Méthode du gradient à pas fixe

Soit un entier $n \geq 2$ et $h = \frac{1}{(n+1)}$. On se donne un vecteur $f \in \mathbb{R}^n$ et on considère l'application $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(u) = \frac{1}{2h} \sum_{i=0}^{n} (u_{i+1} - u_i)^2 - h \sum_{i=1}^{n} u_i f_i,$$

où $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0$.

On écrit le problème sous la forme :

$$J(x) = \frac{1}{2h} \langle Ax, x \rangle - h \langle b, x \rangle$$

Avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la valeur maximale de τ pour avoir une convergence il faut étudier la constante de Lipschitz du gradient de J :

$$\nabla J(u) = \frac{Au}{h} - hb$$

Ainsi on a :

$$\|\nabla J(u_1) - \nabla J(u_2)\| = \|\frac{A(u_1 - u_2)}{h}\| \leq \frac{\|A\|}{h} \|u_1 - u_2\|$$

A est évidemment continue car on est en dimension finie, et si on prend la norme euclidienne, on a $\|A\| = \rho(A) = 2$ (sa plus grande valeur propre)

On a donc la condition $\tau < \frac{2}{\frac{2}{h}} \Leftrightarrow \tau < h$ (cette condition est bien optimale car la on a la constante de Lipschitz optimale). Il faut aussi $\tau > 0$ évidemment.

La valeur du pas optimale est donnée par :

$$\tau_{opt}(x) = \frac{\|\nabla J(x)\|^2}{\nabla J(x)^T Hess(J)(x) \nabla J(x)} \Leftrightarrow \tau_{opt} = \frac{\|\nabla J(x)\|^2}{\nabla J(x)^T \frac{A}{h} \nabla J(x)} = h \frac{\|\nabla J(x)\|^2}{N_A(\nabla J(x))^2}$$

Où N_A est la norme induite par A. Avec les constantes d'équivalence des normes on pourrait donc avoir un intervalle de valeurs pour τ_{opt}