

La transformée de Fourier rapide (FFT)

Projet I

Exercice 1 Soit A une matrice circulante

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}).$$

1. Déterminer une suite d_k telle que

$$(Ax)_i = \sum_{j=0}^{N-1} d_{i-j} x_j.$$

Le vecteur Ax peut donc s'obtenir comme "convolution" de deux vecteurs d et x .

2. (a) Définir une matrice A circulante dont la première ligne est choisie aléatoirement.
(b) Calculer les valeurs propres de A (et des vecteurs propres associés) en résolvant le problème $Ax = \lambda x$
(c) En déduire un moyen de résoudre le problème $Ax = b$ pour $b \in \mathbb{C}^N$.

Exercice 2 On considère le problème

$$-u'' = f$$

posé sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ avec des conditions aux limites périodiques.

1. Résoudre, à la main, ce problème en cherchant une solution sous forme de série de Fourier.
2. Résoudre par la méthode des différences finies le même problème (avec une discrétisation centrée du Laplacien). On utilisera la méthode proposée à la question 2c de l'exercice 1 pour résoudre le système linéaire.
3. Comparer les solutions pour différentes fonctions f .

Exercice 3 Résoudre par la méthode des différences finies le problème

$$-\Delta u = f$$

posé sur le carré unité avec des conditions aux limites périodiques. On utilisera la méthode proposée à la question 2c de l'exercice 1 pour résoudre le système linéaire.