\left[1-(1-p)(lc_j+md_j)\right]$$

由以上证明可知 $\sum_{k=1}^{\infty}(md_k-lc_k)\prod_{j=0}^{k-1}\left[1-(1-p)(lc_j+md_j)\right]$ 是收敛的，所以 $E(X_n+Y_n)$ 也是收敛的，并记 $\beta=\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n+Y_n)$，

$$\beta=[1+(1-p)(md_0-lc_0)](X_0+Y_0)-(1-p)(X_0-Y_0)\sum_{k=1}^{\infty}(md_k-lc_k)\prod_{j=0}^{k-1}\left[1-(1-p)(lc_j+md_j)\right].$$

因为 $E(X_n)$ 与 $E(Y_n)$ 收敛到相同的极限，故 $\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n)=\lim\limits_{n\to\infty}E(Y_n)=\frac{\beta}{2}$。

3　X_n，Y_n 的强收敛性

引理 2: 假设 $\{x_n, n\geq 1\}$，$\{a_n, n\geq 1\}$ 以及 $\{b_n, n\geq 1\}$ 为非负实数数列满足 $x_{n+1}\leq a_n x_n + b_n$，其中 $0<a_n<1, n\geq 1$。若 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{i=1}^n a_i = 0$ 且 $\sum_{n=1}^\infty b_n$ 收敛，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$。

定理 2: $X_n - Y_n$ 几乎处处收敛到 0。

证明:

注意到，

$$\begin{aligned}X_{n+1}-Y_{n+1} = (X_n - Y_n) &+ \frac{m(V_{n+1}-X_n)E_{n+1} + l(U_{n+1}-Y_n)(1-E_{n+1})}{s_{n+1}} \\ &- \frac{l(U_{n+1}-Y_n)E_{n+1} + m(V_{n+1}-Y_n)(1-E_{n+1})}{t_{n+1}},\end{aligned}$$

记

$$H_{n+1} = \frac{m(V_{n+1}-X_n)E_{n+1} + l(U_{n+1}-Y_n)(1-E_{n+1})}{s_{n+1}} - \frac{l(U_{n+1}-Y_n)E_{n+1} + m(V_{n+1}-Y_n)(1-E_{n+1})}{t_{n+1}}.$$

则

$$\begin{aligned}E(H_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) =& (1-p)\left(\frac{m}{t_n+m}+\frac{l}{s_n+l}\right)^2 (X_n-Y_n)^2 \\ &+ p\left(\frac{m^2\sigma_{1n}^2}{(s_n+m)^2}+\frac{l^2\sigma_{2n}^2}{(t_n+l)^2}\right) + (1-p)\left(\frac{m^2\sigma_{1n}^2}{(t_n+m)^2}+\frac{l^2\sigma_{2n}^2}{(s_n+l)^2}\right),\end{aligned}$$

其中 $\sigma_{1n}^2 = \frac{X_n(1-X_n)}{m^2}\frac{s_n-m}{s_n-1}$，$\sigma_{2n}^2 = \frac{Y_n(1-Y_n)}{l^2}\frac{t_n-l}{t_n-1}$。

另外有，

$$E(H_{n+1}|\mathcal{F}_n) = -(1-p)\left(\frac{l}{s_n+l}+\frac{m}{t_n+m}\right)(X_n+Y_n).$$

这里仍然假设 $m>l$ 且 $d=\max\{s_0,t_0\}$ 于是有，

$$\begin{aligned}E\left[(X_{n+1}-Y_{n+1})^2|\mathcal{F}_n\right] =& \left[1-2(1-p)\left(\frac{l}{s_n+l}+\frac{m}{t_n+m}\right)+(1-p)\left(\frac{l}{s_n+l}+\frac{m}{t_n+m}\right)^2\right](X_n-Y_n)^2 \\ &+ p\left(\frac{m^2\sigma_{1n}^2}{(s_n+m)^2}+\frac{l^2\sigma_{2n}^2}{(t_n+l)^2}\right) + (1-p)\left(\frac{m^2\sigma_{1n}^2}{(t_n+m)^2}+\frac{l^2\sigma_{2n}^2}{(s_n+l)^2}\right) \\ \leq& \left[1-(1-p)\left(\frac{l}{s_n+l}+\frac{m}{t_n+m}\right)\right](X_n-Y_n)^2 + p\left(\frac{m^2\sigma_{1n}^2}{(s_n+m)^2}+\frac{l^2\sigma_{2n}^2}{(t_n+l)^2}\right) \\ &+ (1-p)\left(\frac{m^2\sigma_{1n}^2}{(t_n+m)^2}+\frac{l^2\sigma_{2n}^2}{(s_n+l)^2}\right) \\ \leq& \left[1-\frac{2(1-p)l}{d+mn+m}\right](X_n-Y_n)^2 + \frac{4}{(n+1)^2},\end{aligned} \tag{12}$$

(12) 两边取数学期望后，

$$E(X_{n+1}-Y_{n+1})^2 \leq \left[1-\frac{2(1-p)l}{d+mn+m}\right]E(X_n-Y_n)^2 + \frac{4}{(n+1)^2}$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n\left[1-\frac{2(1-p)l}{d+mk+m}\right]=0$ 以及 $\sum_{k=1}^\infty\frac{4}{(n+1)^2}$ 收敛，根据引理 2 可知

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n-Y_n)^2 = 0.$$

同时根据 (12) 可知，$\{(X_n-Y_n)^2+\frac{4}{n},\ n=1,2,...\}$ 为下鞅。由下鞅收敛定理，$(X_n-Y_n)^2+\frac{4}{n}$ 几乎处处收敛，故 $(X_n-Y_n)^2$ 几乎处处收敛。设 $\lim_{n\to\infty}(X_n-Y_n)^2 \overset{\text{a.s.}}{=} Z$，则 $Z\geq 0,\ a.s.$。

另一方面，由控制收敛定理可知 $E(Z)=0$，所以 $Z=0,\ a.s.$。故 X_n-Y_n 几乎处处收敛到 0。

定理 3: 在此罐子模型中，

$$\{X_n+\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\frac{l}{s_k+l}(X_k-Y_k),\ n\geq 1\} \tag{13}$$

以及

$$\{Y_n-\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\frac{m}{t_k+m}(X_k-Y_k),\ n\geq 1\} \tag{14}$$

均为鞅且 X_n 以及 Y_n 均几乎处处收敛。

证明.

根据定理 1 可知，$E(|X_n-Y_n|)$ 的收敛阶在 $\mathcal{O}(n^{-2(1-p)\frac{m}{l}})$ 与 $\mathcal{O}(n^{-2(1-p)\frac{l}{m}})$ 之间，于是有

$$\begin{aligned} E\left[|X_n+\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\frac{l}{s_k+l}(X_k-Y_k)|\right] &\leq 1+\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\frac{l}{s_0+kl+l}E\left(|X_k-Y_k|\right) \\ &\leq 1+\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)\frac{l}{s_0+kl+l}E\left(|X_k-Y_k|\right) \\ &<\infty. \end{aligned} \tag{15}$$

根据 (5)，

$$\begin{aligned} E\left[X_n+\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\frac{l}{s_k+l}(X_k-Y_k)|\mathcal{F}_n\right] &= X_{n-1}-(1-p)\frac{l}{s_{n-1}+l}(X_{n-1}-Y_{n-1}) \\ &\quad +\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\frac{l}{s_k+l}(X_k-Y_k) \\ &= X_{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}(1-p)\frac{l}{s_k+l}(X_k-Y_k). \end{aligned} \tag{16}$$

所以 $\{X_n+\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\frac{l}{s_k+l}(X_k-Y_k),\ n\geq 1\}$ 为鞅，同理 $\{Y_n-\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\frac{m}{t_k+m}(X_k-Y_k),\ n\geq 1\}$ 也为鞅，且根据 Doob 鞅收敛定理，(13) 和 (14) 均几乎处处收敛。

下面证明 $\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\frac{l}{s_k+l}(X_k-Y_k)$ 及 $\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\frac{m}{t_k+m}(X_k-Y_k)$ 几乎处处收敛，从而得到 X_n 和 Y_n 几乎处处收敛。

根据 Jensen 不等式，

$$\begin{aligned} E\left(|X_n-Y_n||\mathcal{F}_n\right) &\geq |E(X_n-Y_n|\mathcal{F}_n)| \\ &= \left[1-(1-p)\left(\frac{l}{s_{n-1}+l}+\frac{m}{t_{n-1}+m}\right)\right]|X_{n-1}-Y_{n-1}|, \end{aligned}$$

所以 $\{W_n \overset{\text{def}}{=} |X_n-Y_n|+\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\left(\frac{l}{s_k+l}+\frac{m}{t_k+m}\right)|X_k-Y_k|, n\geq 1\}$ 为下鞅，另一方面 $E(W_n^+)=E(W_n)<\infty$。根据下鞅收敛定理，$\lim_{n\to\infty}W_n=W$ a.s. 且 $E(W)<\infty$。

又因为 $|X_n - Y_n|$ 几乎处处收敛，所以 $\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\left(\frac{l}{s_k+l}+\frac{m}{t_k+m}\right)|X_k - Y_k|$ 也几乎处处收敛。故 $\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\frac{l}{s_k+l}(X_k - Y_k)$ 及 $\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)\frac{m}{t_k+m}(X_k - Y_k)$ 均几乎处处收敛。

定理 4. A、B 两个罐子中的红球比例 X_n 及 Y_n 的方差均收敛到 0。

证明:

注意到 X_{n+1}^2 的条件数学期望为

$$
\begin{aligned}
&E(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)\\
&=E\left[\left(X_n+\frac{mE_{n+1}(V_{n+1}-X_n)+l(1-E_{n+1})(U_{n+1}-X_n)}{s_{n+1}}\right)^2|\mathcal{F}_n\right]\\
&=X_n^2+2X_n\frac{l(1-p)(Y_n-X_n)}{s_n+l}+\frac{m^2p(\sigma_{1n}^2+X_n^2)}{(s_n+m)^2}+\frac{l^2(1-p)(\sigma_{2n}^2+(Y_n-X_n)^2)}{(s_n+l)^2}. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

又因为

$$
E^2(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)=X_n^2+2X_n\frac{l(1-p)(Y_n-X_n)}{s_n+l}+\frac{l^2(1-p)^2(Y_n-X_n^2)}{(s_n+l)^2},
$$

所以有

$$
\begin{aligned}
Var(X_{n+1})&=E\left[E(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)-E^2(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\right]\\
&=E\left[\frac{m^2p\sigma_{1n}^2}{(s_n+m)^2}+\frac{l^2(1-p)\sigma_{2n}^2}{(s_n+l)^2}+\frac{l^2p(1-p)(X_n-Y_n)^2}{(s_n+l)^2}\right]. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

显然，$Var(X_{n+1})$ 收敛到 0。同理，$Var(Y_{n+1})$ 也收敛到 0。

综上可知，$X_n \to \frac{\beta}{2}$ a.s.，$Y_n \to \frac{\beta}{2}$ a.s.。

4 $R_A(n)$ 与 $R_B(n)$ 的大数定律与中心极限定理

定理 5. 两个罐子中的红球数 $R_A(n)$ 与 $R_B(n)$ 满足

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{R_A(n)}{n}\overset{\text{a.s.}}{=}\frac{mp+l(1-p)}{2}\beta,
$$
$$
\lim_{n\to\infty}\frac{R_B(n)}{n}\overset{\text{a.s.}}{=}\frac{lp+m(1-p)}{2}\beta.
$$

以及

$$
\frac{R_A(n)}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}\mathcal{N}(\frac{\beta(mp+l(1-p))}{2},\frac{\beta^2(m-l)^2p(1-p)}{4}),
$$
$$
\frac{R_B(n)}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}\mathcal{N}(\frac{\beta(lp+m(1-p))}{2},\frac{\beta^2(m-l)^2p(1-p)}{4}).
$$

证明:

已知 $s_n = s_0 + \sum_{i=1}^{n}[mE_i + l(1-E_i)]$。令 $Z_i = mE_i + l(1-E_i)$，则 Z_i，$i = 1, 2..$ 独立同分布，且

$$
E(Z_i) = mp + l(1-p),\ Var(Z_i) = (m-l)^2p(1-p).
$$

根据强大数定律，$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}\overset{\text{a.s.}}{=}mp+l(1-p)$。又因为 $X_n\to\frac{\beta}{2}$ a.s.，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_A(n)}{n}\overset{\text{a.s.}}{=}\frac{mp+l(1-p)}{2}\beta.$$

根据中心极限定理，

$$\frac{s_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}\mathcal{N}(mp+l(1-p),(m-l)^2p(1-p)),$$

由 Slutsky 定理可知，

$$\frac{R_A(n)}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}\mathcal{N}(\frac{\beta(mp+l(1-p))}{2},\frac{\beta^2(m-l)^2p(1-p)}{4}).$$

同理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_B(n)}{n}\overset{\text{a.s.}}{=}(lp+m(1-p))Z,$$
$$\frac{R_B(n)}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}\mathcal{N}(\frac{\beta(lp+m(1-p))}{2},\frac{\beta^2(m-l)^2p(1-p)}{4}).$$