GPS Positioning: Solving for Receiver Coordinates

English Version

GPS is a system that provides the position of a receiver from signals emitted by satellites (placed in orbits located approximately 20,000 km from the center of the Earth). The principle is as follows: we measure τ_1, a time taken by a signal emitted by a satellite S_1 to reach the receiver. Knowing that the signal propagates at light speed $c = 2.9979 \times 10^8$ m/s, we deduce a distance $d_1 = c\tau_1$. The receiver must therefore be on a sphere centered on the satellite S_1 and of radius d_1. In principle, with 3 satellites we could get the position of the receiver. In practice, this is not possible due to the imperfect synchronization of the clocks of the satellites and the receiver. Indeed, we measure "pseudo distances":

$$m = d + c\Delta t$$

where Δt is the time shift between the clock of the receiver and the satellites, and it is an unknown quantity. We therefore have 4 unknowns: the coordinates of the receiver (x, y, z) and the time shift Δt. In a fixed reference frame with the center of the Earth as origin, we want to solve the following:

$$m_i = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2} + c\Delta t$$

with $v = (x, y, z, w = c\Delta t)$ the unknowns, and (X_i, Y_i, Z_i, m_i) are the information from satellite i ((X_i, Y_i, Z_i) are the coordinates of the satellite and m_i the measured "pseudo distance"). We need signals from 4 satellites. Let $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ be defined by:

$$F_i(v) = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2} + w - m_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

We want to solve the equation $F(v) = 0$ and we have the following measurements from 4 different satellites (available in the MesuresSatellites file on Moodle).

Version Française

Le GPS est un système permettant de donner la position d'un récepteur à partir de signaux émis par des satellites (placés sur des orbites situées à environ 20 000 km du centre de la Terre). Le principe est le suivant : on mesure un temps τ_1 mis par un signal émis par un satellite S_1 pour parvenir au récepteur. Sachant que le signal se propage à la vitesse de la lumière $c = 2.9979 \times 10^8$ m/s, on en déduit une distance $d_1 = c\tau_1$. Le récepteur doit donc se trouver sur une sphère centrée sur le satellite S_1 et de rayon d_1. En principe, avec 3 satellites nous pourrions obtenir la position du récepteur. En pratique, ce n'est pas possible, il y a un problème qui vient de la synchronisation des horloges des satellites et du récepteur qui n'est pas parfaite. On mesure en effet des "pseudo distances" :

$$m = d + c\Delta t$$

où Δt est le décalage entre l'horloge du récepteur et des satellites, c'est une quantité inconnue. Nous avons donc 4 inconnues : les coordonnées du récepteur (x, y, z) et le décalage Δt. Dans un repère fixe dont l'origine est le centre de la Terre, nous cherchons à résoudre le problème suivant :

$$m_i = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2} + c\Delta t$$

où $v = (x, y, z, w = c\Delta t)$ sont les inconnues, et (X_i, Y_i, Z_i, m_i) sont les informations transmises par le satellite i ((X_i, Y_i, Z_i) sont les coordonnées du satellite et m_i la "pseudo distance" mesurée). Nous avons donc besoin des signaux de 4 satellites. Soit $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par :

$$F_i(v) = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2} + w - m_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Nous cherchons à résoudre le problème $F(v) = 0$, et nous avons les mesures suivantes de 4 satellites différents (disponibles dans le fichier MesuresSatellites sur Moodle).