Projet FFT

Yakine RACHEDI, Junan JIANG, Gamal RESCA

3 janvier 2025

Table des matières

1 Résumé

Ce projet propose un outil pratique pour résoudre des systèmes linéaires circulants et périodiques en utilisant la transformée de Fourier discrète. L'approche repose sur l'analyse en valeurs propres et la décomposition de la matrice dans la base de Fourier. Les résultats ont été implémentés en faisant appel à l'algorithme FFT de la bibliothèque `NumPy` pour la transformée de Fourier rapide.

Trois cas ont été étudiés :

1. **Exercice 1** : Résolution d'un système linéaire circulant simple.
2. **Exercice 2** : Une équation différentielle ordinaire (EDO) avec des conditions aux limites périodiques, discrétisée par la méthode des différences finies.
3. **Exercice 3** : Un problème de Laplacien périodique en dimension 2, également résolu à l'aide d'un schéma numérique par différences finies pour obtenir le système linéaire associé.

2 Exercice 1

Soit $A \in M_N(\mathbb{C})$ une matrice circulante de taille $N \times N$, et un vecteur x de taille N. Ces derniers peuvent être écrits comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{N-2} \\ c_{N-2} & c_{N-1} & c_0 & \dots & c_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}.$$

On cherche une suite d_k telle que, pour une ligne fixée i,

$$(Ax)_i = \sum_{j=0}^{N-1} d_{i-j} x_j.$$

Le produit matriciel peut être écrit explicitement comme suit :

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{N-2} \\ c_{N-2} & c_{N-1} & c_0 & \dots & c_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Ax)_0 \\ (Ax)_1 \\ \vdots \\ (Ax)_{N-1} \end{pmatrix}.$$

La i-ème ligne de A produit le résultat suivant :

$$(Ax)_i = c_{N-i}x_0 + c_{N-i+1}x_1 + \cdots + c_{N-1}x_{i-1} + c_0 x_i + \cdots + c_{i-(N-1)}x_{N-1}.$$

D'autre part, nous avons également :

$$(Ax)_i = \sum_{j=0}^{N-1} d_{i-j}x_j = d_i x_0 + d_{i-1}x_1 + \cdots + d_0 x_i + \cdots + d_{i-(N-1)}x_{N-1}.$$

Identification des coefficients d_k

Par identification entre les deux expressions, pour d_k avec $k = i - j$ nous avons deux cas selon la valeur de k par rapport à N :

— Si $k \geq 0$ alors $d_k = c_k$

— Sinon, si $k < 0$ $d_k = c_{k+N}$

En conclusion, la suite d_k est définie par :

$$d_k = c_{k \mod N}$$

Soit la matrice J définie par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Les puissances de J sont données par :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1 Expression de A

On peut exprimer une matrice circulante A comme :

$$A = c_0 I_{N\times N} + c_1 J + c_2 J^2 + \cdots + c_{N-1} J^{N-1},$$

où I_N est la matrice identité.

2.2 Diagonalisation de J

Supposons qu'on peut diagonaliser J dans une certaine base P, i.e.,

$$P^{-1} J P = D,$$

où D est une matrice diagonale.

1. Le déterminant de J est alors égal à celui de D :

$$\det(J) = \det(D).$$

2. Les puissances de J dans cette base sont données par :

$$P^{-1} J^2 P = (P^{-1} J P)(P^{-1} J P) = D^2,$$

et ainsi de suite. Une fois que J est diagonaliseé, toutes ses puissances J^k (avec $k \in \mathbb{N}$) sont également diagonaliseés dans la même base P.

2.3 Calcul du déterminant de J

On cherche le déterminant de $J - \lambda I$:

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{pmatrix}.$$

En développant, on obtient :

$$\det(J - \lambda I) = (-1)^N (\lambda^N - 1).$$

Les racines de cette équation sont les racines N-iémes de l'unité, i.e.,

$$\lambda^N = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = e^{2i\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

2.4 Structure de la matrice diagonale D

Si $\omega = e^{2i\pi/N}$, alors J est semblable à une matrice diagonale D de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega^{N-1} \end{pmatrix}.$$

La matrice A peut s'exprimer comme :

$$A = c_0 I_N + c_1 J + c_2 J^2 + \cdots + c_{N-1} J^{N-1}.$$

En diagonalisation, on obtient :

$$P^{-1}AP = c_0 I_N + c_1 D + c_2 D^2 + \cdots + c_{N-1} D^{N-1},$$

où D est la matrice diagonale associée à J.
Note : La matrice A est diagonalisable car la somme de matrices diagonales reste une matrice diagonale.

De plus, les puissances de D s'expriment comme :

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega^{k(N-1)} \end{pmatrix},$$

où $\omega = e^{2i\pi/N}$ est une racine N-ième de l'unité.

2.5 Calcul des vecteurs propres de J

Soit v un vecteur propre associé à la matrice J et à la valeur propre λ. Alors :

$$Jv = \lambda v.$$

En développant les composantes de v, on obtient :

$$v_2 = \omega v_1, \quad v_3 = \omega v_2 = \omega^2 v_1, \quad \ldots, \quad v_N = \omega^{N-1} v_1.$$

Comme $v_1 = \omega v_N$, on a :

$$v_1 = v_1.$$

Ainsi, l'espace propre associé à ω est donné par :

$$E_\omega = \{(v_1, v_2, \ldots, v_N) \mid v_2 = \omega v_1, v_3 = \omega^2 v_1, \ldots, v_N = \omega^{N-1} v_1\}.$$

En particulier :

$$E_\omega = \mathrm{Vect}\{(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{N-1})\}.$$

2.6 Vecteurs propres associés à ω^k

Par un calcul similaire, on peut affirmer que $\omega_k = \omega^k$ est une valeur propre associée au vecteur propre :

$$(1, \omega^k, (\omega^k)^2, \ldots, (\omega^k)^{N-1}).$$

Ainsi, les vecteurs propres de J sont les colonnes de la matrice de Fourier discrète. Par conséquent, la matrice de passage peut être choisie comme la matrice de Fourier.

Les valeurs propres de A sont données par :

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{N-1} c_j \exp\left(-2i\pi \frac{kj}{N}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Les vecteurs propres de A sont les colonnes de la matrice de Fourier discrète F définie par :

$$F_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-2i\pi \frac{kj}{N}\right), \quad k, j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

En particulier, les vecteurs propres de A sont donnés explicitement par :

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left(-2i\pi\frac{k}{N}\right) \\ \exp\left(-2i\pi\frac{2k}{N}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(-2i\pi\frac{(N-1)k}{N}\right) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Ces propriétés montrent que la diagonalisation de A est directement liée à la transformée de Fourier discrète, ce qui facilite de nombreux calculs.

Pour résoudre le problème $Ax = b$, avec $b \in \mathbb{R}^N$ et A une matrice circulante ainsi définie, on utilise les propriétés de diagonalisation des matrices circulantes :

$$A = F^{-1}DF,$$

où F est la matrice de Fourier discrète et D une matrice diagonale contenant les valeurs propres λ_k de A sur sa diagonale.

On réécrit le système :

$$F^{-1}DFx = b.$$

Posons :

$$y = Fx,$$
$$\tilde{b} = Fb.$$

On obtient alors le système équivalent :

$$Dy = \tilde{b}.$$

Comme D est une matrice diagonale avec les valeurs propres λ_k de A sur la diagonale, résoudre $Dy = \tilde{b}$ revient à résoudre N équations scalaires :

$$y_k = \frac{\tilde{b}_k}{\lambda_k}, \quad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, N-1, \quad \text{avec } \lambda_k \neq 0.$$

Une fois y calculé, on retrouve x en utilisant l'inverse de la transformée de Fourier discrète :

$$x = F^{-1}y.$$

3 Exercice 2

Soit le problème défini par :

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{sur } [0, 2\pi], \quad u(0) = u(2\pi) \quad \text{et} \quad u'(0) = u'(2\pi).$$

Nous cherchons à résoudre ce problème analytiquement en supposant que la solution $u(x)$ peut s'écrire sous la forme d'une série de Fourier.

D'après les hypothèses, $u(x)$ est 2π-périodique ainsi que ses dérivées. Il en découle que f est également 2π-périodique. Si f est suffisamment régulière, elle admet un développement en série de Fourier.

La représentation de f en série de Fourier s'écrit :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Nous cherchons une solution $u(x)$, également 2π-périodique, sous la forme d'une série de Fourier :

$$u(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx)\right).$$

$$u''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 c_n \cos(nx) - n^2 d_n \sin(nx)\right).$$

En substituant dans l'équation $-u''(x) = f(x)$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-n^2 c_n \cos(nx) + n^2 d_n \sin(nx)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

En identifiant terme à terme avec $f(x)$, on déduit que :

$$-n^2 c_n = a_n \quad \text{et} \quad n^2 d_n = b_n \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Ainsi :

$$c_n = -\frac{a_n}{n^2}, \quad d_n = \frac{b_n}{n^2}.$$

Pour $n = 0$, la composante constante donne :

$$c_0 = 0.$$

La solution $u(x)$ s'écrit donc :

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx)\right).$$

3.1 Résolution par différences finies

Nous considérons un maillage uniforme $(x_i)_{i=0,\ldots,N+1}$ défini par :

$$x_i = ih, \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad h = \frac{2\pi}{N+1},$$

où $u_i \approx u(x_i)$.

La dérivée seconde $u''(x_i)$ est approchée par une différence finie d'ordre 2 :

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

3.2 Schéma numérique

En remplaçant $u''(x_i)$ par son approximation dans l'équation $-u''(x_i) = f(x_i)$, nous obtenons le schéma numérique :

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Comme $u(x)$ est 2π-périodique, nous avons :

$$u(x_i + 2\pi) = u(x_i), \quad \forall i.$$

$$u(x_{i+(N+1)}) = u(x_i), \quad \forall i.$$

En particulier, pour $i = -1$, on utilise la périodicité pour écrire :

$$u_{-1} = u_N.$$

De même, pour $i = N+1$, nous avons :

$$u_{N+1} = u_0.$$

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad i = 1, \ldots, N, \\ u_{-1} = u_N \\ u_{N+1} = u_0 \end{cases}$$

3.3 Système linéaire associé

Le système discrétisé peut être écrit sous la forme matricielle :

$$AU = b,$$

où :

- $U = [u_0, u_1, u_2, \ldots, u_N]^T$ est le vecteur des inconnues
- $b = [f_0, f_1, f_2, \ldots, f_N]^T$ est le vecteur des termes sources
- $A \in M_{N+1}(\mathbb{R})$ est une matrice tridiagonale périodique donnée par :

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.4 Remarque

La périodicité se traduit par le fait que les termes -1 en haut à droite et en bas à gauche de la matrice A relient les bords du domaine, assurant ainsi la cohérence avec les conditions aux limites périodiques.

Soit la base des vecteurs propres $\mathbf{v}_k$ pour la matrice périodique A, donnée par :

$$\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp\left(\frac{2\pi ik}{n+1}\right) \\ \exp\left(\frac{4\pi ik}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(2\pi ik\right) \end{bmatrix},$$

où $k = 0, 1, \ldots, n$.

En appliquant la matrice A au vecteur propre $\mathbf{v}_k$, on obtient pour chaque composant :

$$(A\mathbf{v}_k)_j = 2\exp\left(\frac{2\pi ikj}{n+1}\right) - \exp\left(\frac{2\pi ik(j-1)}{n+1}\right) - \exp\left(\frac{2\pi ik(j+1)}{n+1}\right).$$

En factorisant $\exp\left(\frac{2\pi ikj}{n+1}\right)$, on peut simplifier cette expression :

$$(A\mathbf{v}_k)_j = \exp\left(\frac{2\pi ikj}{n+1}\right)\left(2 - \exp\left(-\frac{2\pi ik}{n+1}\right) - \exp\left(\frac{2\pi ik}{n+1}\right)\right).$$

Cela peut être réécrit comme :

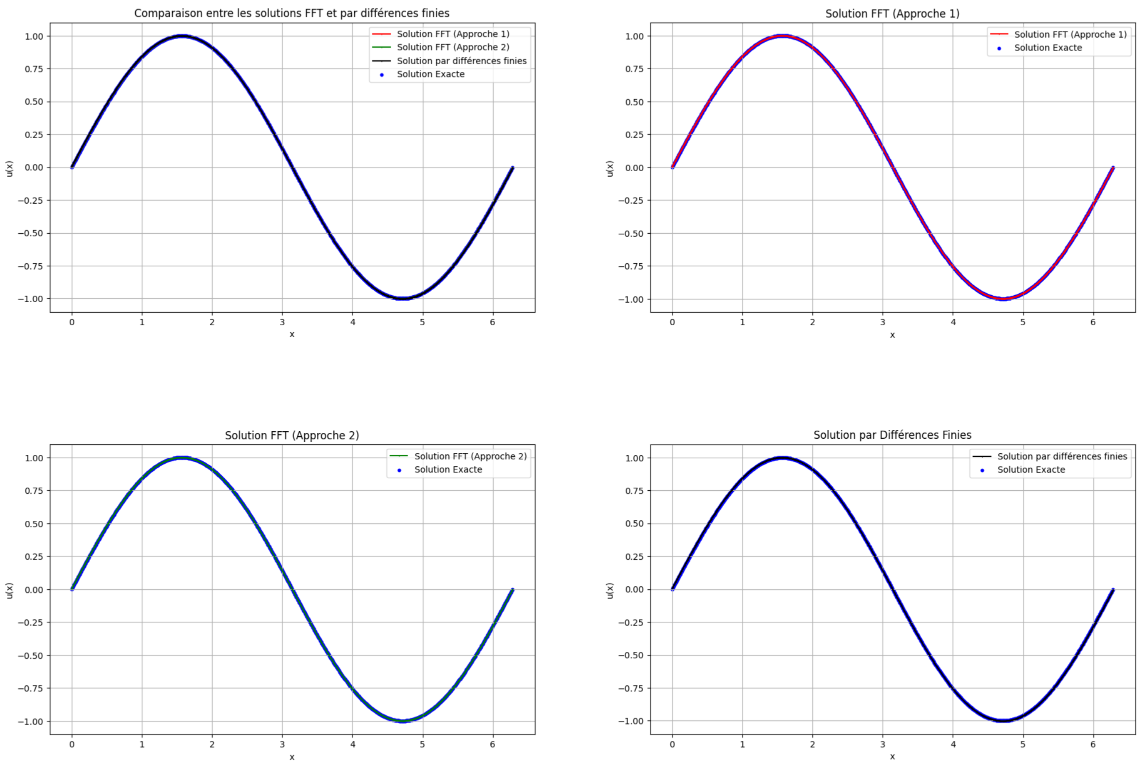
$$(A\mathbf{v}_k)_j = \exp\left(\frac{2\pi ikj}{n+1}\right)\left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right)\right),$$

D'autre part, λ_k est une valeur propre associée au vecteur propre $\mathbf{v}_k$, et nous avons :

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k = \frac{1}{h^2}\left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right)\right)\mathbf{v}_k.$$

$$\lambda_k = \frac{1}{h^2}\left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{n+1}\right)\right).$$

$$\lambda_k = \frac{8}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi k}{n+1}\right).$$



Résultats pour $f(x) = sin(x)$

4 Exercice 3

Nous cherchons une fonction $u(x, y)$ définie sur le carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$ telle que :

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

où $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Les conditions aux limites périodiques sont données par :

$$u(0, y) = u(1, y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y), \quad \forall y \in [0, 1],$$

$$u(x, 0) = u(x, 1), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1), \quad \forall x \in [0, 1].$$

4.1 Discrétisation par différences finies et schéma numérique

Nous considérons une discrétisation du carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$ avec un pas $h = \frac{1}{N+1}$. Les points de discrétisation sont donnés par :

$$z_{i,j} = (ih, jh), \quad i, j = 0, \ldots, N + 1.$$

Les inconnues $U(Z_{i,j})$ sont définies sur tous les noeuds intérieurs, c'est-à-dire pour $i, j = 1, \ldots, N$. Cela donne N^2 inconnues.

Pour les noeuds sur les bords ($i, j = 0$ ou $i, j = N + 1$), les valeurs de $u(z_{i,j})$ sont déterminées par les conditions aux limites périodiques.

— $u_{0,j} = u_{N,j}, \quad u_{N+1,j} = u_{1,j}, \quad \forall j = 1, \ldots, N + 1,$

— $u_{i,0} = u_{i,N}, \quad u_{i,N+1} = u_{i,1}, \quad \forall i = 1, \ldots, N + 1.$

L'opérateur Laplacien est approximé par :

$$\Delta_h u(z_{i,j}) \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(z_{i,j}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(z_{i,j}) + O(h^2).$$

Le schéma numérique par différences finies donne l'approximation suivante :

$$\Delta_h u(z_{i,j}) \approx \frac{1}{h^2} \left(4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}\right),$$

où $u_{i,j} = u(z_{i,j})$ est la valeur discrétisée au noeud (i, j).

Nous cherchons $(u_{i,j})$, pour $i, j = 1, \ldots, N$, solution du système suivant :

$$\frac{1}{h^2} \left(4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}\right) = f(z_{i,j}), \quad i, j = 1, \ldots, N.$$

Pour assembler le système linéaire, nous utilisons une numérotation des inconnues sous la forme d'un vecteur $u_h \in \mathbb{R}^{(N+1)^2}$. On définit :

$$u_{i,j} = u_k, \quad k = i + (N + 1)(j - 1), \quad \text{pour } k = 1, \ldots, (N + 1)^2.$$

La solution exacte $\bar{u}$ correspond à $u_k \approx u(z_{i,j})$ au point de discrétisation associé.

Le schéma de différences finies s'écrit sous la forme d'un système linéaire :

$$A_h U_h = F_h,$$

où :

— $A_h \in \mathbb{R}^{(N+1)^2\times(N+1)^2}$ est la matrice du Laplacien discrétisé,
— $F_h \in \mathbb{R}^{(N+1)^2}$ contient les valeurs $f(z_{i,j})$ pour les noeuds intérieurs.

La matrice A_h est donnée par :

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} T & -I & 0 & \cdots & 0 & -I \\ -I & T & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I & T & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T & -I \\ -I & 0 & 0 & \cdots & -I & T \end{pmatrix},$$

où :
— $T_4 \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ est une matrice tridiagonale donnée par :

$$T_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

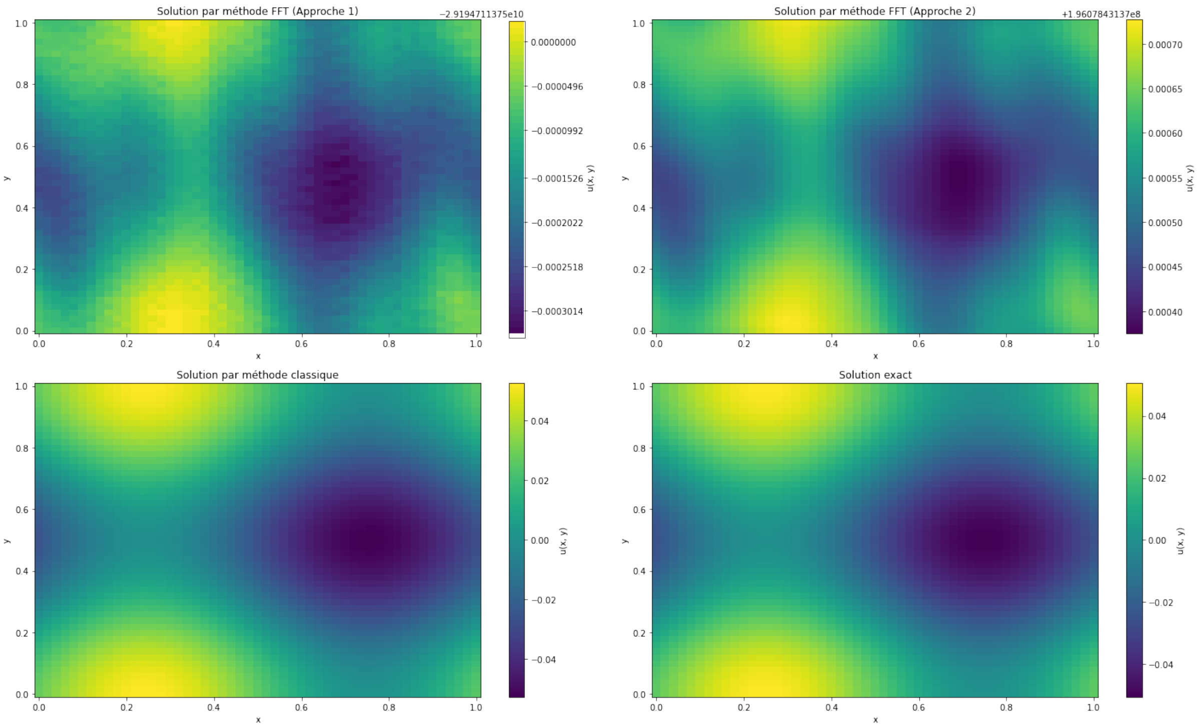
— $I \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ est la matrice identité.

Le vecteur $F_h \in \mathbb{R}^{(N+1)^2}$ contient les valeurs $f(z_{i,j})$ pour tous les noeuds intérieurs $i, j = 1, \ldots, N+1$. Cela se traduit par :

$$F_k = f(z_{i,j}), \quad \text{avec } k = i + (N+1)(j-1).$$

4.2 Comparaison graphique des méthodes de résolution

La figure ci-dessous illustre les résultats obtenus à l'aide de différentes méthodes pour résoudre le système linéaire associé au problème discrétisé. Chaque méthode est évaluée en fonction de sa précision et pour une grille de taille donnée.



Comparaison entre les différentes méthodes pour résoudre le système linéaire discrétisé