4M006 : Fondements des méthodes numériques
Projet : partie II

Exercice 1 Il s'agit d'illustrer numériquement des résultats du cours sur l'approximation d'une fonction par des fonctions affines par morceaux. Soit $I =]0,1[$ et $(I_i)_{i=1}^n$ un partition uniforme de I de finesse h. On désigne par V_h l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}(\bar{I})$ dont la restriction à chaque I_i est affine. On note $\pi_h u$ la projection d'une fonction continue u sur V_h. On considère des fonctions u "nulles au bord", *i.e.* $u(0) = 0$ et $u(1) = 0$.

1. On pose $u(x) = \sin(\pi x)$. Tracer la courbe $h \longmapsto e_h = \|u - \pi_h u\|_{L^2(I)}$. Tracer la même courbe en échelle "log-log" (`plt.loglog(···)`). En déduire que, pour h petit, $e_h = \mathcal{O}(h^p)$ pour un certain nombre p à déterminer.
2. Toujours pour $u(x) = \sin(\pi x)$, tracer la courbe $h \longmapsto \|u' - (\pi_h u)'\|_{L^2(I)}$ et en déduire la décroissance de l'erreur en fonction de h.

Exercice 2 On considère le problème suivant. Trouver $u : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ solution du problème aux limites

$$-\varepsilon u'' + \lambda u' = 1 \quad \text{dans }]0,1[\tag{1}$$

et vérifiant les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{2}$$

λ et $\varepsilon > 0$ sont des nombres réels.

1. **Discrétisation uniforme**
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = 1/(n+1)$ et on considère la discrétisation uniforme : $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, n+1$.
   (a) Écrire une formulation variationnelle du problème (1)-(2) utilisant des éléments finis P_1.
   (b) On note $U^h = (u_1^h, \dots, u_n^h)^T$ le vecteur dont les composantes sont les inconnues, *i.e.* les valeurs u_i^h, approximations des $u(x_i)$ aux points internes du maillage. Montrer que U^h est solution d'un système linéaire

$$A_h U^h = f_h \tag{3}$$

   dont on précisera la matrice A_h et le second membre f_h.

(c) Pour $\varepsilon = 1$ et $\lambda = 1$, représenter graphiquement (pour différentes valeurs de n) la solution obtenue en résolvant le système (3). Représenter sur le même graphique la solution exacte.

(d) Commenter les résultats obtenus pour $\lambda = 1$ et $\varepsilon \in \{1, 0.1, 0.01\}$.

2. **Discrétisation non uniforme**
On fixe $\varepsilon = 0.01$ et $\lambda = 1$. Définir une grille non uniforme $(x_i)_{i=0}^{n+1}$, fine dansla zone de "fort gradient" où la solution varie brusquement et grossière dans la zone où la solution varie lentement. Calculer la solution nuérique obtenue en utilisant cette grille. Comparer les résulats avec ceux obtenus à la question 1d.

Exercice 3 On reprend le problème de l'exercice 2 sous une forme plus générale.

$$-\varepsilon u'' + \lambda u' = f(x) \quad \text{dans} \quad]a, b[\tag{4}$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta, \tag{5}$$

où α et β sont deux réels donnés et $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.

1. Expliquer ce que sont la matrice A_h et le vecteur f_h dans (3).
2. Proposer une ou des méthodes pour calculer les composantes du vecteur f_h.
3. On fixe $(\varepsilon, \lambda) = (1, 0.5)$, $(a, b) = (0, 4), (\alpha, \beta) = (8, 0)$ et $f(x) = 4 + 2(4 - x)e^{x/2}$. Tracer la solution obtenue pour différentes valeurs de n.