Приближенное вычисление двойного интеграла

1. **Постановка задачи**

   Вычислить двойной интеграл по области D, где D – криволинейный четырехугольник -

   $$\{a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}:$$
   $$\iint f(x,y)dxdy$$

   В качестве модельной задачи возьмем следующую подинтегральную функцию $f(x,y)$ и область определения D:

   $$f(x,y) = x * y^2,$$
   $$0 \le x \le 1,$$
   $$x^2 \le y \le 1 + x$$

2. **Аналитическое решение**

   Точное значение интеграла, полученное аналитическим путем, равно $I = 0.775$.

3. **Численное решение**

   a. **Метод ячеек**

   Перед применением метода ячеек отобразим область D в квадрат D‘ со стороной 1. Для этого сделаем замену переменных:

   $$x = u,$$
   $$y = u^2 + (1 + u - u^2)v,$$
   $$u, v \in [0,1]$$

   Тогда наш интеграл преобразуется к виду:
   $\iint\limits_{D} x * y^2 dxdy = \iint\limits_{D‘} u * (u^2 + (1 + u + u^2)v)^2 * (1 + u - u^2)dudv.$
   Интеграл будем вычислять приближенно, с точностью до $\epsilon = 0.0001$.

   $$I_h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h^2 * f(\bar{u}, \bar{v}), \text{ где}$$
   $$\bar{u} = (u_{i-1} + u_i)/2,\ \bar{v} = (v_{j-1} + v_j)/2,$$
   $$f(u,v) = u * (u^2 + (1 + u + u^2)v)^2 * (1 + u - u^2)$$

   Начальные параметры сетки определяются формулами:

   $$n = int(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) + 1,$$
   $$h_0 = \frac{1}{n}$$

   При этом само вычисление будет происходить итеративно с оценкой погрешности по правилу Рунге, которое и будет являться условием останова:

   $$\frac{|I_{\frac{h}{2}} - I_h|}{3} < \epsilon$$

   После каждой итерации шаг сетки уменьшается в двое.

   b. **Метод Монте-Карло**

   Для применения метода Монте-Карло также перейдем в квадратную область определения D‘, проделав те же самые преобразования, что и в методе ячеек. Будем генерировать n точек $\{u_i, v_j\}$, имеющих равномерное распределение. Так как наша область определения квадратная, то нам не нужно проверять принадлежность точки к D‘. Поэтому вычисление интеграла сведется к нахождению среднего значения подинтегральной функции по всем точкам $\{u_i, v_j\}$:

$$I \approx \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} f(u,v),$$

Так как метод Монте-Карло носит стохастический характер, для воспроизводимости результатов был зафиксирован seed в генераторе псевдослучайных чисел. Применялся ГПСЧ из библиотеки numpy с seed = 10.

3. **Тестовый стенд**

Вычислительный эксперимент проводился на компьютере с процессором AMD Ryzen 3900X 4.6 ГГц.

4. **Результаты вычислительного эксперимента**

Сначала проведем эксперимент, используя метод ячеек. Оказалось, что алгоритм достигает заданной точности уже на второй итерации. В таблице 1 приведены результаты, полученные на каждой итерации, а именно шаг сетки h, приближенное значение интеграла I_h, относительная погрешность $\delta = |I - I_h|/I$ и время t затраченное на вычисление интеграла на каждой итерации.

Таблица 1.

h	I_h	δ	t, с
0.01	0.77498	0.00003	0.043
0.005	0.77499	0.00001	0.174

Суммарное время работы составило 0.217 с.

Абсолютная погрешность составила 0.00001. Сравним её с теоретической. Известно, что метод ячеек имеет второй порядок точности относительно шага сетки $R = O(h^2)$. Полученные результаты полностью соответствуют данной теоретической оценке.

В таблице 2 приведены результаты эксперимента с использованием метода Монте-Карло. Единственное отличие заключается в том, что гиперпараметром алгоритма является не шаг сетки, а количество точек, по которым считается среднее значение.

Таблица 2.

n	I_n	δ	t, с
10	0.55229	0.28737	0.000
10^2	0.64848	0.16326	0.000
10^3	0.79282	0.02299	0.000
10^4	0.76163	0.01725	0.000
10^5	0.77565	0.00083	0.004
10^6	0.77593	0.00120	0.038
10^7	0.77544	0.00057	0.376

Сравним теоретическую погрешность метода Монте-Карло с экспериментальной. Мы можем грубо оценить теоретическую погрешность как $R \approx \sqrt{\frac{1}{N}}$, где N - число испытаний. Например, для n = 10000 или 1000 000 мы можем претендовать на точность порядка 0.01 и 0.001 соответственно, что хорошо согласуется с полученными экспериментальными результатами.

5. **Выводы**

В ходе работы мы установили, что точность приближенного вычисления двойного интеграла методами ячеек и Монте-Карло совпадает с их теоретическими оценками. При этом стоит отметить, что метод Монте-Карло достигает заданной точности медленнее, чем метод ячеек несмотря на то, что время его работы линейно относительно числа точек, в то время как метод ячеек имеет квадратичную асимптотику относительно числа ячеек. Тем не менее метод Монте-Карло может иметь преимущество в тех случаях, когда нам не нужна большая точность.