# Rapport Projet II : Elements finis

Yakine RACHEDI

30 Décembre 2023

Le projet 2 des travaux pratiques du cours 4MA006, "Fondements des méthodes numériques", abordé dans ce rapport, se concentre sur la méthode des éléments finis. Il est divisé en trois exercices. Le premier exercice porte sur l'approximation de la fonction $\sin(\pi x)$ à l'aide de fonctions affines par morceaux, ainsi que sur l'estimation de la norme de l'espace de Sobolev $H^1$ définit par : $\|u\|^2_{H^1(I)} = \|u\|^2_{L^2(I)} + \|u'\|^2_{L^2(I)}$, l'analyse de la fonction et de son interpolée, ainsi que le tracé de la courbe d'erreur.

Le deuxième exercice se focalise sur un cas particulier d'un problème aux limites où le second membre est égal à 1. Il comprend deux parties : la première avec une discrétisation à pas uniforme et la deuxième avec un pas non uniforme, en variant les valeurs des constantes epsilon et lambda.

Le troisième exercice consiste à répondre à la problématique du deuxième exercice dans le cas général, incluant une implémentation avec un second membre non constant. Une méthode de quadrature est utilisée pour résoudre ce problème théoriquement (sur papier). Il peut également être résolu à l'aide de la bibliothèque SciPy en faisant appel à la fonction integrate.quad

Ensuite, une mise en œuvre informatique est réalisée, en utilisant des valeurs exactes.

# Solution Exercice 1

on cherche à estimer la norme de l'espace de Sobolev $H^1(I)$, pour cela on estime l'erreur $h \longmapsto e_h = \|u - \Pi_h u\|_{L^2(I)}$ et $h \longmapsto \|u' - (\Pi_h u)'\|_{L^2(I)}$ avec $\Pi_h u$ est l'interpolée de $u(x) = \sin(\pi x)$ tel que

$$\Pi_h u(x) = u(x_i)\left[\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right] + u(x_{i+1})\left[\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right]$$

on a vu que

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_i u\|_{L^2(I_i)} &\leq h^2 \|u''\|_{L^2(I_i)} \\ \|u' - (\Pi_i u)'\|_{L^2(I_i)} &\leq h \|u''\|_{L^2(I_i)} \end{aligned}$$

tel que $I|_{[x_i, x_{i+1}]} = I_i$

ce qui donne $e_h = o(h^2)$ qui tend vers 0 lorsque $h \longrightarrow 0$ les résultats graphiques par *quad* de la question 1 et 2 :

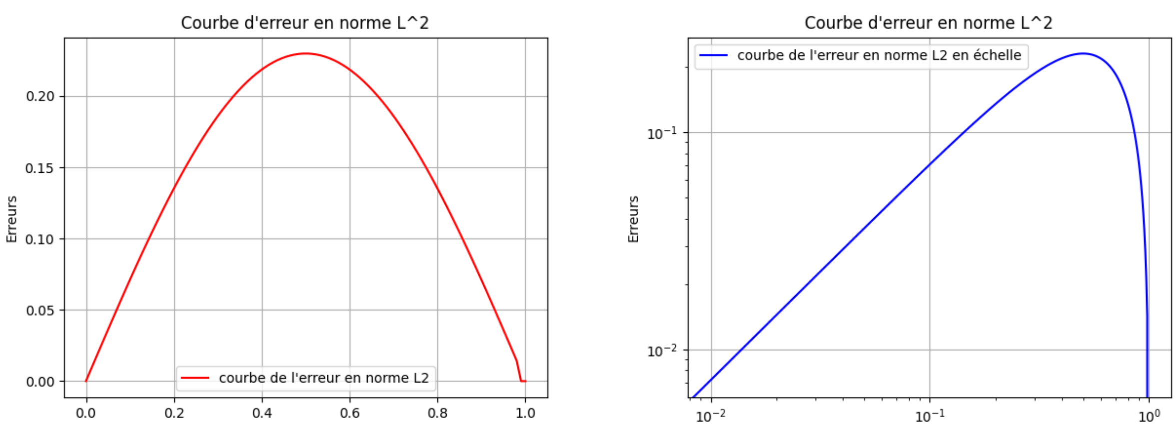



Figure 1: Graphes de l'erreur $\|u - \Pi_i u\|_{L^2(I_i)}$

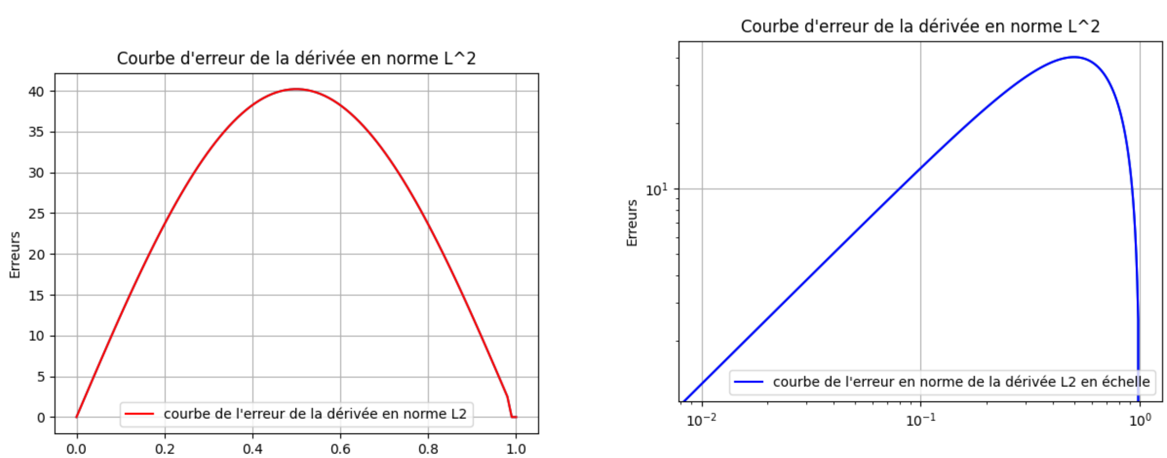



Figure 2: Graphes de l'erreur $\|u' - (\Pi_i u)'\|_{L^2(I_i)}$

Résultats graphiques des mêmes questions en utilisant l'intégration numérique par la méthode des rectangles à gauche, donnée par la formule suivante :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\, dx = (a_{i+1} - a_i)\, f(a_i)$$

avec $[a_i, a_{i+1}]$ est la subdivision de la subdivision de chaque $[x_i, x_{i+1}]$ avec un pas locale $h_{loc} = \frac{h_{glob}}{N}$
la variable x_global est $x_i$
la variable x_next est $x_{i+1}$
la variable x_local est $a_i$

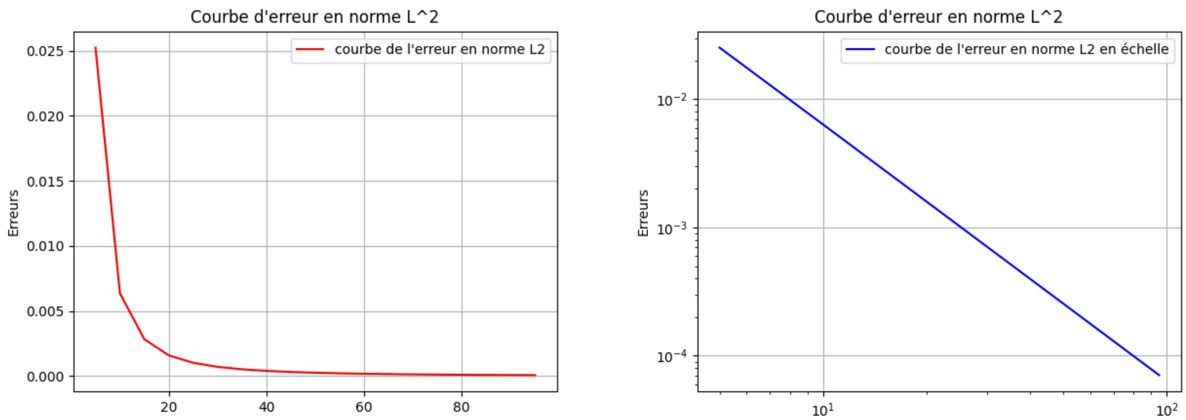



Figure 3: Graphes de l'erreur $\|u - \Pi_i u\|_{L^2(I_i)}$

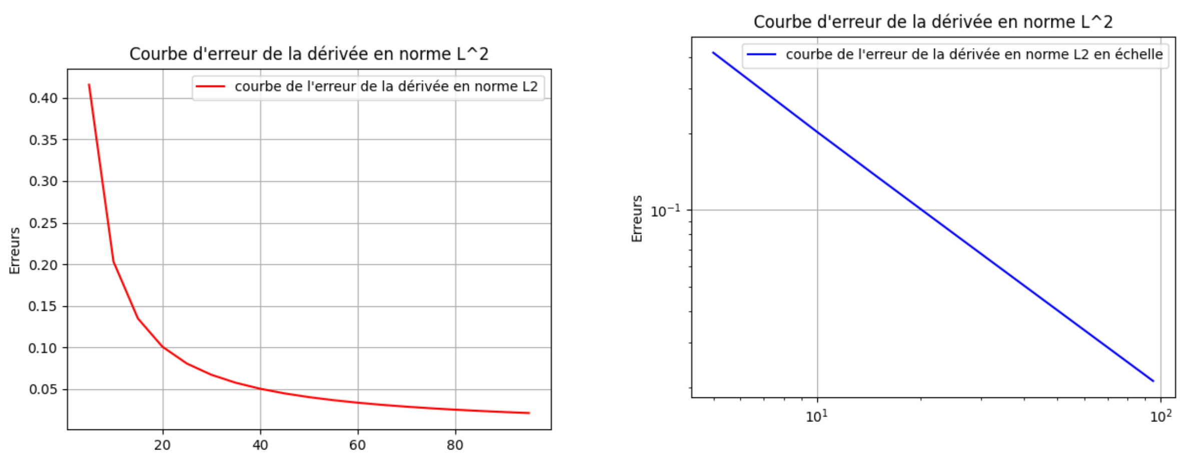



Figure 4: Graphes de l'erreur $\|u' - (\Pi_i u)'\|_{L^2(I_i)}$

## Solution Exercice 2

$$\begin{cases} \text{Trouver } u : [0;1] \longmapsto \mathbb{R} \\ -\varepsilon u'' + \lambda u' = 1 \quad \text{dans } [0;1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

avec $\varepsilon, \lambda$ sont deux réels strictement positifs.

### Discritisation uniforme

$\forall n \in \mathbb{N}^*, h = \frac{1}{n+1}$ le pas de la discritisation définit par : $x_i = ih, \forall i = 0, ..., n+1$

La formulation variationnelle : En multipliant par une fonction test $v$ et en intégrant par parties. $(P)$ est équivalent à

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_0^1 u''v + \lambda \int_0^1 u'v &= \int_0^1 v \\ \varepsilon \int_0^1 u'v' - \underbrace{[u'v]_0^1}_{v(0)=vv(1)=0} + \lambda \int_0^1 u'v &= \int_0^1 v \end{aligned}$$

donc le problème variationnelle est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1([0;1]) \text{ tel que :} \\ a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1([0;1]) \\ a(u,v) = \varepsilon \int_0^1 u'v' + \lambda \int_0^1 u'v \\ l(v) = \int_0^1 v \end{cases}$$

**Méthode de Galerkin :**

On cherche une approximation de la solution $u \in H_0^1([0;1])$ par la méthode des éléments finis $P_1$, pour cela on introduit l'espace de dimension finie $V^h$ définit par

$$V^h := \left\{ v \in C^0([0,1]) \quad v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1 \ (v \text{ est affine sur } I_i) \text{ et } v(0) = v(1) = 0 \right\} \subset H_0^1([0,1])$$

$Dim\left(V^h\right) = n$

dont la base est les fonctions chapeaux $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ définies par :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [x_{i-1}; x_{i+1}] \\ \frac{x - x_{i-1}}{h} \text{ si } x \in [x_{i-1}; x_i] \\ \frac{x_{i-1} - x}{h} \text{si } x \in [x_i; x_{i+1}] \end{cases}$$

et

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [x_{i-1}; x_{i+1}] \\ \frac{1}{h} \text{ si } x \in [x_{i-1}; x_i] \\ \frac{-1}{h} \text{si } x \in [x_i; x_{i+1}] \end{cases}$$

$\forall u_h \in V^h$ :

$$u_h = \sum_{i=1}^n u^h(x_i)\varphi_i(x)$$

et comme $v_h \in V^h$ on prend $v_h := \varphi_j$ pour $j = 1, ..., n$
On remplace dans le problème variationnelle on aura un problème de Galerkin :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V^h \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
a\left(\sum_{i=1}^{n} u^h(x_i)\varphi_i, \varphi_j\right) &= l(\varphi_j) \qquad j=1,...,n \\
\sum_{i=1}^{n} u^h(x_i)\; a(\varphi_i,\varphi_j) &= l(\varphi_j) \qquad j=1,...,n
\end{aligned}
$$

qui est un systeme d'équations linéaires $(n\times n)$ avec $A := a(\varphi_i(x),\varphi_j)$ est la matrice de Rigidité, $U^h = (u_1^h,...,u_n^h)^T$ le vecteur inconnue et $f_h := (l(\varphi_1),...,l(\varphi_n))^T$

avec $A$ est une matrice tridiagonale : $\forall j=1,...,n$

$$
\begin{aligned}
supp\varphi_{j-1}\cap supp\varphi_j &\Longrightarrow x\in[x_{i-1};x_i] \\
supp\varphi_j\cap supp\varphi_{j+1} &\Longrightarrow x\in[x_i;x_{i+1}] \\
supp\varphi_j\cap supp\varphi_j &= supp\varphi_j \Longrightarrow x\in[x_{i-1};x_i]\cup[x_i;x_{i+1}] \\
supp\varphi_{j-1}\cap supp\varphi_{j+1} &= \varnothing
\end{aligned}
$$

Calcul des éléments de la matrice $A$ :

$$
a(\varphi_j,\varphi_j) = \varepsilon\int_{supp\varphi_j}\left(\varphi_j'\right)^2 dx + \lambda\int_{supp\varphi_j}\varphi_j'\varphi_j dx
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\int_{supp\varphi_j}\left(\varphi_j'\right)^2 dx &= \varepsilon\int_{x_{j-1}}^{x_j+1}\left(\varphi_j'\right)^2 = \varepsilon\left[\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(\varphi_j'\right)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}}\left(\varphi_j'\right)^2 dx\right] \\
&= \varepsilon\left[\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{1}{h^2}dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{1}{h^2}dx\right] = \varepsilon\left[\frac{x_j-x_{j-1}}{h^2} + \frac{x_{j+1}-x_j}{h^2}\right] \\
&= \frac{2\varepsilon}{h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda\int_{supp\varphi_j}\varphi_j'\varphi_j dx &= \lambda\int_{x_j-1}^{x_{j+1}}\varphi_j'\varphi_j dx = \lambda\left[\int_{x_{j-1}}^{x_j}\varphi_j'\varphi_j dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}}\varphi_j'\varphi_j dx\right] \\
&= \lambda\left[\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{x-x_{j-1}}{h^2}dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{x-x_{j+1}}{h^2}dx\right] \\
&= \frac{\lambda}{h}\left[\frac{(x-x_{j-1})^2}{2h} - \frac{(x-x_{j+1})^2}{2h}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow a(\varphi_j,\varphi_j) = \frac{2\varepsilon}{h}
$$

$$
a(\varphi_{j-1},\varphi_j) = \varepsilon\int_{supp\varphi_{j-1}\cap supp\varphi_j}\varphi_{j-1}'\varphi_j' dx + \lambda\int_{supp\varphi_{j-1}\cap supp\varphi_j}\varphi_{j-1}'\varphi_j dx
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\int_{supp\varphi_{j-1}\cap supp\varphi_j}\varphi_{j-1}'\varphi_j' dx &= \varepsilon\int_{x_{j-1}}^{x_j}\varphi_{j-1}'\varphi_j' dx \\
&= \varepsilon\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left[\frac{-1}{h}\frac{1}{h}\right]dx = \varepsilon\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{-1}{h^2}dx \\
&= \frac{-\varepsilon}{h}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{supp\varphi_{j-1}\cap supp\varphi_j} \varphi'_{j-1}\varphi_j dx &= \lambda \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'_{j-1}\varphi_j \\
&= \lambda \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{-1}{h}\frac{x-x_{j-1}}{h} dx = \lambda \left[\frac{x-x_{j-1}}{h^2}\right]_{x_{j-1}}^{x_j} \\
&= \frac{-\lambda}{2}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow a\left(\varphi_{j-1},\varphi_j\right) = -\frac{\varepsilon}{h} - \frac{\lambda}{2}$$

$$a\left(\varphi_{j+1},\varphi_j\right) = \varepsilon \int_{supp\varphi_j\cap supp\varphi_{j+1}} \varphi'_{j+1}\varphi'_j dx + \lambda \int_{supp\varphi_j\cap supp\varphi_{j+1}} \varphi'_{j+1}\varphi_j dx$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_{supp\varphi_j\cap supp\varphi_{j+1}} \varphi'_{j+1}\varphi'_j dx &= \varepsilon \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi'_{j+1}\varphi'_j dx = \varepsilon \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{-1}{h^2} \\
&= -\frac{\varepsilon}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{supp\varphi_j\cap supp\varphi_{j+1}} \varphi'_{j+1}\varphi_j dx &= \lambda \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi'_{j+1}\varphi_j dx \\
&= \lambda \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(-\frac{1}{h}\frac{x_{j+1}-x}{h}\right) \\
&= \frac{-\lambda}{h^2}\left[\frac{\left(x_{j+1}-x\right)^2}{2}\right]_{x_j}^{x_{j+1}} \\
&= \frac{\lambda}{2}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow a\left(\varphi_{j+1},\varphi_j\right) = -\frac{\varepsilon}{h} + \frac{\lambda}{2}$$

donc

$$A = \begin{bmatrix}
\frac{2\varepsilon}{h} & -\frac{\varepsilon}{h}+\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-\frac{\varepsilon}{h}-\frac{\lambda}{2} & \frac{2\varepsilon}{h} & -\frac{\varepsilon}{h}+\frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\
0 & -\frac{\varepsilon}{h}-\frac{\lambda}{2} & \frac{2\varepsilon}{h} & -\frac{\varepsilon}{h}+\frac{\lambda}{2} & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{h}-\frac{\lambda}{2} & \frac{2\varepsilon}{h} & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\varepsilon}{h}+\frac{\lambda}{2} \\
0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\varepsilon}{h}-\frac{\lambda}{2} & \frac{2\varepsilon}{h}
\end{bmatrix}$$

$$l\left(\varphi_j\right) = \begin{pmatrix} l\left(\varphi_1\right) \\ l\left(\varphi_2\right) \\ \vdots \\ l\left(\varphi_n\right) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
l\left(\varphi_j\right) &= \int_{supp\varphi_j} \varphi_j dx = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \varphi_j dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j dx \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{x - x_{j-1}}{h} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{x_{j+1} - x}{h} dx \\
&= \left[\frac{\left(x - x_{j-1}\right)^2}{2h}\right] + \left[\frac{\left(x_{j+1} - x\right)^2}{2h}\right] \\
&= \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \\
&= h
\end{aligned}
$$

$$
l\left(\varphi_j\right) = \begin{pmatrix} h \\ h \\ \vdots \\ h \end{pmatrix}
$$

## Discritisation non uniforme

$\forall n \in \mathbb{N}^*, h = \frac{1}{n+1}$ le pas de la discritisation définit par : $x_i = (ih)^{\frac{1}{2}}, i = 0, ..., n+1 Laformulationvariationnelleestlamêmeque$

**Méthode de Galerkin :**

On cherche une approximation de la solution $u \in H_0^1\left([0;1]\right)$ par la méthode des éléments finis $P_1$, pour cela on introduit l'espace de dimension finie $V^h$ definit par

$$
V^h := \left\{v \in C^0\left([0,1]\right) \quad v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1 \ (v \text{ est affine sur } I_i) \text{ et } v\left(0\right) = v\left(1\right) = 0\right\} \subset H_0^1\left([0,1]\right)
$$

$Dim\left(V^h\right) = n$

Les fonctions chapeaux $\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^n$ définies par :

$$
\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [x_{i-1}; x_{i+1}] \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \text{ si } x \in [x_{i-1}; x_i] \\ \frac{x_{i-1} - x}{x_{i+1} - x_i} \text{si } x \in [x_i; x_{i+1}] \end{cases}
$$

et

$$
\varphi_i'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [x_{i-1}; x_{i+1}] \\ \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \text{ si } x \in [x_{i-1}; x_i] \\ \frac{-1}{x_{i+1} - x_i} \text{si } x \in [x_i; x_{i+1}] \end{cases}
$$

$\forall u_h \in V^h$ :

$$
u_h = \sum_{i=1}^n u^h(x_i)\varphi_i(x)
$$

et comme $v_h \in V^h$ on prend $v_h := \varphi_j$ pour $j = 1, ..., n$
On remplace dans le problème de Galerkin on aura :

$$
\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V^h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = l\left(v_h\right) \quad \forall v_h \in V^h \end{cases}
$$

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{i=1}^{n} u^h(x_i)\varphi_i, \varphi_j\right) &= l\left(\varphi_j\right) \qquad j=1,...,n \\ \sum_{i=1}^{n} u^h(x_i)\ a\left(\varphi_i, \varphi_j\right) &= l\left(\varphi_j\right) \qquad j=1,...,n \end{aligned}$$

qui est un systeme d'équations linéaires $(n \times n)$ avec $A^* := a\left(\varphi_i(x), \varphi_j\right)$ est la matrice de Rigidité, $U^h = (u_1^h, ..., u_n^h)^T$ le vecteur inconnue et $f_h := \left(l\left(\varphi_1\right), ..., l\left(\varphi_n\right)\right)^T$

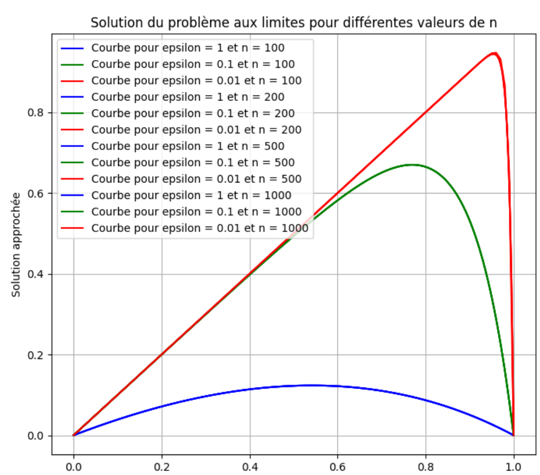
avec $A^*$ est une matrice tridiagonale : $\forall j = 1, ..., n$

De la meme maniere le calcul des éléments de la matrice $A$ :

$$\begin{aligned} a\left(\varphi_j, \varphi_j\right) &= \varepsilon\left[\frac{1}{x_j - x_{j-1}} + \frac{1}{x_{j+1} - x_j}\right] \\ a\left(\varphi_{j+1}, \varphi_j\right) &= -\frac{\varepsilon}{x_{j+1} - x_j} + \frac{\lambda}{2} \\ a\left(\varphi_{j-1}, \varphi_j\right) &= -\frac{\varepsilon}{x_j - x_{j-1}} - \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

$$l\left(\varphi_j\right) = \frac{x_j - x_{j-1}}{2} + \frac{x_{j+1} - x_j}{2}, \quad j = 1, ..., n$$

**Résultats graphiques**



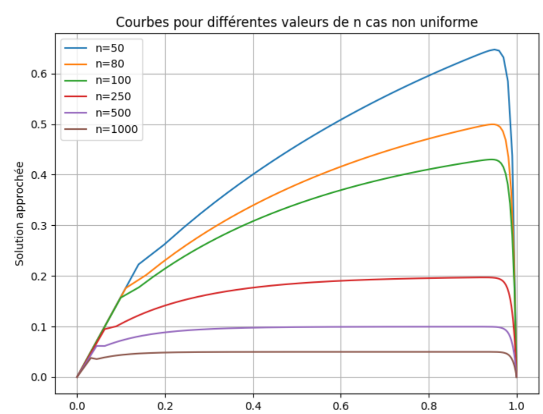




Figure 5: Graphes de la solution approchée pour différentes valeurs de n et de epsilon dans les deux cas

## Solution exercice 3

on prend le cas général de l'exercice 2

$$\begin{cases} \text{Trouver } u : [0;1] \longmapsto \mathbb{R} \\ -\varepsilon u'' + \lambda u' = f(x) \ \text{ dans } \ [0;1] \\ u(a) = \alpha \ \in \mathbb{R} \\ u(b) = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec $f : [0;1] \longmapsto \mathbb{R}$

la formulation variationelle de ce problème c'est comme dans le probleme de l'exercice 2 sauf que ici il y a des conditions de Dirichlet non homogenes donc ça donne :

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_a^b u''v + \lambda \int_a^b u'v &= \int_a^b fv \\ \varepsilon \int_a^b u'v' - [u'v]_a^b + \lambda \int_a^b u'v &= \int_a^b fv \\ \varepsilon \int_a^b u'v' + \lambda \int_a^b u'v &= \int_a^b fv - v(a)u'(a) + v(b)u'(b) \end{aligned}$$

Le problème variationelle est donc

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1([a;b]) \ \text{ tel que :} \\ a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H^1([a;b]) \\ a(u,v) = \varepsilon \int_a^b u'v' + \lambda \int_a^b u'v \\ l(v) = \int_a^b fv - v(a)u'(a) + v(b)u'(b) \end{cases}$$

Pour simplifier le problème variationelle et le rend homogène on introduit un relèvement $\overline{u} = u + g$ tel que $g$ est une fonction " suffisamment régulière " de sorte que $\overline{u}$ satisfait le problème continu avec les conditions aux limites homogènes

On pose

$$g(x) = \alpha \frac{b-x}{b-a} \beta \frac{x-a}{b-a}$$

on obtient un nouveau problème homogène

$$\begin{cases} -\varepsilon \overline{u}'' + \lambda \overline{u}' = f \ + \lambda g' \\ \overline{u}(0) = \overline{u}(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a(\overline{u}, v) &= \varepsilon \int_a^b \overline{u}'v' + \lambda \int_a^b \overline{u}'v \\ \bar{l}(v) &= \int_a^b \left[4 + 2(4-x)e^{\frac{x}{2}}\right] v + \lambda \int_a^b \left[\frac{\alpha - \beta}{b-a}\right] v \end{aligned}$$

De la même manière, en introduisant la base des fonctions chapeaux, on trouve

$$\bar{l}(\varphi_j) = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left[4 + 2(4-x)e^{\frac{x}{2}}\right] \varphi_j dx + \lambda \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left[\frac{\alpha - \beta}{b-a}\right] \varphi_j dx$$

$$\begin{aligned}\bar{l}\left(\varphi_j\right) &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left[4 + 2\left(4 - x\right) e^{\frac{x}{2}}\right] \varphi_j dx \\ &\quad + \lambda \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left[\frac{\alpha - \beta}{b - a}\right] \varphi_j dx \\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

$I_1$ est calculable à partir des méthodes de quadratures telles que la méthode des trapèzes, Simpson ou Gauss. Dans mon cas, j'ai utilisé la fonction `quad` de la bibliothèque SciPy.

$$\begin{aligned}I_1 = &\int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[4 + 2\left(4 - x\right) e^{\frac{x}{2}}\right] \left[\frac{x - x_{j-1}}{h}\right] dx \\ &+ \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[4 + 2\left(4 - x\right) e^{\frac{x}{2}}\right] \left[\frac{x_{j+1} - x}{h}\right] dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \lambda \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left[\frac{\alpha - \beta}{b - a}\right] \varphi_j dx \\ &= \lambda \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left[\frac{\alpha - \beta}{b - a}\right] \left[\frac{x - x_{j-1}}{h}\right] dx \\ &\quad + \lambda \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\frac{\beta - \alpha}{b - a}\right] \left[\frac{x - x_{j+1}}{h}\right] dx \\ &= \lambda h \left[\frac{\alpha - \beta}{b - a}\right]\end{aligned}$$

## Résultats graphiques

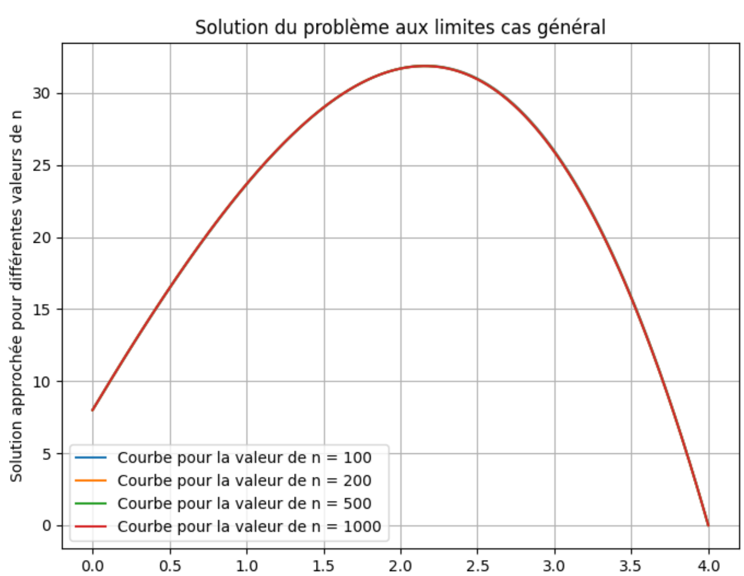



Figure 6: Graphes de la solution approchée