

# Rapport du Projet TP 1

Yakine Rachedi

30 Décembre 2023

Le projet 1 de travaux pratiques 4MA006, "Fondements des méthodes numériques", présenté dans ce rapport, se concentre sur l'exploration appliquée de l'équation Fisher-Kolmogorov-Petrovski-Piskunov dans le domaine 1D à l'aide de la méthode des différences finies. La première partie du projet consiste à discrétiser cette équation en utilisant le schéma d'Euler implicite en temps. Cela conduit à un problème non linéaire de la forme

$$F(U^{n+1}) + C^{te} [U^{n+1}]^2 = U^n$$

Afin de simplifier la résolution, nous transformons ce problème en un cas linéaire en introduisant un schéma alternatif pour la discrétisation temporelle.

Dans la deuxième partie, l'approche adoptée implique la division de la résolution du problème en plusieurs étapes en utilisant le splitting de Strang. Enfin, une étude approfondie de la convergence et une comparaison des résultats obtenus pour ces deux parties sont menées.

Cette démarche vise à approfondir notre compréhension des équations d'évolution, en mettant l'accent sur l'équation Fisher-Kolmogorov-Petrovski-Piskunov, et à évaluer l'efficacité des méthodes numériques appliquées, en particulier la méthode des différences finies, dans ce contexte spécifique. Les sections suivantes détailleront chacune de ces phases, mettant en lumière les choix méthodologiques, les résultats obtenus, et les observations importantes découlant de cette analyse.

## Problème FKPP

Soit l'équation FKPP définie sur  $\bar{\Omega} = [0, 1]$  par :

$$\begin{cases} \partial_t u = \nu \partial_{xx}^2 u + \gamma u(1 - u) & \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ u(x, 0) = u_0(x) = 0.25 \sin(\pi x) \exp(-20(x - 0.5)^2) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\gamma = 10$  le coefficient de réaction,  $\nu = 0.01$  le coefficient de diffusion.

## Discretisation temporelle

Division de l'intervalle de temps  $[0, 1]$  en  $N_t + 1$  points avec un pas  $\Delta t = \frac{1}{N_t}$ , ( $t_n = n\Delta t$ ). Le schéma d'Euler implicite en temps est donné par :

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t_{n+1}) &= \frac{u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)}{\Delta t} \\ \Rightarrow \partial_t u^{n+1} &= \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \end{aligned}$$

avec  $u^n(x) \approx \overline{u^n(x)} = u(x, t_n)$

On remplace dans (FKPP) le problème peut s'écrire sous la forme  $F(u^{n+1}) = u^n$

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} &= \nu \partial_{xx}^2 u^{n+1} + \gamma u^{n+1} (1 - u^{n+1}) \\ u^{n+1} - \Delta t \nu \partial_{xx}^2 u^{n+1} - \Delta t \gamma u^{n+1} + \Delta t \gamma (u^{n+1})^2 &= u^n \end{aligned} \quad (2)$$

l'équation (2) est une équation non linéaire, pour simplifier la méthode de résolution, on introduit le schéma suivant :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \nu \partial_{xx}^2 u^{n+1} + \gamma u^{n+1} - \gamma u^n u^{n+1} \quad (3)$$

qui est équivalent à :

$$u^{n+1} - \Delta t \nu \partial_{xx}^2 u^{n+1} - \Delta t \gamma u^{n+1} + \Delta t \gamma u^n u^{n+1} = u^n \quad (4)$$

# Solution Exercice 1

## Discrétisation en espace

on discrétise  $\Omega$  en  $N_x + 2$  points  $\{x_j\}_{0 \leq j \leq N_x+1}$  avec un pas  $\Delta x = h = \frac{1}{N_x+1}$

$\overline{U}_h^{n+1}$  : Le vecteur de la solution exacte

$U_h^{n+1}$  : Le vecteur de la solution approchée

La formule des différences finies centrées d'ordre 2 de  $u(x_j, t_{n+1})$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\partial_{xx}^2 u(x_j, t_{n+1}) &= \frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t_{n+1})}{h^2} \\ \Rightarrow \partial_{xx}^2 u_j^{n+1} &= \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}\end{aligned}$$

(4) est équivalent à :

$$\begin{aligned}u_j^{n+1} - \Delta t \nu \left[ \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \right] - \Delta t \gamma u_j^{n+1} + \Delta t \gamma u_j^n u_j^{n+1} &= u_j^n + F \\ \left[ 1 + \frac{2\Delta t \nu}{h^2} + \gamma \Delta t \right] u_j^{n+1} - \frac{\Delta t \nu}{h^2} u_{j+1}^{n+1} - \frac{\Delta t \nu}{h^2} u_{j-1}^{n+1} + \Delta t \gamma u_j^n u_j^{n+1} &= u_j^n + F\end{aligned}\quad (5)$$

donc (5) est équivalent à :

$$(A + B^n)U^{n+1} = U^n + F$$

avec  $F \in \mathbb{R}^{N_x}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_t}$  définie par :

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{2\Delta t \nu}{h^2} + \gamma \Delta t & -\frac{\Delta t \nu}{h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\Delta t \nu}{h^2} & 1 + \frac{2\Delta t \nu}{h^2} + \gamma \Delta t - \frac{\Delta t \nu}{h^2} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & -\frac{\Delta t \nu}{h^2} & 1 + \frac{2\Delta t \nu}{h^2} + \gamma \Delta t & -\frac{\Delta t \nu}{h^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{\Delta t \nu}{h^2} & 1 + \frac{2\Delta t \nu}{h^2} + \gamma \Delta t & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\Delta t \nu}{h^2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\Delta t \nu}{h^2} & 1 + \frac{2\Delta t \nu}{h^2} + \gamma \Delta t \end{bmatrix}$$

et  $B^n \in \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_t}$  définie par :

$$\begin{bmatrix} \Delta t \gamma u_j^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta t \gamma u_j^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta t \gamma u_j^n \end{bmatrix}$$

## Résultats Graphiques

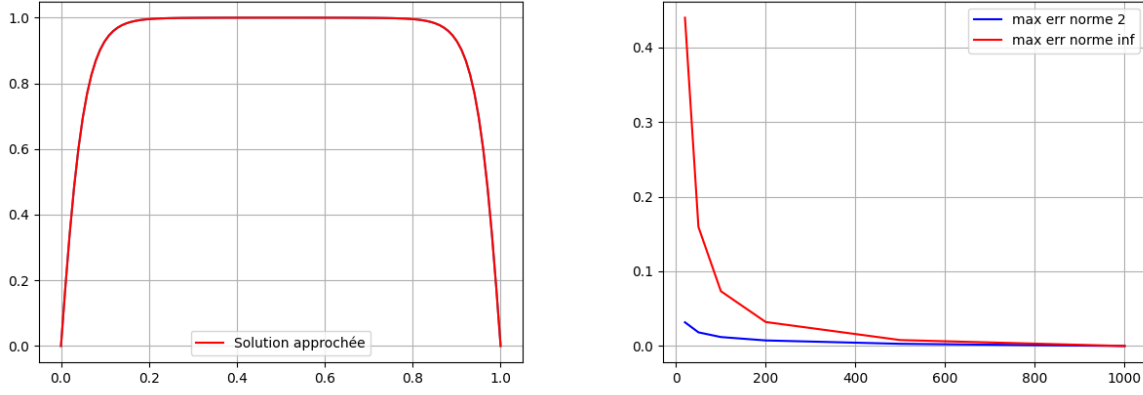


Figure 1: Graphes de la solution approchée par le schéma (5) et la courbe d'erreur en norme  $\|\cdot\|_{2,\Delta}$  et  $\|\cdot\|_{\infty,\Delta}$

## Solution Exercice 2

L'exercice 2 se concentre sur la décomposition du problème d'évolution en plusieurs étapes en utilisant le splitting de Strang.

étape 1 : 1/2 pas de diffusion

$$\frac{u^{n+\frac{1}{3}} - u^n}{\frac{\Delta t}{2}} = \nu \partial_{xx}^2 u^{n+\frac{1}{3}}$$

étape 2 : suivi par un pas de réaction

$$\frac{u^{n+\frac{2}{3}} - u^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta t} = \gamma u^{n+\frac{2}{3}} \left(1 - u^{n+\frac{2}{3}}\right)$$

étape 3 : suivi par 1/2 pas de diffusion

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{2}{3}}}{\frac{\Delta t}{2}} = \nu \partial_{xx}^2 u^{n+1}$$

Le schéma discret par des différences finies centrées :

$$\begin{aligned} \partial_{xx}^2 u_j^{n+\frac{1}{3}} &= \frac{u_{j+1}^{n+\frac{1}{3}} + 2u_j^{n+\frac{1}{3}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} \\ \partial_{xx}^2 u^{n+1} &= \frac{u_{j+1}^{n+1} + 2u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

l'étape 1 est équivalente à

$$\left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right] u_j^{n+\frac{1}{3}} + \left[\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\nu\right] u_{j+1}^{n+\frac{1}{3}} + \left[\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\right] u_{j-1}^{n+\frac{1}{3}} = u_j^n$$

l'étape 2 est équivalente à

$$u_j^{n+\frac{2}{3}} \left[1 - \Delta t \gamma + \Delta t \gamma u_j^{n+\frac{2}{3}}\right] = u_j^{n+\frac{1}{3}}$$

l'étape 3 est équivalente à

$$\left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right] u_j^{n+1} + \left[\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\nu\right] u_{j+1}^{n+1} + \left[\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}\right] u_{j-1}^{n+1} = u_j^{n+\frac{2}{3}}$$

## Résultats Graphiques

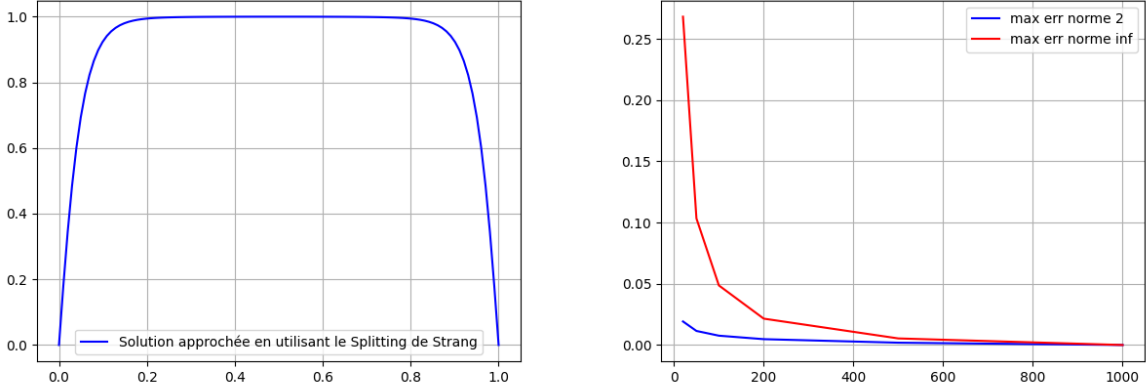


Figure 2: Graphes de la solution approchée par le splitting de Strang et la courbe d'erreur en norme  $\|\cdot\|_{2,\Delta}$  et  $\|\cdot\|_{\infty,\Delta}$

## Conclusion

Après avoir résolu les deux exercices et appliqué deux méthodes différentes, l'une basée sur le schéma d'Euler implicite, qui transforme un problème non linéaire en un problème linéaire pour son application, et l'autre consistant à diviser la méthode en trois parties sans modification du problème. Bien que l'erreur en norme *max* soit un peu élevée par rapport à la norme 2, les deux normes tendent vers 0 lorsque les valeurs de  $N_t$  augmentent.

Selon les résultats graphiques, la deuxième méthode génère des valeurs d'erreur plus petites que la première méthode. Ainsi, je choisis la deuxième méthode.